The Department of Public Instruction, Bombay.

THE FIRST FOUR BOOKS

OF

EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY.

Originally Compiled in Marathi

BY

GOVIND VITHAL KARKARE

Revised, Improved and Enlarged

WITH THE ADDITION OF NOTES, EXERCISES, HINTS TO SOME EXERCISES, AND AN APPENDIX ON

LOGIC IN ITS RELATIONS TO MATHEMATICS

BY

RAVAJI MORESHVAR DEVAKULE.

FIRST EDITION. 6,000 COPIES.

Bombay:

GOVERNMENT CENTRAL BOOK DEPÔT.

1885.

Price Fourteen Annas

BOMBAY:

PRINTED AT THE "NIRNAYA-SAGAR" PRESS.

प्रा. ग. क्या ...

मुंबई इलाख्यांतील विद्याशाळाखातें.

युक्लिडच्या

भूमितीचीं पहिलीं चार पुस्तकें.

हा ग्रंथ प्रथम मराठी भाषेंत

गोविंद विठ्ठल करकरे

ह्यांनीं रचिला होता; तो,

रावजी मोरेश्वर देवकुळे

ह्यांनीं

तपासून, त्याला टिप्पणें, प्रश्न, कांहीं प्रश्नांविषयीं सूचना, व न्यायशास्त्राचा गणितशास्त्राशीं संबंध कळावा म्हणून न्यायशास्त्राचीं मूलतत्त्वें दर्शविणारी नवीनच एक पुरणिका, इतकीं जोडून वाढविला.

आवृत्ति पहिली. प्रती ६,०००.

मुंबई:

गवर्नमेंट सेंट्रल बुक-डीपो.

सन १८८५ इ०.

किंमत चवदा आणे.

मुंबई:
"निर्णयसागर" छापखान्यांत छापिलें.

अनुक्रमणिका

ग. ज. ५५१. ६

उपोद्घात.

गणितपरिभाषा.

गणितशास्त्रांतले जे पारिभाषिक शब्द ह्या ग्रंथामध्यें जागजागीं योजावे लागणार, त्यांचे अर्थ वाचणारांच्या ध्यानांत यावे, आणि भूमिति हा गणितशास्त्रांतलाच एक विषय आहे, हेंही ध्यानांत यावें, अशा उद्देशानें आधीं गणितशास्त्राचा विषय व त्याचे भागप्रभाग ह्यांचें थोडेंसें वर्णन करितों.

१. **परिमेय व परिमाण**—एखाद्या पदार्थाची लांबी अथवा दोन स्थलांमधलें अंतर मोजावयाचें असलें, म्हणजे आपण केवढी तरी लांबी अथवा अंतर हें माप कल्पून (त्याला हात, फूट अशी एखादी संज्ञा देतों आणि) तीं मापें अथवा त्यांचे केवढाले तरी हिस्से त्या पदार्थाच्या लांबीमध्यें अथवा त्या दोन स्थलांच्या अंतरामध्यें किती आहेत, हें ठरविण्याचा यत्न करितों. ह्याप्रमाणेंच पदार्थाचें वजन, मूल्य, समुदाय इत्यादिक गोष्टी त्यांच्या त्यांच्या जातीच्या मापांनीं मोजणें, ह्या कृत्याला "गणना करणें" अथवा "परिमाण करणें" असें म्हणतात. ज्याचें ज्याचें असें परिमाण करितां येणें संभवतें, त्याला त्याला "परिमेय" म्हणतात; आणि कोणतेंही परिमेय मोजण्याकरितां जें त्याच्याच जातीचें माप कल्पितात, त्याला "एकं" अथवा "परिमाण[१]" म्हणतात.

परिमेय व परिमाण ह्या शब्दांचे हे अर्थ ध्यानांत येण्याकरितां परिचयांतलीं थोडीं उदाहरणें देतों. पदार्थाची लांबी, रुंदी इत्या-

---

१. परिमाण ह्या शब्दाच्या योजनेविषयीं गणितकारांचा चांगलासा निर्णय झालेला दिसत नाहीं. "परिमेय," "परिमेय मोजणें हें कृत्य," व "परिमेय मोजण्याकरितां कल्पिलेलें माप" अशा तीनही अर्थांस लक्षून परिमाणशब्दाची योजना केलेली आढळते; ह्मणून विवक्षित स्थलीं त्याचा अर्थ कोणता घ्यावयाचा, हें बहुधा संदर्भावरूनच ठरवावें लागतें.

दिक व दोन स्थलांमधलें अंतर हीं सारीं (एकाच जातीचीं) परिमेयें होत; आणि हीं मोजण्याकरितां कल्पिलेलीं हात, फूट, कोस इत्यादिक मापें हीं परिमाणें होत. पदार्थाचें पृष्ठ अथवा क्षेत्र हें परिमेय; आणि तें मोजण्याकरितां कल्पिलेलीं चौरसहात, चौरसफूट इत्यादिक मापें हीं परिमाणें. पदार्थानें व्यापिलेला अवकाश (म्हणजे पोकळी) हें परिमेय; आणि घनहात, घनफूट, चिपटें, पायली, खंडी इत्यादिक हीं त्याच्या जातीचीं परिमाणें. कोन हें परिमेय; आणि काटकोन, अंश, कला, विकला हीं त्याच्या जातीचीं परिमाणें. पदार्थाचें वजन हें परिमेय; आणि तोळा, शेर, मण, टन इत्यादिक हीं त्याच्या जातीचीं परिमाणें. पदार्थाचें मूल्य हें परिमेय; आणि रुपया, आणा, शिलिंग इत्यादिक हीं त्याच्या जातीचीं परिमाणें. पदार्थांचा समुदाय हें परिमेय; आणि एक, दशक, शेंकडा, लक्ष इत्यादिक हीं त्याच्या जातीचीं परिमाणें. काल हें परिमेय; आणि घटिका, तास, दिवस, वर्ष इत्यादिक हीं त्याच्या जातीचीं परिमाणें होत.

२. **संख्या**—अमुक परिमेय मोजण्याकरितां कल्पिलेल्या अमुक परिमाणाएवढालीं परिमाणें (अथवा त्या परिमाणाचे केवढाले तरी हिस्से) त्या परिमेयामध्यें किती आहेत, हें दाखविणाऱ्या शब्दाला किंवा शब्दसमुदायाला "संख्या" म्हणतात. जसें, ह्या मेजाची लांबी हें परिमेय मोजण्याकरितां ही लेखणी (म्हणजे अर्थात् लेखणीची लांबी) हें परिमाण कल्पितों. ह्या परिमाणाएवढालीं परिमाणें ह्या मेजाच्या लांबीमध्यें पांच भरलीं; म्हणून येथें "पांच" ही संख्या होय. ह्या पुस्तकाच्या लांबीमध्यें ह्या लेखणीचे चवथे हिस्से तीन आहेत; येथें लेखणीचा चवथा हिस्सा हेंच परिमाण मानिलें, तर "तीन" ही संख्या होईल; पण सारी लेखणी हेंच परिमाण मानिलें, तर "तीन चतुर्थांश" ही संख्या होईल. ह्या मेजाच्या रुंदीमध्यें पुऱ्या लेखण्या दोन आहेत व चवथा हिस्सा एक आहे; एथें सारी लेखणी हेंच परिमाण मानिलें, तर "दोन पूर्णांक एक चतुर्थांश" (अथवा सव्वादोन) ही संख्या होय.

३. **सारीं परिमेयें प्रत्यक्ष मोजितां येत नाहींत**—आतां

मेजाची लांबी, रुंदी, पुस्तकाची लांबी हीं परिमेयें, लेखणी व तिचे चवथे हिस्से ह्या परिमाणांनीं प्रत्यक्ष मोजून लेखण्यांच्या व तिच्या चतुर्थांशाच्या संख्या तयार करितां आल्या; परंतु अशीं सारीं परिमेयें (त्यांच्या त्यांच्या जातीच्या कोणत्या तरी परिमाणांनीं) प्रत्यक्ष मोजितां येतील काय? डोंगराची उंची प्रत्यक्ष कशी मोजितां येईल? ह्या भिंतीचें पृष्ठ चौरसहात इत्यादिक एखाद्या परिमाणानें कदाचित् प्रत्यक्ष मोजितां येईल; पण ह्या खोलीनें व्यापिलेली पोकळी घनहात इत्यादिक एखाद्या परिमाणानें प्रत्यक्ष कशी मोजावी? मग हा गांव, देश इत्यादिकांचीं क्षेत्रें, पृथ्वीनें व्यापिलेला अवकाश, चंद्रसूर्यादिकांचीं (अर्थात् त्यांच्या मध्यबिंदूंचीं) अंतरें इत्यादिक परिमेयें प्रत्यक्ष मोजणें हें तर मनांत देखील आणावयास नको. सारांश, जीं परिमेयें प्रत्यक्ष मोजितां येणें अगदीं असंभाव्य असतें, निदान अत्यंत आयासाचें असतें, अशींच परिमेयें फार असतात; आणि त्यांची मोजदाद अनुमानद्वाराच करावी लागते.

४. **गणितशास्त्राचा विषय**—जीं परिमेयें प्रत्यक्ष मोजितां येत नाहींत, अथवा प्रत्यक्ष मोजण्यास मोठा यत्न करावा लागतो, अशीं कांहीं परिमेयें अनुमानद्वारा मोजण्याच्या अतिसुलभ रीति शोधून काढणें, व तीं मोजण्याचे कामीं त्या रीतींची योजना करून दाखविणें, हा गणितशास्त्राचा मुख्य विषय होय. जसें, एखाद्या खोलीची पोकळी घनफुटानें प्रत्यक्ष मोजावयाची, तर घनफूट अवकाशाचे ठोकळे तयार करून ह्या खोलींत भरिले पाहिजेत. परंतु असला हा दीर्घ प्रयत्न टाळण्याकरितां गणितशास्त्रांत एक रीति तयार केलेली आहे, तीप्रमाणें त्या खोलीची लांबी, रुंदी व उंची फुटानें मोजून येणाऱ्या तीन संख्यांचा गुणाकार केल्यानें, त्या खोलीच्या पोकळींत घनफुटाएवढाल्या पोकळ्या किती आहेत, हें अगदीं थोडक्या यत्नानें बरोबर समजतें.

आतां गणितशास्त्रांतल्या प्रत्येक रीतीनें वर दाखविल्याप्रमाणें प्रत्येक परिमेयाची मोजणी अगदीं बरोबरच होते, असें नाहीं; तथापि त्या रीतींच्या योजनेंत जर चूक केली नाहीं, तर त्यांच्या योगानें एखाद्या

परिमेयाची मोजणी जितकी खऱ्याजवळ येईल, तितकी दुसऱ्या कोणत्याही रीतीनें येणार नाहीं; हें निर्विवाद आहे.

५. **शुद्धगणित व संयुक्तगणित**—गणितशास्त्राचे "शुद्धगणित" व "संयुक्तगणित" असे मुख्य दोन भाग आहेत. संख्या, रेषा, पातळी व अवकाश ह्या चार परिमेयांच्या धर्मांचा विचार करून त्यांसंबंधी (बेरीज इत्यादिक) कृत्यांच्या सुलभ रीति ठरविणें, हा शुद्धगणिताचा विषय आहे. अवकाश, पातळी व रेषा हीं परिमेयें मोजण्याच्या रीति ठरविण्याकरितां "कोन" ह्या आणखी एका परिमेयाच्या धर्मांचा विचार शुद्धगणितांत करावा लागतो. परंतु तें शुद्धगणितांतलें मुख्य परिमेय समजत नाहींत. शुद्धगणितांत ठरलेल्या रीतींची योजना निरनिराळीं परिमेयें मोजण्याचे कामीं करून दाखविणें, व त्या योगानें व्यवहारास अत्यंत उपयोगी असे पदार्थविज्ञानादिविषयक नियम शोधून काढणें, हा संयुक्तगणिताचा विषय होय.

"प्रमाणांत असणाऱ्या चार संख्यांपैकीं पहिल्या तीन दिल्या असतां चवथी काढण्याची रीति ठरविणें" हा शुद्धगणिताचा विषय होय; आणि "तोळ्याच्या किंमतीवरून गुंजेची किंमत काढण्याचे कामीं त्या रीतीची योजना होते असें ठरवून, ती किंमत काढण्याचा व्यवहारोपयोगी सोपासा नियम तयार करणें" हा संयुक्तगणिताचा विषय होय. "चौरसाचा कर्ण त्याच्या कोनास दुभागितो", "चौरसाचा कर्ण व त्याची एक बाजू हीं एकाच परिमाणानें मोजिलीं असतां कर्णाची लांबी दाखविणाऱ्या संख्येचा वर्ग हा, बाजूची लांबी दाखविणाऱ्या संख्येच्या वर्गाच्या दुपटीबरोबर असतो", हे चौरसाचे धर्म सिद्ध करणें, हा शुद्धगणिताचा विषय होय; आणि "परस्परांवर लंब अशा दोन सारख्या प्रेरणा एकाच पदार्थावर लागू झाल्या आहेत व त्यांचा परिणाम त्या पदार्थावर मुळींच होऊं नये अशी इच्छा आहे, तर काय तजवीज करावी"? ह्या प्रश्नाचें उत्तर देण्याचे कामीं चौरसाच्या त्या धर्मांची योजना करितां येईल असें ठर-

वून, अशा प्रसंगीं लागू पडणारा एखादा व्यवहारोपयोगी नियम शोधून काढणें, हा संयुक्तगणिताचा विषय होय.

शुद्धगणितामध्यें संख्या, रेषा इत्यादिक पांच परिमेयांच्या संबंधाच्या कांहीं व्याख्या, व त्यांच्याच संबंधाच्या अनुभवसिद्ध अशा (ज्यांस प्रत्यक्षप्रमाणें व गृहीतकृत्यें म्हणतात त्या) थोड्याशा गोष्टी ह्यांच्याच आधारावर त्या परिमेयांचे इतर सारे धर्म अनुमानद्वारा सिद्ध केलेले आहेत, व त्यांसंबंधीं कृत्यांच्या रीति ठरविल्या आहेत; परंतु संयुक्तगणितामध्यें शुद्ध गणितांतल्या त्या आधारभूत गोष्टींखेरीज पदार्थांच्या आणखी कांहीं धर्मांचाही आधार घेतलेला असतो. जसें—संयुक्तगणिताच्या ज्या भागांत पदार्थांच्या गतीचे नियम ठरविले आहेत, त्या भागास शुद्धगणितांतल्या गोष्टींखेरीज मुख्य आधार न्यूटनाच्या तीन गतिनियमांचा आहे. हा शुद्धगणित व संयुक्तगणित ह्यांचा भेद ध्यानांत ठेवण्याजोगा आहे.

६. **शुद्धगणिताचे भागप्रभाग**—शुद्धगणिताचे "संख्यागणित" व "भूमिति" असे मुख्य दोन भाग आहेत. त्यांपैकीं संख्यागणितामध्यें संख्यांच्याच धर्मांचा विचार करून संख्याविषयक कृत्यांच्या रीति ठरविल्या आहेत. संख्यागणिताचे "विशेषसंख्यागणित" (म्हणजे अंकगणित) व "सामान्य संख्यागणित" (म्हणजे बीजगणित, शून्यलब्धि इत्यादिक सर्व) असे मुख्य दोन भाग आहेत.

शुद्धगणितांतल्या "संख्या" ह्या परिमेयाखेरीज "अवकाश," "पातळी," "रेषा" व "कोन" ह्या चार परिमेयांच्या धर्मांचा विचार भूमितीमध्यें केलेला आहे. अवकाश, पातळी, रेषा व कोन ह्या चार परिमेयांना आपण इतःपर "अवकाशादि परिमेयें" अशी संज्ञा देऊं.

भूमितीमध्यें सिद्ध झालेल्या अवकाशादि परिमेयांच्या धर्मांशीं संख्यागणितांत सिद्ध झालेल्या संख्यांच्या धर्मांचा संयोग करून "त्रिकोणमिति" व "बैज्यभूमिति" ह्या नांवाचे दोन विषय तयार केलेले आहेत, हेही वस्तुतः शुद्धगणिताचेच भाग होत.

७. **संयुक्तगणिताचे भागप्रभाग**—संयुक्तगणिताचे प्रेरणाशास्त्र, स्वरशास्त्र, दर्शनानुशासन व ज्योतिःशास्त्र असे भाग मानि-

तात. प्रेरणाशास्त्राचे "स्थैर्योत्पादकप्रेरणाशास्त्र," व "गत्युत्पादकप्रेरणाशास्त्र" असे मुख्य भाग मानितात; व ह्या प्रत्येकाचे पुनः अप्रवाही, प्रवाही आणि वायुरूपी पदार्थांच्या संबंधानें प्रभाग मानितात. संयुक्तगणिताच्या ह्या भागप्रभागांविषयीं मतभेदही दिसतात. परंतु त्यांचें वर्णन करणें एथें अप्रासंगिक होय.

८. ह्या संक्षिप्तवर्णनावरून ध्यानांत येईल कीं, भूमिति हा गणितशास्त्राच्या शुद्धगणित ह्या भागाचा एक भाग आहे. हा भूमितीचा गणितशास्त्राशीं संबंध वर्णिला.

व्याख्यादि शब्दांचे अर्थ.

व्याख्या, सिद्धांत, प्रतिज्ञा, पक्ष व **साध्य, प्रमेय** व **कृत्य, प्रत्यक्षप्रमाण, गृहीतकृत्य, उपसिद्धांत** आणि **व्यत्यास** ह्या शब्दांचे अर्थ.

१. **व्याख्या**–कोणत्याही पारिभाषिक शब्दाचा अर्थ ज्या वाक्यामध्यें सांगितलेला असतो, त्या वाक्याला त्या शब्दाची व्याख्या म्हणावें. उदाहरण "ज्या पदार्थाला लांबी मात्र आहे असें मानिलें असतें, त्याला रेषा म्हणावें." ह्या वाक्यांत "रेषा" ह्या भूमितींतल्या पारिभाषिक शब्दाचा अर्थ सांगितला आहे. म्हणून ही रेषेची व्याख्या होय.

(व्याख्या ह्या शब्दाचा मुख्य अर्थ, व्याख्येचे गुणदोष आणि व्याख्या करण्याच्या संबंधाचे नियम, हे पूरणिकेंत पहावे.)

सिद्धांत–हा शब्द गणितविषयकग्रंथांमध्यें "सिद्ध केलेली अथवा सिद्धतेवांचून खरी मानिलेली कोणतीही गोष्ट" ह्या त्याच्या व्यावहारिक अर्थास लक्षून तर योजितातच, पण ह्याखेरीज दुसऱ्या एका अर्थास लक्षून बहुधा योजितात. तो अर्थ असा;—

"(१) ज्या वाक्यसमुदायामध्यें अमुक गोष्ट सिद्ध करावयाची आहे, असें सांगून ती सिद्ध करून दाखविलेली असते; तसेंच (२) ज्यांत अमुक कृति करावयाची आहे असें सांगून ती करून दाखविलेली असते;" अशा दोन्ही प्रकारच्या वाक्यसमुदायांना गणितांत "सिद्धांत" म्हणतात.

(ह्याच अर्थाला लक्षून युक्लिडच्या ग्रंथांतील पहिल्या पुस्तकाच्या ४८ भागांसारिख्या प्रत्येक भागाला सिद्धांत म्हणण्याची वहिवाट पडली आहे.)

३. **प्रतिज्ञा**–विवक्षित सिद्धांतामध्यें अमुक एक अथवा अनेक गोष्टी दिल्या आहेत व अमुक एक गोष्ट सिद्ध करावयाची आहे अथवा अमुक एक कृति करावयाची आहे, असें ज्या वाक्यांत सुचविलेलें असतें, त्याला त्या सिद्धांताची प्रतिज्ञा म्हणावें. जसें:—

(१) समभुज त्रिकोण (२) समकोण असतो.

(१) ज्या संख्येंतील अंकांची बेरीज तिहींनीं विभाज्य असते व एकस्थानचा अंक सम असतो, ती संख्या (२) सहांनीं विभाज्य असते.

(१) जर एका पदार्थावर दोन सारख्या प्रेरणा लागू झाल्या आणि त्यांच्या दिशांमधील कोन १२० अंशांचा असला, तर त्यांची फलितप्रेरणा ही (२) त्या प्रत्येकीबरोबर असते.

(१) विवक्षित अपूर्णांकास (२) अति-संक्षिप्तरूप द्यावयाचें आहे.

(१) विवक्षित समर्याद रेषेचे (२) दोन समान भाग करावयाचे आहेत.

ह्या निरनिराळ्या पांच सिद्धांतांच्या प्रतिज्ञा आहेत.

४. **पक्ष व साध्य**–कोणत्याही सिद्धांतांत ज्या (एक किंवा अनेक) गोष्टी दिलेल्या असतात, त्या सर्वांस मिळून त्या सिद्धांतांतला पक्ष म्हणावें; आणि जी एक गोष्ट सिद्ध करावयाची असते अथवा जी एक कृति करावयाची असते, तिला त्या सिद्धांतांतलें साध्य म्हणावें. जसें:–वरील प्रत्येक प्रतिज्ञेच्या (१) व (२) ह्या भागांत अनुक्रमें पक्ष व साध्य हीं सुचविलीं आहेत.

महत्त्वाची सूचना.–प्रत्येक सिद्धांतांतील पक्ष व साध्य हीं स्पष्ट समजल्याखेरीज तो सिद्धांत करावयास आरंभ करूं नये. ह्या सूचनेकडे अगदीं दुर्लक्ष होऊं नये.

५. **प्रमेय व कृत्य**—वर सिद्धांताच्या लक्षणांत जे दोन प्रकारचे वाक्यसमुदाय सांगितले, त्यांपैकीं पहिल्याला "प्रमेय" म्हणतात; व

असून त्याचा व्यत्यास खोटा आहे. (मूल व्यत्यासांच्या सत्यासत्यतेविषयींचे नियम पूरणिकेंत पहावे).

सिद्धता, सिद्धतेचे **क्रमिक** व **क्रमविरुद्ध** हे भेद, **ताळा**, **पृथक्करण**, **उपपत्ति**, **संयोगीकरण**, प्रमेयाच्या व कृत्याच्या संयोगीकरणाचे **जातिप्रतिज्ञा**, **व्यक्तिप्रतिज्ञा** इत्यादिक भाग, ह्या सर्वांचीं लक्षणें व गुणदोष पूरणिकेंत पहावे. तसेंच **पदार्थ**, **समान** व **असमान पदार्थ**, **बेरीज**, **वजावाकी**, **पट** आणि **हिस्सा** ह्या शब्दांचे अर्थ व त्यांवरून निघालेले कांहीं उपसिद्धांत हे प्रत्यक्षप्रमाणांवरील टिपणाच्या आरंभीं लिहिले आहेत, तेही लक्षपूर्वक वाचावे.

संक्षेप.

प्रत्येक सिद्धांताच्या सिद्धतेमध्यें मागील आधार दाखवावयाचे ते ओळींच्या शेवटीं संक्षेपानें दाखविले आहेत. त्या व दुसऱ्या कांहीं संक्षेपांचे अर्थ उदाहरणांनीं स्पष्ट करून दाखवितों.

(१. व्या. १५)	ह्याचा	अर्थ	"पहिल्या पुस्तकाच्या १५ व्या व्याख्येवरून" असा समजावा.
(गृ. कृ. ३)	"	"	"तिसऱ्या गृहीतकृत्याप्रमाणें"
(प्र. प्र. ८)	"	"	"आठव्या प्रत्यक्षप्रमाणावरून."
(१. ५)	"	"	"पहिल्या पुस्तकाच्या पांचव्या सिद्धांतावरून."
(१. ४ भा. २)	"	"	"पहिल्या पुस्तकाच्या चवथ्या सिद्धांताच्या दुसऱ्या भागावरून."
(१. ५ उप.)	"	"	"पहिल्या पुस्तकाच्या पांचव्या सिद्धांताच्या उपसिद्धांतावरून."
(प्रतिज्ञा.)	"	"	"प्रतिज्ञेंत दिल्यावरून."
(रचना.)	"	"	"रचनेवरून."
(टि. प.)	"	"	"टिप्पण पहा."
(सि. क.)	"	"	"सिद्ध करा."

दुसऱ्याला "कृत्य" म्हणतात; म्हणून हे सिद्धांतांचे दोन भेद झाले. वरच्या पांच प्रतिज्ञांपैकीं पहिल्या तीन प्रतिज्ञा प्रमेयांच्या आहेत व शेवटच्या दोन प्रतिज्ञा कृत्यांच्या आहेत.

६. **प्रत्यक्ष-प्रमाण**—जें प्रमेय सिद्धतेवांचून (केवळ अनुभवावरूनच) खरें मानिलेलें असतें, त्याला गणितांत "प्रत्यक्षप्रमाण" म्हणतात.

७. **गृहीतकृत्य**–जें कृत्य करितां येतें असें आधारावांचून मानिलेलें असतें, त्याला गणितांत "गृहीतकृत्य" म्हणतात.

८. **उपसिद्धांत**–जो सिद्धांत दुसऱ्या एखाद्या सिद्धांतामध्यें साहजिक सिद्ध केला जातो, अथवा त्याच्या साह्यानें फार थोडक्यांत सिद्ध होतो, त्याला त्या दुसऱ्या सिद्धांताचा उपसिद्धांत म्हणावें. (पहिल्या पुस्तकाच्या ४६ व्या सिद्धांताचे उपसिद्धांत व ५ व्या सिद्धांताचा उपसिद्धांत हे अनुक्रमें एथें सांगितल्या प्रकारचे आहेत.)

एखाद्या व्याख्येवरून जर एखादें प्रमेय सहज सिद्ध होत असलें, तर त्यालाही त्या व्याख्येचा उपसिद्धांत म्हणतात.

९. **व्यत्यास**—कोणत्याही सिद्धांतांतल्या पक्षाच्या ठिकाणीं, अथवा पक्षांत अनेक गोष्टी असल्यास त्यांपैकीं एखाद्या गोष्टीच्या ठिकाणीं, त्यांतलें साध्य ठेविलें, आणि साध्याचे ठिकाणीं पक्ष अथवा पक्षांतली ती गोष्ट ठेविली; तर जो सिद्धांत होतो, त्याला त्या मूळच्या सिद्धांताचा व्यत्यास म्हणावें. जसें:—"समभुज त्रिकोण समकोण असतो." हा मूलसिद्धांत मानिला, तर "समकोणत्रिकोण समभुज असतो" हा त्याचा व्यत्यास होय. "ज्या संख्येंतील अंकांची बेरीज तिहींनीं विभाज्य असते व जिच्या एकंस्थानीं शून्य असतें, ती संख्या सहांनीं विभाज्य असते." हा मूलसिद्धांत मानिला, तर "ज्या संख्येंतील अंकांची बेरीज तिहींनीं विभाज्य असते व सारी संख्या सहांनीं विभाज्य असते, तिच्या एकंस्थानीं शून्य असतें." हा त्याचा व्यत्यास होय.

(मूलसिद्धांत हा त्याच्या व्यत्यासाचा व्यत्यास असतो, हें उघड आहे.)

पहिल्या उदाहरणांतील मूलसिद्धांत आणि त्याचा व्यत्यास हे दोन्ही खरे आहेत. परंतु दुसऱ्या उदाहरणांतील मूलसिद्धांत खरा

युक्लिडची भूमिति.

पहिलें पुस्तक.

व्याख्या.[1]

१. ज्याला[2] स्थिति आहे, परंतु महत्त्व मुळींच नाहीं, त्याला **बिंदु** ह्मणावें.

(अथवा ज्याचे भाग करितां येत नाहींत, त्याला बिंदु ह्मणावें.)

बिंदूला नांव द्यावयाचें असलें, तर बहुधा एखादें अक्षर योजितात. जसें, **अ** बिंदु. . अ

२. ज्याला लांबी आहे, परंतु रुंदी व जाडी मुळींच नाहींत, त्याला **रेषा** (अथवा **रेघ**) ह्मणावें.

(रेषेला स्थिति आहे असेंही मानितात.)

उपसिद्धांत–रेषेचीं टोंकें (ह्मणजे आरंभ व शेवट हीं) बिंदुच असतात; आणि दोन रेषा परस्परांस जेथें छेदितात, तोही बिंदुच असतो.

रेषेला नांव द्यावयाचें असलें, तर तिच्या दोन्ही टोंकांना दोन नांवें देऊन तीं कोणत्या तरी अनुक्रमानें वाचिलीं असतां तेंच त्या रेषेचें नांव समजतात. जसें, "**अब** रेषा" अथवा "**बअ** रेषा."

अ———————ब

---

१. ह्या व्याख्या वाचण्यापूर्वीं भूमितीच्या परिभाषेवरील टिप्पण वाचावें ह्मणजे ह्यांविषयीं बरीच समजूत पडेल.

२. ह्या व्याख्येचें सविस्तर स्वरूप असें, "ज्या पदार्थाला स्थिति आहे, परंतु महत्त्व नाहीं असें मानिलें असतें, त्याला बिंदु म्हणावें." ह्याप्रमाणेंच रेषा व पातळी ह्यांच्या व्याख्यांमध्येंही "ज्याला" ह्याचा अर्थ "ज्या पदार्थाला" असा समजावा; व "असें मानिलें असतें" हें वाक्य बहुतेक व्याख्यांमध्यें आहेच असें समजावें.

केव्हां केव्हां साऱ्या रेषेला नांव देण्याकरितां एकच अक्षर योजितात. जसें, करेषा.

क

३. कोणतीही रेषा ज्या बिंदूंत संपलेली दिसेल, त्या बिंदूंत ती संपली नाहीं, पुढें पाहिजे तितकी लांब आहे, असें मानावयाचें असलें, तर तिला **अमर्याद रेषा** ह्मणावें.

(विवक्षित रेषा समर्याद आहे किंवा अमर्याद आहे, हें सर्वत्र प्रत्यक्ष सांगितलेलें असतें असा नियम नाहीं, तें बहुधा संदर्भावरून ओळखावें लागतें.)

४. ज्या रेषेची दिशा (अथवा कल) कोठेंही बदलत नाहीं, तिला **सरलरेषा** ह्मणतात.

उपसिद्धांत—जर दोन सरलरेषांपैकीं (१) एकीचें एक टोंक दुसरीच्या एका टोंकाशीं मिळेल व (२) त्या टोंकाजवळ त्यांची दिशा एक होईल, अशा रीतीनें एक रेषा दुसरीवर ठेविली, तर पुढें त्यांपैकीं कोणतीही रेषा दुसरीला सोडून निराळ्या दिशेस जावयाची नाहीं. (कारण कीं, ती निराळ्या दिशेस जाईल असें मानिलें, तर सरलरेषेच्या व्याख्येशीं विरोध येईल.) हा उपसिद्धांत " दोन सरलरेषांस साधारण खंड असत नाहीं " असाही ह्मणतात.

(ह्या ग्रंथामध्यें सरलरेषा ह्या शब्दाबद्दल रेषा व रेघ हेच शब्द बहुधा योजिले आहेत.)

५. ज्या रेषेचा केवढाही भाग **सरल** नसतो, तिला **वक्ररेषा** ह्मणावें.

६. ज्याला लांबी व रुंदी मात्र आहेत, त्याला **पातळी** ह्मणतात. (पातळीला स्थिति आहे असेंही मानितात.).

उपसिद्धांत—पातळीचीं शेवटें रेषा असतात; आणि दोन पातळ्या एकमेकींस जेथें कापितात तीही रेषाच असते.

७. ज्या पातळींतले कोणतेही दोन बिंदु घेऊन त्यांच्या मध्यें सरल-

रेषा काढिली असतां ती सर्वांशीं त्या पातळींतच असते, तिला **सरलपातळी** ह्मणतात.

(जसें, एखादी अगदीं सरळ व गुळगुळीत आंखणी एखाद्या फळी-च्या पृष्ठांतील कोणत्याही दोन बिंदूंच्या मध्यें ठेविली असतां, अथवा त्या पृष्ठावर कोठेंही फिरविली असतां, जर ती आंखणी त्या पृष्ठाला सर्वत्र अगदीं चिकटलेली दिसेल, तर तें पृष्ठ सरळ (अथवा सपाट) आहे असें आपण समजतों. ह्यावरून भूमितींतल्या सरळपातळीची कल्पना येईल.)

(ह्या व्याख्येंतील "कोणतेहि" ह्या शब्दाकडे दुर्लक्ष होऊं नये. हे शब्द गाळिले असतां, पंचपात्रीच्या वक्रपृष्ठालाही सरळपातळी म्ह-णावें लागेल.)

(ज्या पातळीचा केवढाही भाग सरळपातळी नसतो, तिला वक्रपातळी म्हणतात. जसें, गोलाचा पृष्ठभाग, पंचपात्रीचें वांकडें पृष्ठ ह्या वक्रपातळ्या होत.)

(ह्या ग्रंथामध्यें फक्त सरळपातळीविषयींच विचार करावयाचा आहे; म्हणून " सरळपातळी " ह्याचे ठिकाणीं वहुधा " पातळी " हाच शब्द योजिला आहे.)

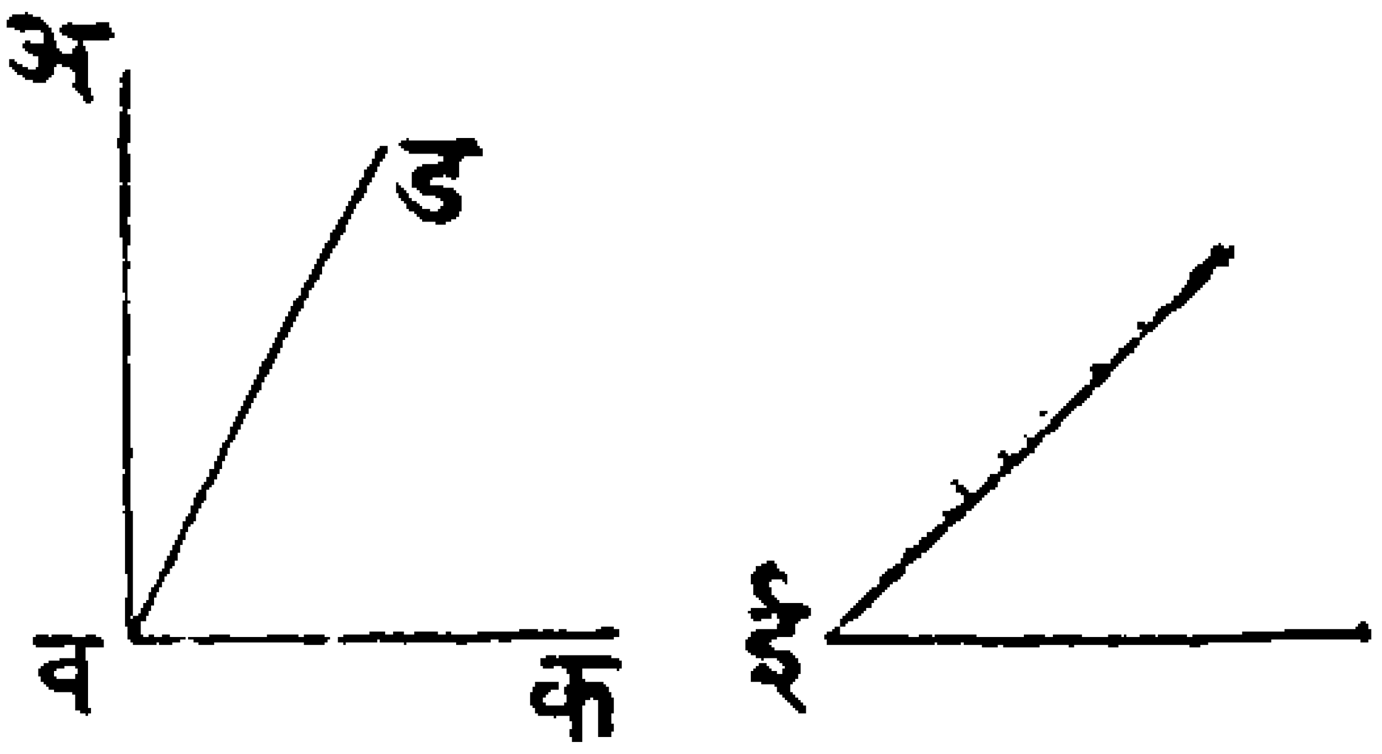
८. एकाच पातळींत असणाऱ्या दोन रेषा जर एकमेकींस मिळा ल्या, पण त्यांची एकच रेषा झाली नाहीं, तर त्यांची जी एकमेकीं-शीं वक्रता असते, तिला **रेषाकोण** म्हणावें.

९. एका सरलरेषेंत नसणाऱ्या दोन सरलरेषा परस्परांस मि-ळाल्या असतां त्यांची जी एकमेकींशीं वक्रता असते, तिला **सरल-रेषाकोण** म्हणावें.

(ह्या ग्रंथामध्यें सरलरेषाकोणाचा मात्र विचार करावयाचा आहे; म्हणून " सरलरेषाकोण " ह्या शब्दाबद्दल वहुधा " कोन " हाच शब्द योजिला आहे.)

कोणताही कोन ज्या दोन रेषांनीं झालेला असतो, त्यांस त्या को-नाच्या **बाजू** म्हणतात; व कोनाच्या बाजू ज्या बिंदूंत मिळाल्यामुळें तो कोन झालेला असतो, त्यास **कोणबिंदु** म्हणतात.

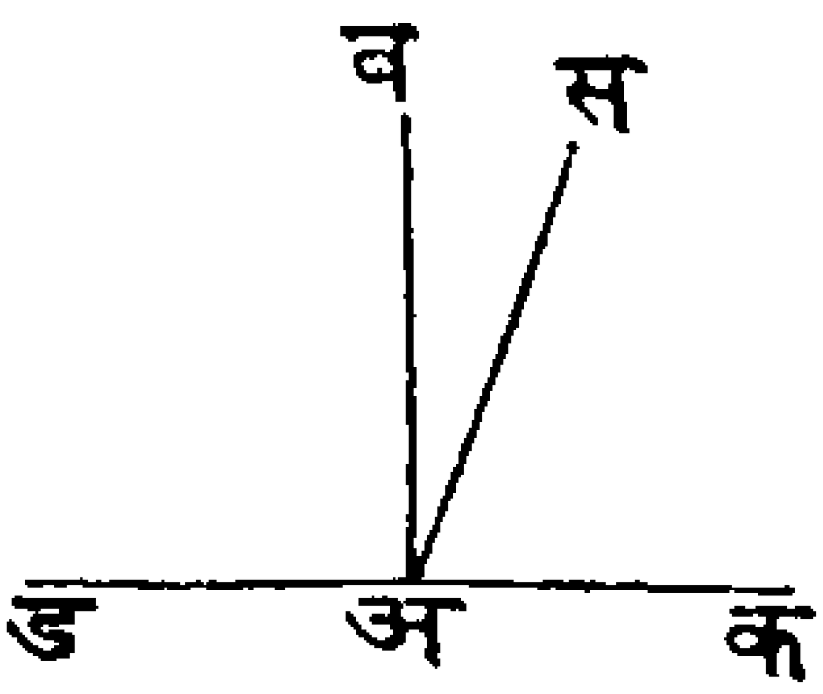
कोनास नांव द्यावयाचें असलें, तर कोणबिंदु व प्रत्येक बाजूंतील एकेक बिंदु अशा तीन बिंदूंस नांवें देतात; आणि कोणबिंदूचें नांव मध्यें येईल अशा रीतीनें तीं तीन नांवें वाचिलीं असतां, ते त्या कोनाचें नांव झालें असें समजतात. जसें, **अब** आणि **बक** ह्या रेषांच्या कोनाचें नांव **अबक** किंवा **कबअ** हें समजावें. **अब** आणि **बड** ह्या रेषांच्या कोनाचें नांव **अबड** किंवा **डबअ** हें समजावें.



एका बिंदूजवळ एकच कोन असला, तर त्या बिंदूच्याच नांवानें तो कोन दाखवितात. जसें, "ई कोन". पण अशा प्रसंगीं "ई कोन" हा "ई बिंदूजवळचा कोन" ह्याचा संक्षेप आहे, असें मानिलें पाहिजे. (" ई बिंदूजवळचा कोन " त्याचा अर्थही " ई हा ज्याचा कोणबिंदु आहे असा कोन " हा समजावा.)

कधीं कधीं कोनांत एखादें अक्षर किंवा अंक अशी कांहीं खूण लिहून तिच्या योगानें तो कोन दाखवितात. जसें, **क** कोन, १ कोन इ०.

१०. एक रेषा दुसऱ्या रेषेला मिळाली असतां, जर दोन कोन झाले आणि ते समान असले, तर त्या प्रत्येक कोनाला **काटकोन** म्हणतात; आणि ती मिळणारी रेषा दुसरीवर **लंब** आहे असें म्हणतात. जसें, **डअब**, **कअब** हा प्रत्येक कोन काटकोन आहे; आणि **अब** रेषा **डक**वर लंब आहे. काटकोनाच्या दोन बाजू परस्परांवर लंब आहेत, असेंही म्हणतात.



११. जो कोन काटकोनापेक्षां मोठा असतो, त्याला **विशालकोण** म्हणतात. जसें, **डअस** हा विशालकोण आहे.

१२. 'जो कोन काटकोनापेक्षां लहान असतो, त्याला **लघुकोण** म्हणतात. जसें, **कअस, सअव** हा प्रत्येक लघुकोण होय.

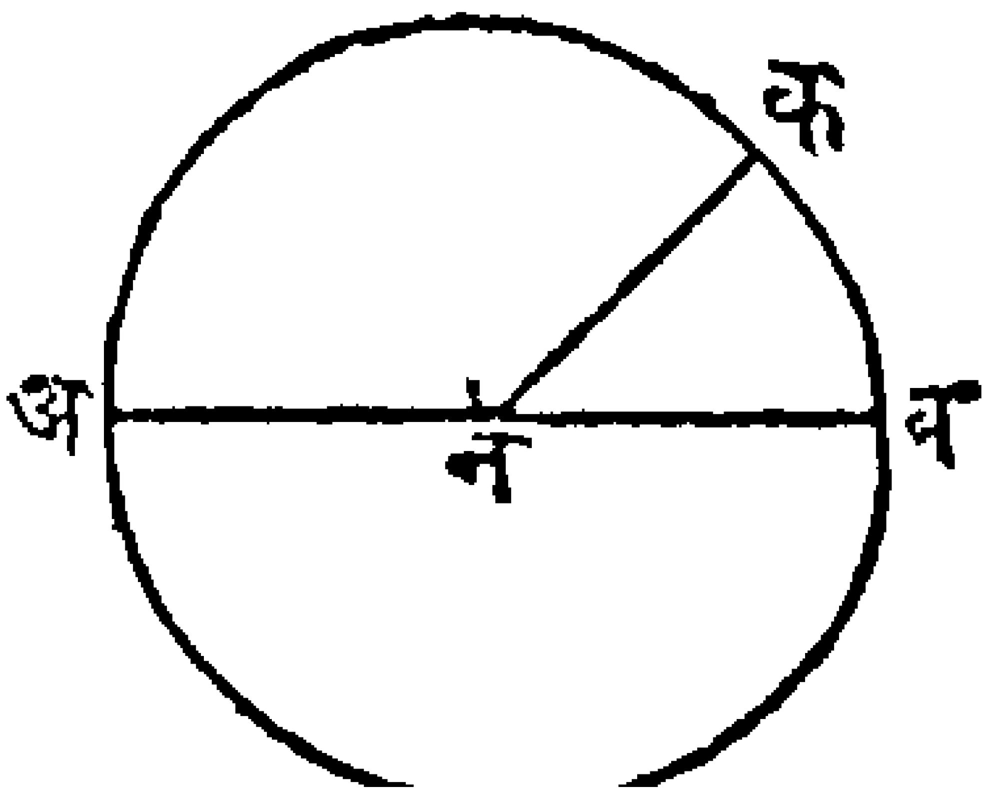
१३. काटकोनाखेरीज सर्व कोनांस **तिर्यक्कोण** म्हणतात.' जसें, **डअस, कअस, सअव** हा प्रत्येक तिर्यक्कोण होय.

१४. एक किंवा अनेक मर्यादांनीं सर्व अंगांकडून मर्यादिलेल्या पातळीला व अवकाशाला **आकृति** म्हणतात.

(ह्या ग्रंथामध्यें इतःपर आकृति ह्या शब्दाचा अर्थ " एक किंवा अनेक रेषांनीं सर्व अंगांकडून मर्यादिलेली सरळपातळी " हाच समजावा. कारण इतर कोणत्याही प्रकारच्या आकृतींविषयीं विचार ह्या ग्रंथांत केलेला नाहीं.)

१५. ज्या आकृतीची मर्यादा एकाच वक्ररेषेनें दाखविली जाते, आणि जीमध्यें असा एक बिंदु असतो कीं, त्यापासून त्या वक्ररेषेपर्यंत कितीही सरलरेषा काढिल्या तरी त्या सर्व समान असतात, त्या आकृतीला **वर्तुळ** म्हणतात.

वर्तुळाची मर्यादा दाखविणाऱ्या वक्ररेषेला त्याचा **परिघ** म्हणतात.



(केव्हां केव्हां वर्तुल हा शब्द परिघ ह्या शब्दाबद्दलही योजतात; परंतु वर्तुल ही पातळी आहे, व परिघ ही रेषा आहे; हा त्यांच्या मधील भेद ध्यानांत ठेविला, म्हणजे वर्तुल शब्दाचा कोणता अर्थ कोठें घ्यावयाचा हें संदर्भावरून ओळखितां येईल.)

१६. वर्तुळांतील ज्या बिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या सर्व सरळरेषा समान असतात, त्याला **मध्यबिंदु** किंवा **वर्तुलमध्य** म्हणतात.

वर्तुळास नांव द्यावयाचें असलें, तर त्याच्या परिघांतल्या निदान तीन बिंदूंस नांवें देऊन तीं कोणत्या तरी एका नांवापासून अनुक्रमानें

वाचितात; आणि तेंच वर्तुळाचें नांव समजतात. जसें, १५ व्या व्याख्येंतल्या वर्तुळाचें नांव **अबक** वर्तुल होय.

१७. वर्तुलमध्यापासून परिघापर्यंत काढिलेल्या कोणत्याही सरलरेषेला **त्रिज्या** म्हणतात.

उपसि०—एकाच वर्तुळाच्या सर्व त्रिज्या समान असतात.

१८. जी सरलरेषा वर्तुलमध्यांतून जाते व परिघाला दोन्ही अंगांस मिळते, तिला **व्यास** म्हणतात.

१९. व्यास आणि त्यानें कापिलेला परिघाचा भाग ह्यांच्या मध्यें जो वर्तुळाचा भाग सांपडतो, त्याला **अर्धवर्तुल** म्हणतात.

(अर्धवर्तुल ह्या शब्दाचा अवयवार्थ वर्तुळाचें अर्ध असा आहे, पण तो येथें घ्यावयाचा नाहीं; "अर्धवर्तुल हें वर्तुळाच्या अर्धाबरोबर असतें" ही गोष्ट व्याख्येमध्यें दिलेली नाहीं, ती सिद्ध होईल तेव्हां खरी मानावयाची, हें पक्कें ध्यानांत असावें. कोणत्याही पारिभाषिक शब्दाचा अर्थ ग्रंथकर्त्यानें त्याच्या व्याख्येंत जो सांगितला असेल, तोच घ्यावयाचा, त्याला त्या ग्रंथांत दुसरा कोणताच अर्थ नाहीं असें मानावयाचें, ह्या गोष्टीचें चांगलें स्मरण असलें पाहिजे.)

अर्धवर्तुलास नांव द्यावयाचें असेल, तर त्याच्या व्यासाचीं टोंकें व परिघांतील निदान एक बिंदु त्यांचीं नांवें कोठून तरी अनुक्रमानें वाचितात; आणि तेंच त्या अर्धवर्तुलाचें नांव समजतात.

२०. ज्या आकृतीची मर्यादा नुसत्या सरलरेषांनीं दाखविली जाते, तिला **सरलरेषाकृति** म्हणतात.

सरलरेषाकृतीला नांव द्यावयाचें असलें, तर तिच्या प्रत्येक कोणबिंदूला नांव देऊन तीं सर्व नांवें कोठून तरी अनुक्रमानें वाचितात, आणि तेंच त्या आकृतीचें नांव समजतात.

सरलरेषाकृतीची मर्यादा दाखविणाऱ्या प्रत्येक रेषेला तिची बाजू म्हणतात.

उपसिद्धांत—सरलरेषाकृतीला जितक्या बाजू असतात, तितकेच कोन असतात.

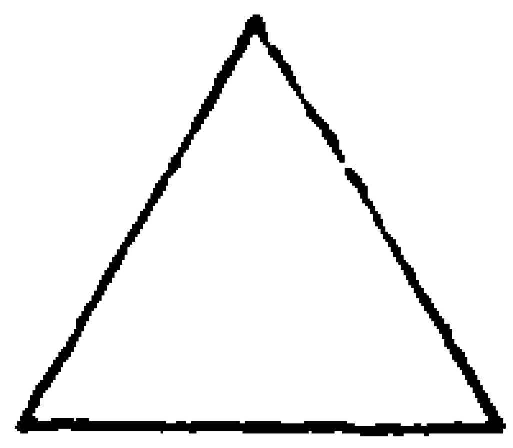
२१. तीन बाजूंच्या सरलरेषाकृतीला **त्रिकोण** म्हणतात.

२२. चार बाजूंच्या सरलरेषाकृतीला **चौकोन** म्हणतात.

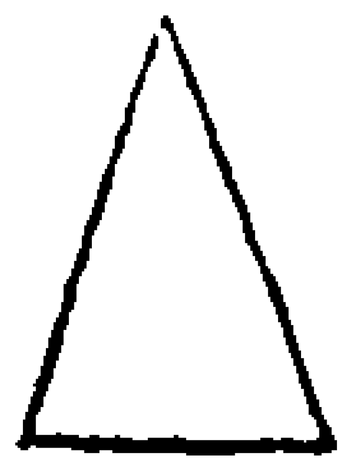
चौकोनास नांव द्यावयाचें असतां, कधीं कधीं त्याच्या समोरासमोरच्या कोणबिंदूस नांवें देऊन तीं वाचितात, आणि तेंच त्या चौकोनाचें नांव समजतात.

२३. चोहोंपेक्षां ज्यास्त बाजूंच्या सरलरेषाकृतीला **बहुकोण** म्हणतात.

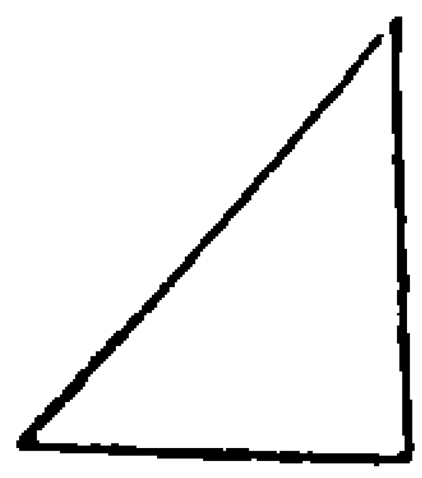
२४. ज्या त्रिकोणाच्या तीनही बाजू समान असतात, त्याला **समभुजत्रिकोण** म्हणतात.



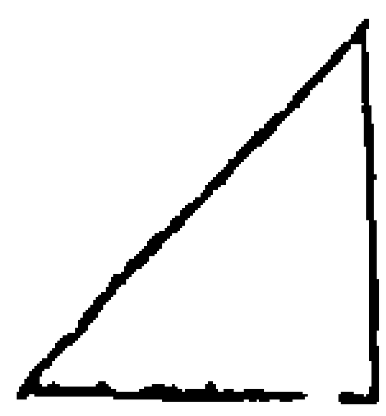
२५. ज्या त्रिकोणाच्या दोनच बाजू समान असतात, त्याला **समद्विभुजत्रिकोण** म्हणतात.



२६. ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू असमान असतात, त्याला **विषमभुजत्रिकोण** म्हणतात.

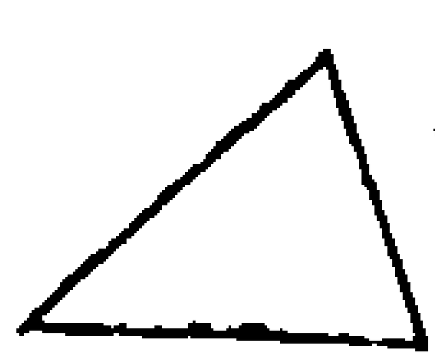


२७. ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असतो, त्याला **काटकोनत्रिकोण** म्हणतात.

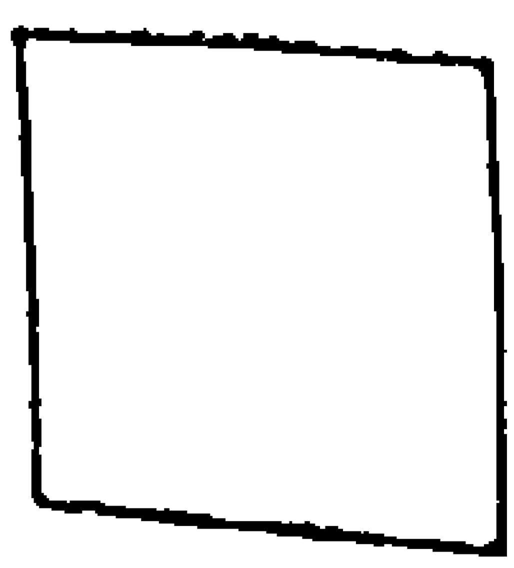


२८. ज्या त्रिकोणाचा एक कोन विशालकोण असतो, त्याला **विशालकोणत्रिकोण** म्हणतात.

२९. ज्या त्रिकोणाचे तिन्ही कोन लघुकोण असतात, त्याला **लघुकोणत्रिकोण** म्हणतात.



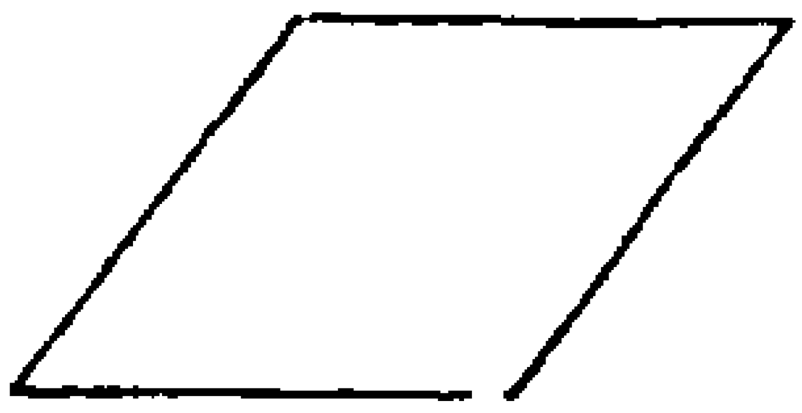
३०. ज्या चौकोनाच्या सर्व बाजू सारख्या असतात व सर्व कोन काटकोन असतात, त्याला **चौरस** म्हणतात.



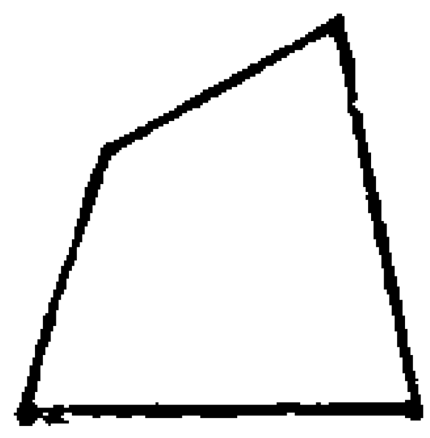
(" ज्या चौकोनाच्या सर्व बाजू सारख्या असतात व एक कोन काटकोन असतो, त्याला चौरस म्हणतात " अशी चौरसाची व्याख्या केली तरी चालेल. कांकीं, अशा चौकोनाचे बाकीचे कोन काटकोन असतात, हें सिद्ध करितां येईल.)

३१. ज्या चौकोनाचे सर्व कोन काटकोन असतात व कांहीं बाजू असमान असतात, त्याला **काटकोनचौकोन** म्हणतात.

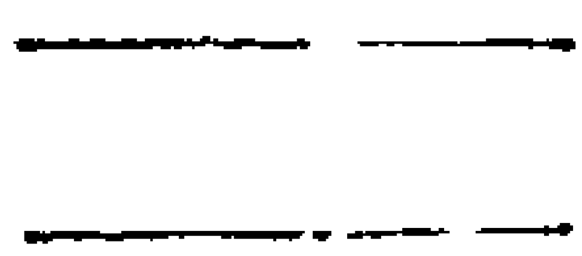
३२. ज्या चौकोनाच्या सर्व बाजू समान असतात व सर्व कोन तिर्यक्कोण असतात, त्याला **समभुजचौकोन** म्हणतात.



३३. ज्याच्या सर्व अथवा कांहीं बाजू असमान असतात व सर्व अथवा कांहीं कोन तिर्यक्कोण असतात, त्याला **विषमभुजचौकोन** म्हणावें.



३४. ज्या दोन सरलरेषा एकाच पातळींत असतात, आणि दोन्ही अंगांस कितीही वाढविल्या तरी मिळत नाहींत, त्यांना **समांतररेषा** म्हणावें.

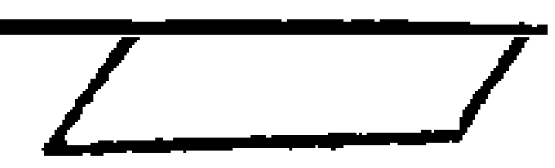


(ह्या व्याख्येंतील " एकाच पातळींत असतात " ह्या शब्दाकडे दुर्लक्ष होतां कामा नये. कारण कीं, हे शब्द गाळिले, तर भिन्न पातळ्यांमध्यें असून परस्परांस न मिळणाऱ्या अशा ज्या रेषा असतात, त्यांवरही ह्या व्याख्येची अतिव्याप्ति होईल.)

(" दोन्ही अंगांस कितीही वाढविल्या असतां मिळत नाहींत," ह्या वाक्यामध्यें "त्या पूर्वी मिळालेल्या नसतात " ह्या गोष्टीचाही अंतर्भाव होतो, असें मानिलें पाहिजे. कांकीं, तसें न मानिलें, तर परस्परांस छेदणाऱ्या दोन समर्याद सरलरेषांवर ह्या व्याख्येची अतिव्याप्ति होईल.)

(समांतर हें विशेषण दोहोंपेक्षां जास्त सरलरेषांना लाविलें असतां, त्यांपैकीं प्रत्येक दोन दोन रेषा परस्परांशीं समांतर आहेत असें समजावें.)

३५. ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन दोन बाजू परस्परांशीं समांतर असतात, त्याला **समांतरभुजचौकोन** म्हणतात.



व्याख्या. परिशिष्ट.

(खालीं लिहिलेली भूमितीची परिभाषा आरंभीं न वाचितां जसजशी लागेल, तसतशी वाचिली तरी चालेल.)

१. **पाया**—ही संज्ञा सामान्यतः आकृतीची मर्यादा दाखविणाऱ्या कोणत्याही एका सरलरेषेला देतात. परंतु " समद्विभुजत्रिकोणाचा पाया " असें ह्मटलें असतां, " त्याच्या ज्या बाजू समान आहेत असें दिलें असेल, त्यांखेरीज बाजू " असाच अर्थ समजावा.

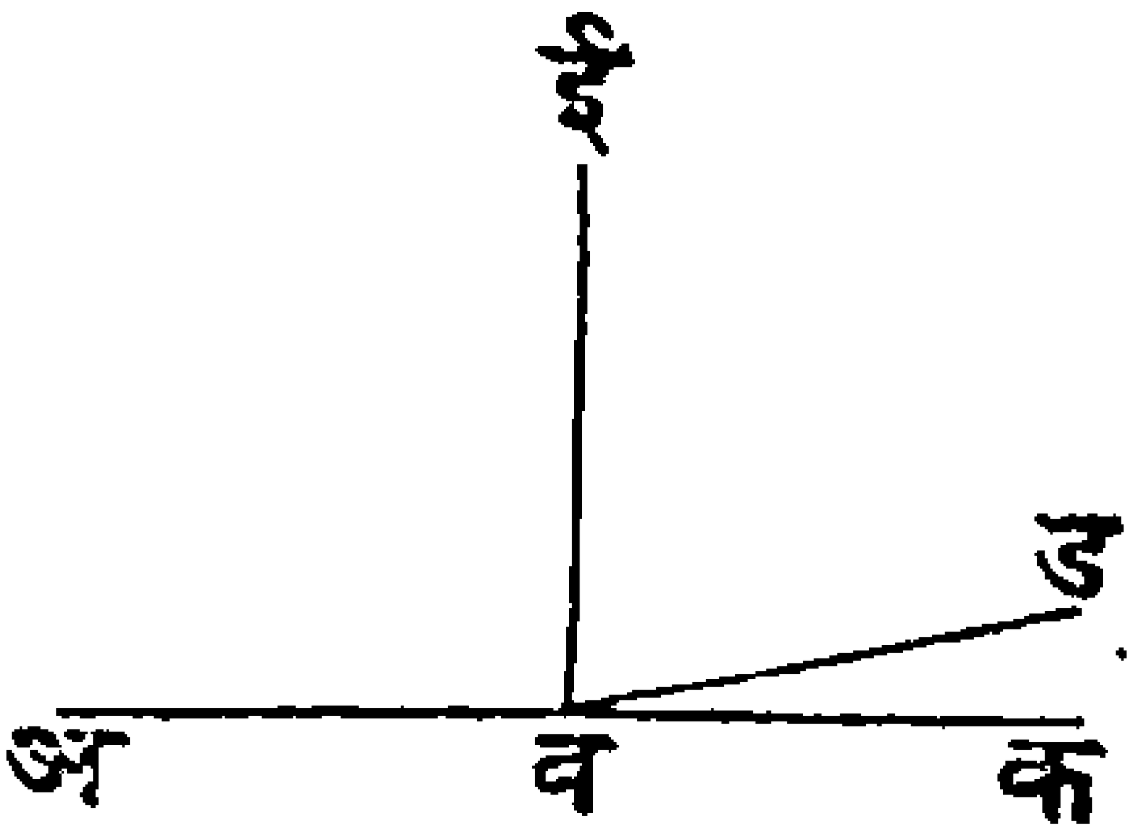
२. **शिरोबिंदु व शिरकोन**—त्रिकोणाच्या ज्या बाजूला पाया ह्मटलें असेल, तिच्या समोरच्या कोणबिंदूला शिरोबिंदु व पायासमोरच्या कोनाला शिरकोण ह्मणतात.

३. **उंची**—त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायावर किंवा पाया वाढवून त्यावर काढिलेल्या लंबास त्या त्रिकोणाची उंची ह्मणतात; आणि समांतरभुजचौकोनाच्या पायासमोरच्या बाजूंतील कोणत्याही बिंदूपासून पायावर किंवा पाया वाढवून त्यावर काढिलेल्या लंबास त्या समांतरभुजचौकोनाची उंची ह्मणतात.

४. **दुभागणें**—ह्याचा अर्थ दोन समान भाग करणें असा समजावा.

५. **सलग्नकोण**—एक रेषा दुसऱ्या रेषेला मिळाली असतां जर

दोन कोन झाले, तर त्यांना परस्परांचे (किंवा परस्परांशीं) सलग्नकोण म्हणावें. जसें, **अबड, कबड** हे एकमेकांचे सलग्नकोण आहेत. परंतु **अबई, ईबड** हे ह्या व्याख्येप्रमाणें सलग्नकोण नाहींत. (कारण कीं हे कोन एकाच सरलरेषेला दुसरी मिळून झालेले नाहींत.)



६. **पूरककोण**–ज्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोन असते (मग ते सलग्नकोन असोत किंवा नसोत), त्यांपैकीं प्रत्येकाला दुसऱ्याचा पूरककोन म्हणावें.

७. **कोटिकोण**–ज्या दोन कोनांची बेरीज एक काटकोन असते, त्यांपैकीं प्रत्येकाला दुसऱ्याचा कोटिकोण म्हणावें.

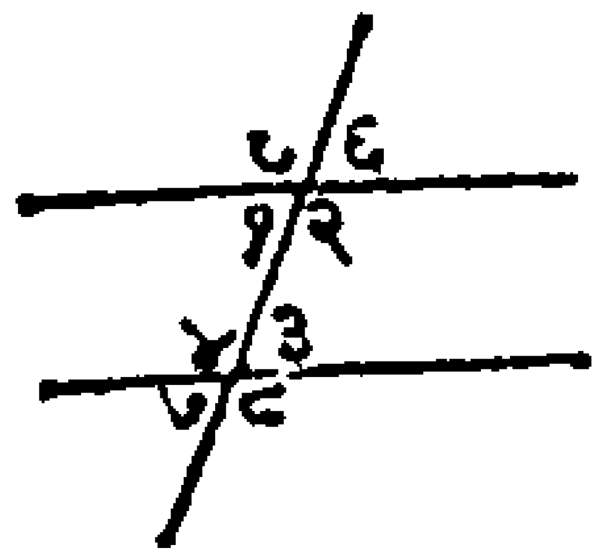
८. **सरलरेषाकृतीचा बाहेरील कोन**–सरलरेषाकृतीच्या कोणत्याही जवळजवळच्या दोन बाजूंपैकीं एक त्यांच्या मेलनबिंदूपलीकडे वाढविली असतां, तिचा वाढविलेला भाग व दुसरी बाजू ह्यांच्या मध्यें त्या मेलनबिंदूजवळ जो कोन होतो, त्याला त्या आकृतीचा बाहेरील कोन म्हणतात. (आकृतीचा एखादा कोन बहिर्वक्र असेल, तर त्या कोनाची बाजू वाढविल्यानें होणाऱ्या नवीन कोनाला ही संज्ञा देत नाहींत.)

९. **दिलेल्या रेषेशीं कोन करणें**–ह्याचा अर्थ, दिलेली रेषा ज्या कोनाची एक बाजू होईल असा कोन करणें, हा समजावा.

१०. **दिलेल्या बिंदूजवळ कोन करणें**–ह्याचा अर्थ, दिलेला बिंदु ज्याचा कोणबिंदु होईल असा कोन करणें, हा समजावा.

११. **व्युत्क्रमकोण, बाह्यकोण,** व **आंतरकोण**—दोन रेषांस एका रेषेनें छेदिलें असतां जे आठ कोन होतात, त्यांना पुढें लिहिल्याप्रमाणें संज्ञा द्यावयाच्या.

१ व ३ आणि २ व ४ ह्या दोन दोन कोनांस परस्परांशीं व्युत्क्रमकोण म्हणावें.



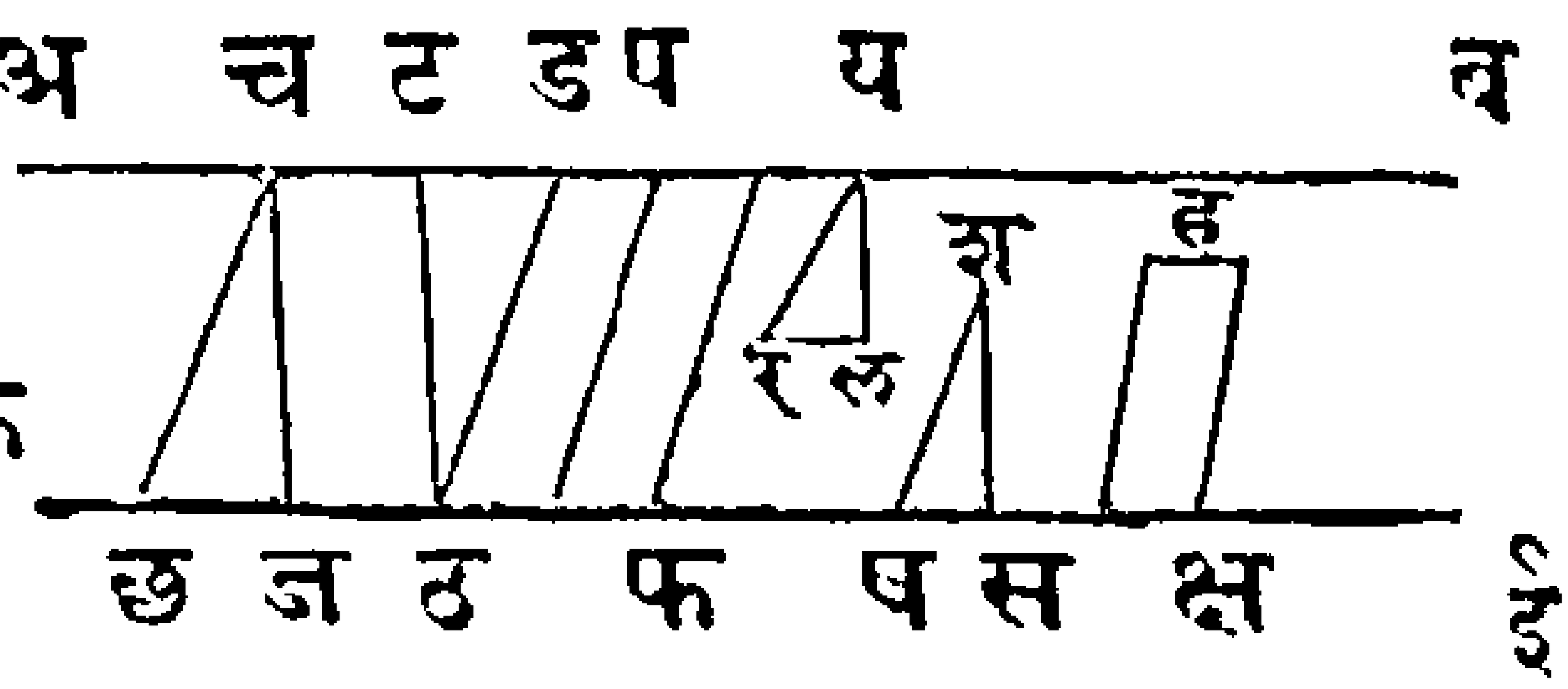
५,६,७,८ ह्यांना बाह्यकोण म्हणावें.

१,२,३,४ ह्यांना आंतरकोण म्हणावें.

१२. **कर्ण**—काटकोन त्रिकोणाची काटकोनासमोरील बाजू आणि चौकोनाच्या समोरासमोरच्या कोणबिंदूंस सांधणारी रेषा ह्या प्रत्येकीला कर्ण म्हणतात.

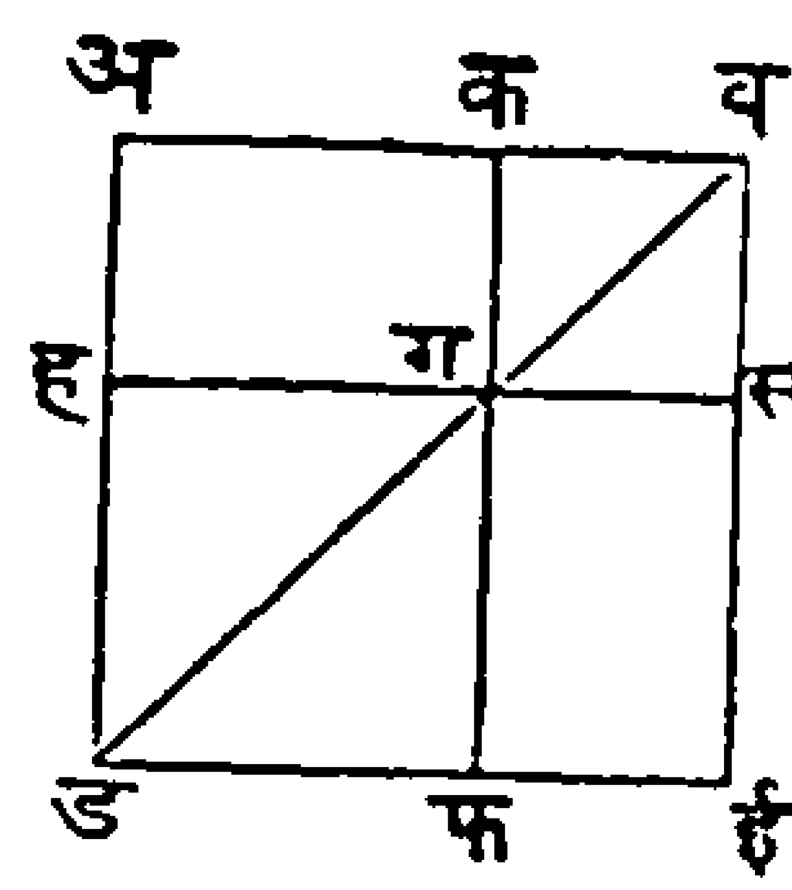
१३. समांतररेषांच्या जोडांतला त्रिकोण व समांतरभुज चौकोन—ज्या त्रिकोणाचा पाया दोन समांतररेषांपैकीं एकीमध्यें व शिरोबिंदु दुसरीमध्यें असतो, त्याला त्या समांतररेषांच्या जोडांतला त्रिकोण म्हणावें. तसेंच ज्या समांतरभुजचौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंपैकीं एकेक बाजू दोन समांतररेषांपैकीं एकेकींत असते, त्याला त्या समांतररेषांच्या जोडांतला समांतरभुजचौकोन म्हणावें.

जसें, **चछज**, **टठड** हे त्रिकोण व **पफ** समांतरभुज चौकोन हे, **अब क** आणि **कई** ह्या समांतर रेषांच्या जोडांतले आहेत. परंतु **यरल**, **शषस** हे त्रिकोण व **हक्ष** समांतरभुजचौकोन हे त्या समांतररेषांच्या जोडांतले नाहींत.



१४. कर्णाभोंवतालचे व पूरक समांतरभुज चौकोन—समांतरभुजचौकोनाच्या कर्णांतील कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या जवळजवळच्या दोन बाजूंशीं समांतररेषा काढिल्या, आणि त्या इतर बाजूंस मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या, तर जे चार समांतरभुज चौकोन होतात, त्यांपैकीं ज्यांतून तो कर्ण जातो, त्यांस त्या कर्णाभोंवतालचे समांतरभुजचौकोन म्हणतात; आणि बाकीच्या दोहोंना त्यांचे पूर-

कसमांतरभुजचौकोन म्हणतात. जसें, **कस** आणि **हफ** हे **अई** ह्या समांतरभुज चौकोनाच्या **बड**कर्णाभोंवतालचे समांतरभुज चौकोन होत; व **अग** आणि **गई** हे त्यांचे पूरकसमांतरभुज चौकोन होत.



१५. **अनुक्रमें**–ह्या शब्दाची योजना व्यवहारांत ज्या अर्थानें करितात, त्याच अर्थानें भूमितींत करावयाची; परंतु ती चांगली ध्यानांत यावी, म्हणून उदाहरणानें स्पष्ट करितों. "**अ**, **ब** आणि **क** ह्या रेषा 'अनुक्रमें' **ड**, **ई**, आणि **फ** ह्या रेषांशीं समान आहेत" असें म्हटलें, म्हणजे "**अ**ही **ड**शीं, **ब**ही **ई**शीं आणि **क**ही **फ**शीं समान आहे" असाच अर्थ समजावा; पहिल्या तिहींपैकीं कोणतीही रेषा दुसऱ्या तिहींपैकीं कोणत्याही रेषेशीं, अथवा तिन्ही तिहींशीं समान आहेत असें समजूं नये. "एका आकृतीचे कोन दुसरीच्या कोनांशीं अनुक्रमें समान आहेत" ह्या वाक्याचा अर्थ असा कीं, एकीच्या कोणत्यातरी कोनापासून ओळीनें घेतलेला एकेक कोन दुसरीच्या एका कोनापासून ओळीनें घेतलेल्या एकेक कोनाबरोबर आहे; "**अ** रेषा, **ब** कोन आणि **क** आकृति हीं, **ड** कोन, **ई** आकृति, आणि **फ** रेषा ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत," ही गोष्ट अगदीं असंभाव्य होय.

१६. **समकोणाकृति**–ज्या आकृतीचे सारे कोन परस्पर समान असतात, तिला समकोणाकृति म्हणावें.

१७. **मिथःसमकोणाकृति**–ज्या दोन आकृतींपैकीं एकीचे सर्व कोन दुसरीच्या सर्व कोनांशीं अनुक्रमें समान असतात, त्यांना मिथः-समकोणाकृति म्हणावें.

१८. **मिथःसमभुजाकृति**–ज्या दोन आकृतींपैकीं एकीच्या सर्व बाजू दुसरीच्या सर्व बाजूंशीं अनुक्रमें समान असतात, त्यांना मिथः-समभुजाकृति म्हणावें.

१९. **आकृतीचे अवयव**–आकृतीच्या बाजू व कोन ह्यांना तिचे अवयव म्हणतात.

२०. **एकरूपआकृति**–जर एका आकृतीचे सर्व अवयव दुसरीच्या सर्व अवयवांशीं अनुक्रमें समान असून त्या आकृतीही समान असतील (म्हणजे त्यांचीं क्षेत्रें अथवा अवकाश समान असतील), तर त्यांना एकरूप आकृति म्हणावें ("एकरूप आकृति" व "समानआकृति" ह्यांतील भेदाकडे लक्ष असलें पाहिजे.)

२१. **अंतर**–(१) "दोन बिंदूंमधील अंतर" ह्याचा अर्थ "त्या बिंदूंस सांधणारी सरलरेषा;" (२) "एक बिंदु व एक अमर्यादरेषा ह्यांच्या मधील अंतर" ह्याचा अर्थ "त्या बिंदूपासून त्या रेषेवर काढिलेला लंब;" (३) "दोन समांतर रेषांमधील अंतर" ह्याचा अर्थ "त्यांपैकीं एकींतील कोणत्याही बिंदूपासून दुसरीवर टाकिलेला लंब," आणि (४) "एका बिंदूंत मिळणाऱ्या दोन रेषांमधील अंतर" ह्याचा अर्थ "त्या रेषांमधील कोन." ("कोणताही बिंदु व कोणत्याही वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मधील अंतर" ह्याचा अर्थ पुढें लिहिला जाईल.)

२२. **विवक्षित रेषेजवळची व तीपासून दूरची रेषा**–विवक्षित रेषेच्या एकाच अथवा भिन्न अंगांकडून दोन रेषा येऊन तिच्या एकाच टोंकांत तिला मिळाल्या असल्या, आणि त्यांनीं तिच्याशीं असमानकोन केलेले असले, तर जिनें लहान कोन केला असेल, ती विवक्षित रेषेपासून दुसरीपेक्षां जवळ आहे, असें म्हणतात; आणि त्यांनीं विवक्षितरेषेशीं समानकोन केले असले, तर त्या दोन्ही विवक्षितरेषेपासून समान अंतरावर आहेत, असें म्हणतात.

२३. **आकृतीची परिमिति**–आकृतीची मर्यादा दाखविणाऱ्या सर्व रेषांच्या बेरजेला त्या आकृतीची परिमिति म्हणतात.

गृहीतकृत्यें.

ह्या ग्रंथांत जीं कृत्यें करितां येतात असें (आधारावांचून) मानिलें आहे तीं येणेंप्रमाणें:—

१. एका बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदूपर्यंत सरळरेषा काढितां येते.

"एका बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदूपर्यंत सरळरेषा काढणें" ह्याला ते "दोन बिंदू सांधणें" म्हणतात. "**अ** आणि **ब** हे दोन बिंदु सांधिले" असें म्हणावयाच्या ठिकाणीं "**अब** सांधिली" असें ही म्हणण्याची वहिवाट आहे.

२. कोणतीही समर्याद सरळरेषा, तिची दिशा न बदलतां वाढवून पाहिजे तितकी लांब करितां येते (म्हणजे अमर्याद करितां येते).

" **अब** रेषा '**क** बिंदूपर्यंत' वाढविली," असलीं वाक्यें ह्या ग्रंथांत पुष्कळ येतात; त्यांचा अर्थ असा भासतो कीं, " आधीं **क** बिंदु घेतला आणि मग **अब** रेषा वाढवून त्या बिंदूपर्यंत पोंचविली." परंतु हा इच्छिलेला अर्थ नव्हे. " **अब** रेषा अमर्याद करून तीमध्यें एक बिंदु घेतला व त्याला **क** हें नांव दिलें " असा ह्या वाक्याचा ह्या ग्रंथांतील इष्टार्थ समजावा.

तसेंच " **अब** रेषा **कड** रेषेला '**फ** बिंदूंत' मिळे तोंपर्यंत वाढविली " ह्या वाक्याचा अर्थ " **अब** रेषा **कड** रेषेला मिळे तोंपर्यंत वाढविली, आणि ती तिला जेथें मिळाली, त्या बिंदूला **फ** हें नांव दिलें " असा समजावा.

३. कोणताही बिंदु मध्य कल्पून त्यापासूनच केवढ्याही अंतरानें (म्हणजे त्रिज्येनें) वर्तुळ काढितां येतें.

(गृहीतकृत्यांवरील टिप्पण वाचा.)

प्रत्यक्षप्रमाणें.

१. जे पदार्थ एकाच पदार्थाशीं प्रत्येकीं समान असतात, ते परस्पर समान असतात.

उपसिद्धांत १.–जे दोन पदार्थ दुसऱ्या दोन समान पदार्थांशीं अनुक्रमें समान असतात, ते परस्परांशीं समान असतात.

उपसिद्धांत २.–जर अनेक पदार्थांपैकीं पहिला दुसऱ्याशीं समान, दुसरा तिसऱ्याशीं समान, इत्यादिक (म्हणजे प्रत्येक पदार्थ त्याच्या पुढच्याशीं समान आहे असें) दिलें असेल, तर (१) पहिला पदार्थ शेवटच्याशीं समान असतो ; आणि (२) ते सर्व पदार्थ परस्परांशीं समान असतात.

हे सिद्धांत पहिल्या प्रत्यक्षप्रमाणाच्या अनेकवार योजनेनें क्रमिकरीतीनें सहज सिद्ध होतात.

अ–जर तीन पदार्थांपैकीं पहिल्यापेक्षां दुसरा मोठा व दुसऱ्याबरोबर तिसरा असेल, तर पहिल्यापेक्षां तिसराही मोठा असतो.

उपसिद्धांत–जर तीन पदार्थांपैकीं पहिल्याबरोबर दुसरा व दुसऱ्यापेक्षां तिसरा मोठा असेल, तर पहिल्यापेक्षां तिसरा मोठा असतो.

इ–जर तीन पदार्थांपैकीं पहिल्यापेक्षां दुसरा मोठा व दुसऱ्यापेक्षां तिसरा मोठा असेल, तर पहिल्यापेक्षां तिसराही मोठा असतो.

उ–कोणताही पदार्थ आपल्या सर्व भागांच्या बेरजेबरोबर असतो.

२.–समान पदार्थांमध्यें समान पदार्थ मिळविले असतां ज्या बेरजा येतात, त्या समान असतात.

३. समान पदार्थांतून समान पदार्थ वजा केले असतां ज्या बाक्या राहतात, त्या समान असतात.

४. दोन असमान पदार्थांमध्यें दोन समान पदार्थ मिळविले असतां ज्या बेरजा येतात, त्यांपैकीं मोठ्यापासून उत्पन्न झालेली बेरीज दुसऱ्या बेरजेपेक्षां मोठी असते.

५. दोन असमान पदार्थांतून दोन समान पदार्थ वजा केले असतां ज्या बाक्या राहतात, त्यांपैकीं मोठ्यांतून राहिलेली बाकी दुसऱ्या बाकीपेक्षां मोठी असते.

६. जे पदार्थ प्रत्येकीं एकाच पदार्थाच्या दुपटी असतात, ते परस्पर समान असतात.

७. जे पदार्थ प्रत्येकीं एकाच पदार्थाचीं अर्धें असतात, ते परस्पर समान असतात.

८. जर दोन रेषा, दोन कोन अथवा दोन आकृति परस्परांशीं सर्वांशीं मिळतील, तर त्या परस्परांशीं समान असतात.

९. सगळा पदार्थ आपल्या भागापेक्षां मोठा असतो.

१०. दोन सरळरेषांनीं पातळी व्यापिली जात नाहीं. (म्हणजे दोन सरळरेषांनीं आकृति होत नाहीं.)

११. सर्व काटकोन समान असतात.

उपसिद्धांत–जो कोन काटकोनाशीं समान असतो, तो काटकोन असतो.

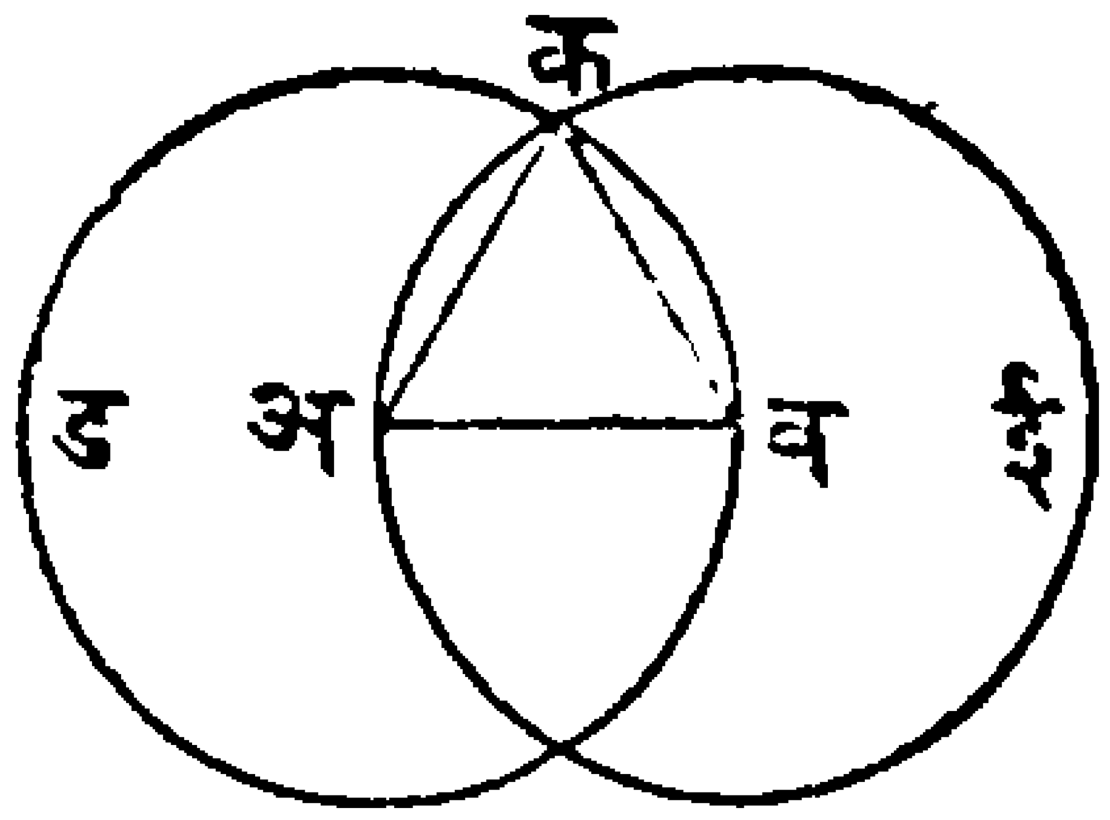
१२. जर एक सरळरेषा दुसऱ्या दोन सरळरेषांना मिळाली (किंवा तिनें त्यांस छेदिलें), आणि तिच्या एकाच अंगच्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी असली, तर त्या दोन रेषा पहिलीच्या त्याच अंगास वाढविल्या असतां शेवटीं मिळतात.

(प्रत्यक्षप्रमाणांवरील टिप्पण वाचा आणि त्याच्या शेवटीं लिहिलेल्या प्रश्नांचीं उत्तरें द्या.)

सिद्धांत १. कृत्य.

दिलेल्या समर्याद सरलरेषेवर[1] समभुजत्रिकोण काढावयाचें.

अब ही दिलेली समर्याद सरल- आहे; आणि तिजवर समभुज- ोण काढावयाचा आहे.



अ मध्य कल्पून, **अब** त्रिज्येनें **बकड** वर्तुळ काढ; (गृ. कृ. ३)
मध्य कल्पून **बअ** त्रिज्येनें **अकई** वर्तुळ काढ; (गृ. कृ. ३)
ोण ह्या वर्तुळांच्या **क** छेदनबिंदूपासून **अ** आणि **ब** बिंदूपर्यंत
, **कब** रेघा काढ. (गृ. कृ. १)

ाजे **अबक** हा इच्छिलेला समभुजत्रिकोण होईल.

कारण, **बकड** वर्तुळाचा **अ** मध्यबिंदु आहे, म्हणून **अक** ही
शीं बरोबर आहे; (व्याख्या १५)
णि **अकई** वर्तुळाचा **ब** मध्यबिंदु आहे, म्हणून **बक** ही **बअ**शीं
बर आहे; (व्याख्या १५)
ाजे **अक** आणि **बक** ह्या प्रत्येकीं **अब**शीं बराबर आहेत;
ून **अक** आणि **बक** ह्या परस्पर बरोबर आहेत; (प्र. प्र. १)
स्तव **अब**, **अक**, **बक**, ह्या परस्पर बराबर आहेत.
ह्याकरितां, **अबक** हा समभुजत्रिकोण आहे, (व्याख्या २४)
ो **अब** रेघेवर काढिला आहे.

प्रश्न.

१. (१.१) ह्या कृत्यांतील वर्तुलांच्या परिघांचा दुसरा छेदनबिंदु व

---

१ " दिलेल्या समर्याद रेघेवर आकृति काढणें " ह्याचा अर्थ, " दिलेली जिची एक बाजू होईल अशी आकृति काढणें " हा समजावा. रेघेवर " ह्या शब्दावरून रेघेच्या खालीं काढावयाची नाहीं, असा र्थ भासतो; परंतु तो खोटा.)

दिलेल्या रेषेचीं दोन्हीं टोकें हीं सांधिलीं असतां इच्छिल्या प्रकारचा दुसरा त्रिकोण होतो, असें दाखवा.

२. (१.१) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा.

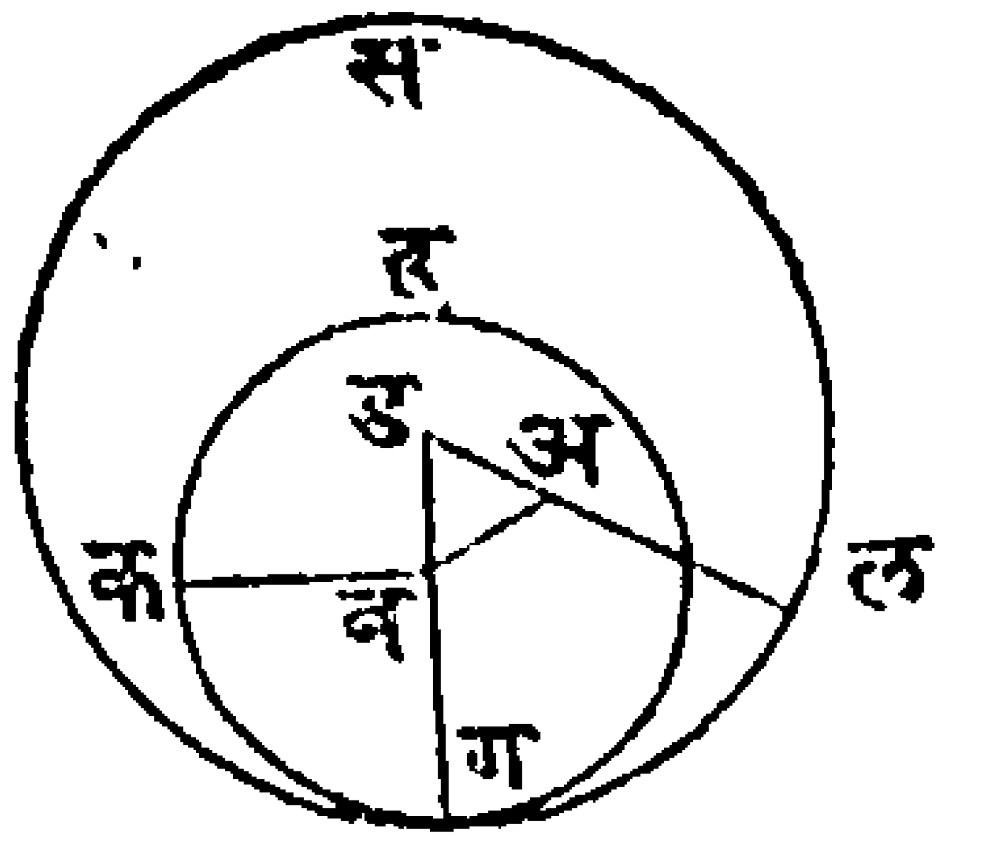
३. "**अक**, **बक** ह्या रेषा प्रत्येकीं **अब**शीं समान आहेत, म्हणून **अब**, **अक**, **बक** ह्या सर्व परस्पर समान आहेत" असें म्हणण्यांत कोणत्या वाक्याचा संक्षेप केल्यासारिखा होतो ?

सिद्धांत २. कृत्य.

दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेषेएवढी रेघ काढावयाचें.

अ हा दिलेला बिंदु आहे, व **बक** ही दिलेली रेघ आहे; आणि **अ** बिंदूपासून **बक** एवढी रेघ काढावयाची आहे.

अ बिंदूपासून **ब** बिंदूपर्यंत **अब** रेघ काढ; (गृ. कृ. १)



अब रेघेवर **अबड** समभुजत्रिकोण कर. (१.१)

ब मध्यबिंदु व **बक** त्रिज्या कल्पून **गकह** वर्तुल काढ. (गृ. कृ. ३)

डब रेषा ह्या वर्तुलाच्या परिघास मिळे तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)

ती त्याला **ग** बिंदूंत मिळाली असें मान.

ड मध्यबिंदु व **डग** त्रिज्या कल्पून **गसल** वर्तुळ काढ. (गृ. कृ. ३)

डअ रेघा ह्या वर्तुळाच्या परिघास मिळे तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)

ती त्याला **ल** बिंदूंत मिळाली असें मान.

म्हणजे **अल** ही इच्छिलेली रेघ होईल.

कारण, **ड** बिंदु **गसल** वर्तुळाचा मध्य आहे, म्हणून **डल** रेघ **डग** रेघेबरोबर आहे. (व्या. १५);

आणि **डअ**, **डब** हे त्यांचे भागही परस्पर बरोबर आहेत, (व्या. २४);

ह्याकरितां त्यांचे **अल**, **बग** हे राहिलेले भाग परस्पर बरोबर आहेत. (प्र. प्र. ३.)

आतां **व** बिंदु **गकह** वर्तुळाचा मध्य आहे, म्हणून **वक**, **वग** बरोबर आहे. (व्याख्या १५)
म्हणजे **अल** आणि **बक** ह्या रेघा प्रत्येकीं **वग**शीं बरावर आहेत,
म्हणून **अल** ही **बक** रेघेबरावर आहे. (प्र. प्र. १)
आणि ती **अ** बिंदूपासून काढिली आहे.

ह्याकरितां, दिलेल्या **अ** बिंदूपासून **अल** रेघ दिलेल्या **बक** रेघेबरावर काढिली आहे.

प्रश्न.

१. दुसऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या तयार करावयाची ती **बड** रेघा दुसऱ्या अंगास **गकह** वर्तुळाच्या परिघाला मिळे तोंपर्यंत वाढवून तयार करा; आणि तिच्या योगानें दुसरें वर्तुळ काढून इष्टरेघा काढून दाखवा.

२. **अब** रेघेच्या दुसऱ्या अंगास समभुजत्रिकोण काढून इष्टरेघा काढा.

३. **अ** आणि **क** हे बिंदु सांधून इष्टरेघा काढून दाखवा.

४. दिलेला बिंदु दिलेल्या रेषेंतच आहे असें समजून इष्टरेघा काढून दाखवा.

५. दिलेला बिंदु दिलेल्या रेघेचें एक टोंकच आहे असें समजून इष्टरेघा काढा.

६. (१.२) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा.

७. दिलेल्या रेघेवर असा एक समद्विभुजत्रिकोण काढा कीं त्याच्या समान बाजूंपैकीं प्रत्येक बाजू दुसऱ्या एका दिलेल्या रेघेबरोबर होईल. ह्यांत दिलेल्या रेघांच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे?

सिद्धांत ३. कृत्य.

दिलेल्या दोन असमान रेघांपैकीं मोठ्या रेघेचा लहान रेघेएवढा तुकडा पाडावयाचें.

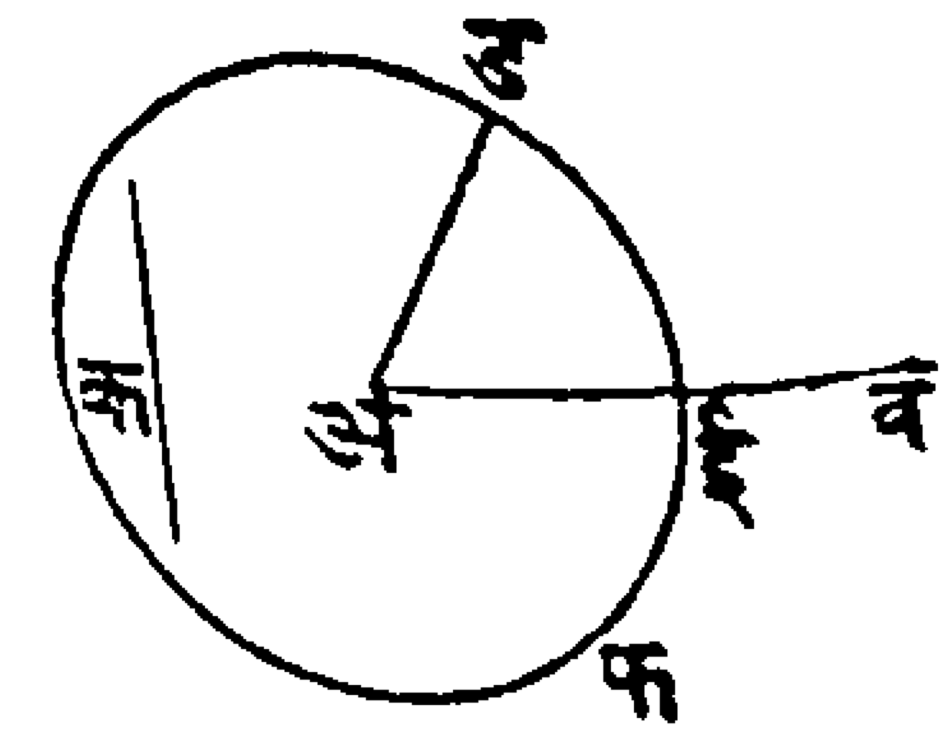
अब आणि **क** ह्या दिलेल्या दोन असमान रेघा आहेत, त्यांपैकीं **अब** रेघ **क** रेघेपेक्षां मोठी आहे; व **क** लहान रेघेएवढा **अब** रेघेचा तुकडा पाडावयाचा आहे.

अ बिंदूपासून क रेघेएवढी अड रेघ काढ, (१.२)

अ मध्य कल्पून अड त्रिज्येनें डईफ वर्तुळ काढ, (गृ. कृ. ३)

आणि तें अबला ई बिंदूंत छेदितें असें मान.

म्हणजे अई हा इच्छिलेला तुकडा होईल.



कारण, अ बिंदु डईफ वर्तुळाचा मध्य आहे, म्हणून अई रेघ अड रेघेबरोबर आहे. (व्याख्या १५)

पण क, अड बरोबर आहे. (रचना)

म्हणजे अई आणि क ह्या रेघा प्रत्येकीं अड बरोबर आहेत.

ह्यास्तव अई रेघ क रेघेबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, अब मोठ्या रेघेचा अई तुकडा क लहान रेघेएवढा पाडिला आहे.

प्रश्न.

१. (१.३) च्या आकृतींत अब रेघेच्या ब टोंकापासून तिचा धाकटीएवढा तुकडा पाडून दाखवा.

२. दोन असमान रेघांपैकीं धाकटी वाढवून मोठीएवढी करून दाखवा.

३. अनेक समर्याद सरलरेघांची बेरीज म्हणजे काय? ती कशा तयार करावी.

४. दोन असमान रेघांची वजाबाकी म्हणजे काय? ती कशी तयार करावी?

५. समर्यादरेघेची अमुक पट म्हणजे काय? ती कशी करावी?

६. दिलेल्या समर्याद सरलरेघेवर असा एक समद्विभुजत्रिकोण काढा कीं, त्याच्या समान बाजूंपैकीं प्रत्येक बाजू त्याच रेघेच्या दुपटीबरोबर होईल.

७. मोठ्या रेघेचा लहान रेघेएवढा तुकडा पाडावयाचा, तो मोठीच्या टोंकांखेरीज तींतल्या एखाद्या बिंदूपासून पाडितां येईल किंवा नाहीं? कां?

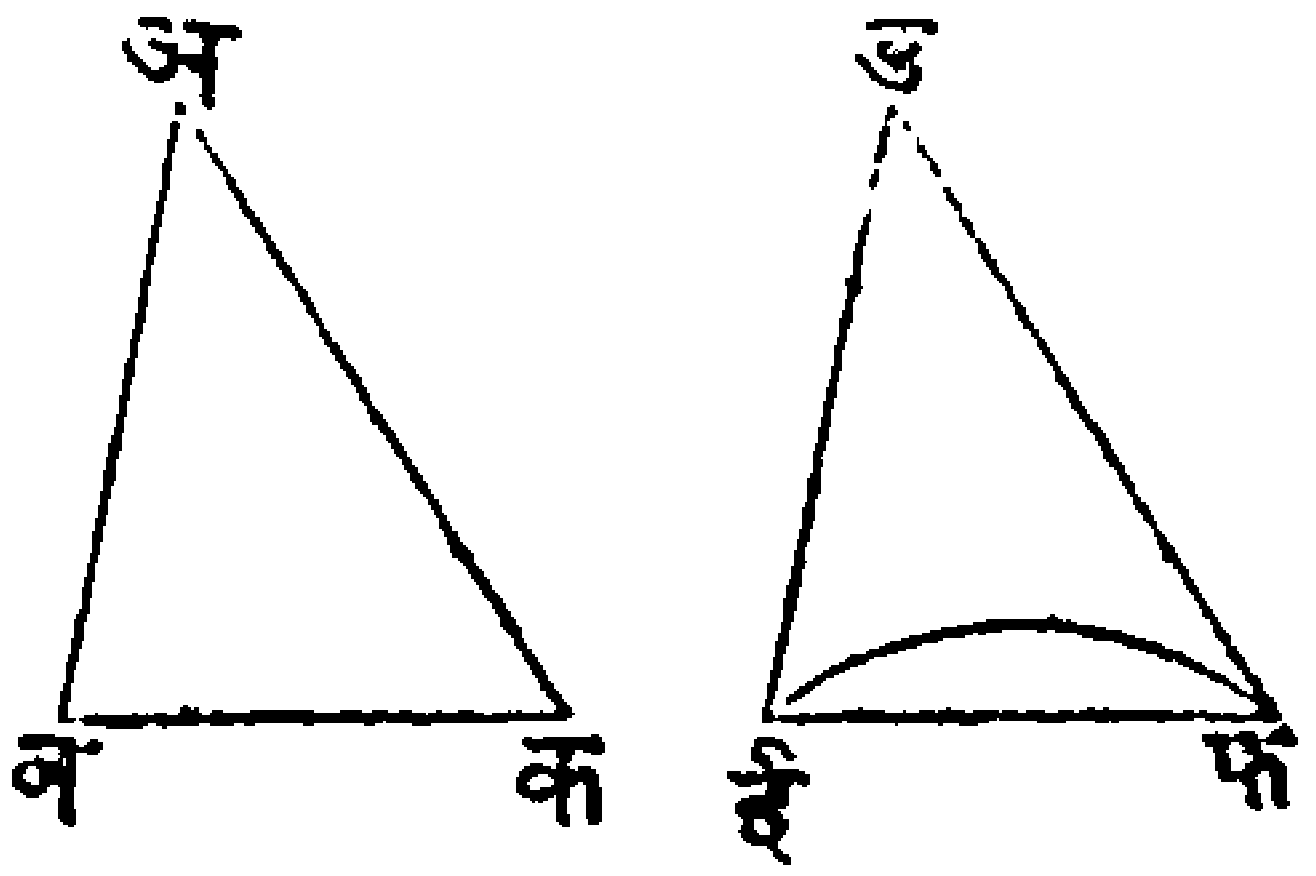
८. (१. २) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

५. दिलेल्या अमर्याद रेषेचा, तींतील दिलेल्या बिंदूपासून एका समर्याद रेषेएवढा तुकडा कसा पाडावा ?

सिद्धांत ४. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन हीं, दुसऱ्याच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर असतील, तर (१) त्यांचे पाये अथवा राहिलेल्या बाजू परस्पर समान होतील; (२) त्यांच्या राहिलेल्या कोनांपैकीं सारख्या बाजूंसमोरील कोन परस्पर समान होतील; व (३) ते दोन त्रिकोण एकमेकांशीं समान होतील.

जर **अबक** आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **अब** आणि **अक** ह्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील **बअक** कोन हीं, दुसऱ्याच्या **डई** आणि **डफ** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ईडफ** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत; तर (१) **अबक** त्रिकोणाची राहिलेली बाजू **बक**, **डईफ** त्रिकोणाच्या राहिलेल्या **ईफ** बाजूबरोबर होईल; (२) **अब** बाजूसमोरील **क** कोन, **अब**च्या बरोबरीच्या **डई** बाजूसमोरील **फ** कोनाबरोबर होईल व **अक** बाजूसमोरील **ब** कोन, **अक** बरोबरीच्या **डफ** बाजूसमोरील **ई** कोनाबरोबर होईल; आणि (३) **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाबरोबर होईल.



(१) कारण; जर **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणावर असा ठेविला कीं, **ब** बिंदु **ई** बिंदूवर पडेल आणि **बअ** बाजू **ईड** बाजूवर पडेल (म्हणजे **बअ**, **ईड** ह्यांची दिशा होईल)

तर ज्यापक्षीं **बअ** रेषेचें एक टोंक **ईड** रेषेच्या एका टोंकाशीं मिळून पहिली दुसरीवर पडली आहे,

आणि त्या रेषा समान आहेत, (प्रतिज्ञा)

त्यापक्षीं त्यांचीं राहिलेलीं टोंकें एकमेकांशीं मिळालीं पाहिजेत, म्हणजे **अ** बिंदु **ड** बिंदूवरच पडेल.

आतां ज्यापक्षीं **बअक** आणि **ईडफ** ह्या कोनांचे कोणबिंदु एकमेकांशीं मिळून पहिल्याची **अब** बाजू दुसऱ्याच्या **डई** बाजूवर पडली आहे,
आणि ते दोन कोन समान आहेत, (प्रतिज्ञा)
त्यापक्षीं त्यांच्या राहिलेल्या बाजू मिळाल्या पाहिजेत, म्हणजे **अक** बाजू **डफ** बाजूवरच पडेल (म्हणजे त्यांची दिशा एक होईल).

आतां ज्यापक्षीं **अक** रेषेचें **अ** टोंक **डफ** रेषेच्या **ड** टोंकाशीं मिळून पहिली दुसरीवर पडली आहे,
आणि त्या रेषा समान आहेत, (प्रतिज्ञा)
त्यापक्षीं त्यांचीं राहिलेलीं टोंकें एकमेकांशीं मिळालीं पाहिजेत, म्हणजे **क** बिंदु **फ** बिंदूवरच पडेल.

आतां **बक** रेषेचीं **ब**, **क** हीं टोंकें **ईफ** रेषेच्या **ई**, **फ** ह्या टोंकांशीं अनुक्रमें मिळतात असें सिद्ध झालें, त्यास्तव **बक** रेषा **ईफ** रेषेशीं सर्वांशीं मिळेल; कारण, जर त्या एकमेकीस मिळणार नाहींत, तर त्यांच्या योगानें पातळी व्यापिली जाईल (म्हणजे आकृति होईल), पण ही गोष्ट होणें अशक्य आहे; (प्र. प्र. १०)
म्हणून **बक** रेषा **ईफ** रेषेशीं सर्वांशीं मिळते असें सिद्ध झालें.

ह्याकरितां **बक** बाजू **ईफ** बाजूशीं बराबर आहे. (प्र. प्र. ८)

(२) आतां ज्यापक्षीं **अबक** आणि **अकब** हे कोन अनुक्रमें **डईफ** आणि **डफई** ह्या कोनांशीं सर्वांशीं मिळतात, असें वर दाखविलें; त्यापक्षीं **अबक** कोन **डईफ** कोनाबरोबर आणि **अकब** कोन **डफई** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. ८)

(३) तसेंच ज्यापक्षीं **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाशीं सर्वांशीं मिळतो, असें ही वर दाखविलें;
त्यापक्षीं ते त्रिकोण समान आहेत. (प्र. प्र. ८)

ह्याकरितां जर दोन त्रिकोणांपैकीं इत्यादि.

प्रश्न.

१. समान त्रिकोण व एकरूप त्रिकोण ह्यांत भेद काय ?

२. चवथ्या सिद्धांताचा नुसता तिसरा भाग (पहिले दोन भाग सिद्ध केले नाहींत असें समजून) साद्यंत सिद्ध करून दाखवा.

३. **अबक** त्रिकोणाच्या **अक**, **बक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील कोन हीं, **डईफ** त्रिकोणाच्या **डई**, **डफ** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; तर बाकीच्या कोनांपैकीं कोणता कोन कोणत्या बराबर होईल, हें सांगून सिद्ध करून दाखवा.

४. (१) चौरसाचा कर्ण त्याच्या ज्या कोनांतून जातो, त्याला दुभागितो, व (२) चौरसालाही दुभागितो, असें सिद्ध करा.

५. (१. ४) ह्याच्या सिद्धतेचें सामान्यस्वरूप सांगा.

६. समद्विभुजत्रिकोणाच्या शिरकोनास दुभागणारी रेषा पायाला मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर (१) ती पायाला दुभागिते, (२) पायावर लंब असते, व (३) त्या त्रिकोणालाही दुभागिते.

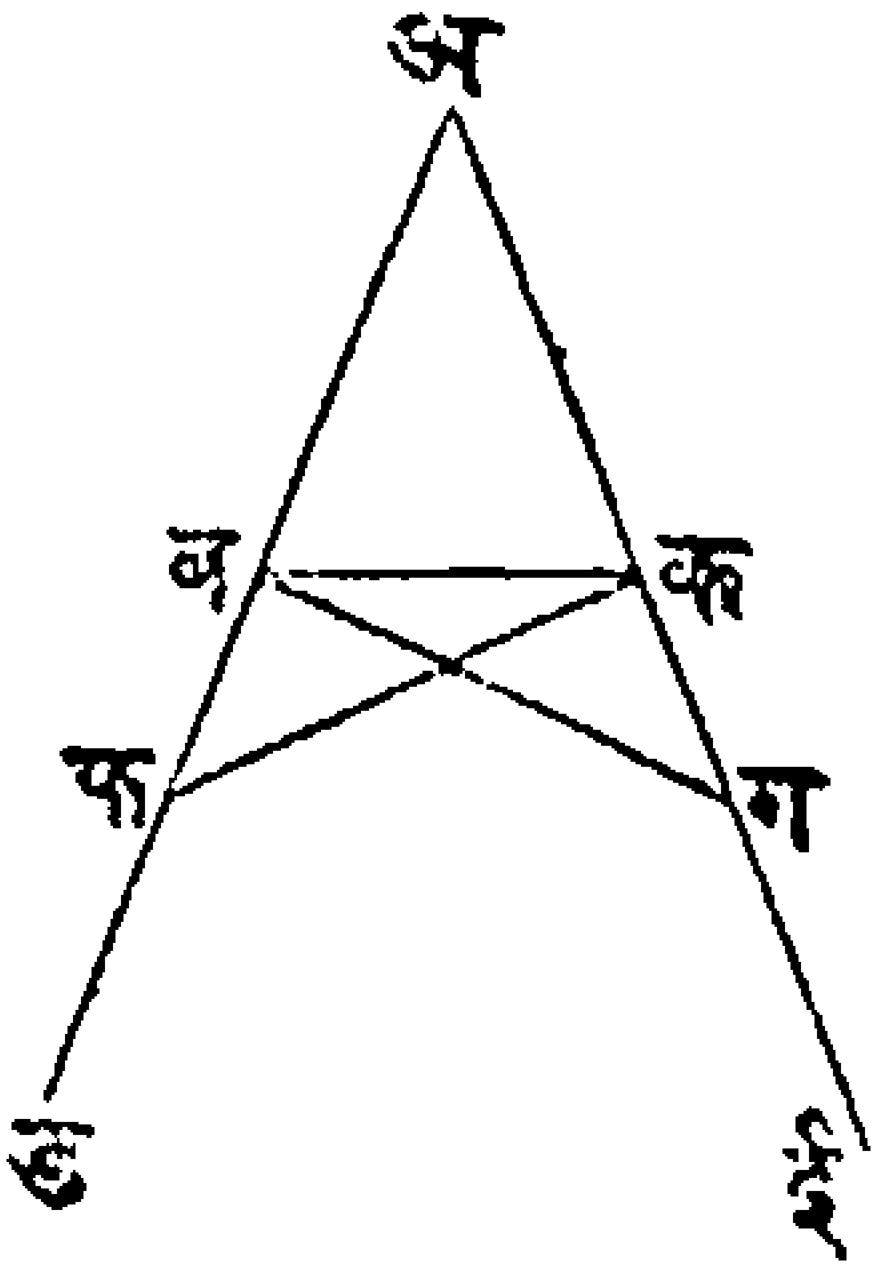
७. चवथ्या सिद्धांतांत दिलेल्या गोष्टींखेरीज "**अब**, **अक** ह्या बाजू समान आहेत (म्हणजे **अबक** हा समद्विभुजत्रिकोण आहे)" हेंही दिलें आहे, असें समजा; आणि ह्या सिद्धांताच्या योगानें **ब** कोन **क** कोनाबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

८. विवक्षित रेषेस दुभागून तीवर लंब असणाऱ्या रेषेंतील प्रत्येक बिंदु त्या रेषेच्या दोन्ही टोंकांपासून सारख्या अंतरांवर असतो, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत ५. प्रमेय.

(१) समद्विभुजत्रिकोणाचे पायाकडील म्हणजे समभुजांसमोरील कोन परस्पर बराबर असतात; आणि (२) समद्विभुजत्रिकोणाचे समभुज पायापलीकडे वाढविले असतां, पायाच्या दुसऱ्या अंगास जे कोन पडतात, तेही परस्पर बराबर असतात.

अबक ह्या समद्विभुजत्रिकोणाच्या **अब** आणि **अक** ह्या दोन बाजू परस्पर बराबर आहेत, व ह्या बाजू अनुक्रमें **ड** आणि **ई** ह्या बिंदूंपर्यंत वाढविल्या आहेत; तर (१) **अबक** कोन **अकब** कोनाबराबर होईल, व (२) **कबड** कोन **बकई** कोनाबराबर होईल.



बड रेषेंत एक **फ** बिंदु घे, आणि **कई** ह्या मोठ्या रेषेचा **बफ** ह्या लहान रेषेएवढा **कग** तुकडा पाड, (१. ३)

आणि **कफ**, **बग** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **बफ** रेषा **कग** रेषेबरोबर आहे, (रचना)

आणि **अब**, **अक** बरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)

ह्मणून **अफ** रेषा **अग** रेषेबरोबर आहे. (प्र. प्र. २)

आतां **अकफ** त्रिकोणाच्या **अक**, **अफ** ह्या दोन बाजू व त्यांच्यामधील **अ** कोन हीं, **अबग** त्रिकोणाच्या **अब**, **अग** ह्या दोन बाजू व त्यांच्यामधील **अ** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; ह्मणून पहिल्याचा **फक** पाया दुसऱ्याच्या **गब** पायाबरोबर आहे, आणि सारख्या बाजूंसमोरील कोन बरोबर आहेत, ह्मणजे **अकफ** कोन **अबग** कोनाबरोबर, आणि **अफक** कोन **अगब** कोनाबरोबर आहे. (१.४ भाग १ व २)

आतां **बफक** त्रिकोणाच्या **बफ**, **फक** ह्या दोन बाजू व त्यांच्यामधील **बफक** कोन हीं, **कगब** त्रिकोणाच्या **कग**, **गब** ह्या बाजू व त्यांच्यामधील **कगब** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत असें सिद्ध झालें; ह्मणून त्या त्रिकोणांच्या सारख्या बाजूंसमोरील त्यांचे राहिलेले कोन परस्पर समान आहेत; ह्मणजे (२) **फबक** कोन **गकब** कोनाबरोबर आहे, आणि **फकब** कोन **गबक** कोनाबरोबर आहे. (१.४ भा. २)

वरतीं दाखविलें आहे कीं, सर्व **अबग** कोन सर्व **अकफ** कोनाबरोबर आहे,

आणि **कबग** कोन व **बकफ** कोन हे त्यांचे भाग ही समान आहेत,

(१) ह्मणून शेष **अबक** कोन, शेष **अकब** कोनाबरोबर आहे, (प्र.प्र.३)

व हे **अबक** समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडील कोन आहेत.

(२) हेंही वरतीं सिद्ध केलें आहे कीं, **फबक** कोन **गकब** कोनाबरोबर आहे, व ते **बक** पायाच्या दुसऱ्या बाजूकडचे आहेत,

ह्याकरितां, **समद्विभुज** इत्यादि.

उपसिद्धांत.—"प्रत्येक समभुज त्रिकोण समकोण असतो" ही गोष्ट वरील सिद्धांतावरून उघड आहे.

प्रश्न.

१. पांचव्या सिद्धांताचा नुसता दुसरा भाग सिद्ध करा.

२. समभुजचौकोनाचे समोरासमोरचे कोन समान असतात, असें सिद्ध करा.

३. **अबक** आणि **डबक** हे दोन समद्विभुजत्रिकोण **बक** ह्या एकाच पायावर आहेत आणि दुसरा पहिल्याचे आंत आहे; तर **अबड** कोन **अकड** कोनाबरोबर आहे असें सिद्ध करा.

४. वरच्या प्रश्नांतले त्रिकोण **बक**च्या भिन्न अंगांस आहेत असें समजून तो सिद्ध करा.

५. दोन समद्विभुजत्रिकोण एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास असले, तर त्यांपैकीं कोणत्याही त्रिकोणाचा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या बाजूवर पडावयाचा नाहीं, असें सिद्ध करा.

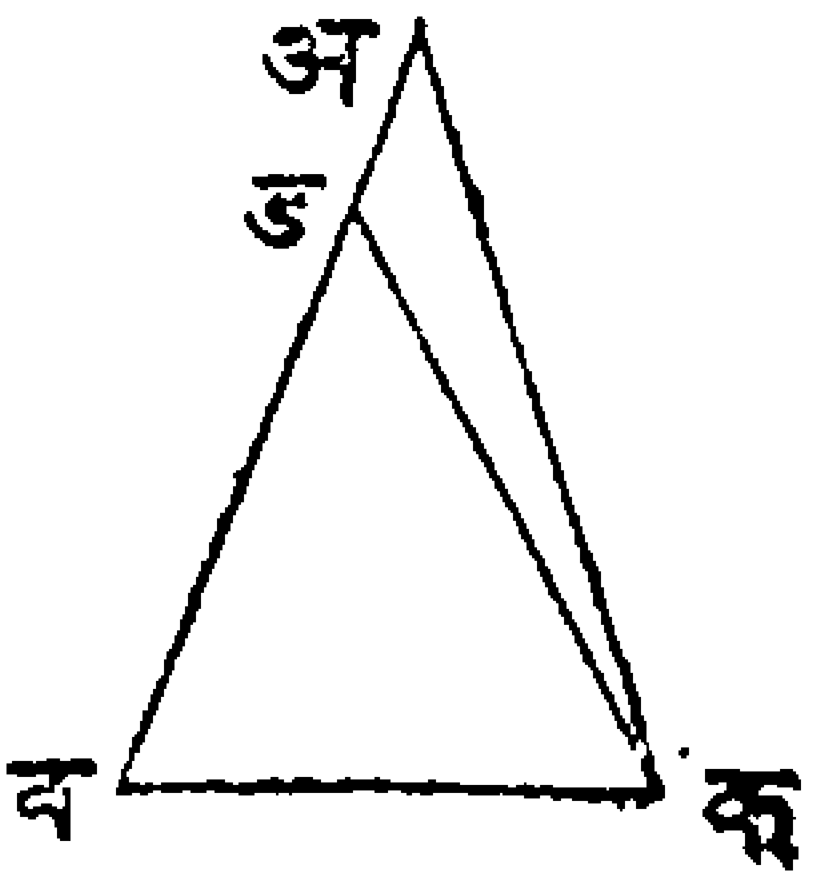
६ (१.५) ह्याच्या सिद्धतेमध्यें "**कई** ह्या मोठ्या रेघेचा **वफ** ह्या लहान रेघेएवढा तुकडा पाडा" असें ह्मटलें आहे. एथें **कई** ही **वफ**पेक्षां मोठी ह्मणण्यास आधार कोणता?

७ (१.५) ह्याची एखादी सोपी सिद्धता करून दाखवा.

सिद्धांत ६. प्रमेय.

त्रिकोणाचे दोन कोन परस्पर बराबर असले, तर त्या कोनांसमोरील त्याच्या बाजूही परस्पर बराबर असतात.

अबक त्रिकोणाचा **अबक** कोन **अकब** कोनाबराबर आहे, तर **अक** बाजू **अब** बाजूबराबर होईल.



कारण, जर **अब**, **अक** बराबर नसेल, तर ती **अक**पेक्षां मोठी किंवा लहान असली पाहिजे.

अब मोठी मान, आणि तिचा **बड** भाग धाकट्या **अक** बाजू बराबर कर, (१. ३) आणि **डक** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **डबक** आणि **अबक** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याची

डब बाजू दुसऱ्याच्या **अक** बाजूबरोबर आहे, (रचना)
बक बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे,
आणि पहिल्याचा **डबक** कोन दुसऱ्याच्या **अकब** कोनाबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणजे पहिल्याच्या **डब**, **बक** ह्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील **डबक** कोन हीं, दुसऱ्याच्या **अब**, **बक** ह्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील **अकब** कोन त्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत,
म्हणून **डबक** त्रिकोण **अबक** त्रिकोणाबरोबर झाला. (१.४ भाग २)
म्हणजे **अबक** त्रिकोण आपल्या भागाबरोबर झाला. पण हें अशक्य आहे. (प्र. प्र. ९)
म्हणून **अब** ही **अक** पेक्षां मोठी नाहीं, असें सिद्ध झालें.
ह्याप्रमाणेंच **अब** ही **अक** पेक्षां लहान नाहीं असें सिद्ध करतां येईल.
म्हणून **अब** ही **अक**शीं समान आहे.

ह्याकरितां, त्रिकोणाचे दोन कोन इ०.

उपसिद्धांत. प्रत्येक समकोणत्रिकोण समभुज असतो.

प्रश्न.

१. (१.६) ह्याच्या सिद्धतेंत **अक** एवढा **अब**चा तुकडा पाडावयाचा तो **अ** बिंदूपासून पाडिला, तर चालेल काय? कां?

२. सिद्धतेचे दोन प्रकार कोणते? त्यांचीं लक्षणें व उदाहरणें सांगा. (१.६) ह्या सिद्धांताची सिद्धता कोणत्या प्रकारची आहे?

३. "सत्तार्थक व्यापकसिद्धांताचा व्यापकव्यत्यास खरा असतो असा नियम नाहीं." ह्या वाक्याचा अर्थ सांगून उदाहरणानें स्पष्ट करा.

४. सहावा सिद्धांत कोणत्या सिद्धांताचा व्यापकव्यत्यास आहे?

५. (१. ५) च्या दुसऱ्या भागाचा व्यापकव्यत्यास सांगून तो सिद्ध करून दाखवा.

६. समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा एकमेकींस मिळत तोंपर्यंत वाढविल्यानें त्याच पायावर जो त्रिकोण होतो, तो समद्विभुज असतो.

७. (१. ५) च्या आकृतींत **बग**, **कफ** ह्यांचा छेदनबिंदु व शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा शिरकोनाला दुभागिते, असें दाखवा.

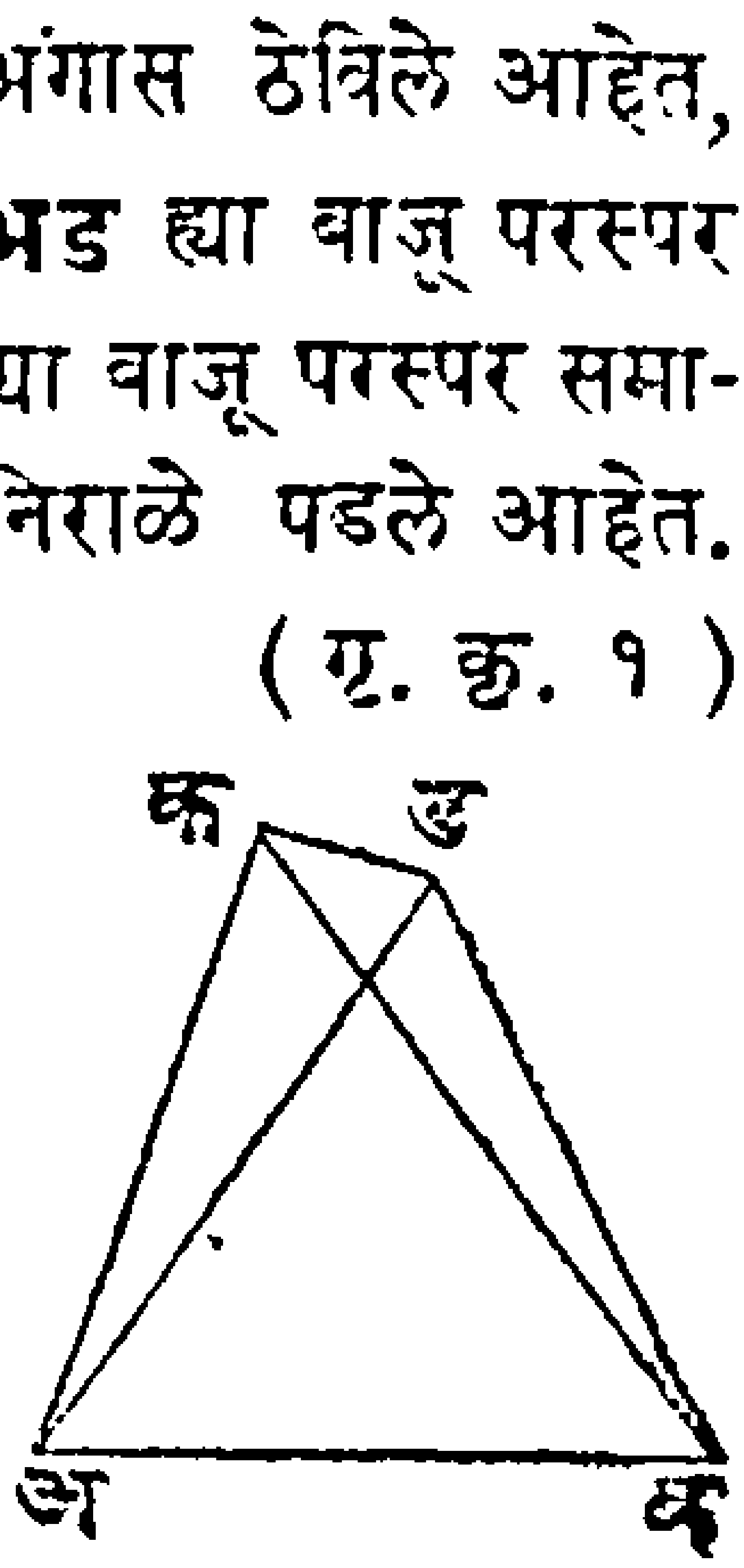
सिद्धांत ७. प्रमेय.

जे दोन त्रिकोण एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास ठेविले आहेत, पायाच्या एका टोंकांत संपणाऱ्या त्यांच्या बाजू समान आहेत व दुसऱ्या टोंकांत संपणाऱ्या बाजूही समान आहेत, असे दोन त्रिकोण कधींही निरनिराळे पडावयाचे नाहींत (म्हणजे एकमेकांशीं सर्वांशीं मिळतील.)

जर असे त्रिकोण निरनिराळे पडणें शक्य असेल, तर त्यांच्या तीन स्थिति संभवतील. त्या अशा–(१) प्रत्येकाचा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या बाहेर पडेल, (२) एकाचा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या आंत पडेल, अथवा (३) एकाचा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या बाजूमध्यें पडेल.

(१) प्रथम असें समज कीं, **अबक** आणि **अबड** हे त्रिकोण **अब** ह्या एकाच पायावर व त्याच्या एकाच अंगास ठेविले आहेत, पायाच्या **अ** टोंकांत संपलेल्या त्यांच्या **अक**, **अड** ह्या बाजू परस्पर समान आहेत, व **ब** टोंकांत संपलेल्या **बक**, **बड** ह्या बाजू परस्पर समान आहेत, आणि ते त्रिकोण पहिल्या स्थितींत निराळे पडले आहेत.

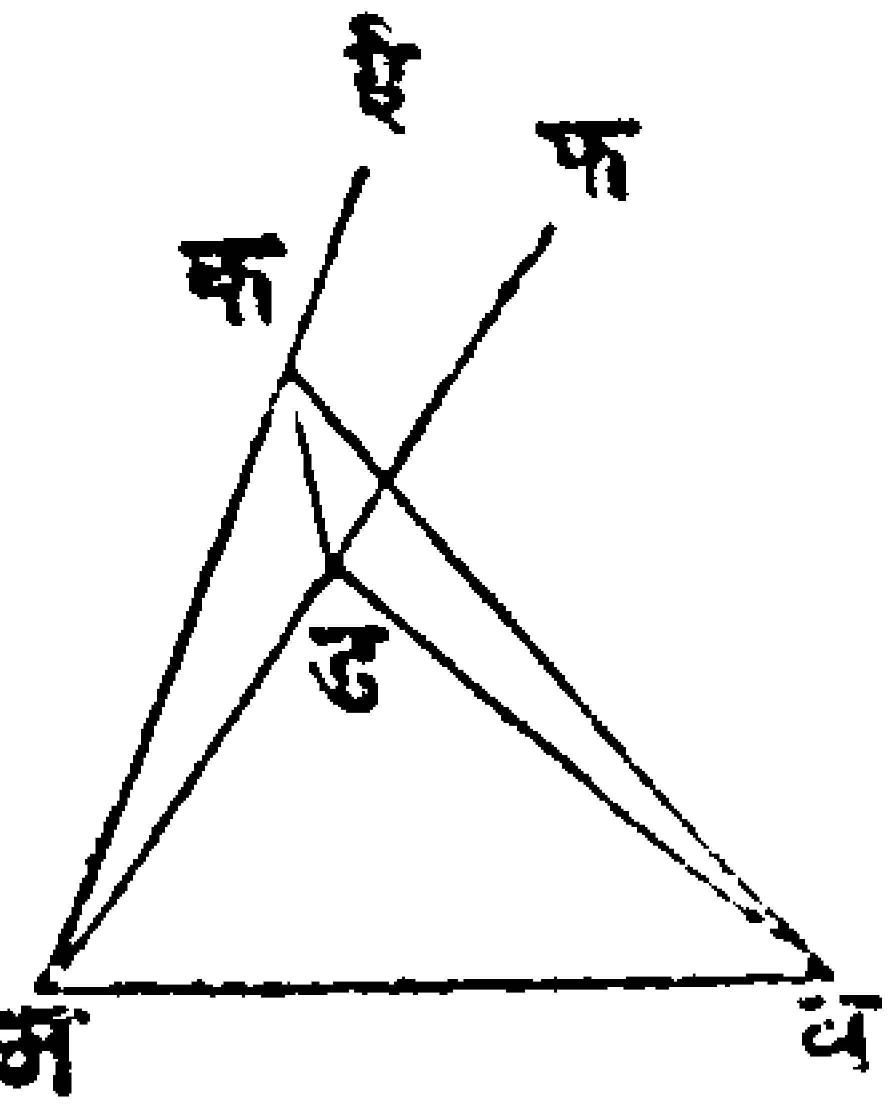
कड सांध. (ग्र. क्र. १)



आतां **अक**, **अड** बरोबर आहे (प्रतिज्ञा)
म्हणून **अकड** कोन **अडक** कोनाबरोबर आहे. (१. ५ भा. १)
परंतु **अकड** कोन **बकड** कोनाहून मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)
म्हणून **अडक** कोन ही **बकड** कोनाहून मोठा आहे; (प्र. प्र. अ.)
म्हणून **बडक** कोन **बकड** कोनाहून फारच मोठा आहे. (प्र. प्र. इ.)
पुनः, **बक**, **बड** बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून **बडक** कोन **बकड** कोनाबरोबर आहे. (१. ५ भा. १)

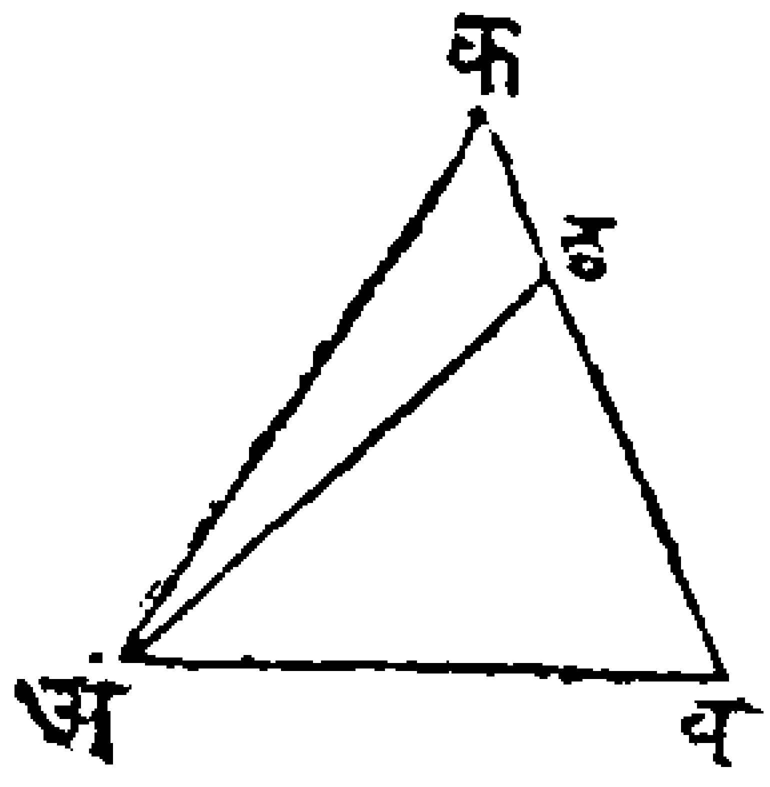
म्हणजे **बडक** कोन **बकड** कोनाहून मोठा आहे व त्याशीं समानही आहे, असें सिद्ध झालें. परंतु असें होणें अशक्य आहे. ह्याकरितां ते त्रिकोण पहिल्या स्थितींत निराळे पडणें शक्य नाहीं.

(२) आतां ते दुसऱ्या स्थितींत निराळे पडले असें मान, म्हणजे एका त्रिकोणाचा **ड** हा शिरोबिंदु दुसऱ्या त्रिकोणाच्या आंत पडला असें समज. **अक, अड** ह्या बाजू अनुक्रमें **ई, फ** बिंदूपर्यंत वाढीव, आणि **कड** सांध. (गृ. कृ. २ व १)



आतां **अकड** त्रिकोणांत **अक, अड** बरावर आहे, (प्रतिज्ञा)
ह्मणून **कड** पायाच्या दुसऱ्या बाजूकडील **ईकड** व **फडक** हे कोन परस्पर बरावर आहेत. (१. ५ भा. २)
परंतु **ईकड** कोन **बकड** कोनाहून मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)
ह्मणून **फडक** कोनही **बकड** कोनाहून मोठा आहे; (प्र. प्र. अ.)
ह्मणून **बडक** कोन **बकड** कोनाहून फारच मोठा आहे. (प्र. प्र. इ.)
पुनः **बक, बड** बरावर आहे, (प्रतिज्ञा)
ह्मणून **बडक** कोन **बकड** कोनाबरावर आहे. (१. ५ भा १)
म्हणजे **बडक** कोन **बकड** कोनाहून मोठा आहे व त्याशीं समानही आहे, असें सिद्ध झालें. परंतु असें होणें अशक्य आहे.
ह्मणून ते त्रिकोण दुसऱ्या स्थितींतही निराळे पडणें शक्य नाहीं.

(३) आतां एकाचा **ड** हा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या बाजूमध्यें पडला असें मानिलें; तर **बक** बाजू **बड** पेक्षां मोठी होते. (प्र. प्र. ९)



परंतु हा प्रतिज्ञेशीं विरोध होय. म्हणून ते त्रिकोण तिसऱ्या स्थितींतही निराळे पडणें शक्य नाहीं. ह्यास्तव ते कोणत्याही स्थितींत निराळे पडणें शक्य नाहीं (म्हणजे ते सर्वांशीं मिळून जातील) असें सिद्ध झालें.

ह्याकरितां, जे दोन त्रिकोण इ०.

प्रश्न.

१. एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास दोन समद्विभुज-त्रिकोण काढिले असतां त्यांपैकीं एकाचा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या आंतच पडतो.

२. (१. ७) ह्याच्या पक्षांतल्या दिलेल्या चार गोष्टी निरनिराळ्या सांगा; आणि त्यांपैकीं कोणतीही एक गोष्ट गाळिली असतां हा सिद्धांत खोटा पडतो, असें दाखवा.

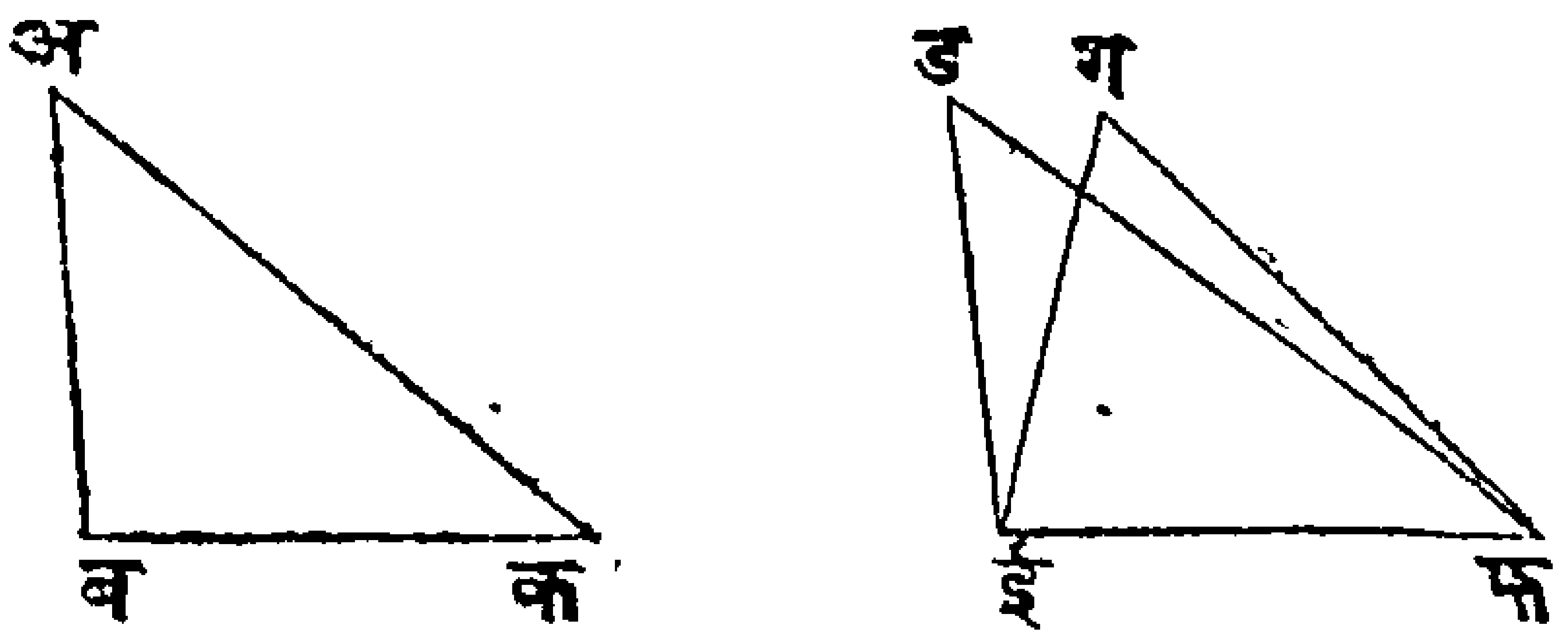
३. दोन त्रिकोण एकाच पायावर आहेत, त्याच्या एकाच अंगास आहेत, आणि पायाच्या एका टोंकांत संपणाऱ्या त्यांच्या बाजू समान आहेत; तर दुसऱ्या टोंकांत संपणाऱ्या त्यांच्या बाजू समान असतील किंवा नाहीं ? कारण काय ?

४. (१. ७) च्या सिद्धतेच्या प्रत्येक भागाला जे आधार लागतात, ते अनुक्रमानें सांगा.

सिद्धांत ८. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याच्या दोन बाजूंबराबर असून, त्यांचे पायेही बराबर असतील, तर पहिल्याच्या त्या दोन बाजूंच्या मधील कोन, त्यांच्या बराबरीच्या दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मधील कोनाबराबर होईल.

अबक आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **अब**; **अक** ह्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या **डई**, **डफ** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत; आणि **बक** पाया **ईफ** पायाबराबर आहे. तर **बअक** कोन **ईडफ** कोनाबराबर होईल.



कारण, जर **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणावर असा ठेविला, कीं

ब बिंदु **ई** बिंदूवर पडेल, आणि **बक** रेघ **ईफ** रेघेवर पडेल;
तर ज्यापक्षीं **बक** रेघ **ईफ** रेघेबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)
त्यापक्षीं **क** बिंदु **फ** बिंदूशीं मिळेल.

आतां हे दोन त्रिकोण **ईफ** ह्या एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास ठेविले आहेत, (रचना)
पायाच्या **ई** टोंकांत संपणाऱ्या त्यांच्या बाजू समान आहेत. (प्रतिज्ञा)
आणि **फ** टोंकांत संपणाऱ्या बाजूही समान आहेत. (प्रतिज्ञा)
ह्मणून ते त्रिकोण **ईगफ**, **ईडफ** ह्या किंवा दुसऱ्या कोणत्याही स्थितींत निरनिराळे पडणार नाहींत (ह्मणजे सर्वांशीं मिळतील). (१. ७)
ह्याकरितां **बअक** कोन **ईडफ** कोनाशीं सर्वांशीं मिळेल, ह्मणून तो त्याबरोबर आहे. (प्र. प्र. ८)

ह्याकरितां जर दोन त्रिकोणांपैकीं इत्यादिक.

प्रश्न.

१. आठवा सिद्धांत सातव्याच्या साह्यावांचून सिद्ध करा.

२. जे त्रिकोण मिथःसमभुज असतात (म्हणजे एकाच्या तीन बाजू दुसऱ्याच्या तीन बाजूंशीं अनुक्रमें समान असतात) ते एकरूप असतात, असें सिद्ध करा.

३. विवक्षित समर्यादरेषेस दुभागून तीवर लंब असणाऱ्या रेषेच्या बाहेरील कोणताही बिंदु त्या समर्यादरेषेच्या दोन्ही टोंकापासून सारख्या अंतरांवर नसतो.

४. समभुजचौकोनाचा कर्ण त्याच्या ज्या कोनांतून जातो, त्यास दुभागितो.

५. समभुजचौकोनाचे (तसेच चौरसाचे) दोन्ही कर्ण परस्परांस दुभागितात; व परस्परांवर लंब असतात.

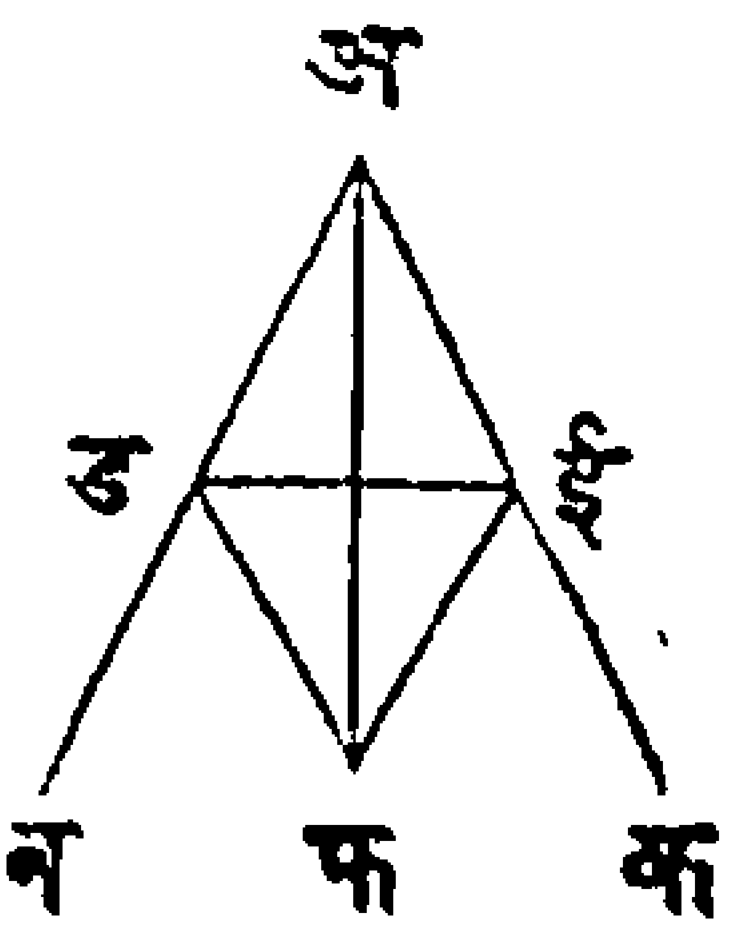
६. समद्विभुजत्रिकोणाचा शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा शिरकोनास दुभागिते; त्रिकोणास दुभागिते, व पायावर लंब असते.

सिद्धांत ९. कृत्य.

दिलेल्या कोनाचे दोन समान भाग करावयाचे.

बअक हा एक दिलेला कोन आहे; व त्याचे दोन समान भाग करावयाचे आहेत.

अब रेघेंत **ड** हा एक बिंदु घे, आणि **अक**-चा **अई** तुकडा **अड** एवढा पाड; (१. ३) **डई** सांध; **डई** रेघेच्या ज्या अंगास दिलेला कोन आहे, त्याच्या विरुद्ध अंगास **डई** रेघेवर **डईफ** हा समभुजत्रिकोण कर. (१. १) आणि **अफ** सांध. (गृ. कृ.१) म्हणजे **अफ** रेघेनें झालेले **बअक** कोनाचे दोन भाग समान होतील.



कारण **अड** रेघ **अई** रेघेबरोबर आहे, (रचना) आणि **अफ** रेघ **डअफ** व **ईअफ** ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे, म्हणजे पहिल्याच्या **डअ, अफ** ह्या बाजू दुसऱ्याच्या **ईअ, अफ** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत; आणि **डफ** पाया **ईफ** पाया-बरोबर आहे; (व्याख्या २४)

म्हणून **डअफ** कोन **ईअफ** कोनाबरोबर आहे. (१. ८)

ह्याकरितां, **अफ** रेघेनें दिलेला **बअक** कोन दुभागिला आहे, म्हणजे त्याचे दोन समान भाग केले आहेत.

प्रश्न.

१. कोन दुभागण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. कोन दुभागण्याकरितां जी एथें रचना केलेली आहे, तीपैकीं कोणती रचना कोन दुभागण्यास आवश्यक आहे व कोणती रचना सिद्धतेकरितां करावी लागते ?

३. (१. ९) च्या आकृतींत **डई**च्या ज्या अंगास दिलेला कोन आहे, त्याच अंगास समभुजत्रिकोण काढिला तर चालेल काय ? कां ?

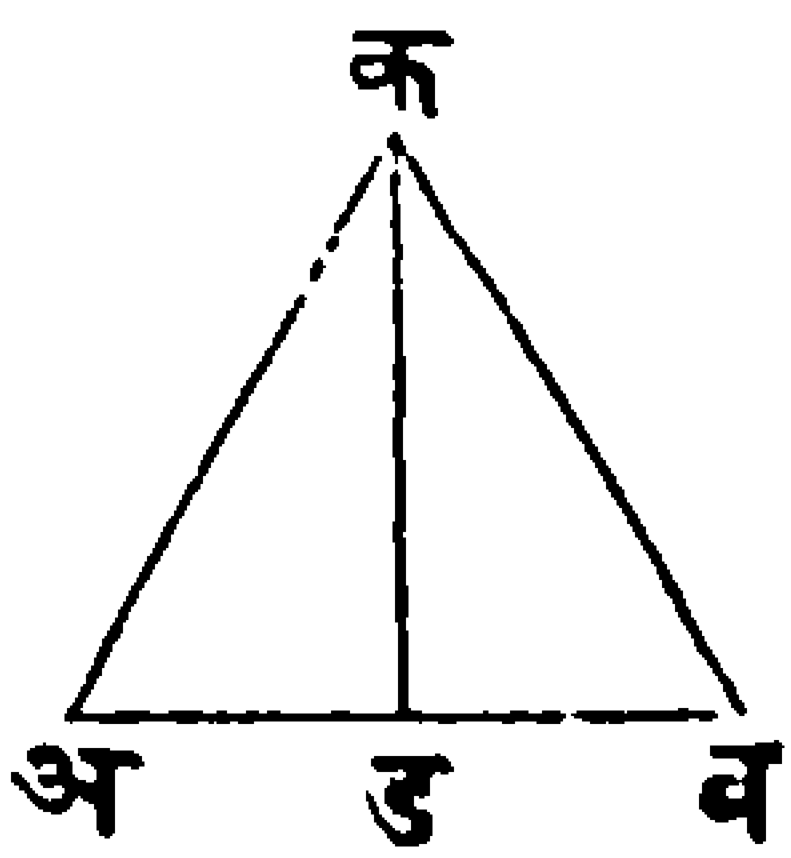
४. नवव्याच्या रचनेंत काढिलेल्या समभुजत्रिकोणाचा शिरोबिंदु दिलेल्या कोनाच्या बाजूंत किंवा त्या कोनाच्या बाहेर पडणार नाहीं, असें सिद्ध करा.

५. "नवव्या सिद्धांताच्या योगानें कोनाचे किती समानभाग करितां येतील ?" ह्या प्रश्नाचें सामान्य उत्तर सांगा; आणि कोनाचे चार समान भाग करून दाखवा.

सिद्धांत १०. कृत्य.

दिलेल्या समर्याद रेघेचे दोन समान भाग करावयाचें.

अब ही एक दिलेली समर्याद रेघ आहे, आणि तिचे दोन समान भाग करावयाचे आहेत.



अब रेघेवर **अबक** समभुजत्रिकोण कर. (१. १)

आणि **अकब** कोन **कड** रेघेनें दुभागून, (१.९) ती **अब** रेघेला **ड** बिंदूंत मिळेतोंपर्यंत वाढीव.

म्हणजे **ड** बिंदूंत **अब** रेघेचे दोन समान भाग होतील.

कारण **अक**, **बक** बरोबर आहे, (व्याख्या २४)

आणि **कड** रेघ **अकड** आणि **बकड** ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे,

म्हणजे पहिल्याच्या **अक**, **कड** ह्या बाजू दुसऱ्याच्या **बक**, **कड** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बरावर आहेत;

आणि **अकड** कोन **बकड** कोनाबराबर आहे; (रचना)

म्हणून **अड** पाया **बड** पायाबरावर आहे. (१.४ भा. १)

ह्याकरितां, **ड** बिंदूंत दिलेल्या **अब** रेघेचें दोन समान भाग झाले आहेत.

प्रश्न.

१. रेघा दुभागण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. दिलेल्या रेघेचें प्रत्येक टोंक मध्य व दिलेली रेघा त्रिज्या कल्पून दोन वर्तुलें काढिलीं, आणि त्यांच्या परिघांचे छेदनबिंदु सांधिले, तर सांधणारी रेघा दिलेल्या रेघेला दुभागिते, असें सिद्ध करा.

३. रेघा दुभागण्याची दहाव्या सिद्धांतांतली रीति व वरच्या प्रश्नांतली रीति ह्यांपैकीं सोपी कोणती ? कां ?

४. "(१. १०) ह्याच्या योगानें रेघेचे किती समान भाग करितां येतील ?" ह्या प्रश्नाचें सामान्य उत्तर सांगा; आणि रेघेचे चार समान भाग करून दाखवा.

५. दुसऱ्या प्रश्नांतली रेषा दिलेल्या रेषेवर लंब असते, असें सिद्ध करा.

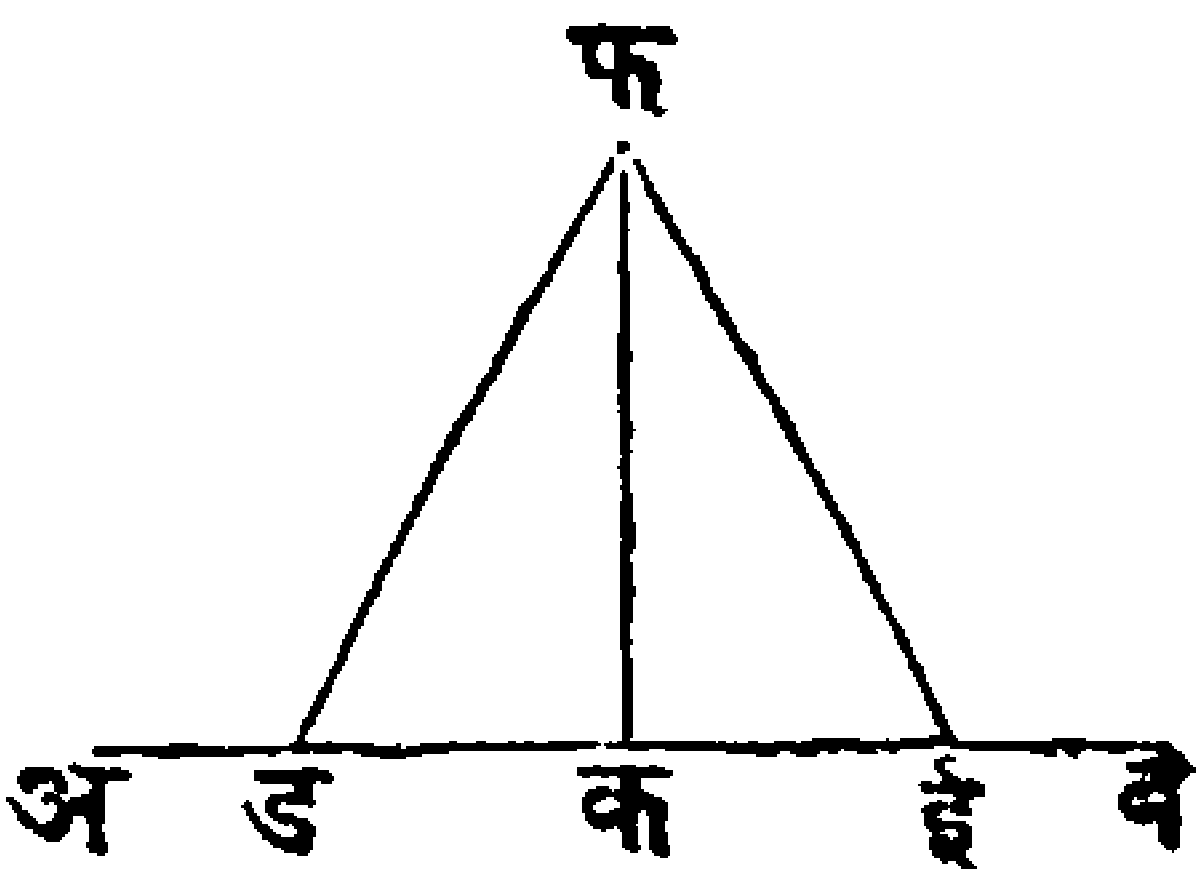
६. ज्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागितात व परस्परांवर लंबही असतात, तो समभुजचौकोन असतो.

७. रेषेचे दोन समान भाग अनेक बिंदूंत होत नाहींत, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत ११. कृत्य.

दिलेल्या रेघेवर तींतील दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढावयाचें.

अब ही एक दिलेली रेघ आहे, आणि तींतील दिलेला बिंदु **क** आहे: व त्यापासून तीवर लंब काढावयाचा आहे.



अक रेघेमध्यें दुसरा एक **ड** बिंदु घे, आणि **कई**, **कड** बराबर कर. (१. ३)

डई रेघेवर **डफई** समभुजत्रिकोण कर. (१. १)

आणि **कफ** सांध. (गृ. कृ. १)

म्हणजे **क** बिंदूपासून काढिलेली **कफ** रेघ **अब** रेघेवर लंब होईल.

कारण **कड**, **कई** बराबर आहे, (रचना)

आणि **कफ** रेघ **डकफ** व **ईकफ** ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे; म्हणजे पहिल्याच्या **डक**, **कफ** ह्या बाजू दुसऱ्याच्या **ईक**, **कफ** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;

आणि **डफ** पाया **ईफ** पायाबराबर आहे; (व्याख्या २४)

म्हणून **डकफ** कोन **ईकफ** कोनाबराबर आहे; (१. ८)

म्हणून **कफ** रेषा **अब** रेषेवर लंब आहे, (व्याख्या १०)

आणि तो लंब **अब** रेघेंतील **क** बिंदूपासून काढिला आहे.

प्रश्न.

१. (१.११) ह्याची सामान्य रीति सांगा.

२. दिलेल्या रेषेच्या एका टोंकापासून तीवर लंब काढावयाचा असला, तर ग्रंथांतल्या रचनेपेक्षां जास्त काय रचना केली पाहिजे ?

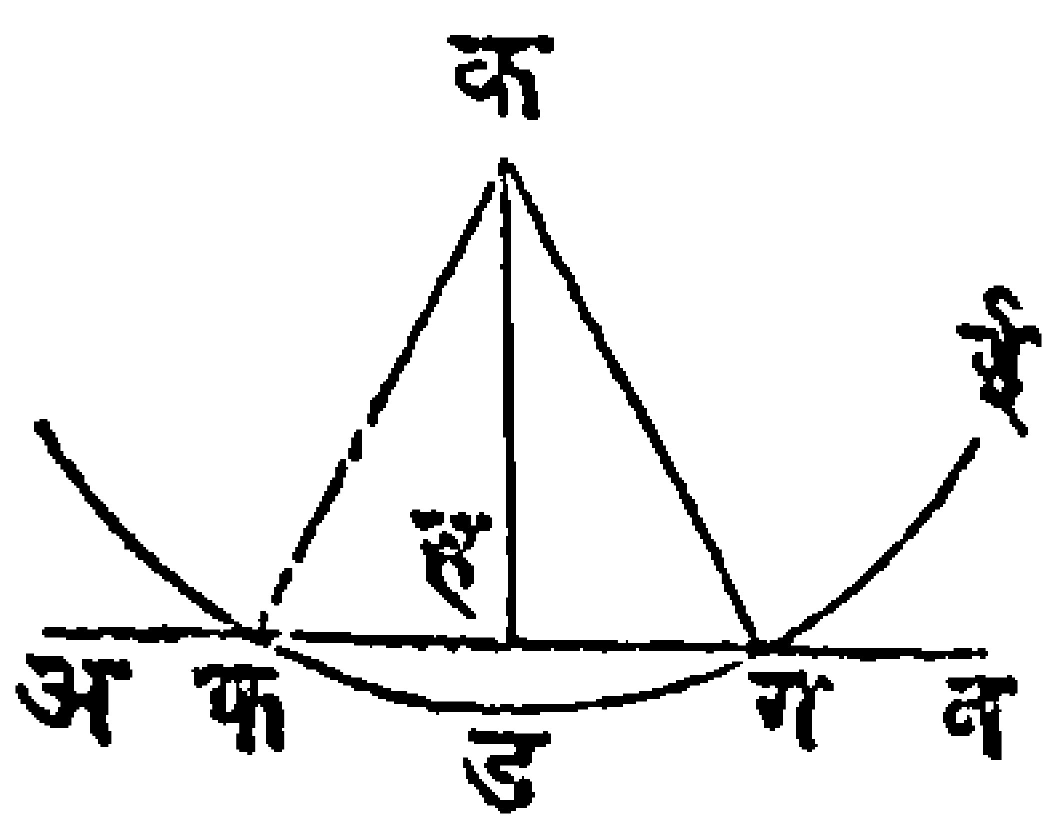
३. दिलेल्या रेषेवर तींतील दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढावयास अवश्य वर्तुलें व रेषा किती काढाव्या लागतात ? आणि लंबाच्या सिद्धतेकरितां किती लागतात ?

४. कोणत्याही रेषेवर तींतील एकाच बिंदूपासून तिच्या एकाच अंगास अनेक लंब निघणें संभवत नाहीं, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत १२. कृत्य.

दिलेल्या अमर्याद रेघेवर तिच्याबाहेरील दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढावयाचें.

अब ही एक दिलेली अमर्याद रेघ आहे, म्हणजे ती दोन्ही बाजूंस हवी तितकी वाढलेली आहे; व तिच्याबाहेर **क** हा एक दिलेला बिंदु आहे; आणि **क** पासून **अब** वर लंब काढावयाचा आहे.



अब रेषेच्या दुसऱ्या अंगास एक **ड** बिंदु घे, आणि **क** मध्यापासून **कड** अंतरानें **फगई** वर्तुल काढ; (गृ. कृ. ३)

म्हणजे तें **अब** रेघेला **फ** आणि **ग** ह्या बिंदूंत छेदील.

फग रेघेचे **ह** स्थळीं दोन समान भाग कर; (१. १०)

आणि **कह** सांध. (गृ. कृ. १)

म्हणजे **क** बिंदूपासून काढलेली **कह** रेघ **अब** रेघेवर लंब होईल.

कारण; **कफ** आणि **कग** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **फह**, **हग** बराबर आहे, (रचना)

आणि **हक** रेघ **फहक** व **गहक** ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे; म्हणजे पहिल्याच्या **फह**, **हक** बाजू दुसऱ्याच्या **गह**, **हक** बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;

आणि **कफ** पाया **कग** पाया बराबर आहे; (व्याख्या १५)

यास्तव **कहफ** कोन **कहग** कोनाबराबर आहे. (१. ८)

म्हणून कह रेषा अब वर लंब आहे, (व्याख्या १०)
आणि तो लंब क बिंदूपासून काढिला आहे.

प्रश्न.

१. ज्या त्रिकोणाच्या एका कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूवर काढिलेला लंब त्या बाजूला दुभागितो, तो त्रिकोण समद्विभुज असतो.

२. ज्या त्रिकोणाच्या कोणत्यातरी दोन कोणबिंदूंपासून समोरच्या बाजूंवर काढिलेले लंब त्या त्या बाजूंस दुभागितात, तो समभुजत्रिकोण असतो.

३. (१. १२) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा. ह्यांत दिलेली रेषा समर्याद असेल, तर ती सामान्यरीति योजण्यास कोठें अडचण पडण्याचा संभव आहे!

४. (१. १२) च्या रचनेंत जो नवा बिंदु घेतला आहे, तो, दिलेल्या रेषेच्या ज्या अंगास दिलेला बिंदु आहे, त्याच अंगास घेतला तर चालेल काय? कारण काय?

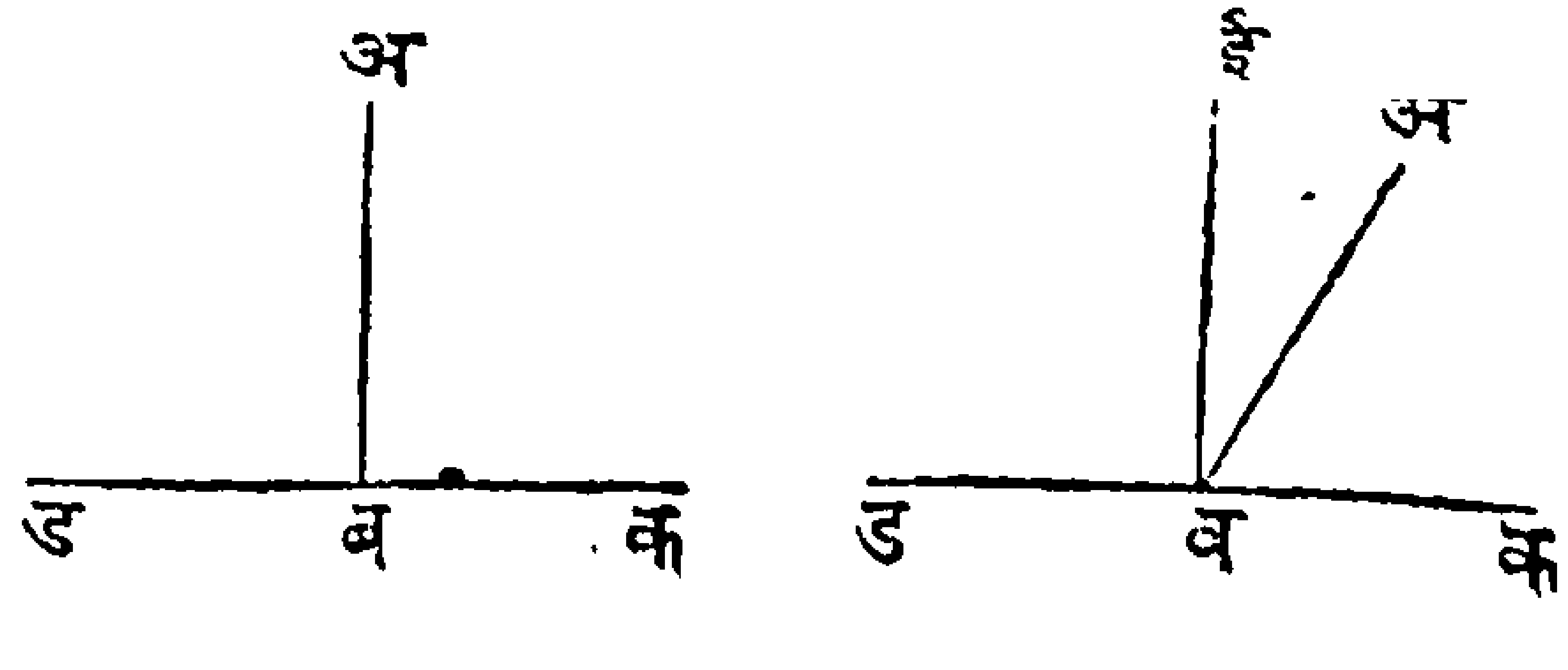
५. समभुजत्रिकोणाचे कोणबिंदु व समोरच्या बाजूंचे मध्य ह्यांस सांधणाऱ्या रेषा समान असतात, असें सिद्ध करा.

६. एक अमर्याद रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदु ह्यांच्या मधील अंतर कसें मोजावें?

सिद्धांत १३. प्रमेय.

एक रेषा दुसऱ्या रेषेस मिळाली आणि दुसरीच्या एकाच अंगास दोन कोन झाले, तर ते दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर असतात. (टि. प.)

अब रेघ, कड रेघेस मिळून तिचे एके अंगास कबअ आणि अबड कोन करिते; तर हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर आहेत.



कारण, (१) जर **कबअ** आणि **डबअ** हे कोन समान असतील, तर त्यांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोन आहे, (व्याख्या १०)
म्हणून ते दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर आहेत.

परंतु (२) जर ते कोन समान नसले, तर **ब** बिंदूपासून **कड** रेषेवर **बई** लंब काढ. (१. ११)

आतां **कबई** कोन, **कबअ** आणि **अबई** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे; (प्र. प्र. ३)
तो कोन व ती बेरीज ह्या दोन समान पदार्थांपैकीं प्रत्येकामध्यें **डबई** कोन हा एकच पदार्थ मिळविला,
तेव्हां **कबई** आणि **डबई** ह्या दोन कोनांची बेरीज ही, **कबअ**, **अबई** आणि **ईबड** ह्या तीन कोनांच्या बेरजेबरोबर झाली. (प्र. प्र. २)
पुनः **डबअ** कोन, **डबई** आणि **ईबअ** ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे; (प्र.प्र.३)
तो कोन व ती बेरीज ह्या दोन समान पदार्थांपैकीं प्रत्येकामध्यें **कबअ** कोन हा एकच पदार्थ मिळविला,
तेव्हां **डबअ** आणि **कबअ** ह्या दोन कोनांची बेरीज ही, **डबई**, **ईबअ** आणि **कबअ** ह्या तीन कोनांच्या बेरजेबरोबर झाली.(प्र.प्र.२)
आणि ह्याच तीन कोनांच्या बेरजेबरोबर **कबई** आणि **डबई** ह्या दोन कोनांची बेरीज आहे असें वर सिद्ध केलें; म्हणून **डबअ** आणि **कबअ** ह्या दोन कोनांची बेरीज, **कबई** आणि **डबई** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
परंतु **कबई** आणि **डबई** हे कोन प्रत्येकीं काटकोन आहेत. (व्या.१०)
म्हणून त्यांची बेरीज दोन काटकोन आहे.
म्हणून **डबअ** आणि **कबअ** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर आहेत. ह्याकरितां जर एक रेघ इ०.

प्रश्न.

१. (१) (१. १३) च्या प्रतिज्ञेंत सलग्नकोण हा शब्द घालून ती प्रतिज्ञा म्हणून दाखवा. (२) (१. १३) च्या सिद्धतेचे दोन भाग कां झाले ? (३) दोन काटकोनांचा कोन मानिला, तर (१. १३) ह्याच्या सिद्धतेमध्यें संक्षेप कोणता करितां येईल ?

२. दोन सलग्नकोणांपैकीं एक लघुकोण असल्यास दुसरा विशाल-कोण असतो.

३. सलग्नकोणांच्या दोन जोड्यांपैकीं एकींतला एक कोन दुसरींतल्या एक कोनाबरोबर असल्यास, बाकीचे कोनही समान असतात.

४. एका रेषेच्या एकाच अंगाकडून अनेक रेषा येऊन तिच्या टोंकाखेरीज तींतील एकाच बिंदूंत तिला मिळाल्या असतां, त्या बिंदूजवळ जे कोन होतात, त्या सर्वांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असते.

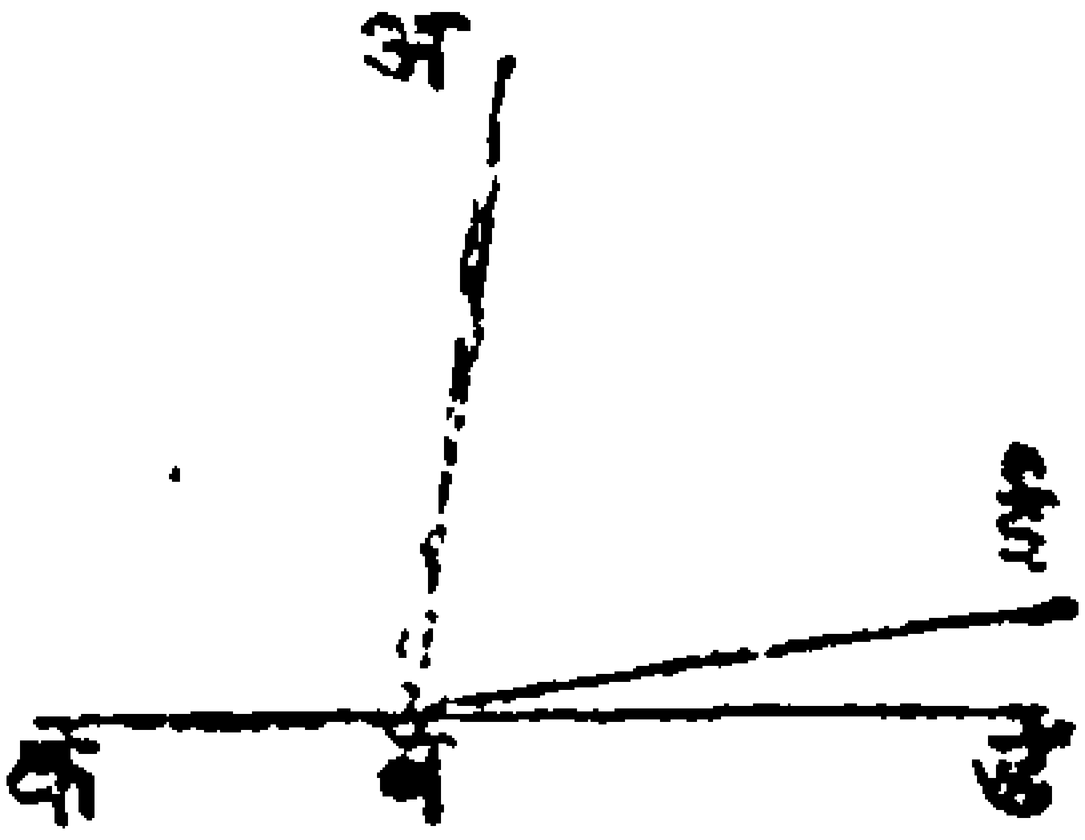
५. दोन सलग्नकोनांस दुभागणाऱ्या रेषा परस्परांवर लंब असतात.

६. "बहिर्वक्रकोण" व "अंतर्वक्रकोण" ह्यांच्या व्याख्या सांगून, "बहिर्वक्रकोण दोन काटकोनांपेक्षां जास्त असतो" असें सिद्ध करा.

सिद्धांत १४. प्रमेय.

एका रेषेच्या भिन्न अंगांकडून दोन रेषा येऊन तिच्या एकाच टोंकांत तिला मिळाल्या असतां जे तिच्याशीं दोन कोन होतात, ते दोन मिळून जर दोन काटकोनांबरोबर असतील, तर त्या मिळणाऱ्या दोन रेषा एकाच सरलरेषेंत असतात.

अब रेषेच्या भिन्न अंगांकडून **कब, डब** ह्या रेषा येऊन तिच्या **ब** टोंकांत तिला मिळाल्या आहेत, आणि तिच्याशीं झालेले **अबक, अबड** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर आहेत;



तर **कब, डब** ह्या एकाच सरलरेषेंत असतील, म्हणजे त्यांपैकीं कोणतीही एक **ब** टोंकापलीकडे वाढविली असतां दुसरीशीं मिळून जाईल.

कारण, जर त्यांपैकीं **कब** ही **ब** टोंकापलीकडे वाढविली असतां **बड** रेषेंतून जात नसली, तर ती **बई** रेषेंतून जाते, म्हणजे **कबई** ही एक सरलरेषा होते, असें समज.

आतां **अब** रेघ **कबई** रेघेस मिळाली असून **कबई**च्या एकाच अंगास **अबक** आणि **अबई** हे दोन कोन झाले आहेत,

म्हणून त्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे. (१.१३)

परंतु **अबक** आणि **अबड** ह्यांची बेरीजही दोन काटकोनांबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून **अबक** व **अबई** ह्यांची बेरीज, **अबक** आणि **अबड** ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. ११, प्र. प्र. ६ व प्र. प्र. १)

ह्या दोन समान बेरजांतून साधारण कोन **अबक** काढून टाकला, तेव्हां शेष **अबई** कोन, शेष **अबड** कोनाबरोबर झाला; (प्र. प्र. ३)

परंतु पहिला दुसऱ्याचा तुकडा आहे, म्हणून ते परस्पर बरोबर असणें हें अशक्य आहे. (प्र. प्र. ९)

म्हणून **कब** ही **ब** टोंकापलीकडे वाढविली असतां **बई**तून जात नाहीं.

आणि ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं, **कब** वाढविल्यानें ती **बड** खेरीज दुसऱ्या कोणत्याही रेषेंतून जात नाहीं; म्हणून **कब**, **बड**, ह्या रेषा एकाच सरळरेषेंत आहेत.

ह्याकरितां, एका रेषेंतील इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.१४) च्या आकृतींत **डब** रेष **ब** बिंदूपलीकडे वाढविली असतां ती **बक**च्या खालून जाणार नाहीं असें सिद्ध करून दाखवा.

२. (१. १४) च्या पक्षांतील "भिन्न अंगांकडून" हे शब्द गाळिले असतां हा सिद्धांत खोटा पडतो, असें दाखवा.

३. (१. १४) हा (१. १३) चा व्यत्यास आहे, असें दाखवा.

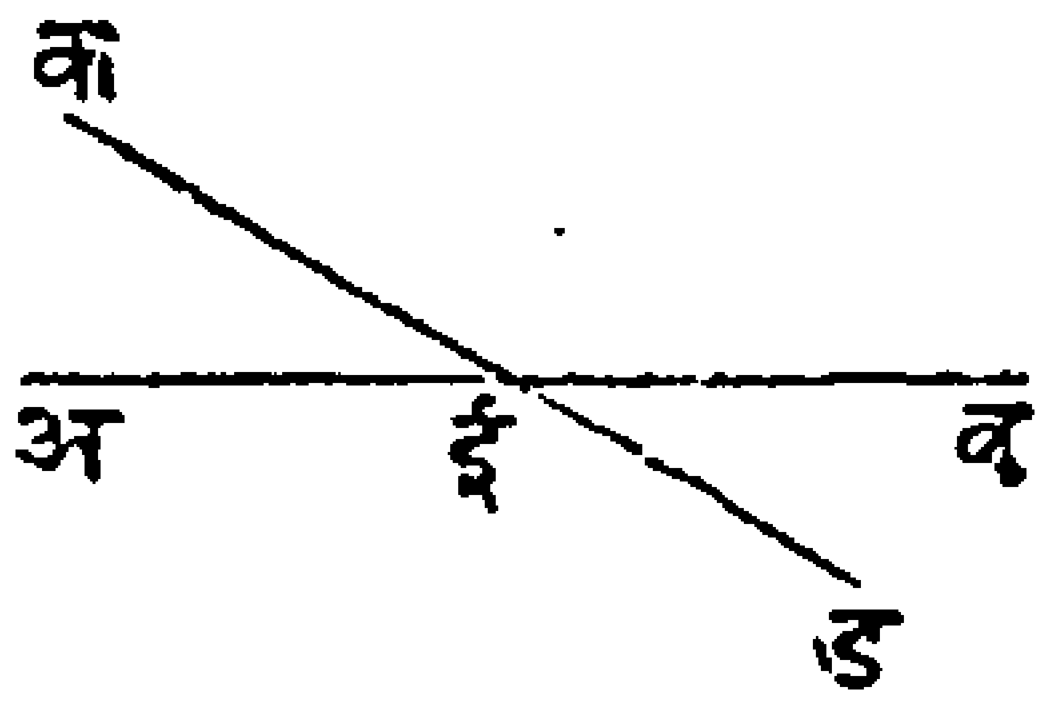
४. एका रेषेवर तिच्या एकाच टोंकांतून तिच्या दोहों अंगांस दोन लंब केले असतां ते एकाच सरलरेषेंत असतात.

५ "एकाच बिंदूंत मिळणाऱ्या तीन रेषांपैकीं एकीशीं इतर दोन रेषांनीं केलेल्या कोनांची बेरीज दोन काटकोन असल्यास, त्या इतर दोन रेषा एकाच सरलरेषेंत असतात." अशी (१. १४) ची प्रतिज्ञा म्हटल्यास अपवाद कोणता ?

सिद्धांत १५. प्रमेय.

जेव्हां दोन रेषा एकमेकींस कापितात, तेव्हां समोरासमोरचे कोन बराबर होतात.

अब, **कड** ह्या दोन रेषा एकमेकींस **ई** बिंदूशीं कापितात, तर



अईक कोन **बईड** कोनाबरोबर होईल, आणि **कईब** कोन **अईड** कोनाबरोबर होईल.

प्रथम **कईअ**, **डईब** हे कोन परस्पर समान आहेत असें सिद्ध करूं. **अई** रेघ **कड** रेघेस मिळून जे **कईअ** आणि **अईड** कोन होतात, ते दोन मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत. (१. १३)
पुनः, **डई** रेघ **अब** रेघेस मिळून जे **अईड** आणि **डईब** कोन होतात, ते दोन मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत. (१. १३)
परंतु असें वर दाखविलें आहे कीं, **कईअ** व **अईड** हे कोन मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत.
म्हणून **कईअ** आणि **अईड** ह्या कोनांची बेरीज **अईड** आणि **डईब** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. ११, प्र. प्र. ६ व प्र. प्र. १)
ह्या दोन समान बेरजांतून साधारण कोन **अईड** काढून टाकिला; तेव्हां शेष **कईअ** कोन शेष **डईब** कोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. ३)

वरील रीतीनेंच असें दाखवितां येईल, कीं **कईब** कोन, **अईड** कोनाबराबर आहे. (हें विद्यार्थ्यांनीं प्रत्यक्ष सिद्ध करून पहावें.)

ह्याकरितां, जेव्हां दोन रेघा इत्यादि.

उपसिद्धांत १. वरील सिद्धांतावरून हें उघड आहे, कीं "जर दोन रेघांनीं एकमेकींस कापिलें, तर छेदनबिंदूशीं जे चार कोन होतात, ते सर्व मिळून चार काटकोनांबराबर असतात."

उपसिद्धांत २. "जर एकाच बिंदूंत अनेक रेषा मिळाल्या आणि त्या बिंदूच्या सर्व अंगांस कोन झाले, तर त्या सर्व (न विभागलेल्या) कोनांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर असते."

प्रश्न.

१. (१. १५) चे उपसिद्धांत सिद्ध करा.

२. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषांनीं झालेल्या चार कोनांपैकीं कोणतेही समोरासमोरचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषा एकाच सरल-रेषेंत असतात.

म्हणून **बअई** आणि **ईकफ** हे, त्या त्रिकोणांच्या **बई**, **ईफ** ह्या समान बाजूंसमोरचे कोन, समान आहेत. (१. ४)
परंतु **ईकफ** कोनापेक्षां **अकड** कोन मोठा आहे. (प्र. प्र. ९)
म्हणून **अकड** कोन **बअई** कोनापेक्षां मोठा आहे. (प्र. प्र. अ. उप.)

आतां **अडक** कोन **अबक** कोनापेक्षां मोठा आहे असें सिद्ध करूं.

अक बाजू **ग** बिंदूपर्यंत वाढीव; आणि **बक** बाजू दुभागणें इत्यादिक रचना (वरच्या रचनेसारखीच) कर. म्हणजे वरच्याप्रमाणेंच, **बकग** कोन **अबक** कोनापेक्षां मोठा आहे, असें सिद्ध करितां येईल. (विद्यार्थ्यांनीं प्रत्यक्ष सिद्ध करावें.)

आतां **बकग** कोन **अकड** कोनाबरोबर आहे, (१. १५)
म्हणून **अकड** कोन, **अबक** कोनापेक्षां मोठा आहे. (प्र.प्र. अ.)
ह्याकरितां जर त्रिकोणाची इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१. १६) च्या सिद्धतेमध्यें जी रचना करावी लागते, तिचें सामान्य स्वरूप सांगा.

२. (१. १६) च्या आकृतींत **बअ** बाजू **अ** बिंदूपलीकडे वाढविली, तर होणारा बाहेरील कोन कोणत्या कोणत्या कोनांपेक्षां मोठा होईल, हें सांगून सिद्ध करा.

३. रेषेच्या बाहेरील बिंदूपासून तीवर एकच लंब काढितां येतो.

४. समद्विभुजत्रिकोणाचा पाया वाढविला असतां होणारा बाहेरील कोन, (१) त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोनापेक्षां मोठा असतो, आणि (२) तो विशालकोण असतो.

५. "एका रेषेनें दोन रेषांस छेदिलें आहे, आणि बाह्यकोण, त्याशीं संलग्नकोनापलीकडच्या (छेदक रेषेच्या त्याच अंगच्या) आंतरकोणापेक्षां मोठा आहे. तर त्या दोन रेषा त्याच अंगास वाढविल्या असतां मिळतील.

सिद्धांत १७. प्रमेय.

त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी असतात.

३. विवक्षित कोनाच्या दोन्ही बाजूंवर त्याच्या कोणबिंदूपासून दोन लंब काढिले असतां, त्या लंबांमधील कोन विवक्षित कोनाबरोबर असतो, किंवा विवक्षितकोनाचा पूरककोण असतो.

४. ज्या चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस दुभागितात, त्याच्या समोरासमोरच्या बाजू समान असतात.

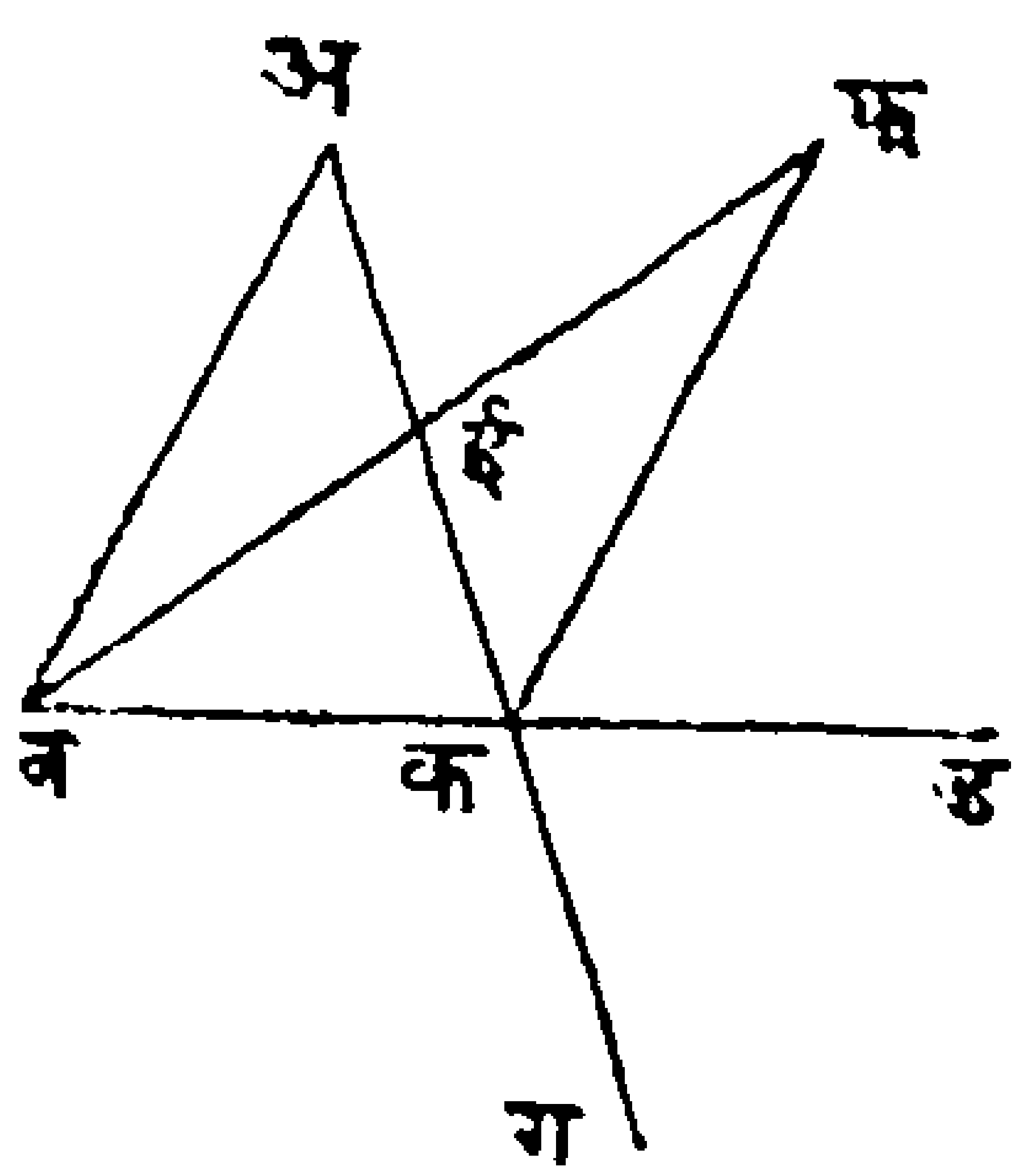
५. (१. १५) चा व्यत्यास सांगून सिद्ध करून दाखवा.

६. एका सरलरेषेंत नसणाऱ्या दोन रेषा एकाच बिंदूंत मिळाल्या असतां त्या बिंदूजवळ एक अंतर्वक्र आणि एक बहिर्वक्र असे जे दोन कोन होतात, त्यांची बेरीज चार काटकोन असते.

७. त्रिकोणांतल्या एका बिंदूपासून त्याच्या तिन्ही कोणबिंदूंपर्यंत काढिलेल्या रेषांनीं त्या बिंदूजवळ जे कोन होतात, त्यांची बेरीज किती काटकोन असते? उत्तर सिद्ध करून दाखवा.

सिद्धांत १६. प्रमेय.

जर त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली, तर बाहेरील कोन हा आंतील त्याशीं सलग्नकोणाखेरीज प्रत्येक कोनापेक्षां मोठा होतो.

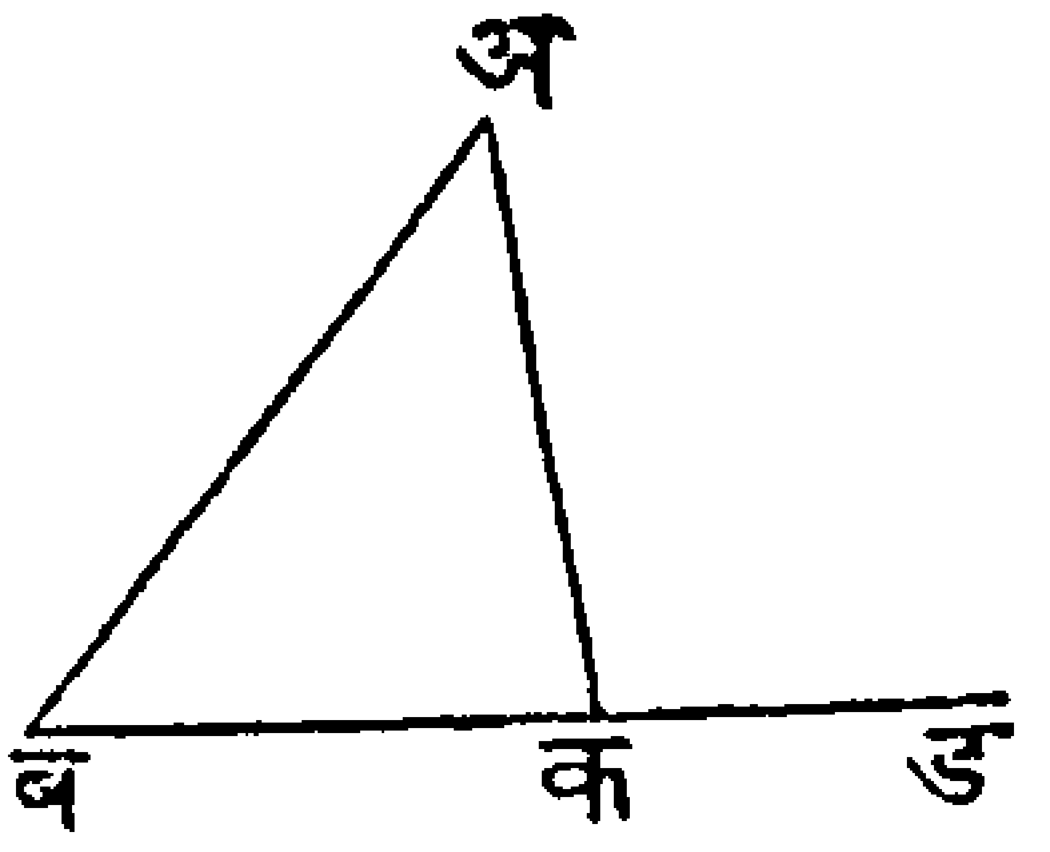


अबक एक त्रिकोण आहे, आणि त्याची **बक** बाजू **ड** पर्यंत वाढविली आहे; तर बाहेरील **अकड** कोन हा, आंतील त्याशीं सलग्न असणाऱ्या **अकब** कोनाखेरीज राहिलेल्या **अबक** आणि **बअक** ह्या प्रत्येक कोनापेक्षां मोठा होईल.

प्रथम **अकड** कोन **अ** कोनापेक्षां मोठा आहे, असें सिद्ध करूं.

अक बाजूचे **ई**बिंदूंत दोन समान भाग कर, (१.१०)
बई सांध, आणि ती वाढवून, **ईफ**ही **ईब** बराबर कर, (१.३)
आणि **फक** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अईब** त्रिकोणाच्या **अई**, **ईब** ह्या बाजू, **कईफ** त्रिकोणाच्या **कई**, **ईफ** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत, (रचना)
आणि त्यांच्या समान बाजूंमधील **अईब** आणि **कईफ** हे कोनही समान आहेत. (१. १५)



अबक त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत.
प्रथमतः **ब,क** ह्या कोनांविषयीं सिद्धता करूं.

बक बाजू **ड** पर्यंत वाढीव. (गृ.कृ.२)

आतां **अबक** त्रिकोणाचा **अकड** कोन **अबक** कोनापेक्षां मोठा आहे. (१. १६)

ह्यांतील प्रत्येक कोनामध्यें **अकब** कोन मिळविला,
तेव्हां **अकड** आणि **अकब** ह्या कोनांची बेरीज, **अबक** आणि **अकब** ह्या कोनांच्या बेरजेपेक्षां मोठी आहे. (प्र. प्र. ४)

परंतु **अकड** आणि **अकब** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरावर आहेत. (१. १३)

म्हणून **अबक** आणि **अकब** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत. (प्र. प्र. अ.)

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **अकब** आणि **बअक** हे दोन कोन मिळून, आणि तसेच **अबक** आणि **बअक** हे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत. (विद्यार्थ्यांनीं प्रत्यक्ष सिद्ध करावें.)

ह्याकरितां, त्रिकोणाचे कोणतेही इत्यादि.

प्रश्न.

१ (१.१७) हा त्रिकोणाची बाजू बाहेर न वाढवितां सिद्ध करा.

२. त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकीं निदान दोन लघुकोण असतात.

३. समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडील कोण लघुकोण असतात.

४. समभुजत्रिकोण हा लघुकोन त्रिकोण असतो.

५. काटकोनत्रिकोण व विशालकोणत्रिकोण हे समभुजत्रिकोण असणें संभवतें काय? कां?

६. एखादा समद्विभुजत्रिकोण हा जर काटकोनत्रिकोण अथवा विशालकोणत्रिकोण असला, तर त्याचा कोणता कोन काटकोन अथवा विशालकोण असेल? कां?

७. अमर्याद रेषेच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत एक (तिजवर) लंब आणि एक तिर्यक्कोण करणारी अशा दोन रेषा

काढिल्या असतां, तिर्यक्कोण करणाऱ्या रेषेच्या ज्या अंगास लघुकोण असेल, त्याच अंगास तो लंब पडतो.

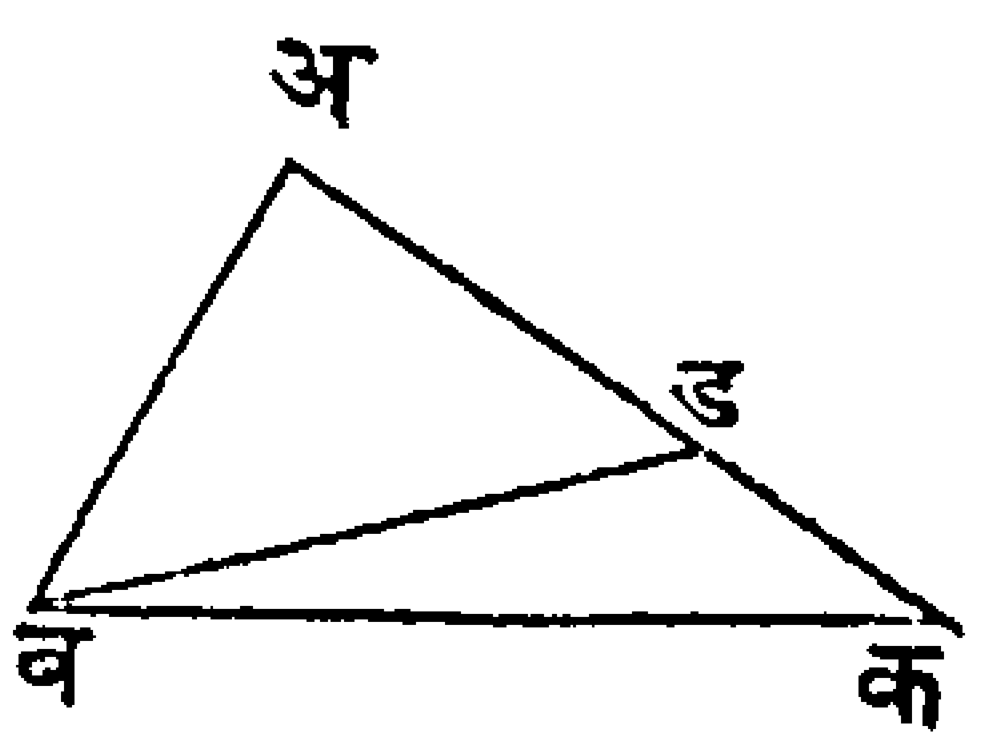
८. त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूवर लंब काढिला असतां, (१) जर त्या बाजूच्या दोन्ही टोंकांजवळील कोन लघुकोण असले, तर तो लंब त्रिकोणांतच पडतो; (२) जर त्या दोन कोनांपैकीं एक काटकोन असला, तर तो लंब त्या काटकोनाच्या दुसऱ्या बाजूशींच मिळतो; आणि (३) जर त्यांपैकीं एक विशालकोण असला, तर तो लंब विशालकोणापलीकडे ती बाजू वाढविल्यानें तिला मिळतो.

९. अमर्यादरेषेच्या भिन्न आंगच्या दोन बिंदूंपासून जर त्या रेषेवर लंब काढिले, (आणि जर त्या लंबांची एकच सरलरेषा बनली नाहीं), तर ते लंब त्या बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेच्या भिन्न आंगांसच असतात.

१०. (१. १७) व (प्र. प्र. १२) हे परस्परांचे व्यत्यास आहेत असें दाखवा.

सिद्धांत १८. प्रमेय.

त्रिकोणाची एक बाजू दुसरीपेक्षां मोठी असल्यास, मोठ्या बाजूसमोरील कोन लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षां मोठा असतो.



अबक एक त्रिकोण आहे, आणि त्याची **अक** बाजू **अब** बाजूपेक्षां मोठी आहे; तर **अक** समोरील **अबक** कोन, **अब** समोरील **अकब** कोनापेक्षां मोठा होईल.

अक ह्या मोठ्या बाजूचा **अब** एवढा **अड** तुकडा पाड; (१. ३) आणि **बड** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अडब** हा **बडक** त्रिकोणाचा बाहेरील कोन आहे, ह्यास्तव तो आंतील **बकड** कोनापेक्षां मोठा आहे. (१. १६)

परंतु **अडब** कोन **अबड** कोनाबरोबर आहे, (१. ५)

म्हणून **अबड** कोनही **बकड** म्हणजे **अकब** कोनापेक्षां मोठा आहे. (प्र. प्र. अ.)

पण **अबड** कोनापेक्षां **अबक** कोन मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)
म्हणून **अकब** कोनापेक्षां **अबक** कोन फारच मोठा आहे. (प्र. प्र. ई.)

ह्याकरितां त्रिकोणाची इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१. १८) च्या आकृतींत **अक** पेक्षां **बक** मोठी आहे, असें समजून तो सिद्धांत सिद्ध करा.

२. (१. ६) हा (१. १८) च्या पुढें आहे असें समजून तो थोडक्यांत सिद्ध करा.

३. (१. १८) च्या रचनेंत मोठ्या बाजूचा जो तुकडा पाडावा लागतो, तो कोणत्या कोणबिंदूपासून पाडिला पाहिजे ? कां ?

४. (१. १८) च्या रचनेंत मोठ्या बाजूचा तुकडा न पाडितां, लहान बाजू वाढवून मोठीएवढी करा, आणि त्या योगानें सिद्धांत सिद्ध करा.

५. विषमभुजत्रिकोणाचे सर्व कोन असमान असतात.

६. (१. १८) च्या आकृतीमध्यें जर अशी रचना केली कीं, **अब** बरोबर **अड** केली, **अ** कोन दुभागणारी **अई** रेषा काढून ती **बक**-ला **ई** बिंदूंत मिळविली, आणि **ईड** सांधिली; तर "**ब** कोन **क** कोनापेक्षां मोठा आहे" ही गोष्ट, (१. ४) व (१. १६) ह्यांच्या योगानें सिद्ध होते, असें दाखवा.

सिद्धांत १९. प्रमेय.

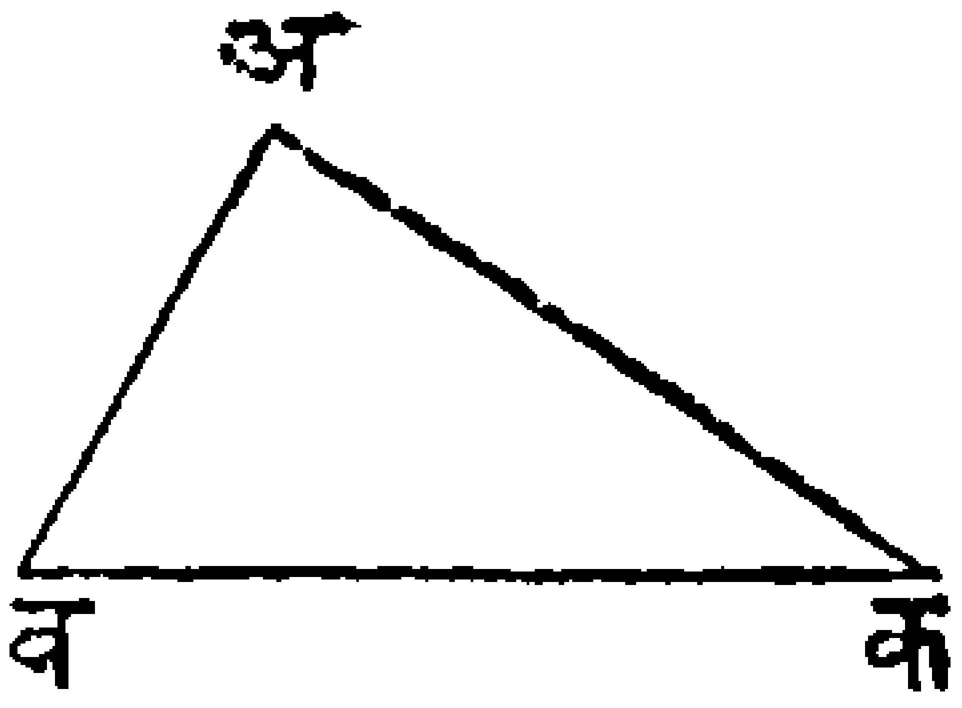
त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या कोनापेक्षां मोठा असल्यास, मोठ्या कोनासमोरील बाजू लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षां मोठी असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, आणि त्याचा **अबक** कोन, **अकब** कोनापेक्षां मोठा आहे; तर **अबक** कोनासमोरील **अक** बाजू, **अकब** कोनासमोरील **अब** बाजूपेक्षां मोठी होईल.

कारण, जर **अक** बाजू **अब** बाजूपेक्षां मोठी नसेल, तर ती **अब** बरोबर असावी, अथवा **अब** पेक्षां लहान असावी. परंतु त्या बरोबर आहेत असें जर मानिलें, तर **अबक** कोन **अबक** कोनाबरोबर होईल;

(१. ५)

पण ही गोष्ट अशक्य आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून **अक**, **अब** बरावर नाहीं.
पुनः, **अक**, **अब** पेक्षां लहान आहे;
असें जर मानिलें, तर **अबक** कोन
अकब कोनापेक्षां लहान होईल; (१.१८)
पण हीही गोष्ट अशक्य आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **अक** बाजू **अब** बाजूपेक्षां
लहान नाहीं.



आणि **अक**, **अब** बरावर नाहीं, असें तर वर दाखविलेंच आहे.
त्यास्तव **अक** बाजू **अब** बाजूपेक्षां मोठी आहे.

ह्याकरितां, त्रिकोणाचा एक कोन इ०.

प्रश्न.

१. (१. १९) ह्याचा व्यत्यास कोणता ?

२. त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनास दुभागणारी रेषा समोरच्या बाजूपर्यंत वाढविली असतां, तिचे जे दोन भाग होतात, त्यापैकीं प्रत्येक भागापेक्षां त्याच्या जवळची त्रिकोणाची बाजू मोठी असते.

३. काटकोनत्रिकोणाचा कर्ण, त्याच्या इतर प्रत्येक बाजूपेक्षां मोठा असतो.

४. विशालकोणत्रिकोणाची विशालकोणासमोरची बाजू, त्याच्या इतर प्रत्येक बाजूपेक्षां मोठी असते.

५. समद्विभुजत्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून (१) पायांतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत काढिलेली रेषा, त्याच्या समान बाजूपैकीं प्रत्येकीपेक्षां लहान असते, व (२) पाया वाढवून त्यांतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत काढिलेली रेषा प्रत्येकीपेक्षां मोठी असते.

६. त्रिकोणाच्या दोन बाजू असमान असल्यास, त्यांच्या मधील कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूंतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत काढिलेली रेषा ही, त्या असमान बाजूंपैकीं (१) मोठीपेक्षां धाकटी असते; आणि (२) समोरची बाजू मोठीच्या अंगास वाढवून तींतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत काढिलेली रेषा ही, त्या दोन्ही बाजूंपेक्षां मोठी असते.

३. (१. १९ प्रश्न २) ह्याच्या आधारानें (१. २०) ची सिद्धता थोडक्यांत करून दाखवा.

४. चौकोनाच्या कोणत्याही तीन बाजूंची बेरीज चवथीपेक्षां जास्त असते, असें सिद्ध करा.

५. कोणत्याही सरलरेषाकृतीच्या कोणत्याही एका बाजूपेक्षां इतर सर्व बाजूंची बेरीज जास्त असते.

६. त्रिकोणाच्या दोन बाजू असमान असल्या, तर त्यांची वजा-बाकी तिसरीपेक्षां लहान असते.

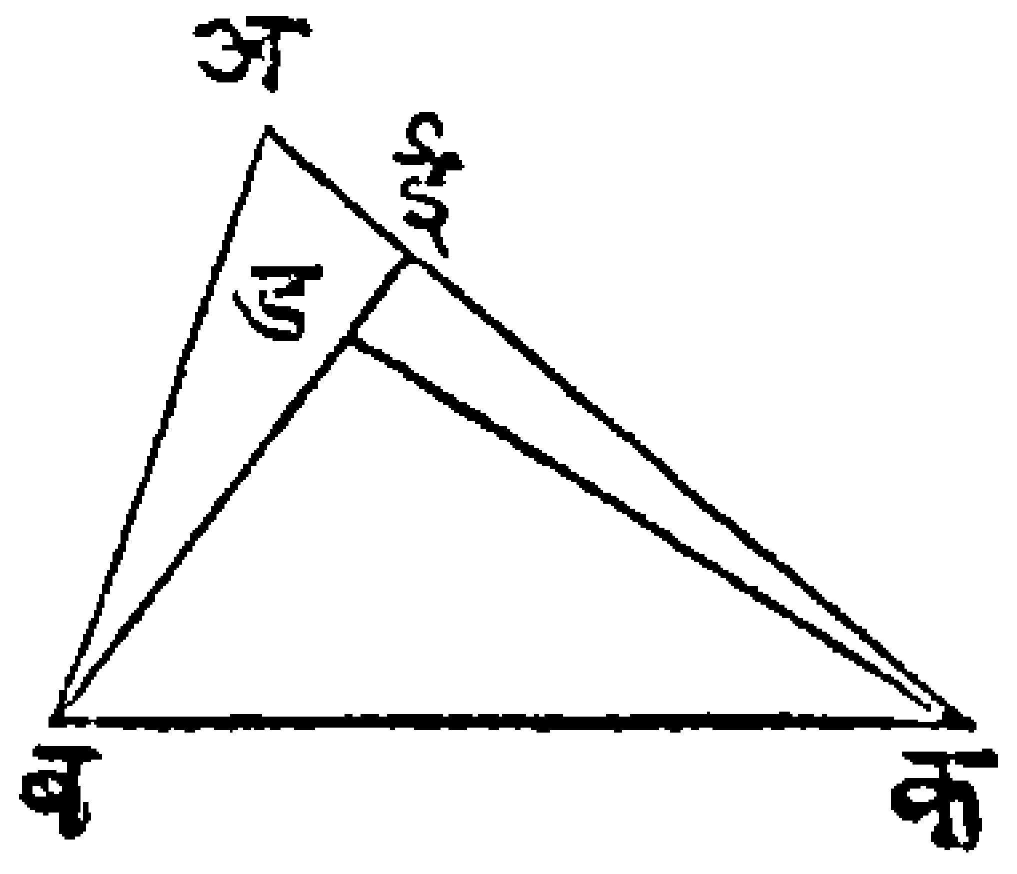
७. चौकोनाच्या कर्णांची बेरीज त्याच्या परिमितीपेक्षां (म्हणजे सर्व बाजूंच्या बेरजेपेक्षां) कमी असते.

८. कोणत्याही बिंदूपासून त्रिकोणाच्या तीनही कोणबिंदूपर्यंत काढिलेल्या रेषांची बेरीज, त्रिकोणाच्या परिमितीच्या अर्धापेक्षां जास्त असते.

९. कोणत्याही बिंदूपासून सरलरेषाकृतीच्या सर्व कोणबिंदूपर्यंत काढिलेल्या रेषांची बेरीज त्या आकृतीच्या परिमितीच्या अर्धापेक्षां जास्त असते.

सिद्धांत २१. प्रमेय.

जर त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या टोंकापासून त्रिकोणांतील कोणत्याही एका बिंदूपर्यंत दोन रेषा काढल्या, तर (१) त्यांची बेरीज त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजेपेक्षां कमी असते, परंतु (२) त्यांच्या मधील कोन दुसऱ्या दोन बाजूंच्या मधील कोनापेक्षां मोठा असतो.



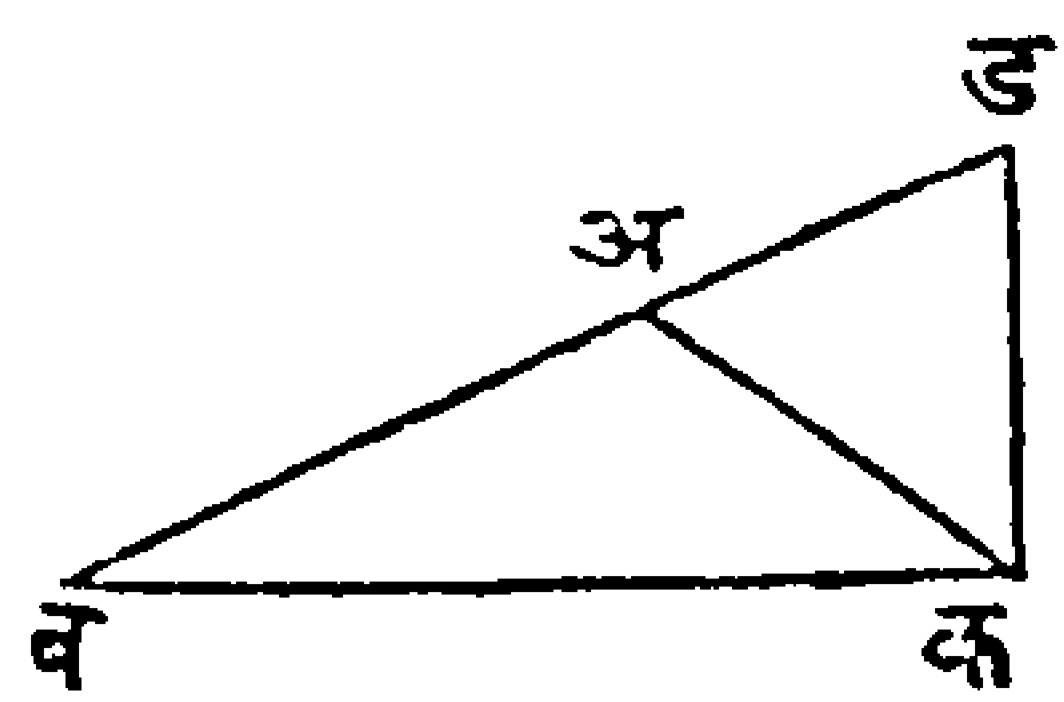
अबक त्रिकोणाच्या **बक** बाजूच्या **ब**, **क** ह्या दोन टोंकांपासून त्रिकोणांतील **ड** बिंदूपर्यंत **बड**, **डक** रेषा काढल्या आहेत; तर (१) त्यांची बेरीज त्रिकोणाच्या **बअ** आणि **अक** ह्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजेपेक्षां कमी होईल, परंतु (२) त्यांच्या मधील **बडक** कोन, **बअक** कोनापेक्षां मोठा होईल.

बड वाढवून, ती **अकला ई** बिंदूंत मिळाली असें समज. (गृ. कृ. २)

सिद्धांत २०. प्रमेय.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षां अधिक असते.

अबक त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षां जास्त आहे असें सिद्ध करावयाचें. प्रथमतः **अब**, **अक** ह्यांची बेरीज **बक** पेक्षां जास्त आहे असें सिद्ध करूं.



बअ बाजू वाढीव; (गृ. कृ. २)
अड रेघ **अक** रेघेबरोबर कर, (१. ३)
आणि **डक** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अड**, **अक** बरोबर आहे, (रचना)
म्हणून **अडक** कोन, **अकड** कोनाबरोबर आहे, (१. ५)
पण **बकड** कोन **अकड** कोनापेक्षां मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)
म्हणून **बकड** कोन **बडक** कोनापेक्षां मोठा आहे. (प्र. प्र. अ. उप.)
आतां **बकड** त्रिकोणाचा **बकड** कोन **बडक** कोनापेक्षां मोठा आहे,
ह्यास्तव **बड** बाजू **बक** बाजूपेक्षां मोठी आहे. (१. १९)
परंतु **बड** ही, **बअ** आणि **अड** ह्यांची म्हणजे **बअ** आणि **अक** ह्यांची बेरीज आहे,
म्हणून **बअ** व **अक** ह्यांची बेरीज **बक** पेक्षां अधिक आहे.

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं, **अब**, **बक** ह्यांची बेरीज **अक** पेक्षां अधिक, आणि **बक**, **कअ** ह्यांची बेरीज **अब** पेक्षां अधिक आहे.

ह्याकरितां, त्रिकोणाच्या कोणत्याही इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१. २०) च्या आकृतींत **अब**, **बक** ह्यांची बेरीज **अक** पेक्षां जास्त, व **अक**, **बक** ह्यांची बेरीज **अब** पेक्षां जास्त आहे, असें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवा.

२. (१. २०) च्या सिद्धांतांतल्या रचनेचें सामान्यस्वरूप सांगा.

(१) आतां **अबई** त्रिकोणाच्या **बभ** व **अई** ह्या बाजूंची बेरीज **बई** बाजूपेक्षां अधिक आहे. (१.२०)

बभ, **अई** ह्यांची बेरीज आणि **बई** ह्या दोन असमान पदार्थांत **ईक** बाजू हा पदार्थ प्रत्येकीं मिळविला,

तेव्हां **बभ**, **अक** ह्यांची बेरीज, **बई** व **ईक** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां जास्त झाली. (प्र. प्र. ४)

पुनः **कईड** त्रिकोणाच्या **कई**, **ईड** ह्या बाजूंची बेरीज **कड**पेक्षां जास्त आहे; (१. २०)

ती बेरीज व **कड** ह्या प्रत्येकांत **डब** मिळविली,

तेव्हां **कई**, **ईब** ह्यांची बेरीज **बड**, **कड** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां जास्त झाली. (प्र. प्र. ४)

परंतु **कई**, **ईब** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां **बभ**, **अक** ह्यांची बेरीज जास्त आहे असें वर सिद्ध केलें.

म्हणून **बभ**, **अक** ह्यांची बेरीज **बड**, **डक** ह्यांच्या बेरजेहून फारच जास्त आहे. (प्र. प्र. ई.)

(२) आतां:, **अबई** त्रिकोणाचा बाहेरील **बईक** कोन, **बअई** कोनाहून म्हणजे **बअक** कोनाहून मोठा आहे. (१. १६)

आणि **कईड** त्रिकोणाचा बाहेरील **बडक** कोन, **बईक** कोनाहून मोठा आहे. (१. १६)

म्हणजे **बअक** कोनापेक्षां **बईक** कोन मोठा आहे, व **बईक** पेक्षां **बडक** कोन मोठा आहे, असें ठरलें;

म्हणून **बअक** कोनापेक्षां **बडक** कोन फारच मोठा आहे. (प्र. प्र. ई.)

ह्याकरितां, जर त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१. २१) ह्याचे भाग किती आहेत ? प्रत्येक भागाची प्रतिज्ञा निराळी म्हणा, व नुसता दुसरा भाग सिद्ध करून दाखवा.

२. (१. २१) च्या आकृतींत **ड** बिंदु व **अब** बाजूचीं दोन्ही टोंकें सांधून तो सिद्धांत सिद्ध करा; तसेंच **अक** बाजूचीं दोन्ही टोंकें सांधून सिद्ध करा.

३. (१. २१) च्या सिद्धतेकरितां रचना काय करावी लागते ?

४. त्रिकोणांतल्या कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या तिन्ही कोणबिंदूंपर्यंत काढिलेल्या रेषांची बेरीज त्रिकोणाच्या परिमितीपेक्षां कमी असते.

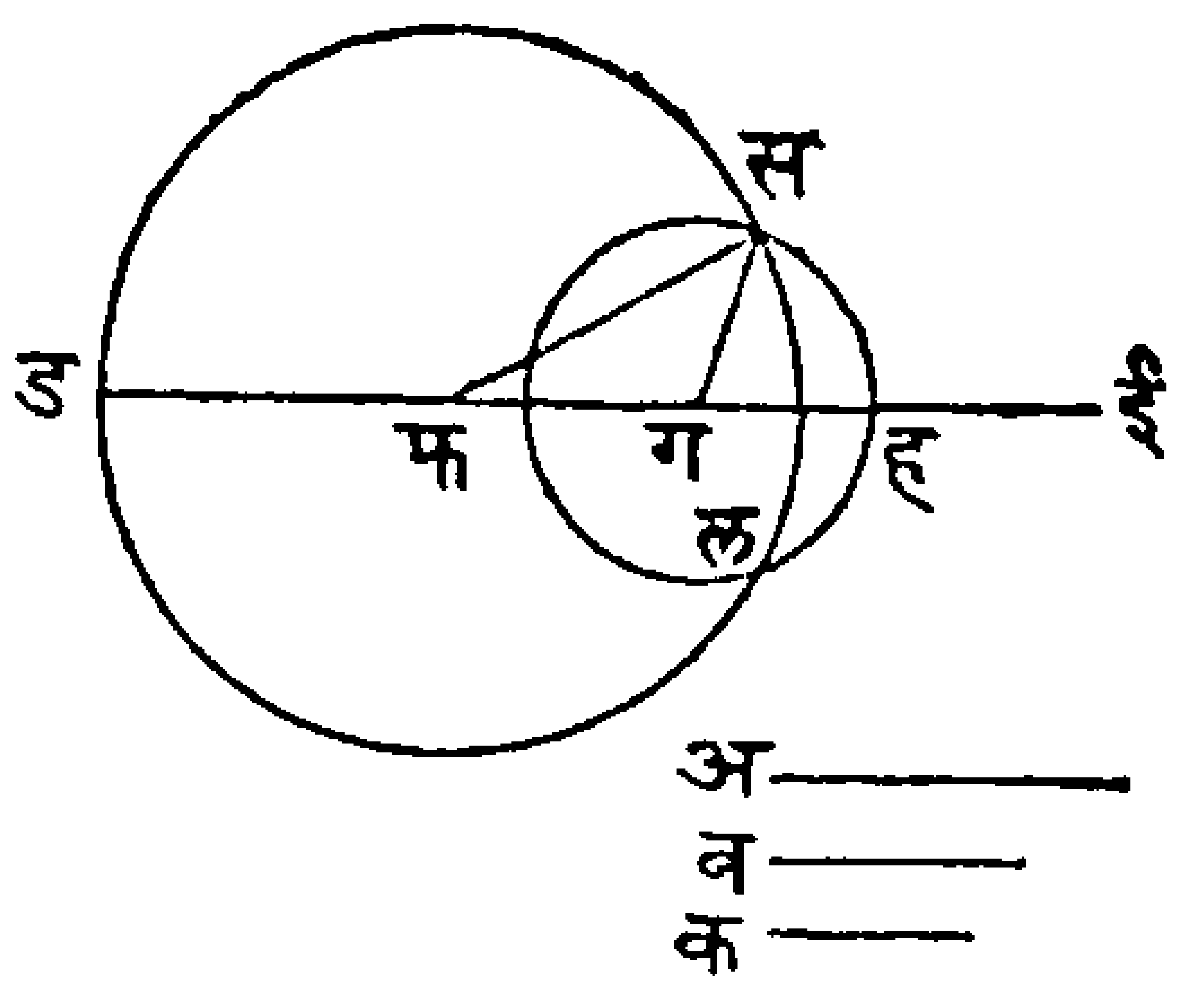
५. (१. २१) ह्यांत दिलेला बिंदु त्रिकोणाच्या एका बाजूंत आहे, असें समजून तो सिद्धांत सिद्ध करा.

६. एकाच पायावर आणि एकांत एक असे दोन त्रिकोण असले, तर बाहेरच्या त्रिकोणाची परिमिति आंतल्याच्या परिमितीपेक्षां जास्त असते.

सिद्धांत २२. कृत्य.

दिलेल्या तीन रेषांपैकीं कोणत्याही दोन मिळून तिसरीपेक्षां अधिक आहेत; त्या तीन रेषांबराबर ज्या त्रिकोणाच्या बाजू होतील, असा एक त्रिकोण करावयाचें.

अ, **ब**, **क**, ह्या तीन दिलेल्या रेषा अशा आहेत कीं, त्यांतील कोणत्याही दोन मिळून तसरीहून अधिक आहेत; म्हणजे **अ** आणि **ब** मिळून **क**हून अधिक, **अ** आणि **क** मिळून **ब**हून अधिक, आणि **ब** आणि **क** मिळून **अ**हून अधिक आहेत; तर ज्या त्रिकोणाच्या बाजू अनुक्रमें **अ**, **ब**, **क** ह्यांबराबर होतील, असा एक त्रिकोण करावयाचा आहे.



ड बिंदूंत संपलेली, परंतु **ई** बिंदूकडे अमर्याद अशी एक **डई** सरळ रेघ काढ; आणि **डफ**, **अ**बराबर; **फग**, **ब** बराबर; आणि **गह**, **क**बराबर कर. (१. ३)

फ मध्य कल्पून **फड** त्रिज्येनें **डसल** वर्तुळ काढ. (गृ. कृ. ३)

ग मध्य कल्पून **गह** त्रिज्येनें **हलस** वर्तुळ काढ; (गृ. कृ. ३) व तें परिघ परस्परांस **स**, **ल** बिंदूंत छेदितात असें मान.

सफ, सग सांध. (गृ० कृ० १)

म्हणजे **सफग** हा इच्छिलेला त्रिकोण होईल.

कारण, **डसल** वर्तुळाचा मध्यबिंदु **फ** आहे,
म्हणून **फड, फस** बरोबर आहे. (व्याख्या १५)
परंतु **फड, अ** बरोबर आहे. (रचना)
म्हणून **फस, अ** बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
पुनः **हलस** वर्तुळाचा मध्यबिंदु **ग** आहे,
म्हणून **गह, गस** बरोबर आहे. (व्याख्या १५)
परंतु **गह, क** बरोबर आहे. (रचना)
म्हणून **गस, क** बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
आणि **फग, ब** बरोबर आहे. (रचना)
म्हणून **सफ, फग, गस** ह्या तीन बाजू **अ, ब, क** ह्या तीन रेषांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत.

ह्याकरितां, **सफग** हा इच्छिलेला त्रिकोण होय.

प्रश्न.

१. (१. २२) ह्याच्या रचनेंत एका बिंदूकडे समर्याद व दुसऱ्या बिंदूकडे अमर्याद अशी रेषा घेण्यास सांगितलें आहे; ह्या गोष्टीस आधार युक्लिडच्या कोणत्या कृत्यांचे सांगाल ?

२. (१. २२) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

३. (१. २२) ह्यांत दिलेल्या रेषांपैकीं एकीवरच इच्छिलेला त्रिकोण काढावयाचा असला, तर रचना कशी कराल ?

४. (१. २२) च्या रचनेंत काढिलेल्या दोन वर्तुलांचें परिघ परस्परांस छेदितातच, असें सिद्ध करून दाखवा.

५. (१. २२) ह्याच्या आकृतींत (१) **अ** रेषेबरोबर असणारी इच्छिलेल्या त्रिकोणाची बाजू **डई** रेषेंत यावी, अशी इच्छा असल्यास, रचना कशी कराल ? तसेंच **अ, क** ह्या रेषां बरोबर असणाऱ्या इष्ट त्रिकोणाच्या बाजूंमधील कोन, **डई** रेषेंतल्या **फ** बिंदूशीं व्हावा अशी इच्छा असल्यास, रचना कशी कराल ?

६. (१. १) हा (१. २२) ह्याचा एक विशेषप्रकार आहे, असें दाखवा.

७. ज्यांच्या लांब्या अनुक्रमें १५, २३ व ८ फूट आहेत अशा तीन सरळ काठ्यांचा त्रिकोण बनवितां येईल काय? कां?

सिद्धांत २३. कृत्य.

दिलेल्या रेषेशीं तींतील दिलेल्या बिंदूजवळ दिलेल्या कोनाएवढा कोन करावयाचें.

अब एक दिलेली रेषा आहे, तींत **अ** एक दिलेला बिंदु आहे, व **डकई** दिलेला कोन आहे; आणि **अब** रेषेशीं **अ** बिंदूजवळ **डकई** कोनाएवढा कोन करावयाचा आहे.

कड, **कई**, ह्या रेषांत अनुक्रमें **ड** आणि **ई** बिंदु घे, आणि **डई** सांध. (गृ. कृ. १)

अ बिंदूपासून **कई** बरोबर **अन** रेषा काढ; (१.२)

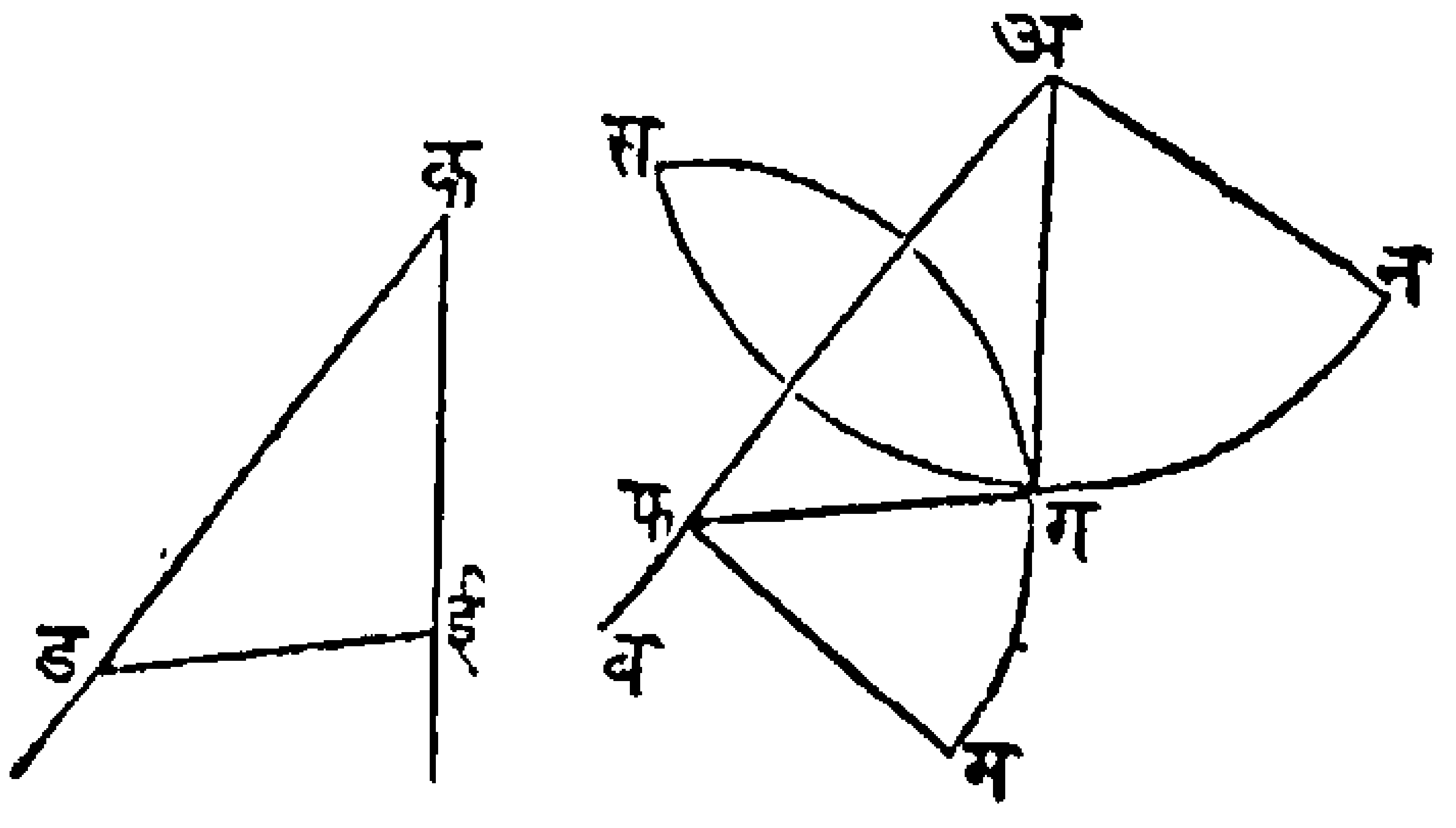
अ बिंदूपासून **अब** रेषेचा **कड** एवढा **अफ** तुकडा पाड; (१.३)

फ बिंदूपासून **डई** बरोबर **फम** रेषा काढ; (१.२)

अ, **फ** हे मध्य व **अन**, **फम** ह्या त्रिज्या कल्पून अनुक्रमें **नगस**, **मगस** हीं वर्तुलें काढ; (गृ. कृ. ३)

आणि ह्या वर्तुळांच्या परिघांचा एक छेदनबिंदु **ग** व दिलेला बिंदु **अ** हे सांध. (गृ. कृ. १)

म्हणजे **फअग** हा इच्छिलेला कोन होईल.



कारण, **फग** सांध, आतां **फअग** त्रिकोणाच्या **फअ**, **अग** ह्या बाजू **डकई** त्रिकोणाच्या **डक**, **कई** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, (रचना, व्या. १५ व प्र. प्र. १)

आणि पहिल्याचा **फग** पाया दुसऱ्याच्या **डई** पायाबरोबर आहे, (व्या. १५ व प्र. प्र. १)

म्हणून **फअग** कोन **डकई** कोनाबरोबर आहे. (१.८)

ह्याकरितां, दिलेल्या **अब** रेषेशीं दिलेल्या **अ** बिंदूजवळ **फअग** कोन, दिलेल्या **डकई** कोनाबरोबर केला आहे.

प्रश्न.

१. (१. २३) च्या रचनेमध्यें (१) **अफ** तुकडा जर **कई** एवढा पाडावयाचा आहे, तर **अन** रेषा कोणत्या रेषेएवढी काढिली पाहिजे? (२) **अफ** तुकडा **डई** एवढा पाडिला असतां चालेल किंवा नाहीं? (३) इच्छिलेला कोन **फ** बिंदूजवळ करावयाचा असला, तर कसकशी रचना कराल? उत्तरें सकारण सांगा.

२. (१.२३) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

३. दिलेल्या रेषेशीं तींतील दिलेल्या बिंदूजवळ दिलेल्या कोना-एवढाले कोन पराकाष्ठा किती काढितां येतील?

४. (१.२३) ह्यांत दिलेला कोन काटकोन असल्यास त्याला कोणत्या सिद्धांताचें स्वरूप येईल? (१.२३) व (१.११) ह्या सिद्धांतांचा परस्परांशीं काय संबंध दिसतो?

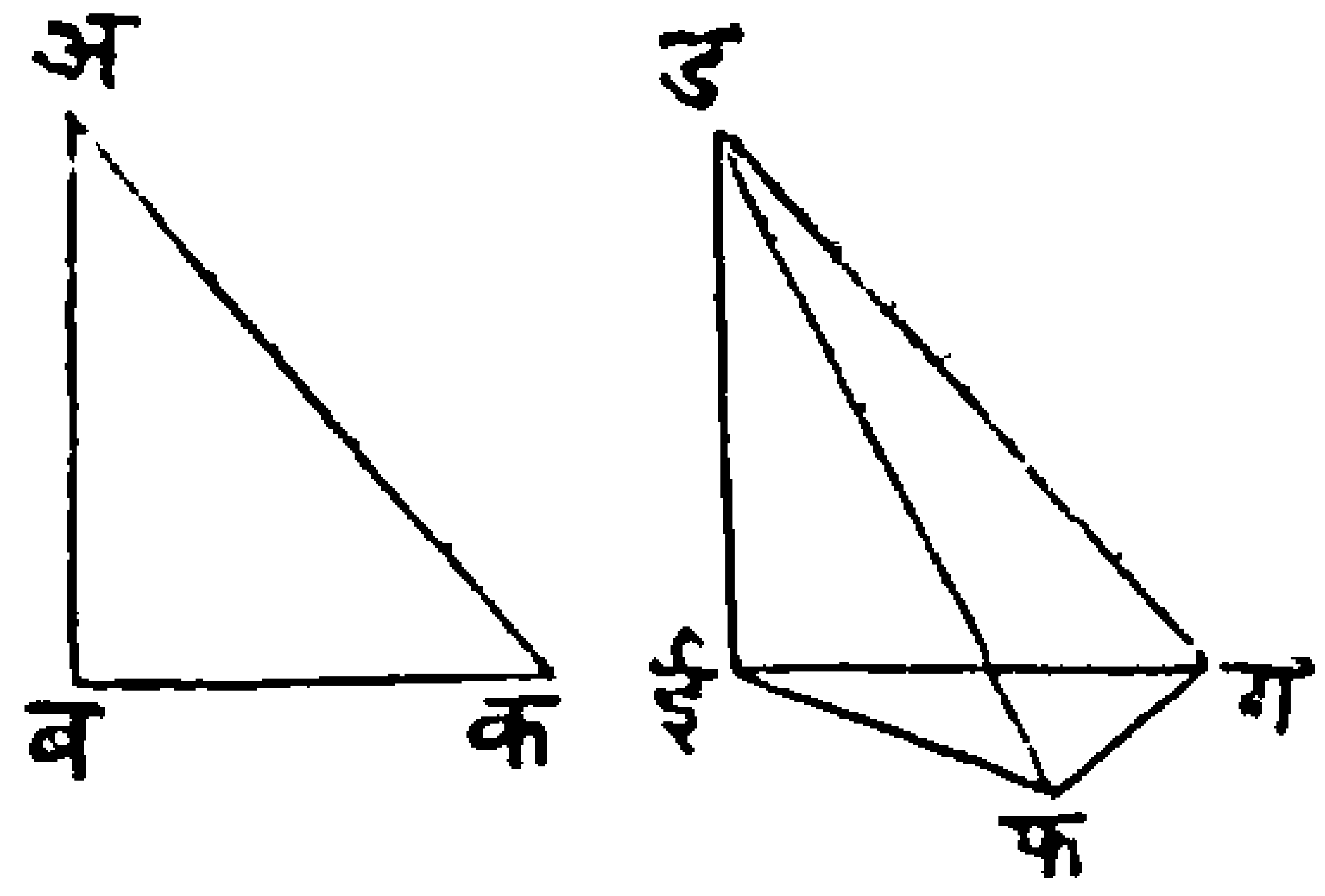
५. एक अमर्याद रेषा, तीमध्यें एक बिंदु आणि एक त्रिकोण हीं दिलीं आहेत; तर असा एक त्रिकोण काढा कीं, त्याचा एक कोणबिंदु दिलेल्या बिंदूंत येईल, एक बाजू दिलेल्या रेषेंत येईल व तो त्रिकोण दिलेल्या त्रिकोणाशीं एकरूप होईल.

६. दिलेल्या दोन कोनांची बेरीज करण्याची आणि वजाबाकी करण्याची सामान्य रीति सांगा. कोन ह्या शब्दाच्या ह्या ग्रंथांतील व्याख्येप्रमाणें एक काटकोन व एक विशालकोण ह्यांची, अथवा दोन विशालकोणांची अथवा दोन काटकोनांची बेरीज एकाच कोनानें दाखवितां येईल काय?

सिद्धांत २४. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बरावर आहेत, परंतु पहिल्याच्या त्या दोन बाजूंच्या मधील कोन दुसऱ्याच्या त्या दोन बाजूंच्या मधील कोनापेक्षां मोठा आहे; तर पहिल्याची मोठ्या कोनासमोरील तिसरी बाजू, दुसऱ्याच्या तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी होईल.

अबक आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **अब** आणि **अक** ह्या बाजू दुसऱ्याच्या **डई** आणि **डफ** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत; परंतु पहिल्याच्या त्या दोन बाजूंमधील **बअक** कोन, दुसऱ्याच्या त्या दोन



बाजूंमधील **ईडफ** कोनापेक्षां मोठा आहे; तर पहिल्याची तिसरी बाजू **बक** ही, दुसऱ्याची तिसरी बाजू **ईफ** हीपेक्षां मोठी होईल.

डई आणि **डफ** ह्या दोन बाजूंपैकीं निदान एक तरी अशी असावयाचीच कीं, ती दुसरीपेक्षां मोठी नाहीं. (म्हणजे दुसरीपेक्षां लहान आहे किंवा दुसरीशीं समान आहे). आतां ती दुसरीपेक्षां मोठी नसणारी बाजू अमुक आहे असें जरी प्रतिज्ञेंत दिलेलें नाहीं, तरी सिद्धतेकरितां असें मान कीं, **डई** बाजू **डफ**पेक्षां मोठी नाहीं; आणि **डई** रेघेशीं **ड** बिंदूजवळ **ईडग** कोन **बअक** कोनाएवढा कर.
(१. २३)

डग बाजू **अक** किंवा **डफ** बाजूबराबर कर, (१. ३)
आणि **ईग**, **गफ** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या दोन बाजू, **डईग** त्रिकोणाच्या **डई**, **डग** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, (प्रतिज्ञा व रचना)
आणि **बअक** कोन **ईडग** कोना बराबर आहे; (रचना)
ह्यास्तव **बक** पाया **ईग** पायाबराबर आहे. (१. ४)

पुनः, **डग** बाजू **डफ** बाजूबराबर आहे, (रचना)
म्हणून **डगफ** कोन **डफग** कोनाबराबर आहे. (१. ५)
परंतु **डगफ** कोन **ईगफ** कोनापेक्षां मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)
म्हणून **डफग** कोन **ईगफ** कोनापेक्षां मोठा आहे, (प्र. प्र. अ.)
आणि अर्थात् **ईफग** कोन **ईगफ** कोनापेक्षां फारच मोठा आहें.
(प्र. प्र. ९ व ३.)

ईफग त्रिकोणाचा **ईफग** कोन **ईगफ** कोनापेक्षां मोठा आहे;
ह्यास्तव **ईग** बाजू **ईफ** बाजूपेक्षां मोठी आहे. (१. १९)
परंतु **ईग** बाजू **बक** बाजूबरोबर आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून **बक** बाजू **ईफ** बाजूपेक्षां मोठी आहे. (प्र. प्र. अ.)

ह्याकरितां, जर दोन त्रिकोणांपैकीं इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (१. २४) ह्याचा पक्ष व साध्य सांगा.

२. (१. २४) च्या सिद्धतेच्या आरंभीं, "**डई**, आणि **डफ** ह्या दोन बाजूंपैकीं निदान एक तरी अशी असावयाची कीं, ती दुसरीपेक्षां मोठी नाहीं," असें म्हटलें आहे; तें सिद्ध करून दाखवा.

३. (१. २४) च्या सिद्धतेकरितां जी रचना करावी लागते, ती सामान्यरूपानें सांगा.

४. (१. २४) च्या सिद्धतेमध्यें "**डई** ही **डफ** पेक्षां मोठी नाहीं" असें मानावयास सांगितलें आहे, त्याचा उपयोग काय? हें जर मानिलें नाहीं, तर रचनेमध्यें कोणती शंका येते? आणि हें मानिल्यानें ती शंका कशी दूर होते?

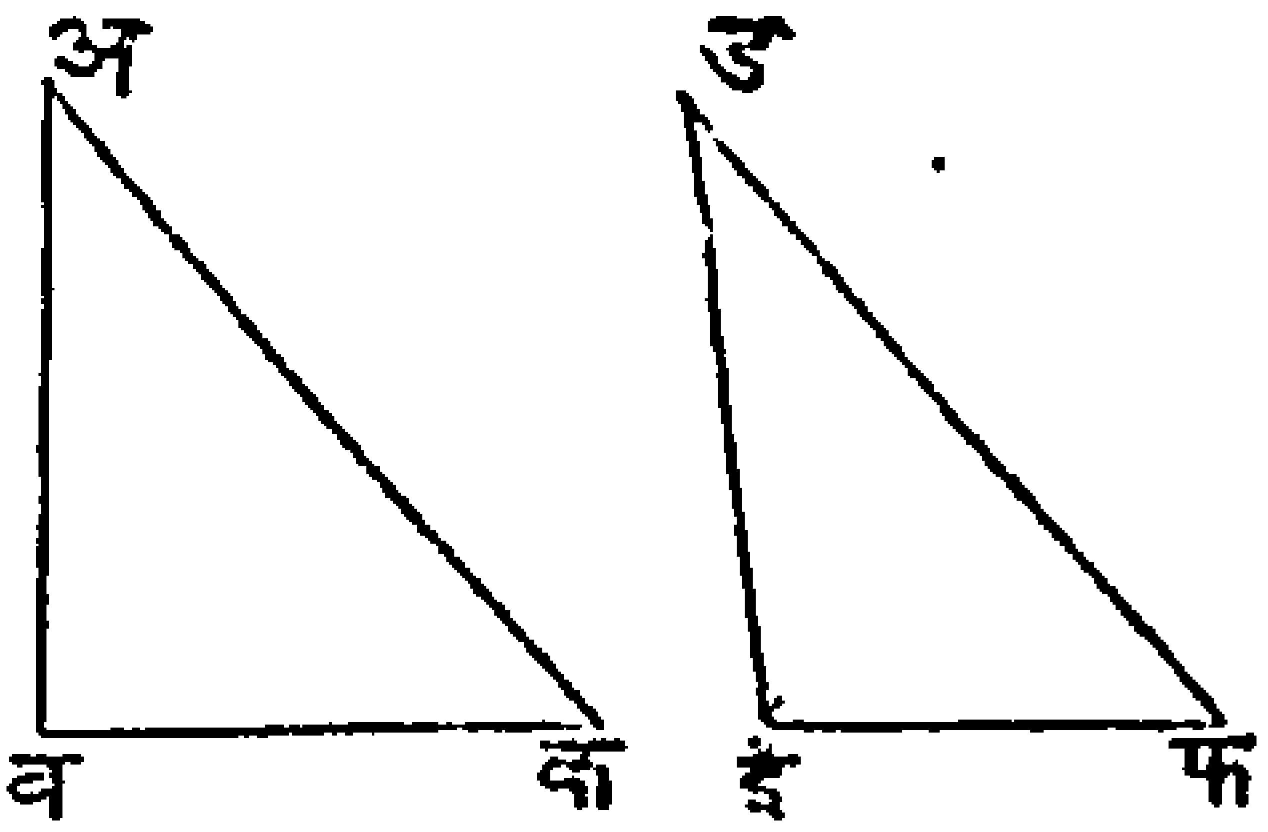
५. (१. २४) च्या सिद्धतेमध्यें **डईफ** त्रिकोणावर जी रचना केली आहे, ती त्यावर न करितां **अबक** त्रिकोणावर करून सिद्धता करून दाखवा.

६. (१. २४) च्या सिद्धतेमध्यें "**डई** ही **डफ** पेक्षां मोठी नाहीं," असें मानावयास सांगितलें आहे, तें न मानितां (म्हणजे ह्या गोष्टीचा उपयोग सिद्धतेमध्यें मुळींच न करितां) सिद्धता करून दाखवा.

७. (१. २४) च्या सिद्धतेला जे आधार लागतात, तें अनुक्रमानें सांगा.

सिद्धांत २५. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, परंतु पहिल्याचा पाया दुसऱ्याच्या पायापेक्षां मोठा आहे, तर पहिल्या त्रिकोणाच्या पायासमोरील कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या पायासमोरील कोनापेक्षां मोठा होईल.



अबक आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **अब**, **अक** ह्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या **डई**, **डफ** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत; परंतु **बक** पाया **ईफ** पायापेक्षां मोठा आहे; तर **बअक** कोन **ईडफ** कोनापेक्षां मोठा होईल.

कारण, जर **बअक** कोन **ईडफ** कोनापेक्षां मोठा नसेल, तर **बअक** कोन, **ईडफ** कोनाबरोबर, किंवा **ईडफ** कोनाहून लहान असावा. परंतु **बअक** कोन **ईडफ** कोनाबरोबर आहे असें जर मानिलें, तर **बक** बाजू **ईफ** बाजू बरोबर होईल; (१.४)
पण ही गोष्ट अशक्य आहे; (प्रतिज्ञा)
ह्मणून **बअक** कोन **ईडफ** कोनाबरोबर नाहीं.
आतां, **बअक** कोन **ईडफ** कोनापेक्षां लहान आहे असें जर मानिलें, तर **बक** बाजू **ईफ** बाजूपेक्षां लहान होईल; (१. २४)
पण हीही गोष्ट अशक्य आहे; (प्रतिज्ञा)
ह्मणून **बअक** कोन **ईडफ** कोनापेक्षां लहान नाहीं;
आणि **बअक** कोन **ईडफ** कोनाबरोबर नाहीं असें वर दाखविलेंच आहे, ह्मणून **बअक** कोन **ईडफ** कोनापेक्षां मोठा आहे.

ह्याकरितां, जर दोन त्रिकोणांत इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.२५) हा (१.२४) ह्याचा व्यत्यास आहे असें दाखवा.

२. (१.४), (१.८), (१.२४) व (१.२५) ह्या चार सिद्धांतांवरून दोन त्रिकोणांच्या संबंधानें सामान्य गोष्ट कोणती ठरते ?

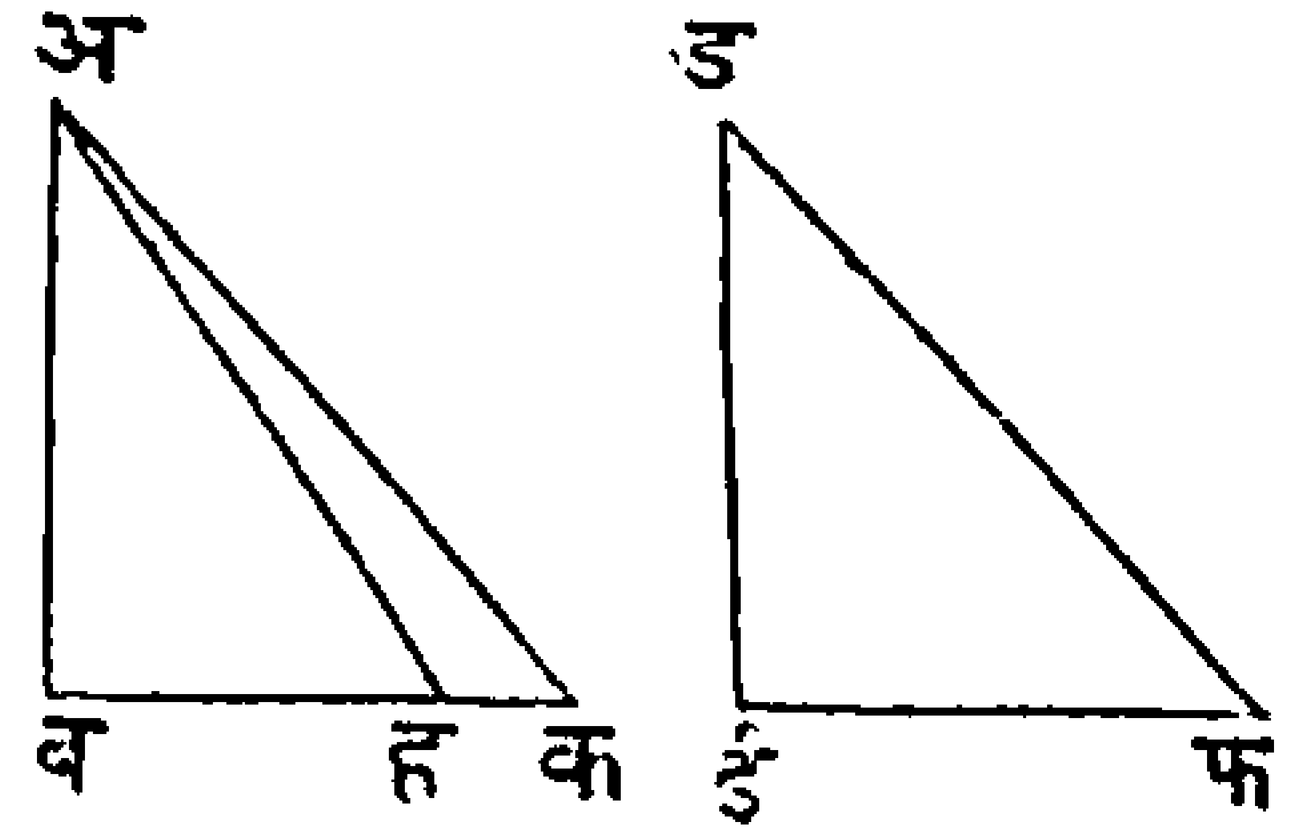
सिद्धांत २६. प्रमेय.

(१) जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचे दोन कोन व त्यांच्या मधील बाजू हीं, दुसऱ्याचे दोन कोन व त्यांच्या मधील बाजू ह्यांशीं अनुक्रमें समान असतील; तर त्यांचे राहिलेले अवयवही अनुक्रमें समान

ह्मणून **गकब** कोन **अकब** कोनाबरोबर झाला. (४. प्र. १)
परंतु हा नवव्या प्रत्यक्षप्रमाणाशीं विरोध आहे;
ह्मणून **अब** ही **डई**पेक्षां मोठी नाहीं.
त्याप्रमाणेंच **अब** ही **डई**पेक्षां लहान नाहीं असें सिद्ध करितां येईल;
ह्मणून **अब** बाजू **डई** बाजूशीं बरोबर आहे.

आतां **अबक** त्रिकोणाच्या **अब बक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ब** कोन हीं, **डईफ** त्रिकोणाच्या **डई, ईफ** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ई** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; ह्मणून **अक** पाया **डफ** पायाबरोबर आहे, आणि **अ** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे. (१. ४ भा. १ व. २)

(२) आतां जर **अबक** आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याचे **अबक** आणि **अकब** हे कोन व **अकब** कोनासमोरची **अब** बाजू हीं, दुसऱ्याचे **डईफ** आणि **डफई** हे कोन व **डफई** कोनासमोरची **डई** बाजू ह्यांशीं



अनुक्रमें समान आहेत; तर त्यांचे राहिलेले अवयव अनुक्रमें समान होतील; ह्मणजे समान कोनांमधल्या **बक, ईफ** ह्या बाजू परस्पर समान होतील, समान कोनांच्या दुसऱ्या जोडासमोरच्या **अक, डफ** ह्या बाजू परस्पर समान होतील, आणि **अ, ड** हे राहिलेले कोनही परस्पर समान होतील. हें सिद्ध करावयाचें.

प्रथमतः **बक** बाजू **ईफ**शीं बरोबर आहे असें सिद्ध करूं.

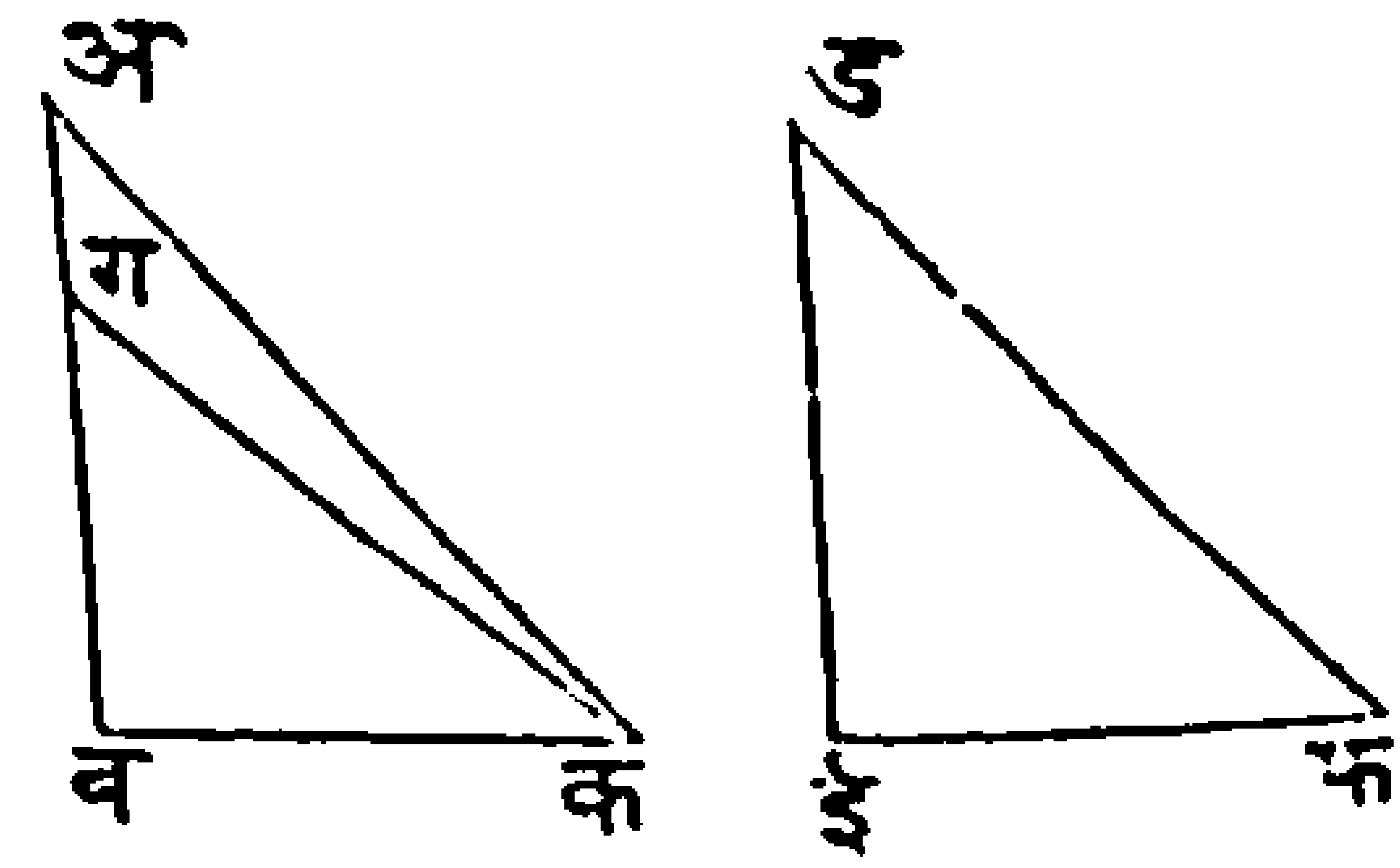
बक ही जर **ईफ** बरोबर नसेल, तर तीपेक्षां मोठी किंवा लहान असली पाहिजे.

प्रथम **बक** ही **ईफ**पेक्षां मोठी मानून तिचा **ईफ** एवढा **बह** तुकडा पाड, व **अह** सांध. (१. ३. व पृ. कृ. १)

आतां **अबह** आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **अब, बह** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ब** कोन हीं, दुसऱ्याच्या **डई, ईफ** ह्या बाजू व त्यांच्यामधील **ई** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत;
(प्रतिज्ञा व रचना)

होतील; ह्मणजे समान कोनांच्या प्रत्येक जोडासमोरच्या राहिलेल्या बाजू समान होतील व राहिलेले कोनही समान होतील. तसेंच (२) जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचे दोन कोन व त्यांपैकीं एका कोनासमोरची बाजू हीं, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तदनुरूप अवयवांशीं अनुक्रमें समान असतील; तर त्यांचे राहिलेले अवयवही अनुक्रमें समान होतील.

(१) **अबक** आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याचे **अबक**, आणि **अकब** हे दोन कोन व त्यांच्या मधील **बक** बाजू हीं, दुसऱ्याचे **डईफ**, **डफई** हे कोन व त्यांच्या मधील **ईफ** बाजू ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; तर त्यांचे राहिलेले अवयव अनुक्रमें समान होतील; ह्मणजे समान कोनांच्या एका जोडासमोरील **अब**, **डई** ह्या बाजू परस्पर समान होतील, व दुसऱ्या जोडासमोरील **अक**, **डफ** ह्या बाजूही परस्पर समान होतील, व राहिलेले **अ**, **ड** हे कोनही समान होतील. असें सिद्ध करावयाचें.



प्रथमतः **अब** बाजू **डई** बाजूबरोबर आहे असें सिद्ध करूं.

अब ही **डई** बरोबर नसेल, तर ती **डई**पेक्षां मोठी अथवा लहान असली पाहिजे.

प्रथम **अब** ही **डई**पेक्षां मोठी आहे असें मानून तिचा **डई** एवढा **बग** तुकडा पाड, आणि **गक** सांध. (१. ३. व गृ. कृ. १)

आतां **गबक** आणि **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **गब**, **बक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ब** कोन हीं, दुसऱ्याच्या **डई**, **ईफ** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ई** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; (रचना व प्रतिज्ञा)

ह्मणून त्या त्रिकोणांच्या **गब**, **डई** ह्या समान बाजूंसमोरील **गकब** आणि **डफई** हे कोन समान झाले. (१. ४)

परंतु **अकब** कोन **डफई** कोनाबरोबर आहे; (प्रतिज्ञा)

ह्मणून **अहब** कोन **डफई** कोनाबरोबर झाला. (१. ४)
परंतु **अकब** कोन **डफई** कोनाबरोबर आहे; (प्रतिज्ञा)
ह्मणून **अहब** कोन **अकब** कोनाबरोबर झाला. (प्र. प्र. १)
परंतु हा १६ व्या सिद्धांताशीं विरोध आहे;
म्हणून **बक** बाजू **ईफ** पेक्षां मोठी नाहीं.
ह्याप्रमाणेंच ती **ईफ** पेक्षां लहान नाहीं, असें सिद्ध करितां येईल;
म्हणून **बक** बाजू **ईफ**शीं बरोबर आहे.

आतां **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **बक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ब** कोन हीं **डईफ** त्रिकोणाच्या **डई**, **ईफ** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ई** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत;
म्हणून **अक** पाया **डफ** पायाबरोबर आहे आणि **अ** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे. (१. ४)

ह्याकरितां जर दोन त्रिकोणांपैकीं इ०.

प्रश्न.

१. **अबक** त्रिकोणाचे **अ**, **क** हे कोन व **बक** बाजू हीं, **डईफ** त्रिकोणाचे **फ**, **ई** हे कोन व **डई** बाजू ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; तर बाकीच्या अवयवांपैकीं कोणता कोणत्याशीं बरोबर होईल? हें सांगून सिद्ध करा.

२. (१. २६) चे भाग किती आहेत? प्रत्येक भागाचा पक्ष व साध्य सांगा. त्या भागांच्या पक्षांमध्यें भेद काय? प्रत्येक भागाच्या साध्यांतली कोणती गोष्ट क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध केली आहे? व कोणत्या गोष्टी क्रमिक रीतीनें सिद्ध केल्या आहेत?

३. (१. २६) च्या पहिल्या भागाच्या सिद्धतेमध्यें **अब** चा **डई** एवढा तुकडा पाडावयाचा, तो **अ** बिंदूपासून पाडिला, तर चालेल काय? दुसऱ्या भागाच्या सिद्धतेमध्यें **बक**चा **ईफ** एवढा तुकडा पाडायाचा, तो **क** बिंदूपासून पाडिला, तर चालेल काय? उत्तरांचीं कारणें सांगा. हे तुकडे अमुक बिंदूपासून पाडावे लागतात, असा कांहीं सामान्य नियम असेल, तर तो सांगा.

४. (१. २६) च्या पहिल्या भागामध्यें आरंभीं **अब**, **डई** ह्यांची समानता क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध केली आहे, तिचे ठिकाणीं आरंभीं **अक**, **डफ** ह्यांची समानता सिद्ध करून तो भाग पुरा करून दाखवा.

५. (१. २६) च्या दुसऱ्या भागामध्यें आरंभीं **बक** आणि **डई** ह्यांची समानता क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध केली आहे, तिचे ठिकाणीं आरंभीं **अक** आणि **डफ** ह्यांची समानता (ग्रंथांतल्या रीतीनें) सिद्ध करितां येईल काय? कां?

६. (१. २६) च्या प्रत्येक भागांत दिलेल्या गोष्टींवरून त्रिकोणांचीही समानता सिद्ध होते असें दाखवा.

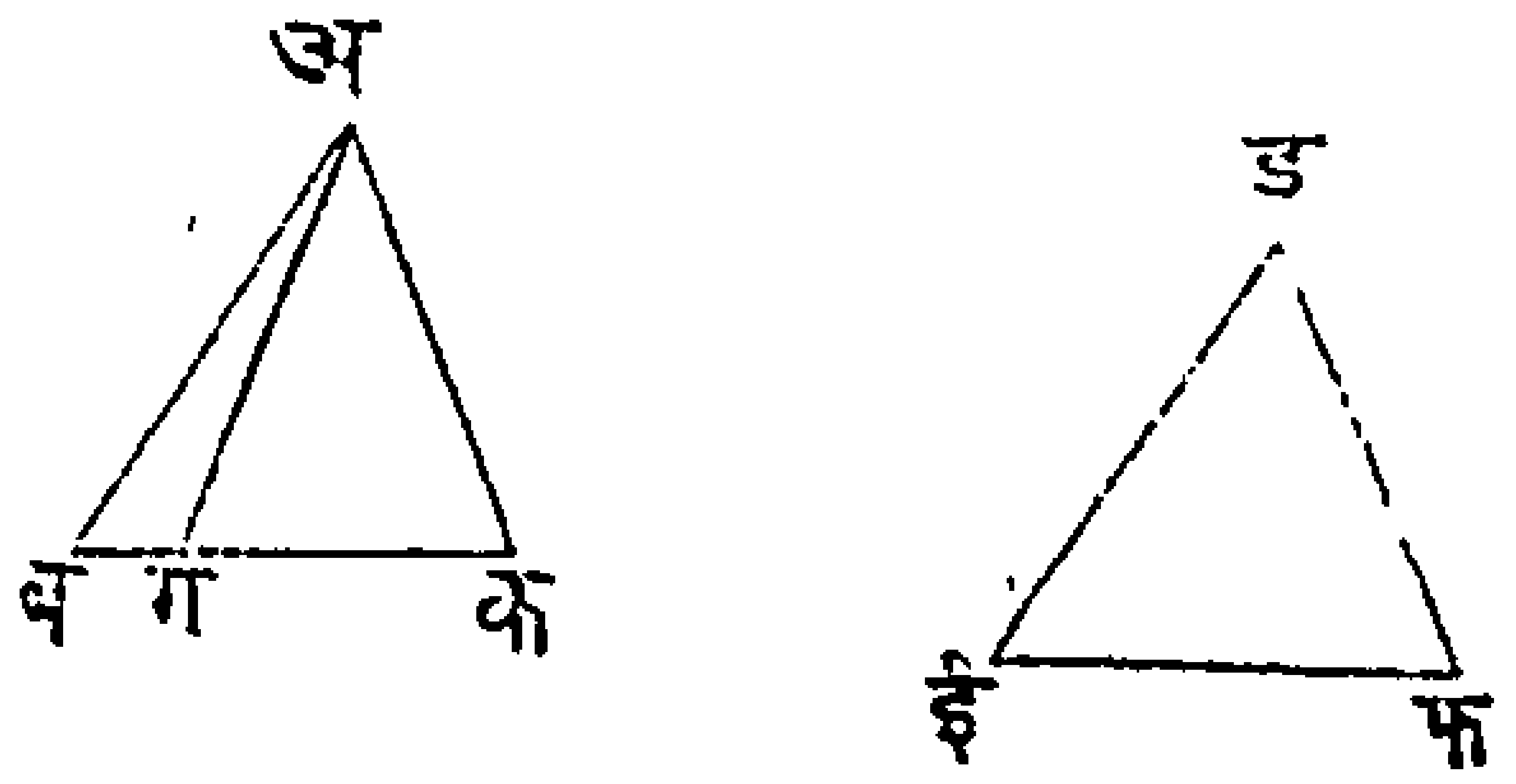
७. (१. २६) च्या पहिल्या भागाची सिद्धता, (१. ४) किंवा (१. ८) ह्याच्या सिद्धतेप्रमाणें, एक त्रिकोण दुसऱ्यावर उचलून ठेविला असें मानून, करून दाखवा.

८. (१. २६) चा पहिला भाग हा (१. ४) च्या पहिल्या दोन भागांचा मिळून व्यत्यास आहे, असें दाखवा.

९. (१. २६) च्या दुसऱ्या भागाच्या व्यत्यासाची प्रतिज्ञा म्हणा. हा दुसऱ्या भागाचा व्यत्यास खरा आहे काय? त्याला एखादा अपवाद आणून दाखवा.

सिद्धांत अ. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशी अनुक्रमें समान आहेत, समान बाजूंच्या एका जोडासमोरील कोन समान आहेत आणि समान बाजूंच्या दुसऱ्या जोडासमोरील कोन सजातीय (म्हणजे दोन्ही काटकोन, दोन्ही लघुकोण अथवा दोन्ही विशालकोण) आहेत, किंवा त्यांपैकीं एक काटकोन आहे; तर त्यांचे बाकीचे अवयव अनुक्रमें समान असतात.



अबक त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजू, **डईफ** त्रिकोणाच्या **डई**, **डफ** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत; **अब**, **डई** ह्या समान बाजूंच्या

एका जोडासमोरील **क**, **फ** हे कोन समान आहेत; आणि **अक**, **डफ** ह्या समान बाजूंच्या दुसऱ्या जोडासमोरील **ब**, **ई** हे कोन सजातीय (म्हणजे दोन्ही काटकोन, दोन्ही लघुकोण अथवा दोन्ही विशालकोण) आहेत, किंवा त्यांपैकीं एक कोन काटकोन आहे. तर **बक**, **ईफ** ह्या बाजू समान होतील; **ब**, **ई** हे कोन परस्पर समान होतील, व **अ**, **ड** हे कोन परस्पर समान होतील, हें सिद्ध करावयाचें.

(१) समान बाजूंच्या दुसऱ्या जोडासमोरचे **ब**, **ई** हे कोन काटकोन आहेत असें जर दिलें असेल, तर (प्र. प्र. ११) व (१. २६ भाग २) ह्यांवरूनच इष्टसिद्धि होईल.

(२) आतां **ब**, **ई** हे दोन्ही लघुकोण आहेत अथवा दोन्ही विशालकोण आहेत किंवा त्यांपैकीं एक काटकोन आहे, असें मानून सिद्धता करूं.

त्यांत प्रथमत: **बक**, **ईफ** ह्या समान आहेत असें (क्रमविरुद्ध रीतीनें) सिद्ध करूं.

बक, **ईफ** ह्या समान नसतील, तर **बक**, **ईफ** पेक्षां मोठी किंवा लहान असली पाहिजे.

प्रथम **बक** मोठी मानून **ईफ** बरोबर **कग** केली, आणि **अग** सांधिली.

(१. ३ व गृ. कृ. १)

आतां **अकग**, **डफई** ह्या त्रिकोणांस (१. ४) लाविल्यानें, **अग**, **डई** ह्या समान ठरतील; आणि **अब**, **डई** समान आहेत (प्रतिज्ञा); म्हणून **अग**, **अब** समान होतील (प्र. प्र. १); म्हणून **ब** आणि **अगब** हे कोन समान होतील (१. ५).

आतां **ई** कोन **अगक** कोनाबरोबर आहे असें वर (१. ४) याच्या योजनेंत सिद्ध झालें; आणि **ब**, **ई** हे कोन सजातीय आहेत; म्हणून **ब**, **ई** ह्यांच्या बरोबरीचे **अगब** आणि **अगक** हे कोनही सजातीय झाले.

हे दोन्ही लघुकोन असतील, तर त्यांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी होईल; दोन्ही विशालकोण असतील, तर त्यांची बेरीज दोन काटकोनांहून जास्त होईल; म्हणून ह्या दोन्ही स्थितींमध्यें (१)

१३) शीं विरोध येईल. आणि त्यांपैकीं एक काटकोन असेल, तर (१. १३) ह्यावरून दुसराही काटकोन ठरेल; व **अवग** त्रिकोणाच्या **व** आणि **अगव** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोन ठरून (१. १७) शीं विरोध येईल.

म्हणून **वक** बाजू **ईफ** पेक्षां मोठी नाहीं. ह्याप्रमाणेंच लहान नाहीं असेंही सिद्ध करतां येईल. म्हणून **वक** बाजू **ईफ** बाजूबरावर आहे. म्हणून (१. ४) ह्यावरून इष्टसिद्धि.

प्रश्न.

१. (१. **अ**) आणि (१. २६) च्या दुसऱ्या भागाचा व्यत्यास ह्यांमध्यें भेद कोणता ?

२. (१. **अ**) च्या सिद्धतेमध्यें आधीं तिसऱ्या बाजूंची समानता क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध करून (१. ४) ह्याच्या योजनेची सामग्री जुळविली आहे; तिच्या ठिकाणीं आधीं **अ, ड** ह्या कोनांची समानता क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध करून (१. ४) ह्याच्या योजनेची सामग्री जुळवून दाखवा.

३. (१. **अ**) च्या सिद्धतेमध्यें आधीं **ब, ई** ह्या कोनांची समानता ठरवितां येईल काय ? कारण काय ?

४. (१. **अ**) च्या सिद्धतेला जे आधार लागतात, ते अनुक्रमानें सांगा.

पहिल्या पुस्तकाच्या पहिल्या खंडावर.

(म्हणजे १. २६ पर्यंत सिद्धांतांवर)

प्रश्न.

१. ज्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा समोरच्या बाजूंवर लंब असतात, तो त्रिकोण समभुज असतो.

२. अमर्याद रेषेच्या बाहेरील एका बिंदूपासून तीवर लंब एक व त्या लंबापासून सारख्या अंतरावर असणाऱ्या (म्हणजे लंबाशीं सारखे कोन करणाऱ्या) दुसऱ्या दोन रेषा काढिल्या, तर त्या सारख्या अंतरावरच्या रेषा समान असतात.

३. अमर्याद रेषेच्या बाहेरील एका बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत एक रेषा काढिली आहे; तर तिच्याशीं समान अशी त्याच बिंदूपासून त्याच रेषेपर्यंत दुसरी रेषा काढा.

४. अमर्याद रेषेच्या बाहेरील एका बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत एक तीवर लंब व दुसऱ्या अनेक रेषा लंबाच्या दोन्ही अंगांस काढिल्या आहेत. तर (१) त्या सर्वांत लंब लहान असतो; (२) लंबाच्या एकाच अथवा भिन्न अंगच्या इतर कोणत्याही दोन रेषांपैकीं जी लंबाजवळ असते (म्हणजे लंबाशीं लहान कोन करिते) ती दुसरीपेक्षां लहान असते; (३) त्या बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतात; (४) आणि त्या दोन समान रेषा लंबाच्या भिन्न अंगांसच पडतात.

५. (१. ५) च्या आकृतींत जर **फक**, **वग** ह्यांचा छेदनबिंदु **ह** आहे; तर **फह**, **गह** समान आहेत, असें सिद्ध करा.

६. **अबक**, **अबड** हे त्रिकोण **अब**च्या एकाच अंगास आहेत; **अक**, **बड** समान आहेत; **अड**, **बक** समान आहेत; आणि **अड**, **बक** ह्यांचा छेदनबिंदु **ओ** आहे. तर **अओब** त्रिकोण समद्विभुज आहे, असें सिद्ध करा.

७. **अबकड** चौकोनाची **अड** बाजू महत्तम व **बक** बाजू लघुतम आहे; तर **ब** कोन **ड** कोनापेक्षां मोठा आहे व **क** कोन **अ** कोनापेक्षां मोठा आहे, असें सिद्ध करा.

८. चौरसाच्या एका कोणबिंदूपासून, समोरच्या एका बाजूस छेदणारी व दुसरी बाजू वाढविली असतां तिला मिळणारी अशी रेषा काढिली; तर ती चौरसाच्या कर्णापेक्षां मोठी असते.

९. ज्या त्रिकोणाच्या एका कोनास दुभागणारी रेषा समोरच्या बाजूसही दुभागिते. तो त्रिकोण समद्विभुज असतो.

१०. त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज ही, तिसऱ्या बाजूचा मध्य व तिच्या समोरचा कोणबिंदु त्यांस सांधणाऱ्या रेषेच्या दुपटीपेक्षां जास्त असते.

११. (१) कोनास दुभागणाऱ्या रेषेंतील कोणत्याही बिंदूपासून त्या

कोनाच्या बाजूंचीं अंतरें सारखीं असतात (म्हणजे त्या बिंदूपासून त्या बाजूंवर टाकिलेले लंब सारखे असतात); (२) आणि कोनास दुभागणाऱ्या रेषेच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून त्या कोनाच्या बाजू सारख्या अंतरावर नसतात.

१२. कोनाच्या एका बाजूंतील एका बिंदूपासून त्या कोनास दुभागणाऱ्या रेषेवर लंब काढून तो दुसऱ्या बाजूस मिळे तोंपर्यंत वाढविला, तर तो लंबही कोनास दुभागणाऱ्या रेषेनें दुभागिला जातो.

१३. विवक्षित बिंदूपासून अशी एक रेषा काढावयाची कीं, तिच्या योगानें, परस्परांस छेदणाऱ्या विवक्षित दोन रेषांचे, त्यांच्या छेदनबिंदूपासून, सारखे तुकडे पडतील, (अथवा ती त्यांशीं सारखे कोन करील.)

१४. दोन काटकोनत्रिकोणांपैकीं एकाचा कर्ण व एक बाजू हीं, दुसऱ्याचा कर्ण व एक बाजू ह्यांशीं अनुक्रमें समान असतील, तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.

१५. दोन त्रिकोणांच्या निदान किती व कोणत्या अवयवांची समानता दिली असतां ते त्रिकोण एकरूप आहेत असें सिद्ध होतें? "दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचे कोणतेही तीन अवयव दुसऱ्याच्या तदनुरूप तीन अवयवांशीं अनुक्रमें समान असल्यास ते त्रिकोण एकरूप असतात", ह्या सिद्धांताला अपवाद कोणते आहेत?

१६. असा एक त्रिकोण काढा कीं, ज्याच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन हीं, दिलेल्या दोन रेषा व दिलेला एक कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान होतील.

१७. विवक्षित त्रिकोणाशीं एकरूप असा दुसरा एक त्रिकोण काढा.

१८. दोन सरलरेषाकृतींच्या भुजसंख्या सारख्या असून एकीची एक बाजू व तिच्या जवळचे दोन कोन हे तीन अवयव खेरीज करून बाकीचे सर्व अवयव दुसरीच्या तदनुरूप अवयवांशीं अनुक्रमें समान असतील, तर त्या आकृति एकरूप असतात.

१९. दोन सरलरेषाकृतींच्या भुजसंख्या समान असून, एकीच्या

दोन बाजू व त्यांच्यामधील कोन हे तीन अवयव खेरीज करून बाकी-चे सर्व अवयव दुसरीच्या तदनुरूप अवयवांशीं समान असतील, तर त्या आकृति एकरूप असतात.

२०. एका सरलरेषाकृतीशीं एकरूप अशी दुसरी सरलरेषाकृति काढण्याची सामान्यरीति सांगा.

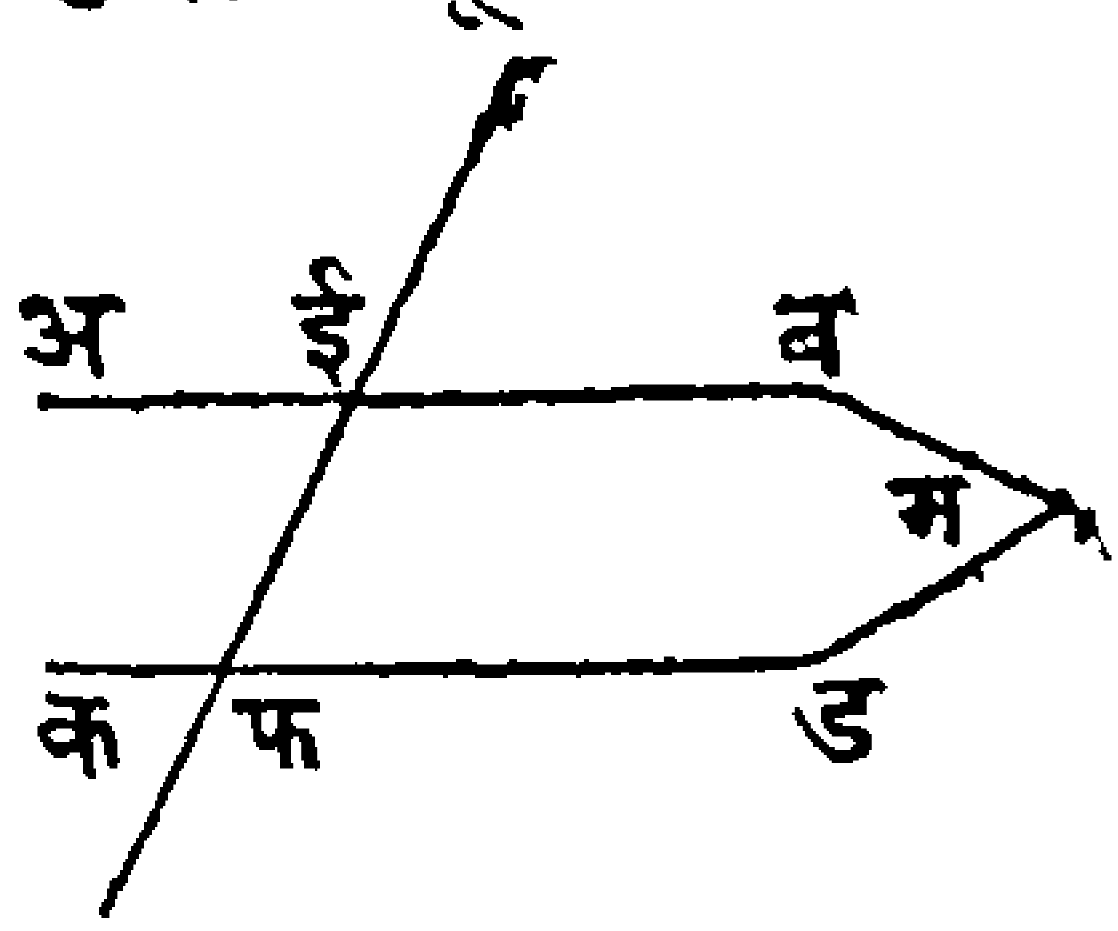
२१. जे त्रिकोण एकरूप असतात, त्यांच्या समान बाजूंवर समोरच्या कोणबिंदूंपासून टाकिलेले लंब समान असतात.

सिद्धांत २७. प्रमेय.

दोन रेघांस एका रेघेनें छेदिलें असतां, जर व्युत्क्रम कोन बरोबर होतील, तर त्या दोन रेघा परस्पर समांतर असतात.

अब आणि **कड** ह्या दोन रेघांस **ईफ** रेघेनें छेदिलें असून **अईफ** आणि **ईफड** हे दोन व्युत्क्रम कोन बराबर झाले आहेत; तर **अब** रेघ **कड** रेघेशीं समांतर होईल.

कारण, जर **अब** रेघ **कड** रेघेशीं समांतर नसेल, तर ह्या दोन रेघा **ब** आणि **ड** ह्या बिंदूंकडे, किंवा **अ** आणि **क** ह्या बिंदूंकडे वाढविल्या असतां मिळतील. प्रथम त्या **ब** आणि **ड** ह्या बिंदूंकडे वाढविल्या असतां **ग** बिंदूंत मिळतात असें समज.



आता **गईफ** हा एक त्रिकोण आहे, म्हणून त्याचा बाहेरील **अईफ** कोन, आंतील त्याशीं सलग्न कोनापलीकडच्या **ईफग** कोनापेक्षां मोठा ठरतो;(१.१६)

परंतु **अईफ** कोन **ईफग** कोनाबराबर आहे; (प्रतिज्ञा)

म्हणून हा प्रतिज्ञेशीं विरोध आहे.

ह्यास्तव **अब** आणि **कड** ह्या रेघा **ब** आणि **ड** ह्या बिंदूंकडे वाढविल्या असतां मिळत नाहींत.

ह्याप्रमाणेंच, त्या रेघा **अ** आणि **क** ह्या बिंदूंकडे वाढविल्या असतांही मिळत नाहींत, असें दाखवितां येईल.

म्हणून **अब** रेषा **कड** रेषेशीं समांतर आहे. (व्याख्या ३४)
ह्याकरितां, **जर एका रेषेनें** इत्यादि.

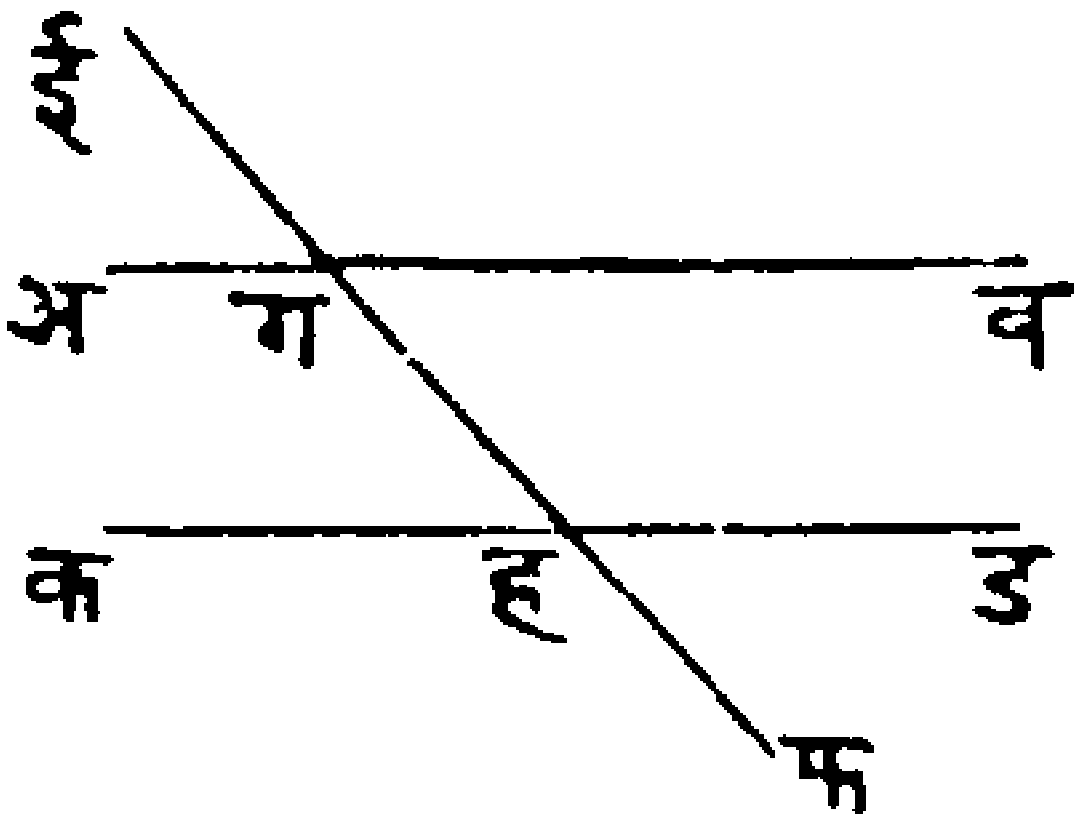
प्रश्न.

१. (१.२७)च्या आकृतींत **बईफ** कोन **ईफक** कोनाबरोबर दिला आहे, तर **अब, कड** ह्या रेषा समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

२. दोन रेषांस एका रेषेनें छेदिलें असतां, जर छेदकरेषेच्या भिन्न आंगचे (व भिन्न बिंदूंजवळचे) दोन बाह्यकोण समान असतील, तर त्या रेषा समांतर असतील.

सिद्धांत २८. प्रमेय.

दोन रेषांस एका रेषेनें छेदिलें असतां, (१) जर बाह्यकोण छेदकरेषेच्या त्याच आंगच्या आंतील कोनापलीकडच्या कोनाबरोबर असेल, किंवा (२) जर छेदकरेषेच्या एकाच आंगच्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोन असेल, तर त्या दोन रेषा समांतर असतील.



(१) **अब** आणि **कड** ह्या दोन रेषांस **ईफ** रेषेनें छेदिलें आहे, व **ईगब** हा बाह्यकोण, **ईफ** रेषेच्या त्याच आंगच्या **बगह** ह्या आंतील कोनापलीकडच्या **गहड** कोनाबरोबर आहे; तर **अब, कड** ह्या रेषा समांतर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

ईगब कोन **गहड** कोनाबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि **ईगब** कोन **अगह** कोनाबरोबर आहे, (१. १५)
ह्यास्तव **अगह** कोन **गहड** कोनाबरोबर आहे; (प्र. प्र. १)
आणि ते व्युत्क्रमकोण आहेत;
म्हणून **अब** आणि **कड** ह्या दोन रेषा समांतर आहेत. (१. २७)

(२) **अब, कड** ह्या रेषांस **ईफ** रेषेनें छेदिलें आहे, व **ईफ** रेषेच्या एकाच आंगच्या **बगह, गहड** ह्या आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोन आहे; तर **अब, कड** ह्या रेषा समांतर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

बगह आणि **गहड** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोन आहे,
(प्रतिज्ञा)

आणि **अगह** व **बगह** ह्यांची बेरीज ही दोन काटकोन आहे, (१.१३)
ह्यास्तव **अगह**, **बगह** ह्यांची बेरीज **बगह**, **गहड** ह्यांच्या बेरजे-बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
ह्या समान बेरजांतून **बगह** कोन प्रत्येकीं वजा केला;
तेव्हां **अगह** कोन **गहड** कोनाबरोबर झाला. (प्र. प्र. ३)
आणि ते व्युत्क्रमकोण आहेत;
म्हणून **अब** रेघ **कड** रेघेशीं समांतर आहे. (१. २७)

ह्याकरितां दोन रेघांस एका रेघेनें इत्यादिक.

उपसि. एकाच रेघेला, तिच्या निरनिराळ्या बिंदूंत, मिळणाऱ्या व तिजवर लंब असणाऱ्या रेघा परस्परांशीं समांतर असतात.

प्रश्न.

१. (१. २८) च्या आकृतींत **कहफ** कोन **अगह** कोनाबरोबर आहे; तर **अब**, **कड** रेघा समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

२. (१. २८) च्या आकृतींत **अगह**, **गहक** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोन आहे असें दिलें आहे; तर **अब**, **कड** रेघा समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

३. (१. २८) च्या आकृतींत **ईगब**, आणि **डहफ** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोन आहे, असें दिलें आहे; तर **अब**, **कड** रेघा समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

४. (१. २८) चा पहिला भाग (१. २७) च्या साह्यावांचून (क्रमविरुद्ध रीतीनें) सिद्ध करा.

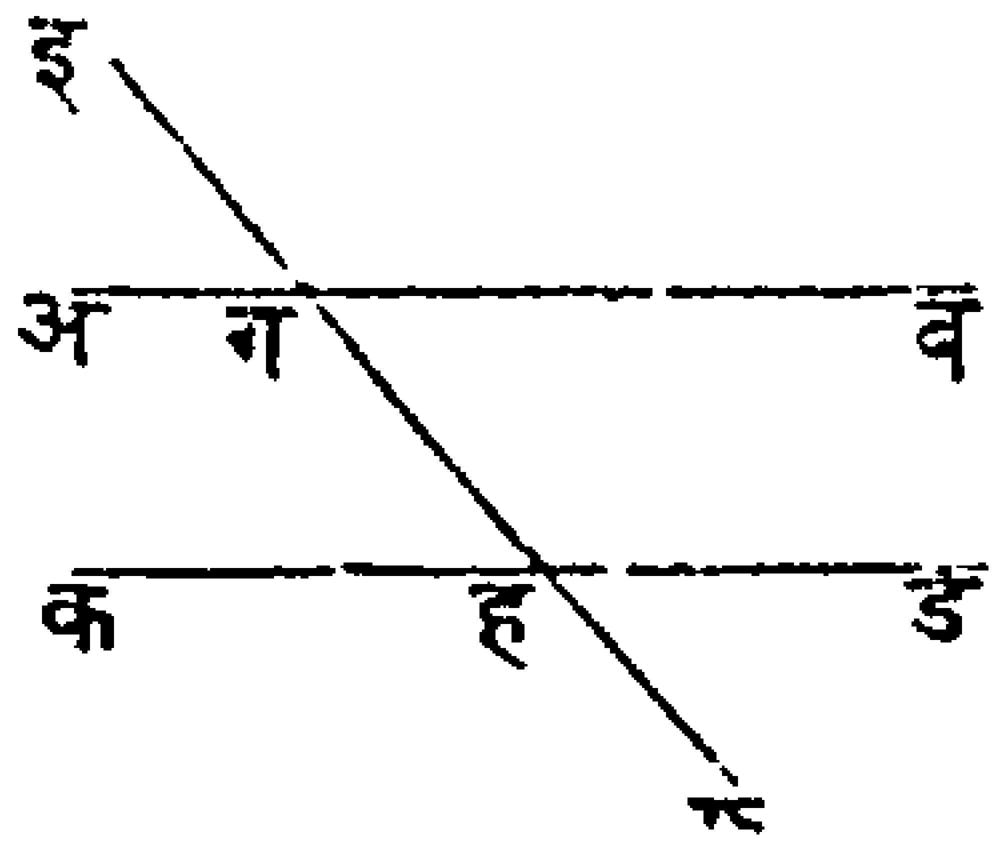
५. (१. २८) चा दुसरा भाग (१. २७) च्या साह्यावांचून (क्रमविरुद्ध रीतीनें) सिद्ध करा.

सिद्धांत २९. प्रमेय.

जर दोन समांतर रेघांस एका रेघेनें छेदिलें; तर (१) व्युत्क्रमकोण समान असतात; (२) बाहेरील कोन छेदकरेघेच्या त्याच आं-

गच्या आंतील कोनापलीकडच्या कोनाबरोबर असतो; आणि (३) छेदकरेषेच्या एकाच आंगच्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असते.

अब आणि **कड** ह्या समांतर रेघांस **इफ** रेघेनें छेदिलें आहे; तर (१) **अगह, गहड** हे व्युत्क्रमकोण समान होतील; (२) **इगब** हा बाह्यकोण, **इफ** रेघेच्या त्याच आंगच्या आंतील कोनापलीकडच्या **गहड** कोनाबरोबर होईल; आणि (३) **इफ** रेघेच्या एकाच आंगच्या **बगह, गहड** ह्या आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर होईल. अशा तीन गोष्टी सिद्ध करावयाच्या आहेत.



(१) प्रथम **अगह, गहड** हे व्युत्क्रमकोण समान आहेत, असें सिद्ध करूं.

जर हे कोन समान नसतील, तर त्यांपैकीं एक दुसऱ्यापेक्षां मोठा असला पाहिजे.

अगह कोन **गहड** कोनापेक्षां मोठा मानून, त्या प्रत्येकांत **बगह** कोन मिळविला,

तेव्हां **अगह, बगह** ह्यांची बेरीज, **बगह, गहड** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां जास्त झाली. (प्र. प्र. ४)

परंतु **अगह, बगह** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे. (१. १३)

म्हणून **बगह, गहड** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी आहे; (प्र. प्र. अ.)

आतां **अब, कड** ह्या रेघांस **इफ** रेघेनें छेदिलें आहे, व छेदक रेघेच्या एकाच आंगच्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी आहे;

म्हणून **अब, कड** ह्या रेघा (त्याच अंगास) वाढविल्या असतां मिळतील. (प्र. प्र. १२)

परंतु हा प्रतिज्ञेशीं विरोध आहे.

म्हणून **अगह** कोन **गहड** कोनापेक्षां मोठा नाहीं.
ह्याप्रमाणेंच **अगह** कोन **गहड** कोनापेक्षां लहान नाहीं, असें सिद्ध करितां येईल;
म्हणून **अगह**, **गहड** हे व्युत्क्रमकोण समान आहेत.

(२) आतां **इगब**, **गहड** हे कोन समान आहेत, असें सिद्ध करूं.

अगह कोन **गहड** कोनाबरोबर आहे, (१. २९ भाग १)
आणि **अगह** कोन **इगब** कोनाबरोबर आहे; (१.१५)
म्हणून **इगब** कोन **गहड** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

(३) आतां **बगह**, **गहड** ह्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हें सिद्ध करूं.

अगह कोन **गहड** कोनाबरोबर आहे. (१. २९ भाग १)
ह्या दोन समान कोनांत प्रत्येकीं **बगह** कोन मिळविला;
तेव्हां **अगह**, **बगह** ह्यांची बेरीज **बगह**, **गहड** ह्यांच्या बेरजेबरोबर झाली. (प्र. प्र. २)
परंतु **अगह**, **बगह** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, (१.१३)
म्हणून **बगह**, **गहड** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे. (प्र. प्र.१)

ह्याकरितां जर दोन समांतर रेषांस इत्यादि.

उपसि. १. दोन समांतर रेषांपैकीं एकीवर लंब असणारी रेषा दुसरीस मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर ती दुसरीवरही लंब असते.

उपसि. २. परस्परांशीं समांतर असणाऱ्या दोन रेषांपैकीं प्रत्येकीवर एकेक लंब काढिला असतां, ते दोन लंब परस्परांशीं समांतर होतात, किंवा त्यांची एकच सरल रेषा बनून जाते.

उपसि. ३. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषांपैकीं प्रत्येकीवर एकेक लंब काढिला असतां, ते लंब परस्परांशीं समांतर असावयाचे नाहींत (म्हणजे वाढविले असतां मिळतीलच).

प्रश्न.

१. (१.२९) च्या आकृतींत **अगइ** कोन **डहफ** कोनाबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

२. (१.२९) च्या आकृतींत **बगह** आणि **डहफ** हे कोन समान आहेत, असें सिद्ध करा.

३. (१.२९) च्या आकृतींत **इगब**, **डहफ** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

४. (१.२९) चा दुसरा भाग त्याच्या पहिल्या भागाच्या साह्यावांचून क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध करून दाखवा.

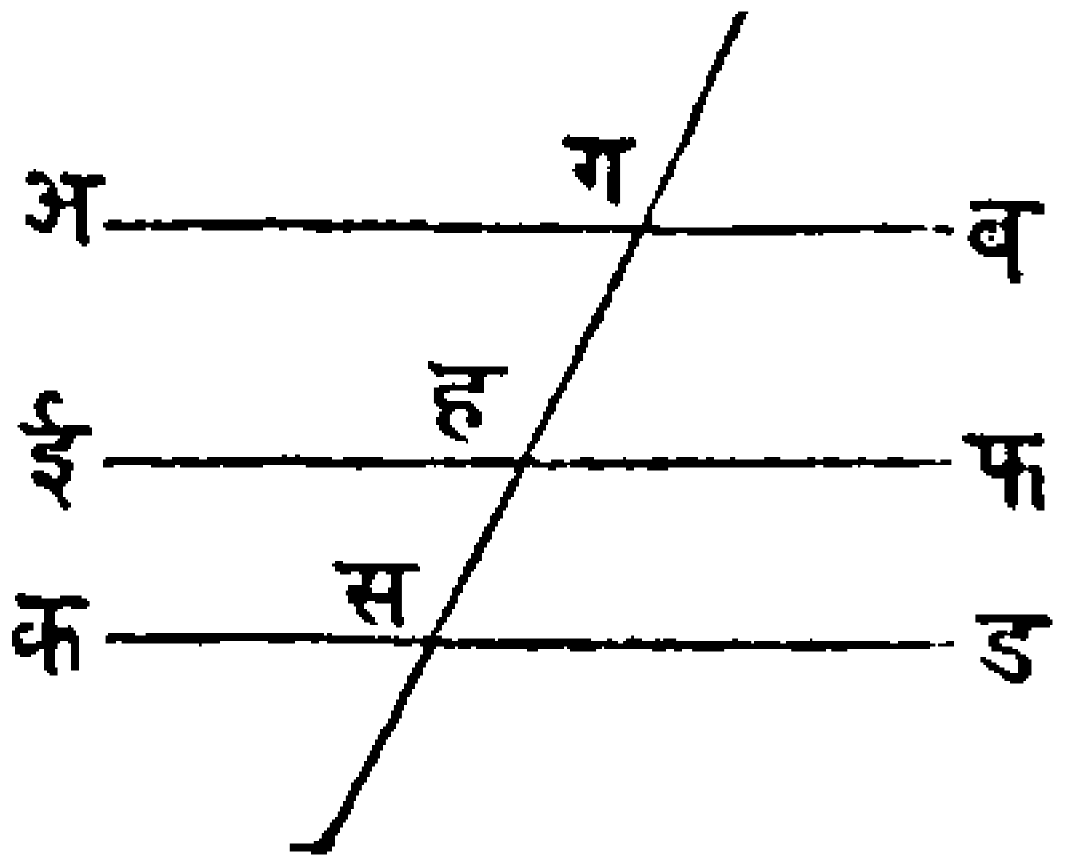
५. (१.२९) चा तिसरा भाग त्याच्या इतर भागांच्या साह्यावरून क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध करून दाखवा.

६. (१.२९) चा पहिला भाग १.२७ चा व्यत्यास आहे, दुसरा भाग १.२८ च्या पहिल्या भागाचा व्यत्यास आहे, आणि तिसरा भाग १.२८ च्या दुसऱ्या भागाचा व्यत्यास आहे, असें दाखवा.

सिद्धांत ३०. प्रमेय.

ज्या रेघा दुसऱ्या एकाच रेघेशीं समांतर असतात, त्या परस्पर समांतर असतात.

अब, **कड** ह्या रेघांतील प्रत्येक **ईफ** रेघेशीं समांतर आहे; तर **अब**, **कड**-शीं समांतर होईल.

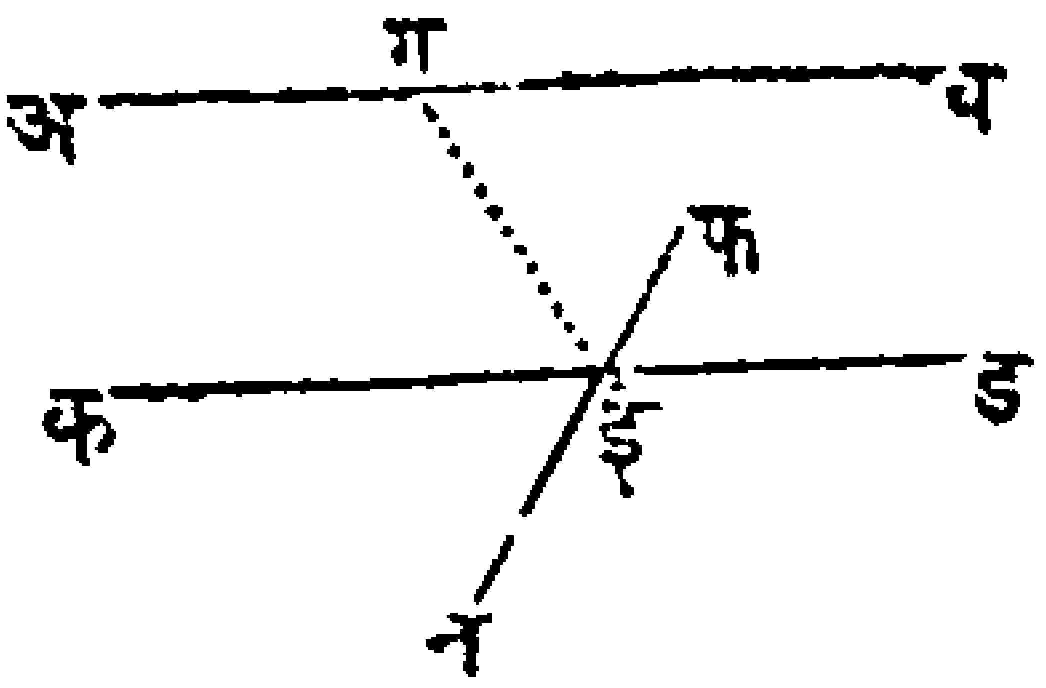


गहस रेघ **अब**, **ईफ**, **कड** ह्या रेघांस छेदी अशी काढ.

आतां **गहस** रेघ **अब**, **ईफ** ह्या समांतररेघांस छेदिते, म्हणून **अगह** कोन **गहफ** कोनाबराबर आहे. (१.२९ भा. १)
आणि **गस** रेघ **ईफ**, **कड** ह्या समांतर रेघांस छेदिते, म्हणून **गहफ** कोन **गसड** कोनाबराबर आहे. (१.२९ भा. २)
परंतु **अगस** कोन **गहफ** कोनाबराबर आहे, असें वर दाखविलें आहे; म्हणून **अगस** कोन **गसड** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
आणि हे व्युत्क्रमकोण आहेत; म्हणून **अब**, **कड**शीं समांतर आहे. (१.२७)

ह्याकरितां ज्या रेघा इत्यादिक.

उपसिद्धांत–दोन समांतररेघांपैकीं एकीला छेदणारी रेघ दुसरीकडच्या अंगास वाढविली असतां तिला मिळते.



अब, **कड** ह्या दोन समांतर रेघांपैकीं **कड**ला छेदणारी **नईफ** रेघ आहे: तर ती **अब** कडील अंगास (म्हणजे **फ** बिंदूपलीकडे) वाढविली असतां **अब**ला मिळेल.

कारण, तसें न होईल, तर **नफ** ही (१) **अब**शीं समांतर असली पाहिजे, किंवा (२) **न**च्या पलीकडे वाढविली असतां **अब**-ला मिळाली पाहिजे.

(१) समांतर होईल असें मानिलें, तर १. ३० प्रमाणें **नफ**, **कड** ह्या परस्परांशीं समांतर ठरून प्रतिज्ञेशीं विरोध येतो.

(२) आतां **न** बिंदूच्या पलीकडे वाढविली असतां **अब**ला मिळेल असें मानिलें, तर ती **कड**ला पुनः छेदिते असें ठरून प्र. प्र. १० ह्याशीं विरोध येतो.

ह्याकरितां ती **फ** बिंदूपलीकडे वाढविली तर **अब**ला मिळेल. (**अब** मधील एक **ग** बिंदु व **ई** हा छेदनबिंदु हे सांधून, प्र. प्र. ९, प्र. प्र. ४, १.२९ भा ३ व प्र. प्र. अ ह्यांच्या योजनेनें **बगई**, **गईफ** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी ठरवावी. म्हणजे १२ व्या प्र. प्रमाणावरून क्रमिक रीतीनें ही इष्टसिद्धि होते.)

प्रश्न.

१. (१.३०) च्या आकृतींत **अब**, **ईफ** ह्या प्रत्येकीं **कड**शीं समांतर आहेत, असें दिलें आहे; तर त्या परस्पर समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

२. (१.३०) च्या आकृतींत **कड**, **ईफ** ह्या प्रत्येकीं **अब**शीं समांतर आहेत, असें दिलें आहे; तर त्या परस्पर समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

३. "परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेघा प्रत्येकीं तिसऱ्या एकाच रेघेशीं समांतर असणें संभवत नाहीं," हें प्रमेय १.३० च्या आधारानें क्रमविरुद्ध रीतीनें थोडक्यांत सिद्ध होतें, असें दाखवा.

४ "जर दोन रेषा त्यांच्यामध्यें असणाऱ्या तिसऱ्या एकाद्या रेषे-शीं प्रत्येकीं समांतर आहेत, तर त्या परस्परांशीं समांतर असतात," हें प्रमेय फक्त समांतर रेषांच्या व्याख्येच्याच आधारानें (क्रमिक री-तीनें) फार थोडक्यांत सिद्ध होतें, असें दाखवा.

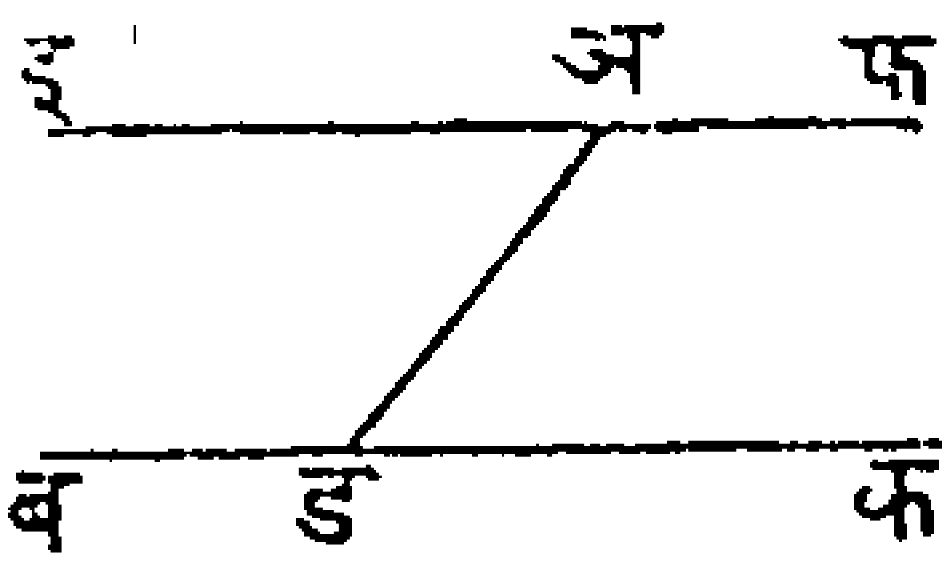
५. (१-३०) च्या सिद्धतेमध्यें, दिलेल्या तीन रेषांस छेदणारी अशी रेषा काढावयास सांगितलें आहे; ह्या गोष्टीस युक्लिडच्या कोण-त्या कृत्याचा आधार दाखवाल ?

सिद्धांत. ३१ कृत्य.

दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या सरळरेषेशीं समांतर अशी एक स-रळ रेघ काढावयाचें.

अ हा दिलेला बिंदु आहे, आणि **बक** ही दिलेली रेघ आहे; तर **अ** बिंदूपासून **बक**शीं समांतर रेघ काढावयाची आहे.

बक रेषेंत **ड** बिंदु घे आणि **अड** सांध; (ग्र. कृ. १)



अड रेषेशीं **अ** बिंदूजवळ **अडक** कोना-बरावर **डअइ** कोन कर; (१.२३)
आणि **इअ** रेघ **फ** पर्यंत वाढीव. (ग्र.कृ.२)
म्हणजे **इफ**, रेघ **बक**शीं समांतर होईल.

कारण, **बक**, **इफ** ह्या दोन रेघांस मिळणारी **अड** रेघ **इअड**, **अडक** हे दोन व्युत्क्रमकोण बरावर करिते, (रचना)
म्हणून **इफ**, **बक**शीं समांतर आहे. (१.२७)

ह्याकरितां, दिलेल्या **अ** बिंदूतून दिलेल्या **बक** रेषेशीं **इअफ** रेघ समांतर काढिली आहे.

प्रश्न.

१. (१.३१) च्या रचनेमध्यें **अड** रेषेशीं **अ** बिंदूजवळ **अडक** कोनाएवढा कोन करावयाचा, तो, **अड**च्या ज्या अंगास **अडक** कोन आहे, त्याच अंगास केला तर चालेल काय ? कां ?

२. (१.३१) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा.

३. दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेषेशीं समांतर अशा अनेक रेषा काढितां येतील काय ? कां ?

पहिल्या पुस्तकाच्या दुसऱ्या खंडावर
(म्हणजे १.२७ पासून १.३१ पर्यंत सिद्धांतांवर)

प्रश्न.

१. (१) युक्लिड्चें १२ वें प्रत्यक्षप्रमाण न स्वीकारितां त्याचे ठिकाणीं " परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषा तिसऱ्या एकाच रेषेशीं समांतर असणें संभवत नाहीं " हें प्रत्यक्ष प्रमाण स्वीकारून त्याच्या योगानें १.२९ चा पहिला भाग सिद्ध करून दाखवा; आणि मग (२) तें १२ वें प्र. प्रमाण १. २९ च्या साह्यानें सिद्ध करून दाखवा.

२. (१) विवक्षित अमर्याद रेषेच्या बाहेरील विवक्षित बिंदूपासून अशी रेषा काढा कीं, ती त्या अमर्यादरेषेस मिळेल, व तिशीं जे कोन ती करील, त्यांपैकीं एक कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल. (२) अशा रेषा किती काढितां येतील ? (३) हें कृत्य व १.२३ ह्यांच्यामध्यें भेद कोणता ? (४) हें कृत्य व १.१२ ह्यांत भेद कोणता ?

३. समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाशीं समांतर काढिलेली रेषा त्याच्या दोन्ही बाजूंस मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, ती त्या बाजूंशीं सारखे कोन करिते.

४. एका कोनाच्या दोन बाजू दुसऱ्या कोनाच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें समांतर असतील, तर ते कोन समान असतात.

५. त्रिकोणाच्या एका बाजूंतील कोणत्याही बिंदूतून पायाशीं समांतर काढिलेली रेषा दुसऱ्या बाजूस मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां जो नवीन त्रिकोण होतो, तो व मूळचा त्रिकोण हे मिथःसमकोण असतात (ह्मणजे एकाचे सर्व कोन दुसऱ्याच्या कोनांशीं अनुक्रमें समान असतात).

६. त्रिकोणाचा एखादा बाहेरील कोन दुभागणारी रेषा जर त्याच्या एका बाजूशीं समांतर असली; तर तो त्रिकोण समद्विभुज असतो.

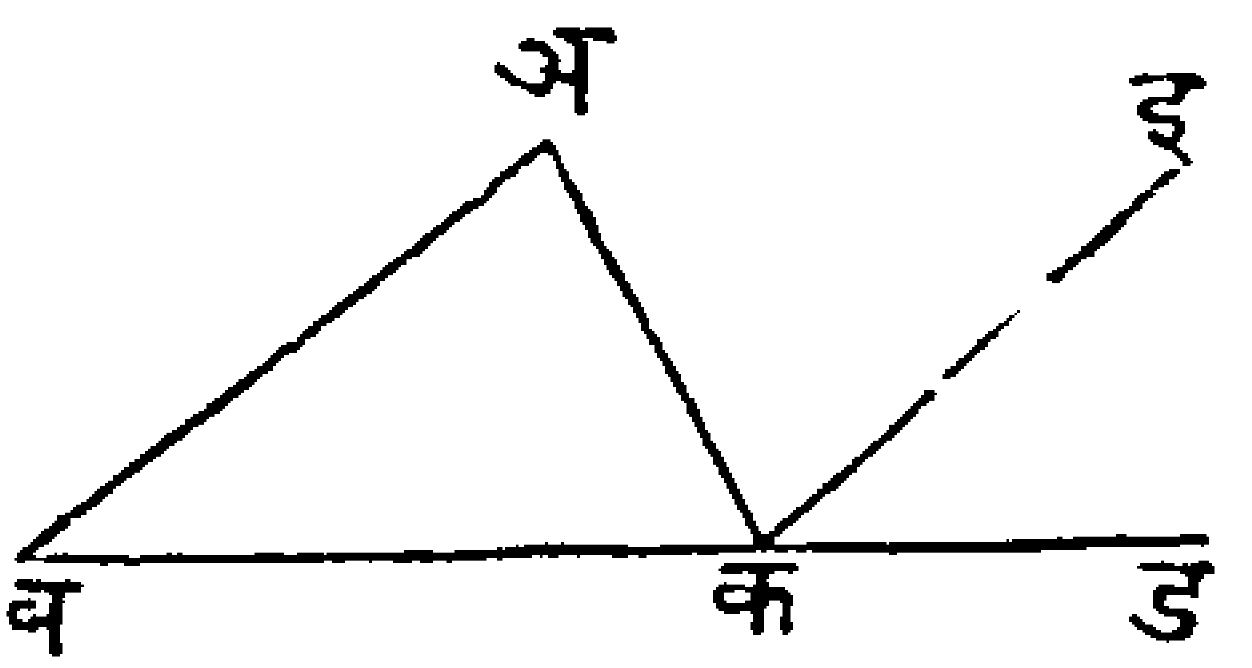
७. दोन रेषांस एक रेषा मिळाली आहे, व मिळणाऱ्या रेषेच्या एकाच आंगच्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां जास्त आहे; तर त्या रेषा मिळणाऱ्या रेषेच्या दुसऱ्या अंगास वाढविल्या असतां एकमेकींस मिळतील.

८. " मिथःसमकोणत्रिकोण एकरूप असतात असा नियम नाहीं." हें ५ व्या प्रश्नाच्या योगानें प्रत्ययास आणून द्या.

९. असा एक त्रिकोण काढा कीं, ज्याचे (१) दोन कोन व त्यांच्या मधली बाजू, अथवा (२) दोन कोन व त्यांपैकीं एका कोनासमोरची बाजू हीं, दिलेले दोन कोन व एक रेषा ह्यांशीं अनुक्रमें समान होतील. ह्यांत दिलेल्या कोनांच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे ?

सिद्धांत ३२. प्रमेय.

(१) त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली असतां बाहेरील कोन हा, आंतील त्याशीं सलग्न कोणाखेरीज दोन कोनांच्या बेरजेबरावर असतो; आणि (२) त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरावर असते.



(१) **अबक** त्रिकोणाची **बक** बाजू **ड**पर्यंत वाढविली आहे; तर बाहेरील **अकड** कोन हा, आंतील त्यांशीं सलग्न असणाऱ्या **अकब** कोनाखेरीज जे **कअब** आणि **कबअ** हे दोन कोन, त्यांच्या बेरजेबरावर होईल.

क बिंदूंतून **अब**शीं समांतर अशी **कइ** रेषा काढ. (१.३१)

आतां **अब**, **कइ**शीं समांतर आहे, आणि त्यांस **अक** मिळते. म्हणून **बअक**, **अकइ** हे व्युत्क्रमकोण बरावर आहेत.(१. २९ भा.१) पुनः, **अब**, **कइ** ह्या दोन समांतर रेघांस **बड** मिळते, ह्मणून **इकड** हा बाह्यकोन, आंतिलाच्या पलीकडच्या **अबक** कोनाबरावर आहे. (१. २९ भा. २)

परंतु **अकइ** कोन **बअक** कोनाबरावर आहे, असें वर दाखविलें आहे; म्हणून सगळा बाहेरील **अकड** कोन हा **कअब**, **अबक** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरावर आहे. (प्र. प्र. २)

(२) **अबक** त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

अबक त्रिकोणाची **बक** बाजू **ड** पर्यंत वाढीव. (गृ०कृ०२)

आतां **अकड** कोन, **कअब** आणि **कबअ** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. (१.३२ भाग १)

अकड कोन व त्या दोहोंची बेरीज ह्या प्रत्येकांत **अकब** कोन मिळविला;

तेव्हां **अकड** आणि **अकब** ह्या दोन कोनांची बेरीज, **कअब**, **कबअ** आणि **अकब** ह्या तीन कोनांच्या बेरजेबरोबर झाली.(प्र.प्र.२)

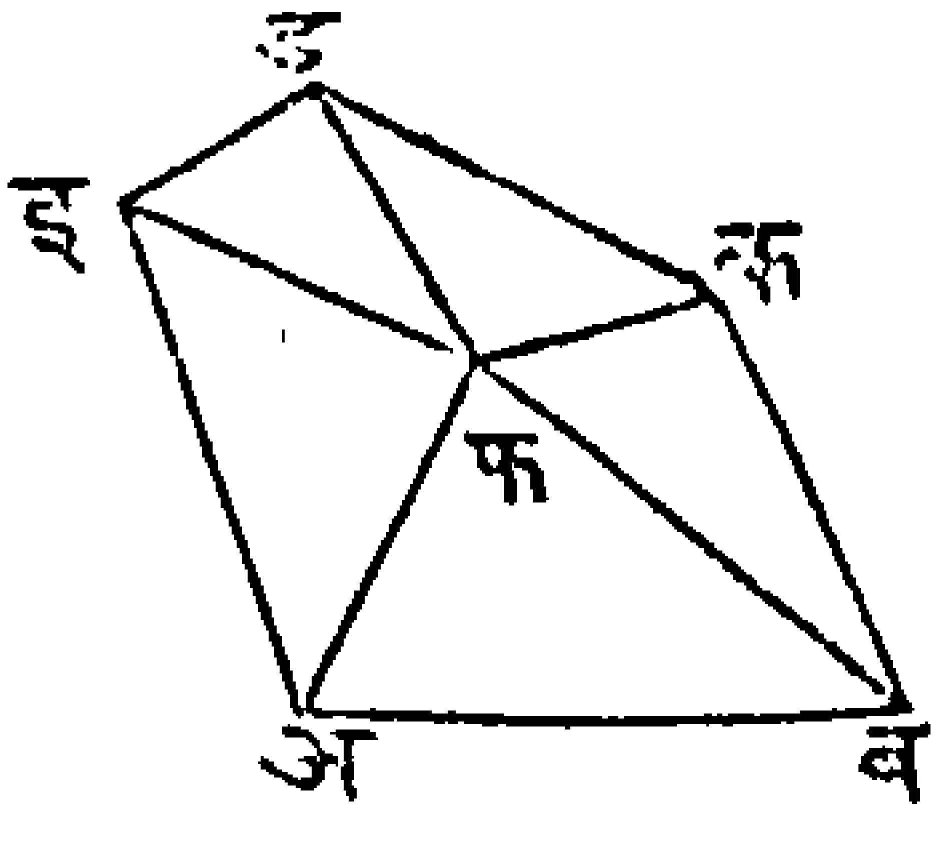
परंतु **अकड**, **अकब**, ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे;(१.१३)

म्हणून **कअब**, **कबअ** आणि **अकब** ह्या तीन कोनांची बेरीजही दोन काटकोनांबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां त्रिकोणाची एक बाजू इ०.

उपसिद्धांत १. कोणत्याही सरळरेषाकृतीचे आंतील सर्व कोन आणि चार काटकोन मिळून आकृतीच्या भुजसंख्येच्या दुपटी इतक्या काटकोनांबराबर असतात.

कारण, **अबकडइ** ह्या सरळरेषाकृतींतील **फ** ह्या बिंदूपासून तिच्या सर्व कोणबिंदूपर्यंत सरळ रेघा काढिल्या असतां, आकृतीस जितक्या बाजू आहेत तितके तींत त्रिकोण होतात.



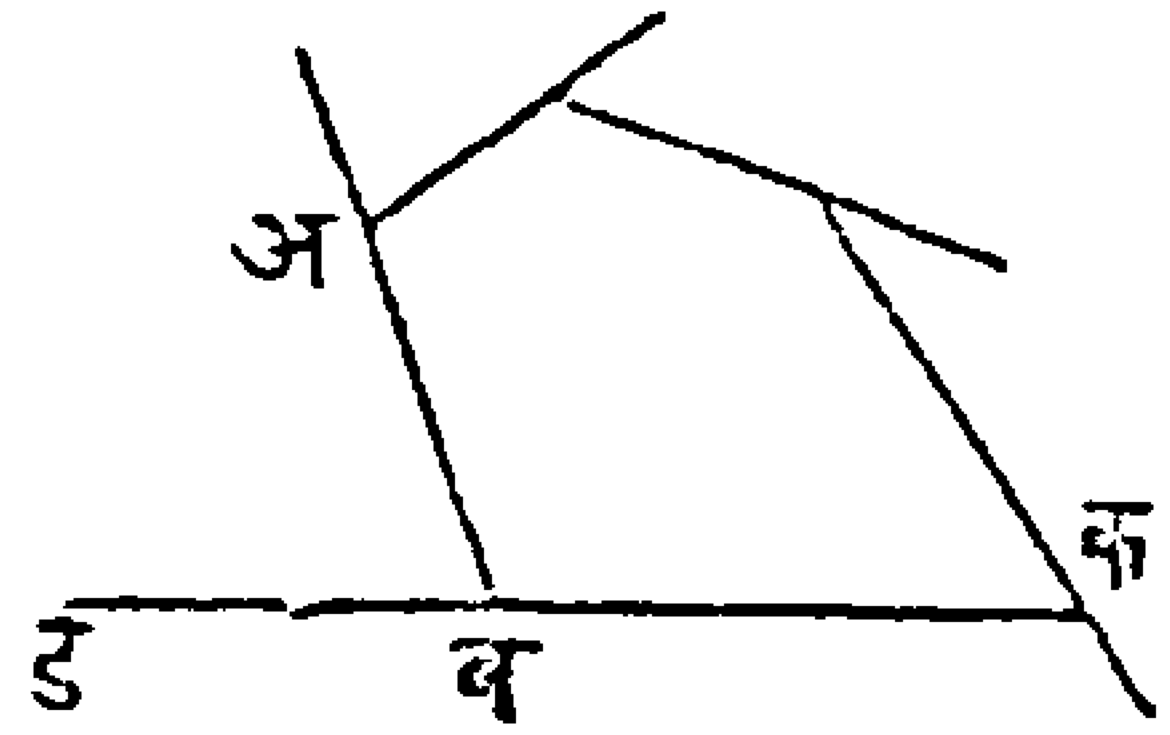
आतां प्रत्येक त्रिकोणाचे सर्व कोनांची बेरीज दोन काटकोन; (१.३२ भाग २) म्हणून (सर्व त्रिकोणांचे कोन म्हणजे) आकृतीचे सर्व कोन व **फ** बिंदूजवळचे सर्व कोन ह्यांची बेरीज, भुजसंख्येच्या दुपटी इतक्या काटकोनांबरोबर आहे. (प्र.प्र.२)

फ बिंदूजवळचे सर्व कोनांची बेरीज चार काटकोन आहे; (१.१५ उपसि. २)

म्हणून आकृतीचे सर्व कोन व **फ** बिंदूजवळचे कोन ह्यांची बेरीज, आकृतीचे कोन व चार काटकोन ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे. (प्र.प्र.२)

म्हणून आकृतीचे सर्व कोन व चार काटकोन ह्यांची बेरीज, भुजसंख्येच्या दुपटी इतक्या काटकोनांबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

उपसि. २. जर सरलरेषाकृतीच्या सर्व बाजू एकेकाच अंगास अनुक्रमानें वाढविल्या (अशा कीं, कोणत्याही दोन बाजू एकाच कोणबिंदूंतून वाढविल्या जाणार नाहींत;) तर जे बाहेरील कोन होतात, त्या सर्वांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर असते.



कारण, आकृतीचा प्रत्येक आंतील कोन (**अबक**) आणि त्याजवळचा बाहेरील कोन (**अबड**) मिळून दोन काटकोनांबरोबर असतात. (१.१३) म्हणून आंतील सर्व कोन आणि बाहेरील सर्व कोन मिळून, आकृतीच्या भुजसंख्येच्या दुपटी इतक्या काटकोनांबरोबर असतात. (प्र. प्र. २)

परंतु आकृतीचे आंतील सर्व कोन आणि चार काटकोन मिळून भुजसंख्येच्या दुपटी इतक्या काटकोनांबरोबर असतात.

(१. ३२ उपसि. १)

म्हणून आकृतीचे आंतील सर्व कोन आणि बाहेरील कोन मिळून आंतील सर्व कोन आणि चार काटकोन ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहेत.

(प्र. प्र. १)

पण आंतील सर्व कोन प्रत्येकांत साधारण आहेत; ते काढून टाकिले; तेव्हां बाहेरील सर्व कोन चार काटकोनांबरोबर आहेत. (प्र. प्र. ३)

उपसि. ३. एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं अनुक्रमें समान असतील, तर त्यांचे राहिलेले कोनही समान असतात.

(हा सिद्धांत, १.३२ भाग २, प्र. प्र. १, प्र. प्र. २ व प्र. प्र. ३ ह्यांची अनुक्रमानें योजना केल्यानें सिद्ध होतो.)

उपसि. ४. काटकोन त्रिकोणाच्या दोन लघुकोनांची बेरीज एक काटकोन असते.

उपसि. ५. त्रिकोणाचा एक कोन इतर दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर असल्यास, तो एक कोन काटकोन असतो.

(हा सिद्धांत, १.३२ भाग १, प्रतिज्ञा, प्र. प्र. १ आणि व्याख्या १० ह्यांची अनुक्रमानें योजना केल्यानें सिद्ध होतो.)

पहिल्या पुस्तकाच्या तिसऱ्या खंडावर

(म्हणजे १.३२ ह्यावर)

प्रश्न.

१. "त्रिकोणाचा एक कोन इतर दोन कोनांच्या बेरजेपेक्षां जास्त असल्यास, तो विशालकोण असतो," हा व ह्याचा व्यत्यास हे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध करा.

२. "त्रिकोणाचा एक कोन इतर दोन कोनांच्या बेरजेपेक्षां कमी असल्यास, तो लघुकोण असतो," हा व ह्याचा व्यत्यास हे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध करा.

३. समद्विभुज त्रिकोणाची एक बाजू शिरोबिंदूपलीकडे वाढविली असतां होणारा बाहेरील कोन, पायाकडील प्रत्येक कोनाच्या दुपटी-बरोबर असतो.

४. काटकोनत्रिकोण समद्विभुज असल्यास त्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोन अर्धकाटकोन असतो.

५. समभुज त्रिकोणाचा प्रत्येक कोन काटकोनाच्या दोन तृतीयांशांबरोबर असतो.

६. "सरलरेषाकृतीच्या आंतील सर्व कोनांची बेरीज भुजसंख्येच्या दुपटींत चार कमी इतक्या काटकोनांबरोबर असते." हा सिद्धांत, "त्रिकोणाच्या एका कोणबिंदूपासून (त्याच्या जवळचे दोन खेरीज करून) इतर कोणबिंदूपर्यंत रेषा काढिल्या असतां, त्या आकृतीच्या भुजसंख्येपेक्षां दोन कमी इतके त्रिकोण तीमध्यें होतात", ह्या गोष्टीच्या आधारानें सिद्ध करून दाखवा; आणि चौकोन, सप्तकोण, दशकोण ह्यांच्या आंतील कोनांच्या बेरजा सांगा.

७. समकोणाकृतीचा प्रत्येक कोन, भुजसंख्येच्या दुपटींत चार वजा करून राहिलेल्या बाकीला भुजसंख्येनें भागिलें असतां येणाऱ्या भागाकारा इतक्या काटकोनांबरोबर असतो.

८. (१.३२) चा पहिला उपसिद्धांत, ज्या सरलरेषाकृतीला एक किंवा अनेक बहिर्वक्रकोण असतात, तिलाही लागू पडतो, असे सिद्ध करा.

९. त्रिकोणाला व समकोणाकृतीला बहिर्वक्रकोण असणं संभवतें काय? चौकोनाला पराकाष्ठा किती बहिर्वक्रकोण असतील? उत्तरांचीं कारणें सांगा.

१०. दोन समद्विभुज त्रिकोणांचे शिरकोण समान असले, तर ते त्रिकोण मिथःसमकोण असतात.

११. सर्व समभुज त्रिकोण मिथःसमकोण असतात.

१२. सरलरेषाकृतीच्या सर्व कोनांची बेरीज अमुक काटकोन आहे, असें दिलें असतां, त्या आकृतीची भुजसंख्या कशी काढावी? व समकोणाकृतीचा प्रत्येक कोन अमुक काटकोनांचा आहे, असें दिलें असतां तिची भुजसंख्या कशी काढावी?

१३. "अंश," "कला," "विकला" म्हणजे काय? समभुजत्रिकोण, समकोणपंचकोण, समकोणषट्कोण, समकोणअष्टकोण ह्यांच्या प्रत्येक कोनाचे अंश सांगा. कोणत्याही समकोणाकृतीच्या प्रत्येक कोनाचे अंश काढण्याची सामान्यरीति सांगा.

१४. (१.१६) व (१.३२ भाग १) ह्यांच्यामध्यें भेद कोणता? आणि (१.१७) व (१.३२ भाग २) ह्यांच्यामध्यें भेद कोणता?

१५. (१.२१) च्या आकृतीमध्यें त्रिकोणांत घेतलेल्या बिंदूजवळ जो नवीन कोन होतो, त्याचें, त्रिकोणाच्या शिरकोनापेक्षां आधिक्य कोणत्या कोनांनीं दाखविलें जातें?

१६. समद्विभुजत्रिकोणाची एक बाजू शिरोबिंदूपलीकडे वाढवून वाढविलेल्या भागाचा तिच्या एवढाच तुकडा पाडिला, आणि जेथें तो तुकडा पडेल तो बिंदु व पायाचें टोंक हीं सांधिलीं, तर सांधणारी रेषा पायावर लंब असते, असें सिद्ध करा.

१७. रेषेच्या एका टोंकापासून (ती रेषा न वाढवितां) तीवर लंब काढण्याची एखादी सोपी रीति सांगा.

१८. काटकोनाचे तीन समान भाग कसे करावे?

१९. (१.३२) पर्यंत सिद्धांतांच्या योगानें काटकोनाचे किती समान भाग करितां येतील ?

२०. एका काटकोनत्रिकोणाच्या लघुकोनांपैकीं एक दुसऱ्याच्या दुपटीबरोबर आहे, तर त्याचा प्रत्येक कोन किती किती अंशांचा असेल ?

२१. प्रत्येक काटकोनत्रिकोणाचे दोन समद्विभुजत्रिकोण करितां येतात असें सिद्ध करा.

२२. काटकोनत्रिकोणाचा काटकोनबिंदु व कर्णाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा कर्णाच्या अर्धाबरोबर असते.

२३. ज्या काटकोनत्रिकोणाचा एक कोन काटकोनाच्या तिसऱ्या हिस्शाबरोबर असतो, त्याची त्या कोनासमोरची बाजू कर्णाच्या अर्धाबरोबर असते.

२४. त्रिकोणाच्या दोन कोणबिंदूंपासून समोरच्या बाजूंवर टाकिलेले लंब त्या बाजूंस ज्यां बिंदूंत मिळतात, ते दोन्ही बिंदु तिसऱ्या बाजूच्या मध्यापासून सारख्या अंतरावर असतात.

२५. विशालकोणत्रिकोणाचा विशालकोणबिंदु व समोरच्या बाजूचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा त्या बाजूच्या अर्धापेक्षां कमी असते.

२६. कोणत्याही त्रिकोणाचा लघुकोणबिंदु व समोरच्या बाजूचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा त्या बाजूच्या अर्धापेक्षां जास्त असते.

२७. " त्रिकोणाचा शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा (१) पायाच्या अर्धाबरोबर असेल, तर शिरकोन काटकोन असतो; (२) ती सांधणारी रेषा पायाच्या अर्धापेक्षां कमी असेल, तर शिरकोन विशालकोण असतो; आणि (३) ती सांधणारी रेषा पायाच्या अर्धापेक्षां जास्त असेल, तर शिरकोन लघुकोन असतो." हे २२, २५ व २६ ह्या प्रश्नांचे व्यत्यासही खरे आहेत, असें दाखवा.

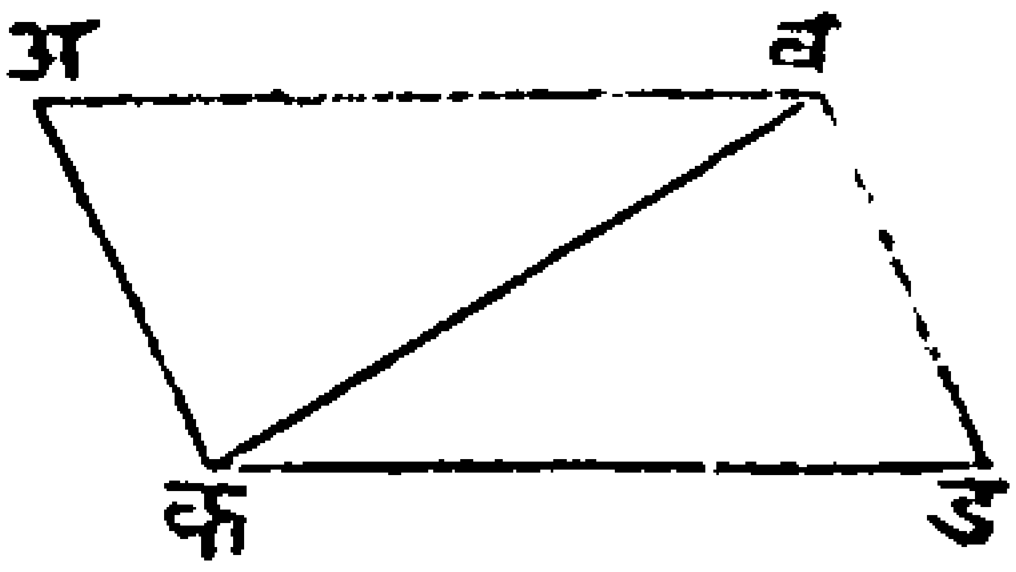
२८. ज्या चौकोनाचे समोरासमोरचे दोन कोन काटकोन असतात, त्याच्या इतर दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोन दुसऱ्याच्या सलग्नकोणाबरोबर असतो.

२९. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषांवर त्यांच्या बाहेरील एकाच बिंदूपासून दोन लंब टाकिले, तर त्या लंबांमधील कोन, त्या रेषांमधील एका कोनाबरोबर असतो.

सिद्धांत ३३. प्रमेय.

ज्या रेघा दुसऱ्या दोन समान आणि समांतर रेघांची एकेका अंगचीं टोंकें सांधितात, त्या स्वतां (१) समान आणि (२) समांतर असतात.

अब आणि **कड** ह्या दोन समान आणि समांतर रेघा आहेत, व **अक** आणि **बड** ह्या रेघा त्यांचीं एकेका अंगचीं टोंकें सांधितात; तर **अक** आणि **बड** ह्याही परस्पर (१) समान आणि (२) समांतर होतील.



बक सांध. (गृ. कृ १)

अब रेघ **कड** रेघेशीं समांतर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि **बक** त्यांस मिळते,

म्हणून **अबक**, **बकड** हे व्युत्क्रमकोण बरोबर आहेत; (१.२९भा.१)
अब रेघ **कड** रेघेबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि **बक** रेघ **अबक** आणि **डकब** ह्या त्रिकोणांस साधारण आहे; ह्मणजे **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **बक** ह्या बाजू व त्यांच्यामधील **अबक** कोन हीं, **डकब** त्रिकोणाच्या **डक**, **बक** ह्या बाजू व त्यांच्यामधील **डकब** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत;

(१) ह्मणून **अक** पाया **बड** पाया बरोबर आहे. (१.४ भा. १)
(२) आतां त्या त्रिकोणांचे **अब**, **कड** ह्या समान बाजूंसमोरचे कोन समान आहेत, म्हणजे **अकब** कोन **कबड** कोनाबरोबर आहे; (१.४ भा. २)

आणि हे **अक**, **बड** ह्या रेघांस **बक** रेघ मिळून झालेले व्युत्क्रमकोण आहेत;

ह्मणून **अक**, **बड** ह्या रेघा परस्पर समांतर आहेत. (१.२७)

ह्याकरितां, ज्या रेघा दुसऱ्या इ०.

प्रश्न.

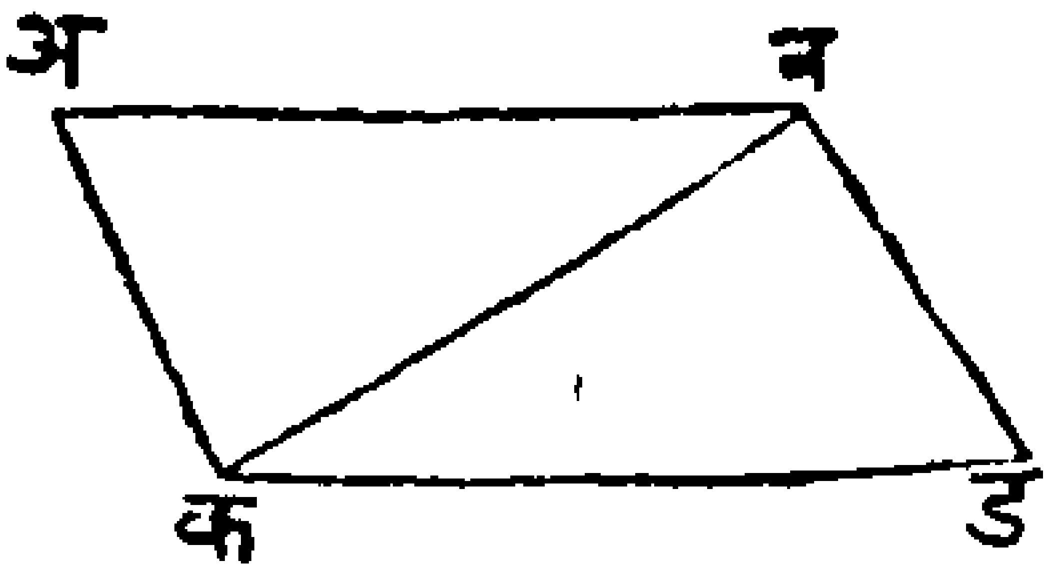
१. (१.३३) चे किती भाग आहेत? प्रत्येक भागाची प्रतिज्ञा निरनिराळी ह्मणा.

२. (१.३३) चा नुसता दुसरा भाग सिद्ध करून दाखवा. नुसता पहिला भाग सिद्ध करून दाखवा.

३. एका रेषेवर तींतील दोन बिंदूंपासून तिच्या एकाच अंगास दोन समान लंब काढिले आणि त्यांचीं दुसरीं टोंकें सांधिलीं, तर ती सांधणारी रेषा पहिल्या रेषेशीं समांतर असते.

सिद्धांत ३४. प्रमेय.

समांतरभुजचौकोनांच्या (१) समोरासमोरच्या बाजू व (२) समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर असतात, आणि (३) कर्ण त्याचे दोन समान भाग करितो.



अकडब हा एक समांतरभुज चौकोन आहे, आणि **बक** त्याचा कर्ण आहे; तर (१) ह्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू व (२) समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर होतील, आणि (३) **बक** कर्णानें जे त्याचे दोन भाग झाले आहेत, ते समान होतील.

अब रेघ **कड** रेघेशीं समांतर आहे, आणि **बक** त्यांस मिळते, ह्मणून **अबक** आणि **बकड** हे व्युत्क्रमकोण परस्पर बराबर आहेत. (१.२९ भा. १)

अक, **बड**शीं समांतर आहे, आणि **बक** त्यांस मिळते, ह्मणून **अकब**, **कबड** हे व्युत्क्रमकोण परस्पर बराबर आहेत. (१.२९भा.१)

आतां **अबक** आणि **बकड** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याचे **अबक** **बकअ** हे कोन, दुसऱ्याच्या **डकब**, **कबड** ह्या कोनांशीं अनुक्रमें

बरावर आहेत, आणि ह्या समान कोनांमधील **बक** बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे;

(१) ह्यास्तव **अब** बाजू **कड** बाजूबराबर आहे, आणि **अक** बाजू **बड** बाजूबराबर आहे. ह्मणजे समोरासमोरच्या बाजू समान आहेत.

(१.२६ भा. १)

(२) आतां **अबक** कोन **बकड** कोनाबराबर आहे, आणि **कबड** कोन **अकब** कोनाबराबर आहे,

ह्मणून सगळा **अबड** कोन, सगळ्या **अकड** कोनाबराबर आहे.

(प्र. प्र. २)

आणि **बअक** कोन **कडब** कोनाबराबर आहे (१.२६ भा. १)

ह्यास्तव समोरासमोरचे कोन बराबर आहेत.

(३) आतां **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजू व त्यांच्यामधील **अ** कोन हीं, **बडक** त्रिकोणाच्या **डक**, **डब** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ड** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत, असें वर सिद्ध झालें;

म्हणून **अबक** त्रिकोण **बडक** त्रिकोणाबरोबर आहे, (१.४ भाग ३) म्हणजे समांतरभुज चौकोनाचे **बक** कर्णानें झालेले दोन भाग समान आहेत.

ह्याकरितां, समांतरभुज चौकोनाच्या इ०.

प्रश्न.

१. (१.३४) च्या तिन्ही भागांच्या प्रतिज्ञा निरनिराळ्या म्हणा.

२. (१.३४) चा दुसरा भाग फक्त १.२९ भाग १ व प्र. प्र. २ ह्यांच्याच योगानें सिद्ध करितां येतो, असें दाखवा.

पहिल्या पुस्तकाच्या चवथ्या खंडावर

(म्हणजे १.३३ व १.३४ ह्या सिद्धांतांवर)

प्रश्न.

१. समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागितात.

२. ज्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागितात, तो समांतरभुजचौकोन असतो.

३. समांतरभुजचौकोनाचा एक कोन काटकोन असल्यास त्याचे सर्व कोन काटकोन असतात.

४. समांतरभुज चौकोनाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू समान असल्यास त्याच्या सर्व बाजू समान असतात.

५. चौरस, काटकोनचौकोन व समभुजचौकोन हे सर्व समांतरभुज चौकोन असतात.

६. ज्या समभुज चौकोनाचा एक कोन काटकोनाच्या चार तृतीयांशाबरोबर (म्हणजे १२० अंशांचा) असतो, त्याचा त्या कोनांतून जाणारा कर्ण त्या चौकोनाच्या प्रत्येक बाजूबरोबर असतो.

७. (१) काटकोनचौकोनाचे कर्ण समान असतात व परस्परांस दुभागितात; (२) समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांवर लंब असतात, समभुज चौकोनाच्या कोनांस दुभागितात व परस्परांस दुभागितात; आणि (३) चौरसाचे कर्ण समान असतात, परस्परांवर लंब असतात, चौरसाच्या कोनांस दुभागितात, व परस्परांस दुभागितात.

८. ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन दोन बाजू समान असतात, तो समांतरभुजचौकोन असतो.

९. ज्या चौकोनाचे समोरासमोरचे दोन दोन कोन समान असतात, तो समांतरभुजचौकोन असतो.

१०. समांतरभुजचौकोनाचे जवळजवळचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषा परस्परांवर लंब असतात.

११. समान व समांतर रेषांच्या कोणत्या स्थितींत त्यांचीं व्युत्क्रम टोकें सांधणाऱ्या रेषा समान असतात ? व कोणत्या स्थितींत असमान असतात ?

१२. दोन समांतरभुजचौकोनांपैकीं एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असल्यास, ते चौकोन मिथःसमकोण असतात.

१३. दोन समांतरभुजचौकोनांपैकीं एकाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या जवळजवळच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें समान असतील, तर ते चौकोन मिथःसमभुज असतात.

१४. दोन समांतरभुज चौकोनांपैकीं एकाचा एक कोन व त्याच्या

दोन बाजू हीं दुसऱ्याच्या तदनुरूप अवयवांशीं अनुक्रमें समान असल्याम, ते चौकोन एकरूप असतात.

१५. (१) "दोन समांतरभुजचौकोनांपैकीं एकाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या जवळजवळच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत, परंतु एकाचा त्या दोन बाजूंमधील कोन दुसऱ्याच्या त्या दोन बाजूंमधील कोनांपेक्षां मोठा आहे; तर ज्याचा कोन मोठा असेल, त्याचा त्या कोनांतून जाणारा कर्ण दुसऱ्याच्या लहान कोनांतून जाणाऱ्या कर्णापेक्षां लहान असतो." हा सिद्धांत, व ह्याचा व्यत्यास (२) "जे समांतरभुजचौकोन मिथःसमभुज असतात, त्यांपैकीं एकाच्या एक कर्ण दुसऱ्याच्या एका कर्णापेक्षां मोठा असेल, तर मोठ्या कर्णाच्या टोंकाजवळील कोन लहान कर्णाच्या टोंकाजवळील कोनापेक्षां लहान असतो." हे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध करा.

१६. समांतरभुज चौकोनाच्या बाजूंच्या लांब्या न बदलतां (१) त्याचा एकादा कोन वाढविला, तर त्या कोनांतून जाणारा त्याचा कर्ण कमी होतो; व (२) कर्ण वाढविला, तर तो कोन कमी होतो.

१७. त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोणबिंदूंपासून समोरच्या बाजूंपर्यंत काढिलेल्या रेषा परस्परांस दुभागीत नाहींत (म्हणजे त्यांपैकीं निदान एकीचे तरी दोन असमान भाग झालेले असतात.)

१८. जर समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याच्या एखाद्या कोनास दुभागील, तर त्याच्या साऱ्या बाजू समान असतील.

१९. ज्या समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण समान असतात, त्याचे सर्व कोन काटकोन असतात.

२०. ज्या समांतरभुजचौकोनाचे कर्ण परस्परांवर लंब असतात, त्याच्या साऱ्या बाजू समान असतात.

२१. ज्या समांतरभुजचौकोनाचे कर्ण समान असून परस्परांवर लंब असतात, तो चौरस असतो.

२२. रेषेचे कितीही समान भाग करण्याची सामान्यरीति सांगा; त्या रीतीनें केलेले भाग समान असतात, असें सिद्ध करा.

२३. दोन समांतररेषांपैकीं एकींतील कोणत्याही दोन बिंदूंपासून दुसरीवर काढिलेले लंब समान असतात.

२४. अमर्याद रेषा व तिच्या बाहेरील एखादा बिंदु ह्यांच्यामधील अंतर कशानें दाखवितात? "दोन समांतर रेषांमधील अंतर" म्हणजे काय? "दोन समांतर रेषांमधील अंतर सर्वत्र सारखें असतें," असें दाखवा.

२५. "समांतररेषांच्या जोडांतला त्रिकोण व समांतरभुज चौंकोन" म्हणजे काय? समांतर रेषांच्या एकाच जोडांतले त्रिकोण व समांतरभुज चौंकोन ह्यांच्या उंच्या समान असतात," असें सिद्ध करा.

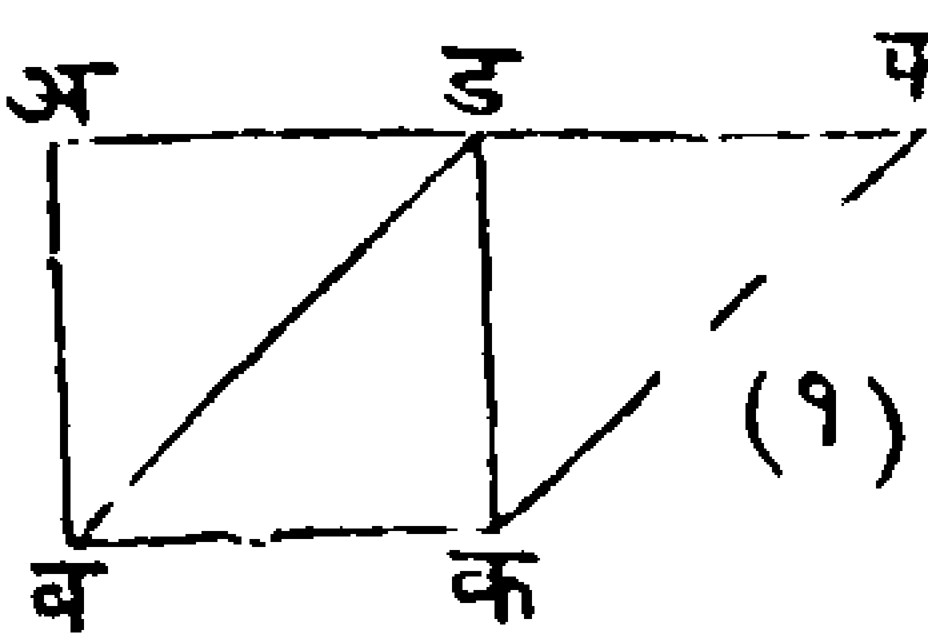
सिद्धांत ३५. प्रमेय.

जे समांतरभुजचौंकोन एकाच पायावर आणि समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असतात, ते परस्पर बरोबर असतात.

अबकड आणि **ईबकफ** हे समांतरभुज चौंकोन **बक** ह्या एकाच पायावर व **अफ** आणि **बक** ह्या समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत आहेत; तर **अबकड** समांतरभुजचौंकोन **ईबकफ** समांतरभुज चौंकोनाबरोबर होईल.

अशा समांतरभुजचौंकोनांच्या तीन स्थिति संभवतात. त्या अशा:—

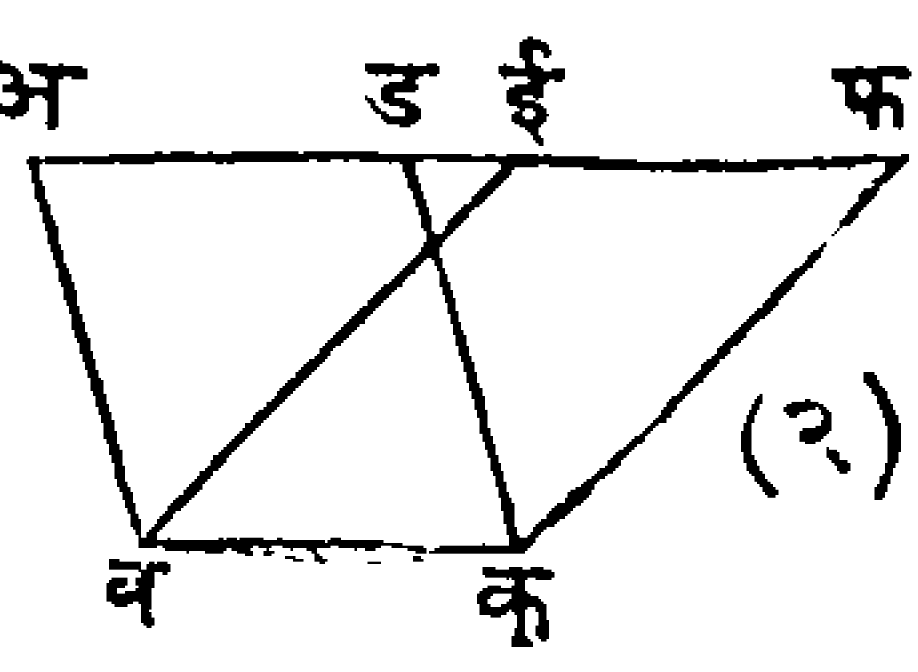
(१) त्या चौंकोनांच्या पायासमोरच्या बाजू एकाच बिंदूंत मिळतील, (२) त्या बाजू अंशतः मिळतील, किंवा (३) त्या परस्परांपासून दूर राहतील.



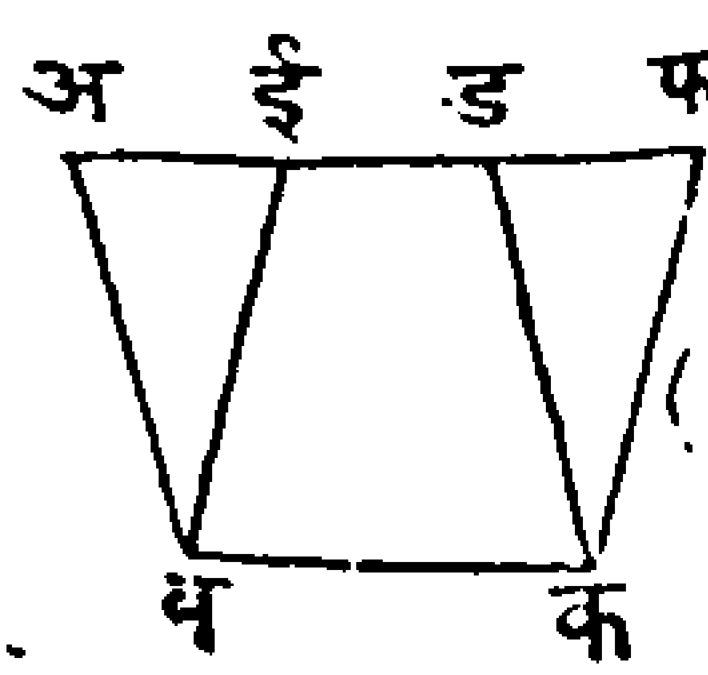
(१)

(१) पहिल्या स्थितीमध्यें प्रत्येक समांतरभुजचौंकोन **बकड** त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर आहे; (१.३४ भा. ३)
म्हणून ते समांतरभुजचौंकोन समान आहेत. (प्र.प्र.६)

(२), (३) दुसऱ्या व तिसऱ्या स्थितींत **अड** बाजू **बक** बाजूबरोबर आहे; (१.३४भा.१) आणि **ईफ** बाजू **बक** बाजू बरोबरआहे;(१.३४भा.१) म्हणून **अड** बाजू **ईफ** बाजूबरोबर आहे.(प्र.प्र.१)



(२)



(३)

म्हणून (२) ह्या आकृतींत सर्व अथवा (३) ह्या आकृतींत शेष **अई** रेषा, सर्व अथवा शेष **डफ** रेषेबरोबर आहे. (प्र.प्र.२ अथवा ३)
अब बाजू **कड** बाजूबरोबर आहे; (१.३४ भा. १)
आणि **ईअब** कोन **फडक** कोनाबरावर आहे; (१.२९ भा. २)
म्हणजे **अईब** त्रिकोणाच्या **अई**, **अब** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **ईअब** कोन हीं, **डफक** त्रिकोणाच्या **डफ**, **डक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **फडक** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; म्हणून **ईअब** त्रिकोण **फडक** त्रिकोणाबराबर आहे. (१.४ भा. ३)

आतां **अबकफ** ह्या सर्व आकृतींतून **फडक** आणि **ईअब** हे समान त्रिकोण क्रमानें वजा केले असतां, शेष आकृति बरावर आहेत; (प्र.प्र.३)
म्हणजे **अबकड** समांतरभुजचौकोन **ईबकफ** समांतरभुजचौकोनाबरावर आहे.

ह्याकरितां, जे समांतरभुजचौकोन इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.३५) ह्यामध्यें समांतरभुज चौकोनांची एकरूपता सिद्ध झाली आहे किंवा समानता सिद्ध झाली आहे?

२. (१.३५) ह्यांतील समांतरभुजचौकोनांचा पाया दोन समांतररेषांपैकीं वरचीमध्यें व पायासमोरच्या बाजू खालचीमध्यें घेऊन (२) व (३) ह्या स्थितींची सिद्धता करून दाखवा.

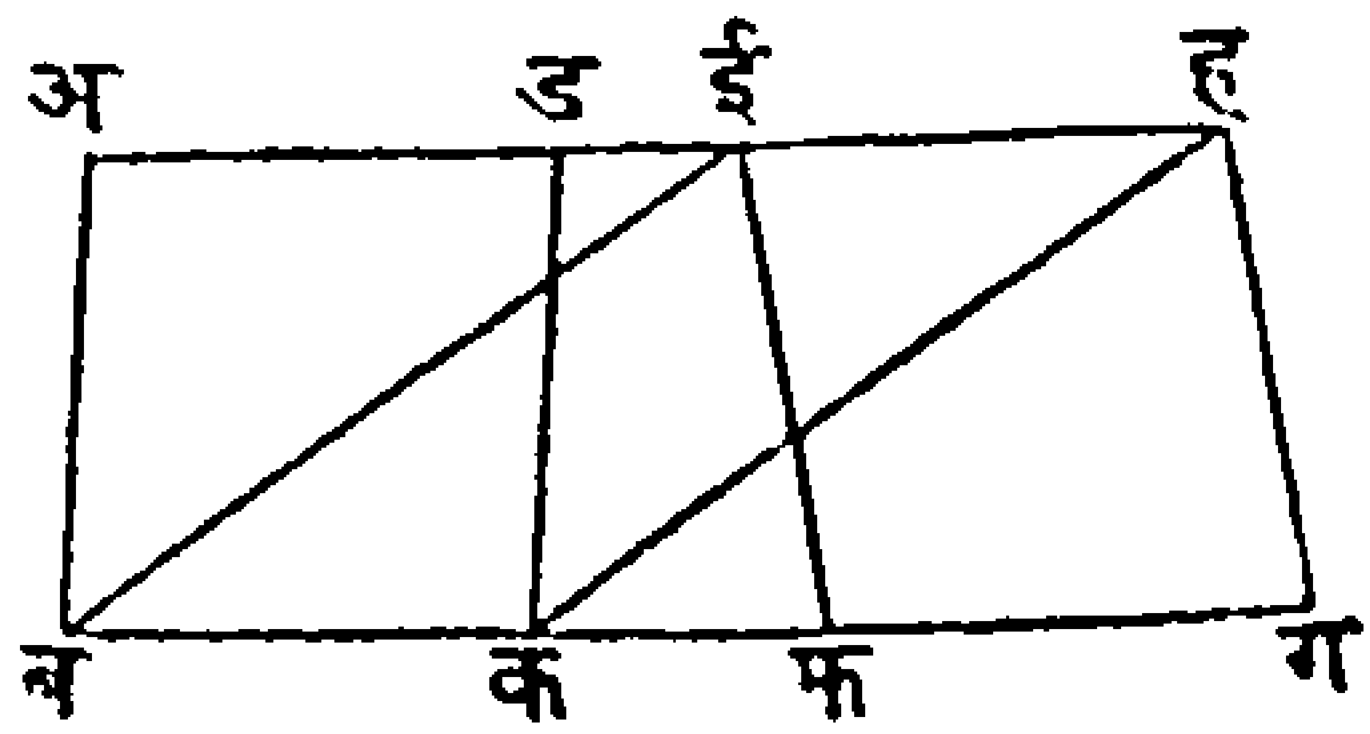
३. (१.३५) ह्यांतील समांतरभुजचौकोनांच्या (३) ह्या स्थितीच्या सिद्धतेमध्यें, त्रिकोण समान ठरल्यावर प्र. प्र. ३ न लावितां प्र.प्र.२ लावून इष्टसिद्धि करून दाखवा.

४. (१.३५) च्या (३) ह्या आकृतींत **बई**, **कड** ह्या रेषा वाढविल्या तर मिळतील किंवा नाहीं? कोणत्या अंगास मिळतील?

५. (१.३५) च्या (२) व (३) ह्या आकृतींच्या संबंधाची अशी एक सिद्धता (१. खंड २ प्रश्न ४ ह्याच्या आधारानें) करा कीं, तर एकच सिद्धता दोन्ही आकृतींना शब्दशः लागू पडेल.

सिद्धांत ३६. प्रमेय.

समान पायांवर आणि समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत जे समांतरभुजचौकोन असतात, ते परस्पर बराबर असतात.



अबकड आणि **ईफगह** हे समांतरभुजचौकोन, **बक** आणि **फग** ह्या समान पायांवर, आणि **अह** आणि **बग** ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत; तर **अबकड** समांतरभुजचौकोन **ईफगह** समांतरभुजचौकोनाबराबर होईल.

बई आणि **कह** सांध. (गृ.कृ.१.)

आतां **बक** रेघ **फग** रेघेबराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
आणि **फग**, **ईह** परस्पर बराबर आहेत; (१.३४ भा. १)
म्हणून **बक** रेघ **ईह** रेघेबराबर आहे; (प्र. प्र. १)
आणि त्या समांतर आहेत; (प्रतिज्ञा)
ह्याकरितां त्यांचीं एकेका आंगचीं टोंकें सांधणाऱ्या **बई**, **कह** रेघाही परस्पर समांतर आहेत. (१.३३)
म्हणून **ईबकह** हा समांतरभुजचौकोन आहे. (व्याख्या ३५)
आतां **ईबकह** आणि **ईफगह** हे दोन समांतरभुजचौकोन **ईह** ह्या एकाच पायावर आहेत आणि **अह**, **बग** ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत, म्हणून ते समान आहेत. (१.३५)
ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें कीं **ईबकह** आणि **अबकड** हे समांतरभुजचौकोन ही समान आहेत. म्हणून **अबकड** समांतरभुजचौकोन **ईफगह** समांतरभुजचौकोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, समान पायावर इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.३५) व (१.३६) ह्यांच्यामध्यें भेद कोणता ?

२. (१.३६) च्या आकृतींत **बई**, **कह** ह्या न सांधितां **अफ**, **डग** ह्या सांधून सिद्धता करा.

३. (१.३६) च्या आकृतींत बई, कह ह्या सांधिल्या आहेत, त्यांचे ठिकाणीं कई, बह, ह्या सांधिल्या तर चालेल काय? कारण काय?

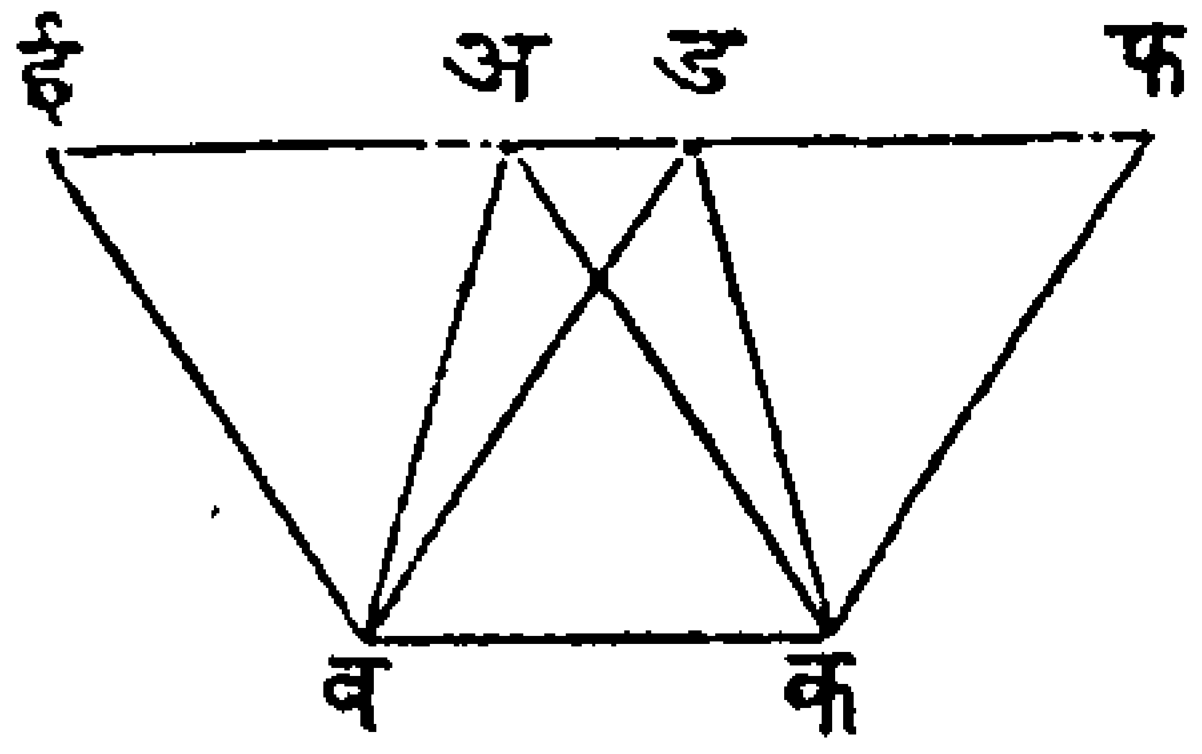
४. विवक्षित समांतरभुजचौकोनाच्या विवक्षित बाजूच्या मध्यांतून अशी एक रेघा काढा कीं, तिनें तो समांतरभुजकोन दुभागिला जाईल.

५. विवक्षित समांतरभुजचौकोनाचे कितीही सारखे समांतरभुज चौकोन करण्याची एखादी सामान्य रीति सांगा.

६. समांतरभुजचौकोनाच्या जवळजवळच्या दोन बाजूंचे कांहीं कांहीं समान भाग केले, आणि छेदनबिंदूंतून त्याच्या बाजूंशीं समांतर रेघा काढून त्या समोरच्या बाजूस मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या, तर जे (भाग संख्यांच्या गुणाकाराइतके) नवीन समांतरभुजचौकोन होतात, ते समान असतात; आणि त्या समांतरभुजकोनांपैकीं प्रत्येकाच्या, भागसंख्यांच्या गुणाकाराइतक्या पटीबरोबर मूळचा समांतरभुजचौकोन असतो.

सिद्धांत ३७. प्रमेय.

एकाच पायावर आणि समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत जे त्रिकोण असतात, ते परस्पर बराबर असतात.



अबक आणि **डबक** हे दोन त्रिकोण एकाच **बक** पायावर, आणि **अड** आणि **बक** ह्या दोन समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत; तर **अबक** त्रिकोण **डबक** त्रिकोणाबराबर होईल.

अड रेघ दोन्ही अंगांस **ई** आणि **फ** बिंदूपर्यंत वाढीव; (गृ.कृ.२)
आणि **ब** बिंदूंतून **बई** रेघ **कअ**शीं समांतर काढ, आणि **क** बिंदूंतून **कफ** रेघ **बड**शीं समांतर काढ. (१.३१)

आतां **ईबकअ** आणि **डबकफ** ह्या दोन्ही आकृति समांतरभुज चौकोन आहेत; (व्याख्या ३५)

आणि ते **बक** ह्या एकाच पायावर, व **बक, ईफ**, ह्या दोन समांतर रेघां-च्या एकाच जोडांत आहेत, ह्यास्तव ते परस्पर बरावर आहेत. (१.३५)

अबक त्रिकोण **ईबकअ** समांतरभुजचौकोनाचा अर्धा भाग आहे; (१.३४ भा. ३)

आणि **डबक** त्रिकोण **डबकफ** समांतरभुजचौकोनाचा अर्धा भाग आहे; (१.३४ भा. ३)

परंतु **ईबकअ** आणि **डबकफ** हे समांतरभुजचौकोन परस्पर बरावर आहेत, असें वर दाखविलें आहे;

म्हणून **अबक** त्रिकोण **डबक** त्रिकोणाबरावर आहे. (प्र. प्र. ७)

ह्याकरितां एकाच पायावर इ०.

प्रश्न.

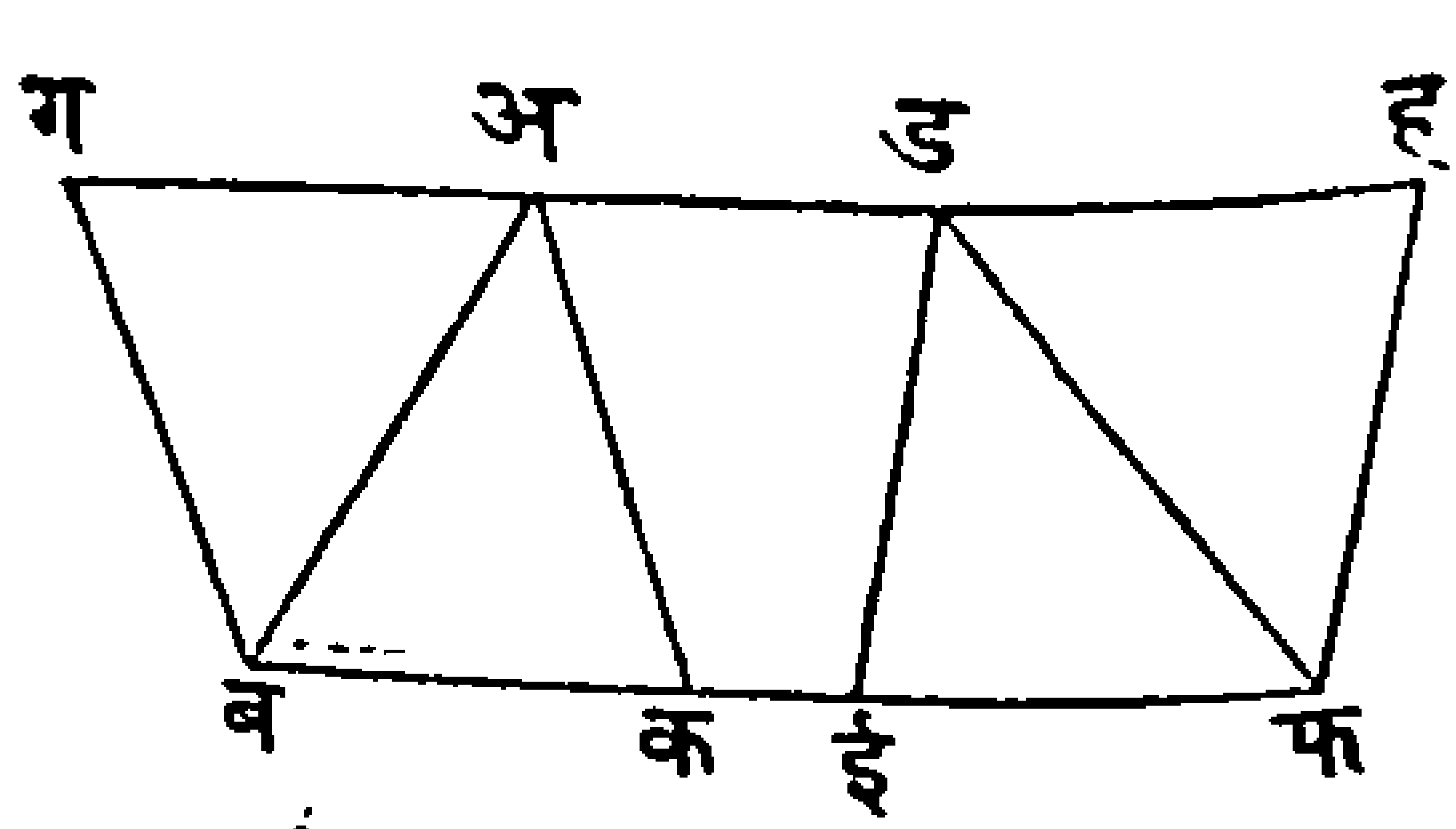
१. (१.३७) च्या आकृतींत **ब, क** बिंदूंतून अनुक्रमें **अक, बड** ह्यांशीं समांतर काढिलेल्या रेघा **ईफ** रेघेला मिळतीलच असें सिद्ध करा.

२. (१.३७) च्या आकृतींत **अबड, अकड** हे त्रिकोण समान आहेत असें सिद्ध करा.

३. (१.३७) च्या आकृतींत **अक, बड** ह्यांचा छेदनबिंदु **न** आहे; तर **अनब, कनड** हे त्रिकोण समान आहेत, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत ३८. प्रमेय.

समान पायांवर आणि समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत जे त्रि-कोण असतात, ते परस्पर बरावर असतात.



बक आणि **ईफ** ह्या दोन समान पायांवर, आणि **बफ, अड** ह्या समांतर रे-घांच्या एकाच जोडांत **अब-क** आणि **डईफ** हे दोन त्रि-कोण आहेत; तर **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाबरावर होईल.

अड रेघ **ग** आणि **ह** ह्या दोन बिंदूंपर्यंत दोन्ही अंगांस वाढीव; (गृ. कृ २).

आणि **ब** बिंदूंतून **बग** रेघ **कअ**शीं, आणि **फ** बिंदूंतून **फह** रेघ **ईड**शीं समांतर काढ. (१.३१)

आतां **गबकअ** आणि **डईफह** ह्या दोन आकृति समांतरभुज चौकोन आहेत. (व्याख्या ३५)

आणि ते **बक**, **ईफ** ह्या समान पायांवर, आणि **बफ**, **गह** ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत,

ह्यास्तव ते परस्पर बराबर आहेत, (१.३६)

अबक त्रिकोण **गबकअ** समांतरभुजचौकोनाचा अर्धा भाग आहे, (१.३४)

आणि **डईफ** त्रिकोण **डईफह** समांतरभुजचौकोनाचा अर्धा भाग आहे, (१.३४)

परंतु **गबकअ** आणि **डईफह** हे समांतरभुजचौकोन परस्पर बराबर आहेत, असें वर दाखविलें आहे,

म्हणून **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाबराबर आहे. (प्र. प्र. ७)

त्याकरितां, समान पायांवर इत्यादि.

उपसिद्धांत.–त्रिकोणाचा कोणताही कोणबिंदु व समोरच्या बाजूचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेघा त्या त्रिकोणास दुभागिते. (त्या कोणबिंदूतून समोरच्या बाजूशीं समांतर रेघा काढिल्यानें १.३८ ह्यावरून ही गोष्ट उघड दिसते.)

प्रश्न.

१. (१.३७) व (१.३८) ह्यांच्यामध्यें भेद कोणता ? ह्यांमध्यें त्रिकोणांची समानता सिद्ध झाली आहे किंवा एकरूपता सिद्ध झाली आहे ?

२. (१.३८) ह्यांत दिलेल्या त्रिकोणांचे पाये समांतर रेघांच्या जोडापैकीं एकाच रेघेंत घेतले आहेत; तसे न घेतां दोन त्रिकोणांचे पाये दोन रेघांमध्यें घेऊन हा सिद्धांत सिद्ध करा.

३. एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास दोन असमान त्रिकोण असतील, तर त्यांचे शिरोबिंदु सांधणारी रेघा पायाशीं समांतर नसते.

४. दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें समान असतील, आणि त्या त्रिकोणांचे त्या बाजूंमधील कोन परस्परांचे पूरक असतील, तर ते त्रिकोण समान असतात.

५. विवक्षित त्रिकोणाच्या कांहीं पटीबरोबर असणारा त्रिकोण काढण्याची एखादी सामान्य रीति सांगा.

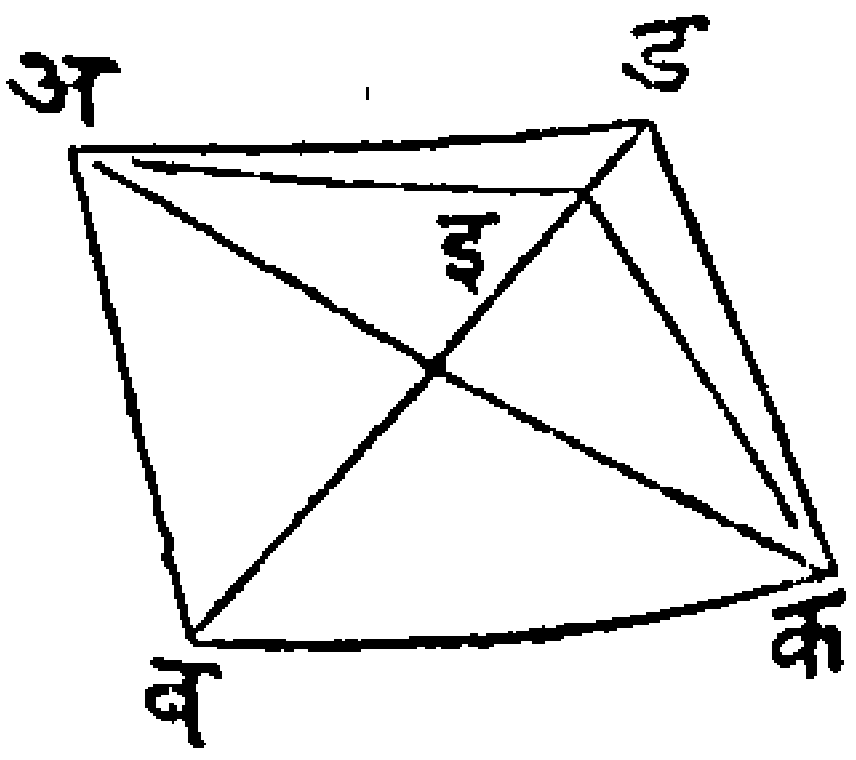
६. त्रिकोणाच्या एका बाजूचे कांहीं समान भाग करून सारे छेदनबिंदु व समोरचा कोणबिंदु हे सांधिले असतां, त्या त्रिकोणाचे तितकेच समान भाग होतात.

७. असमान पायावर आणि समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असणाऱ्या त्रिकोणांपैकीं मोठ्या पायावरचा त्रिकोण मोठा असतो.

८. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायापर्यंत काढिलेल्या रेघेनें जर पायाचे दोन असमान भाग होतील, तर त्या रेघेनें त्रिकोणाचे जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांपैकीं पायाच्या मोठ्या भागावरचा त्रिकोण मोठा असतो.

सिद्धांत ३९. क्रम.

एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास जे समान त्रिकोण असतात, ते समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असतात.



अबक आणि **डबक** हे दोन समान त्रिकोण एकाच **बक** पायावर, आणि त्याच्या एकाच अंगास आहेत; तर ते समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असतील, म्हणजे त्यांचे **अ**, **ड** हे शिरोबिंदु सांधणारी **अड** रेघ पायाशीं समांतर होईल.

कारण, जर **अड** रेघ **बक** रेघेशीं समांतर नसेल, तर **अ** बिंदूतून **अइ** रेघ **बक** रेघेशीं समांतर काढ, (१.३१)
व ती **बड** रेघेस **इ** बिंदूंत मिळते असें मान. **इक** सांध. (गृ. क्र. १)

आतां **अबक** आणि **इबक** हे दोन त्रिकोण एकाच **बक** पायावर, आणि **बक** आणि **अइ** ह्या दोन समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत, ह्यास्तव ते दोन त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत. (१.३७)

परंतु **अबक** त्रिकोण **इबक** त्रिकोणाबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)
ह्मणून **डबक** त्रिकोण **इबक** त्रिकोणाबरोबर आहे; (प्र. प्र. १)
परंतु **इबक** त्रिकोण **बडक** त्रिकोणाचा भाग आहे; म्हणून हा ९ व्या प्रत्यक्ष प्रमाणाशीं विरोध आहे.
ह्यास्तव **अइ** रेघ **बक** रेघेशीं समांतर नाहीं.

ह्याप्रमाणेंच, **अ** बिंदूंतून **अड** रेघेशिवाय **बक** रेघेशीं दुसरी समांतर रेघ काढतां येत नाहीं, असें दाखवितां येईल;
ह्मणून **अड** रेघ **बक** रेघेशीं समांतर आहे.

ह्याकरितां एकाच पायावर इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.३९) चा पक्ष व साध्य स्पष्ट सांगा.

२. (१.३९) च्या सिद्धतेमध्यें **अ** बिंदूंतून **बक**शीं समांतर काढिलेली रेषा **अड** च्या खालीं पडणार नाहीं, असें सिद्ध करून दाखविलें आहे; त्याप्रमाणेंच ती **अड**च्या वर ही पडणार नाहीं, असें सिद्ध करून दाखवा.

३. (१.३९) च्या आकृतींत **अड** ह्या एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास **अबड**, **अकड** हे समान त्रिकोण आहेत; तर ते समांतररेषांच्या एकाच जोडांत आहेत, असें सविस्तर सिद्ध करून दाखवा.

४. त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंचे मध्य सांधणारी रेषा तिसऱ्या बाजूशीं समांतर असते.

५. त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंचे मध्य सांधणारी रेषा तिसऱ्या बाजूच्या अर्धाबरोबर असते.

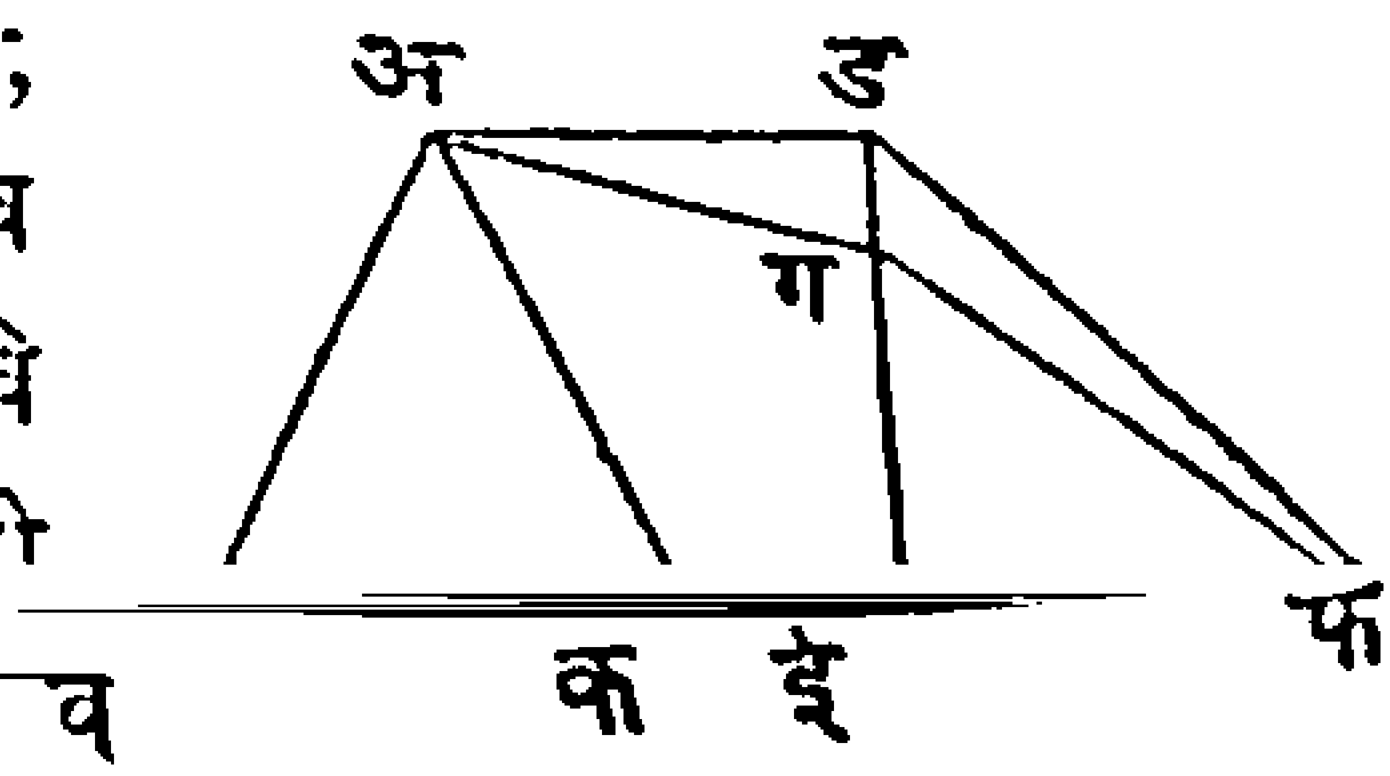
६. त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यांतून दुसरीशीं समांतर काढिलेली रेषा तिसरीस मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, ती रेषा तिसरीलाही दुभागिते.

सिद्धांत ४०. प्रमेय.

जे समान त्रिकोण एकाच रेघेंत असणाऱ्या समान पायांवर आणि

त्या रेघेच्या एकाच अंगास असतात, ते समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असतात.

वक ह्या एकाच सरळरेघेंत असणाऱ्या **वक** आणि **ईफ** ह्या समान पायांवर, व त्या **बफ** रेघेच्या एकाच अंगास **अवक** आणि **डईफ** असे दोन समान त्रिकोण आहेत; तर ते समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असतील, म्हणजे त्यांचे **अ**, **ड** हे शिरोबिंदु सांधणारी



अड ह्या पायांच्या **बफ** रेघेशीं समांतर होईल.

कारण, जर **अड** रेघ **वफ** रेघेशीं समांतर नसेल, तर **अ** बिंदूं-तून **वफ**शीं **अग** समांतर काढ, (१.३१)
आणि ती ईडला **ग** बिंदूंत मिळते असें मान. **गफ** सांध. (गृ. कृ.१)

आतां **अवक** व **गईफ** हे त्रिकोण, **वक**, **ईफ** ह्या समान पायांवर, आणि **वफ**, **अग** ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत;
म्हणून ते समान आहेत. (१.३८)
परंतु **अवक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाबरोबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **डईफ** त्रिकोण **गईफ** त्रिकोणाबरोबर आहे. (प्र. प्र.१)
पण **गईफ** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाचा भाग आहे; म्हणून हा ९ व्या प्रत्यक्ष प्रमाणाशीं विरोध आहे.
म्हणून **अग** रेघ **वफ**शीं समांतर नाहीं.

ह्याप्रमाणेंच, **अ** बिंदूंतून **अड** रेघेशिवाय **वफ**शीं दुसरी रेघ समांतर काढितां येत नाहीं, असें दाखवितां येईल.
म्हणून **अड** रेघ **वफ**शीं समांतर आहे.
ह्याकरितां, जे समान त्रिकोण इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.४०) चा पक्ष व साध्य स्पष्ट सांगा.
२. (१.३९) व (१.४०) ह्यांमध्यें भेद कोणता ?
३. (१.४०) च्या सिद्धतेमध्यें **अ** बिंदूंतून **वफ**शीं समांतर काढि-

लेली रेषा **अड**च्या खालीं पडणार नाहीं, असें सिद्ध करून दाखविलें आहे; त्याप्रमाणेंच ती **अड**च्या वरही पडणार नाहीं, असें सिद्ध करून दाखवा.

४. "जे दोन समांतरभुज चौकोन एकाच पायावर व त्याच्या एकाच अंगास असतात, आणि समान असतात, ते समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असतात, म्हणजे एकाची पायासमोरची बाजू वाढविली असतां दुसऱ्याच्या पायासमोरच्या बाजूंतून जाते." असें सिद्ध करा.

५. जे दोन समांतरभुज चौकोन एकाच रेषेंत असणाऱ्या समान पायावर व त्याच्या एकाच अंगास असतात, आणि समान असतात, ते समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असतात; म्हणजे एकाची पायासमोरची बाजू वाढविली असतां दुसऱ्याच्या पायासमोरच्या बाजूंतून जाते.

६. जे समांतरभुज चौकोन समांतररेषांच्या एकाच जोडांत असतात व समान असतात, त्यांचे पाये समान असतात.

७. जे त्रिकोण समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असतात व समान असतात, त्यांचे पाये समान असतात.

८. (१.४०) च्या आकृतींत **वड**, **कड** सांधिलेल्यानें तो सिद्धांत १.३८, प्रतिज्ञा, प्र. प्र. १ व १.३९ ह्यांच्या योजनेनें क्रमिकरीतीनें फार थोडक्यांत सिद्ध होतो, असें दाखवा.

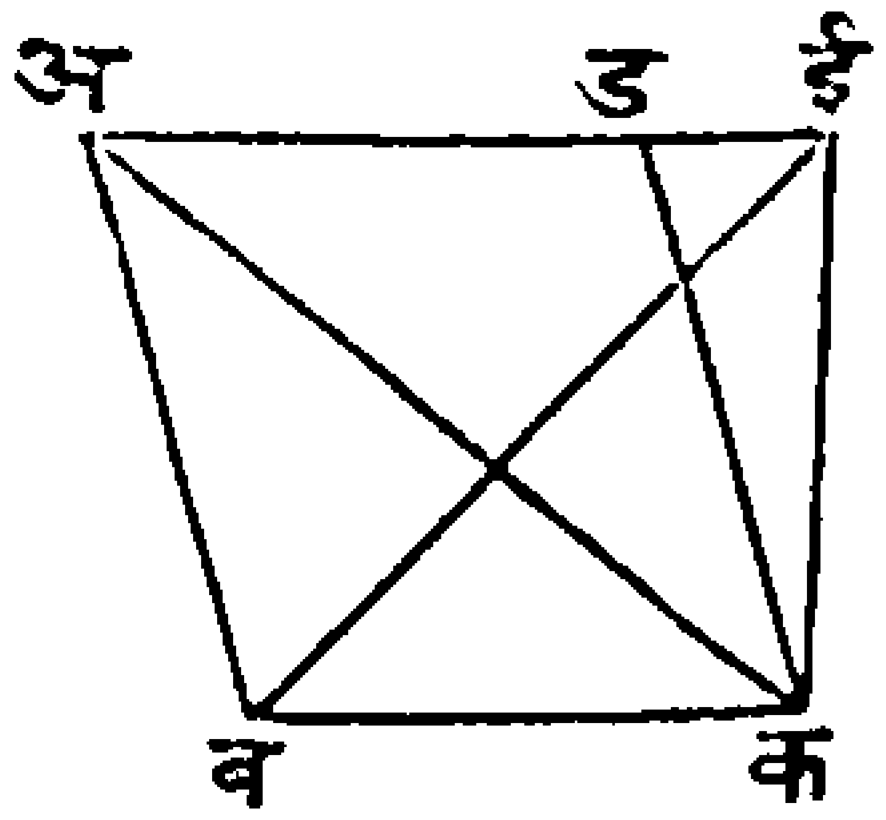
९. जे समांतरभुज चौकोन (अथवा त्रिकोण) समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असून असमान असतात, त्यांपैकीं मोठ्याचा पाया मोठा असतो.

१०. जे समांतरभुज चौकोन (अथवा त्रिकोण) समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असून असमान पायांवर असतात, त्यांपैकीं मोठ्या पायावरचा त्रिकोण मोठा असतो.

सिद्धांत ४१. प्रमेय.

जर एक समांतरभुज चौकोन आणि एक त्रिकोण हे एकाच पायावर आणि समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असतील, तर समांतरभुज चौकोन त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर असतो.

अबकड हा समांतरभुज चौकोन आणि **ईबक** हा त्रिकोण हे एकाच **बक** पायावर, आणि **बक, अई** ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत; तर **अबकड** समांतरभुज चौकोन **ईबक** त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर होईल.



अक सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अबक** त्रिकोण **ईबक** त्रिकोणाबरोबर आहे, (१.३७)

परंतु **अबकड** समांतरभुज चौकोन **अकब** त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर आहे; (१.३४)

म्हणून **अबकड** समांतरभुज चौकोन **ईबक** त्रिकोणाच्याही दुपटीबरोबर आहे.

ह्याकरितां, जर समांतरभुज चौकोन इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.४१) ह्याचा पक्ष व साध्य सांगा.

२. (१.४१) ह्याच्या सिद्धतेंतील "**अबकड** समांतरभुज चौकोन **ईबक** त्रिकोणाच्याही दुपटीबरोबर आहे" हें शेवटील वाक्य, मागच्या वाक्यापासून कोणत्या प्रत्यक्षप्रमाणाच्या आधारानें उत्पन्न होतें ?

३. एक समांतरभुज चौकोन व एक त्रिकोण हे समान पायांवर आणि समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असतील, तर तो समांतरभुज चौकोन त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर असतो.

४. एक समांतरभुज चौकोन व एक त्रिकोण हे (१) एकाच पायावर किंवा (२) एकाच रेघेंत असणाऱ्या समान पायावर आणि पायाच्या एकाच अंगास असतील, व समांतरभुज चौकोन त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर असेल, तर ते समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असतात; म्हणजे समांतरभुज चौकोनाची पायासमोरची बाजू वाढविली असतां त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून जाते.

५. एक समांतरभुज चौकोन व एक त्रिकोण हे समांतर रेघांच्या

एकाच जोडांत असतील, व समांतरभुज चौकोन त्रिकोणाच्या दुप-टीबरोबर असेल, तर त्यांचे पाये समान असतात.

पहिल्या पुस्तकाच्या पांचव्या खंडावर

(म्हणजे १.३५ पासून १.४१ पर्यंत सिद्धांतांवर)

प्रश्न.

१. (१.३५ पासून १.४० पर्यंत) सहा सिद्धांत व १.४० वरील प्रश्नांपैकीं ४,५,६,७ हे प्रश्न, अशा दहा सिद्धांतांचा मुख्य विषय थोडक्यांत सांगा.

२. (१.४१) व त्यावरील प्रश्नांपैकीं ३,४ (१) व (२) आणि ५ हे प्रश्न, अशा पांच सिद्धांतांचा मुख्य विषय थोडक्यांत सांगा.

३. "जर दोन त्रिकोणांमध्यें अथवा दोन समांतरभुज चौकोनांमध्यें (१) पायांची समानता, (२) उंच्यांची समानता व (३) क्षेत्रांची समानता ह्या तीन धर्मांपैकीं कोणतेही दोन धर्म आहेत असें दिलें असेल, तर त्यामध्यें तिसरा धर्मही असतो," ह्या वाक्यामध्यें जे सहा सिद्धांत आहेत, त्यांच्या प्रतिज्ञा निरनिराळ्या सांगून ते सिद्ध करून दाखवा.

४. "जर एक समांतरभुज चौकोन व एक त्रिकोण ह्यांच्यामध्यें (१) पायांची समानता, (२) उंच्यांची समानता व (३) चौकोन त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर असणें ह्या तीन धर्मांपैकीं कोणतेही दोन धर्म आहेत असें दिलें असेल, तर त्यांमध्यें तिसरा धर्मही असतो." ह्या वाक्यामध्यें जे तीन सिद्धांत आहेत, त्यांच्या प्रतिज्ञा निरनिराळ्या सांगून ते सिद्ध करून दाखवा.

५. ज्या चौकोनाचा प्रत्येक कर्ण त्यास दुभागितो, तो समांतरभुज चौकोन असतो.

६. समांतरभुज चौकोनाचे दोन्ही कर्ण काढिल्यानें जे चार त्रिकोण होतात, ते समान असतात.

७. चौकोनाचे दोन्ही कर्ण काढिल्यानें जे चार त्रिकोण होतात, त्यांपैकीं त्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंवरचे त्रिकोण जर समान असले, तर त्याच्या इतर दोन बाजू समांतर असतात.

८. चौकोनाचे दोन्ही कर्ण काढिले असतां जे चार त्रिकोण होतात, त्यांपैकीं समोरासमोरच्या बाजूंवरचे दोन दोन त्रिकोण जर समान असले, तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

९. ज्या चौकोनाच्या दोनच बाजू समांतर असतात, त्याच्या तिसऱ्या बाजूच्या मध्यांतून चवथीशीं समांतर रेषा काढून ती समांतर असणाऱ्या बाजूंस मिळेल असें केलें असतां, जो समांतरभुज चौकोन होतो, तो मूळच्या चौकोनाबरोबर असतो.

१०. ज्या चौकोनाच्या दोन बाजू समांतर असतात, त्याच्या तिसऱ्या बाजूच्या मध्यापासून चवथीच्या टोंकांपर्यंत काढिलेल्या रेषांनीं चवथीवर जो त्रिकोण होतो, तो मूळच्या चौकोनाच्या अर्धाबरोबर असतो.

११. समांतरभुजचौकोनाच्या एका कर्णांतील कोणत्याही बिंदूपासून समोरासमोरच्या दोन कोणबिंदूंपर्यंत रेषा काढिल्यानें त्या कर्णाच्या प्रत्येक भागावर जे दोन दोन त्रिकोण होतात, ते परस्पर समान असतात.

१२. त्रिकोणाच्या साऱ्या बाजूंचे मध्य सांधिल्यानें जे चार त्रिकोण होतात, ते सारखे होतात.

१३. चौकोनाच्या जवळजवळच्या बाजूंचे मध्य सांधिल्यानें जो चौकोन होतो, (१) तो समांतरभुजचौकोन असतो, (२) त्याची परिमिति मूळच्या चौकोनाच्या कर्णाच्या बेरजेबरोबर असते, आणि (३) त्याचें क्षेत्र मूळच्या चौकोनाच्या अर्धाबरोबर असतें.

१४. काटकोनचौकोनाच्या जवळजवळच्या बाजूंचे मध्य सांधिल्यानें जो चौकोन होतो, तो समभुजचौकोन असतो.

१५. चौरसाच्या जवळजवळच्या बाजूंचे मध्य सांधिल्यानें जो चौकोन होतो, तो चौरस असतो.

१६. त्रिकोणाच्या एका बाजूंतील कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या इतर बाजूंच्या मध्यांपर्यंत रेषा काढिल्यानें जो चौकोन होतो, तो त्या त्रिकोणाच्या अर्धाबरोबर असतो.

१७. समांतरभुजचौकोनाच्या एका बाजूच्या दोन्ही टोंकांपासून समोरच्या बाजूंतील कोणत्याही बिंदूंपर्यंत रेषा काढिल्या असतां त्या

समोरच्या बाजूच्या दोन भागांवर जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांची बेरीज त्या चौकोनाच्या अर्धाबरोबर असते.

१८. त्रिकोणाच्या दोन बाजूंचे मध्य व समोरचे कोणबिंदु हे सांधिल्यानें तीन त्रिकोण व एक चौकोन अशा ज्या चार सबंद आकृति होतात, त्यांपैकीं (१) चौकोन व तिसऱ्या बाजूवरचा त्रिकोण हे समान असतात; आणि (२) बाकीचे दोन त्रिकोण परस्पर समान असतात.

१९. त्रिकोणाच्या एका बाजूचे कसेही दोन भाग करून त्या भागांच्या मध्यांपासून त्यांच्या जवळच्या बाजूंच्या मध्यांपर्यंत रेषा काढिल्या, तर त्या रेषा समान व समांतर असतात.

२०. समांतरभुज चौकोनांतील कोणत्याही बिंदूपासून समोरासमोरच्या दोन बाजूंच्या टोंकांपर्यंत रेषा काढिल्यानें त्या दोन बाजूंवर जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांची बेरीज त्या चौकोनाच्या अर्धाबरोबर असते.

२१. समांतरभुजचौकोनाच्या एका बाजूचा मध्य व समोरच्या बाजूचें एक टोंक हीं सांधिल्यानें होणारा त्रिकोण त्या चौकोनाच्या चतुर्थांशाबरोबर असतो.

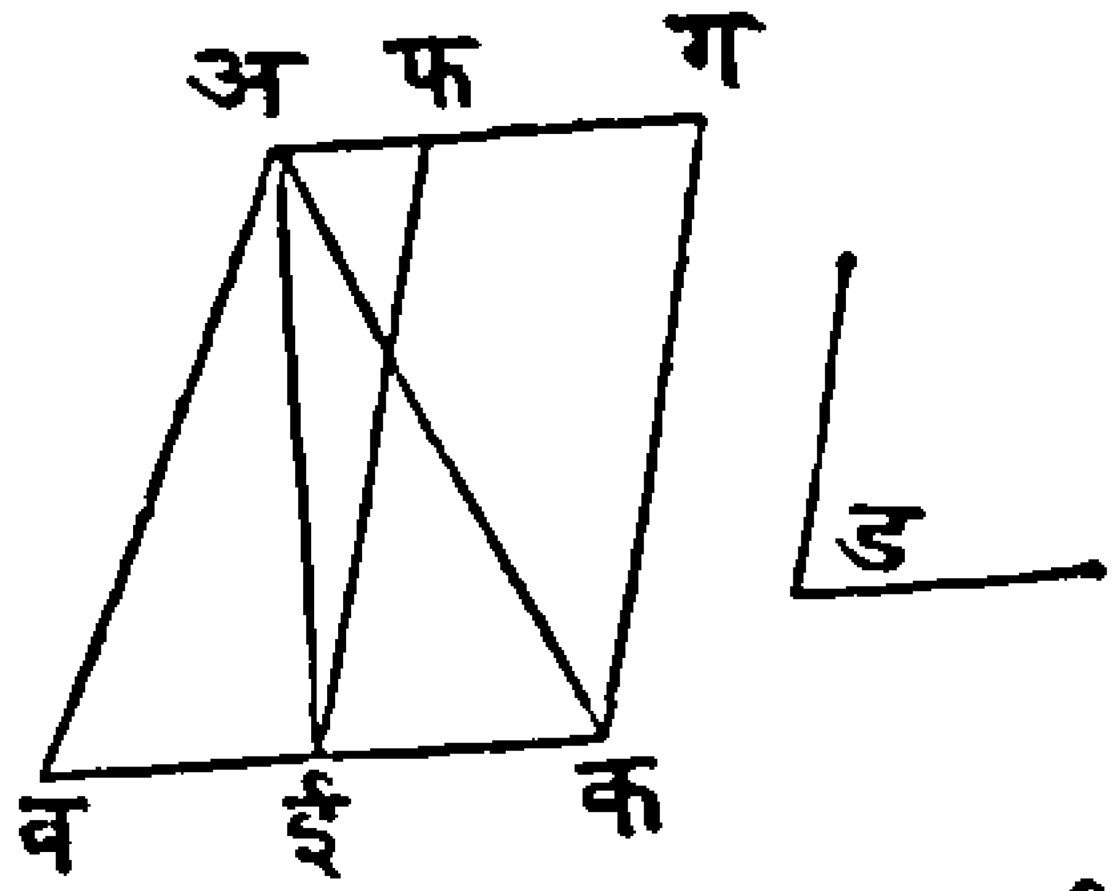
सिद्धांत ४२. कृत्य.

जो दिलेल्या त्रिकोणाबराबर होईल, आणि ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन काढावयाचें.

अबक हा दिलेला त्रिकोण आहे, आणि **ड** हा दिलेला कोन आहे; तर जो **अबक** त्रिकोणाबराबर होईल आणि ज्याचा एक कोन **ड** कोनाबराबर होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन काढावयाचा आहे.

बक, ई मध्यें दुभाग; (१.१०)

ईक रेषेशीं ईबिंदूजवळ **कईफ** कोन **ड** कोनाबराबर कर; (१.२३)



अमधून अफगरेघ ईकशीं समांतर काढ, आणि कमधून कगरेघ ईफशीं समांतर काढ. (१. ३१)
म्हणजे फईकग हा इच्छिलेला चौकोन होईल.

(गृ. कृ. १)

कारण; अई सांध;

(व्याख्या. ३५)

फईकग हा समांतरभुज चौकोन आहे. (रचना)

आतां बई, ईक ह्या रेघा समान आहेत,

म्हणून अबई, अईक हे त्रिकोण समान पायावर आहेत, व ते बक, अग ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत,

म्हणून अबई त्रिकोण अईक त्रिकोणाबरोबर आहे; (१.३८)

म्हणून अबक त्रिकोण अईक त्रिकोणाची दुप्पट आहे.

परंतु फईकग समांतरभुज चौकोन आणि अईक त्रिकोण एकाच ईक पायावर आणि ईक, अग ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत;

म्हणून फईकग समांतरभुज चौकोन अईक त्रिकोणाची दुप्पट आहे. (१.४१)

म्हणून फईकग समांतरभुज चौकोन अबक त्रिकोणाबरोबर आहे. (प्र. प्र. ६)

आणि त्याचा कईफ हा कोन दिलेल्या ड कोनाबरोबर आहे. (रचना)

त्याकरितां, जो दिलेल्या अबक त्रिकोणाबरोबर आहे आणि ड ह्या दिलेल्या कोनाबरोबर ज्याचा कईफ कोन आहे, असा फईकग समांतरभुज चौकोन काढिला आहे.

प्रश्न.

१. (१.४२) च्या आकृतींत अब बाजू दुभागून तिच्या अर्धावर इच्छिलेला समांतरभुजचौकोन काढून दाखवा; आणि अक बाजूच्याही अर्धावर काढून दाखवा.

२. (१.४२) च्या आकृतींत ई बिंदूजवळ ड कोनाएवढा कोन केला

आहे, तसें न करितां **ब** अथवा **क** बिंदूजवळ **ड** कोनाएवढा कोन करून इष्टकृति करून दाखवा.

३. (१.४२) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

४. दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर एक काटकोनचौकोन काढून दाखवा.

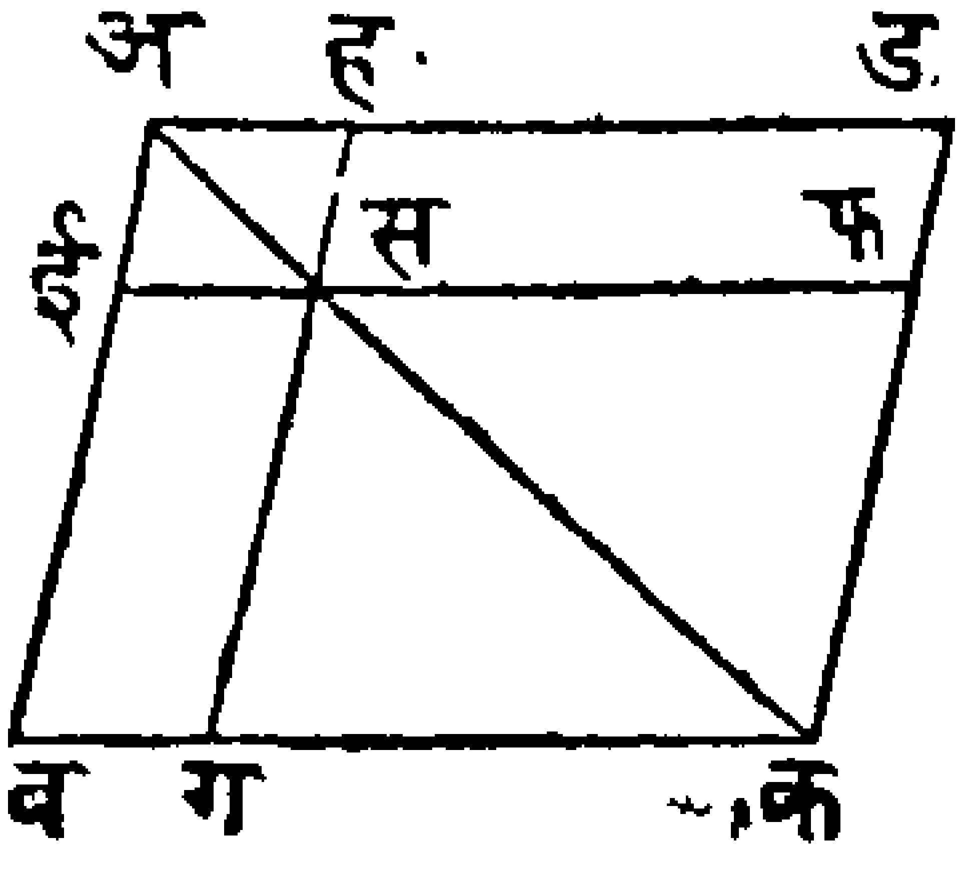
५. "असा एक समांतरभुज चौकोन काढावयाचा आहे कीं, (१) तो दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर होईल, (२) त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल, (३) त्याचा तोच कोन दिलेल्या अमर्याद रेषेशीं आणि (४) त्या रेषेंतील दिलेल्या बिंदूजवळ होईल." हें कृत्य व १.४२ ह्यांतील भेद सांगा; व हें करून दाखवा.

सिद्धांत ४३. कृत्य.

समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णाच्या दोहों बाजूंस जे पूरक समांतरभुज चौकोन असतात, ते परस्पर बराबर असतात.

अबकड समांतरभुजचौकोन आहे, **अक** हा त्याचा एक कर्ण आहे; **अक** कर्णांतील **स** ह्या एका बिंदूतून **अबकड** च्या बाजूंशीं समांतर रेषा काढून त्या रेषा समोरासमोरच्या बाजूंस मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या आहेत.

अशा रचनेमुळें झालेल्या चार समांतरभुजचौकोनांपैकीं **ईह**, **गफ** हे **अक** कर्णाभोंवतालचे समांतरभुजचौकोन आहेत आणि **बस**, **सड** हे त्यांचे पूरक समांतरभुज चौकोन आहेत. तर **बस**, **सड** हे पूरक समांतरभुजचौकोन परस्पर समान होतील, असें सिद्ध करावयाचें.



आतां **ईह** समांतरभुजचौकोनाचा **अस** कर्ण आहे, ह्मणून **अईस** त्रिकोण **अहस** त्रिकोणाबरोबर आहे; (१.३४)
तसाच **कगस** त्रिकोण **कफस** त्रिकोणाबरोबर आहे; (१.३४)
म्हणून **अईस** आणि **कगस** ह्या त्रिकोणांची बेरीज, **अहस** आणि **कफस** ह्या त्रिकोणांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. २)
आतां **अबक** आणि **अडक** हे त्रिकोणही समान आहेत; (१.३४)

ह्या दोन समान त्रिकोणांमध्यें पूर्वींच्या दोन दोन त्रिकोणांच्या समान वेरजा अनुक्रमें वजा केल्या;

तेव्हां शेष **बस** पूरक, शेष **सड** पूरकाबरोबर आहे. (प्र.प्र.३)

ह्याकरितां, समांतरभुज चौकोनाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. " समांतरभुजचौकोनाच्या कर्णाभोंवतालचे समांतरभुजचौकोन " म्हणजे काय ? " पूरक समांतरभुजचौकोन " म्हणजे काय ?

२. (१.४३) च्या आकृतींत **बड** कर्णांतील एका बिंदूपासून चौकोनाच्या बाजूंशीं समांतर रेषा काढून पूरक समांतरभुजचौकोन तयार करा; आणि ते समान आहेत असें सिद्ध करून दाखवा.

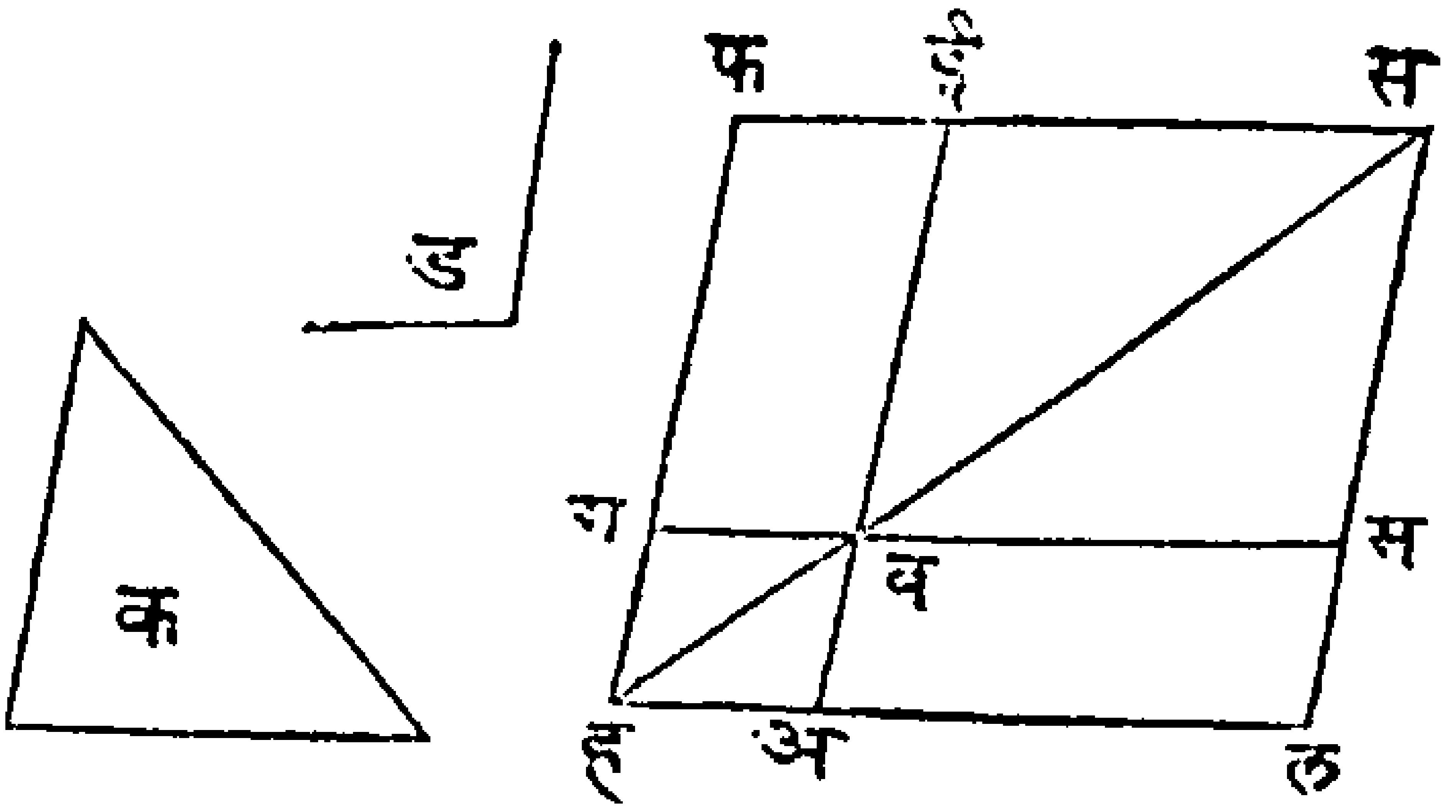
३. समांतरभुजचौकोनाच्या एका कर्णांतील दोन बिंदूंपासून त्या चौकोनाच्या बाजूंशीं समांतर रेषा काढिल्या, आणि त्या रेषा समोरासमोरच्या बाजूंस मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या, तर जे अनेक समांतरभुजचौकोन होतात, त्यांपैकीं कोणते कोणते समान असतात, हें सांगून सिद्ध करून दाखवा.

४. कोणताही समांतरभुजचौकोन, त्याच्या कर्णाभोंवतालचे समांतरभुजचौकोन, व पूरकसमांतरभुजचौकोन हे सर्व मिथःसमकोण असतात.

सिद्धांत ४४. कृत्य.

जो दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर होईल, आणि ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुजचौकोन दिलेल्या रेषेवर काढावयाचें.

अब ही दिलेली रेघ आहे, **क** हा दिलेला त्रिकोण आहे, आणि **ड** हा दिलेला कोन आहे; तर जो **क** त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा एक कोन **ड** कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुजचौकोन **अब** रेषेवर (म्हणजे **अब** रेषा ज्याची एक बाजू होईल असा) काढावयाचा आहे.



(१) पहिल्यानें असा एक समांतरभुज चौकोन तयार कर कीं, तो क त्रिकोणाबरोबर होईल व त्याचा एक कोन ड कोनाबरोबर होईल. (१.४२)
(हा चौकोन क त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या अर्ध्या भागावर होईल).

(२) **अब** रेघ **ब** बिंदूपलीकडे वाढीव. (गृ. कृ. २)

(३) दुसरा असा एक समांतरभुज चौकोन तयार कर कीं, तो पहिल्या चौकोनाशीं एकरूप होईल, आणि त्याचा **ड** कोनाएवढा कोन **बई** रेषेशीं **ब** बिंदूजवळ होईल. (१.२३,१.३ व १.३१)

ह्याप्रमाणें काढिलेला समांतरभुज चौकोन **बईफग** आहे, व त्याचा **ईबग** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे, असें मान.

(४) **अ** बिंदूंतून **अह** रेघ **बग** किंवा **ईफ** रेघेशीं समांतर काढ; (१. ३१)

(५) **फग** रेषा **अह**ला **ह** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)

(६) **हब** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **बहफ** कोन **अहफ** कोनापेक्षां लहान आहे, (प्र. प्र. ९)

म्हणून **बहफ**, **ईफह** ह्यांची बेरीज **अहफ**, **ईफह** ह्या कोनांच्या बेरजेहून कमी आहे; (प्र. प्र. ४)
आणि **अहफ**, **ईफह** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोन आहे; (१.२९ भाग ३)
म्हणून **बहफ**, **ईफह** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून

कमी आहे; (प्र. प्र. अ)
म्हणून **हब**, **फई** ह्या रेषा अनुक्रमें **ब**, **ई** ह्या बिंदूंपलीकडे वाढविल्या असतां मिळतील. (प्र. प्र. १२)

(७) **हब**, **फई** ह्या रेषा अनुक्रमें **ब**, **ई** बिंदूंपलीकडे वाढीव आणि त्या **स** बिंदूंत मिळाल्या असें मान. (गृ. कृ. २)

(८) **स** बिंदूंतून **सल** रेघ **ईअ** किंवा **फह** रेषेशीं समांतर काढ. (१.३१)

(९) **हअ**, **गब** ह्या रेषा अनुक्रमें **अ**, **ब** बिंदूंपलीकडे वाढीव आणि त्या **सल** रेषेला अनुक्रमें **म**, **ल** बिंदूंत मिळाल्या असें मान. (गृ.कृ.२)

आतां **अबमल** हा इच्छिलेला समांतरभुज चौकोन झाला.

कारण; **फल** हा समांतरभुज चौकोन आहे, आणि **बफ**, **बल** हे त्याच्या **हस** कर्णाच्या दोहों आंगचे दोन पूरक समांतरभुज चौकोन आहेत; (रचना व व्या. ३५)
म्हणून **बफ** पूरक **बल** पूरकाबरोबर आहे. (१.४३)
परंतु **बफ** चौकोन **क** त्रिकोणाबरोबर आहे; (रचना व प्र.प्र.१)
म्हणून **बल** चौकोन **क** त्रिकोणाबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
आतां **ईबग** कोन **अबम** कोनाबरोबर आहे; (१.१५)
आणि **ईबग** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे; (रचना)
म्हणून **अबम** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र.१)

त्याकरितां जो **क** त्रिकोणाबरोबर आहे व ज्याचा **अबम** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे, असा **बल** समांतरभुज चौकोन **अब** रेघेस लाविला आहे.

प्रश्न.

१. (१.४२) व (१.४४) ह्या दोन कृत्यांमध्यें भेद कोणता आहे?

२. "**अब** ह्या समर्याद रेषेवर समांतरभुजचौकोन काढावयाचा" व "**अब** ह्या समर्याद रेषेएवढ्या एखाद्या रेषेवर समांतरभुजचौकोन काढावयाचा" ह्या दोन कृत्यांमध्यें भेद कोणता?

३. (१.४४) च्या रचनेंतील (३) ह्या कलमांतला समांतरभुजचौकोन काढण्याची रीति सविस्तर सांगा; आणि तो समांतरभुजचौकोन

(१) ह्या कलमांतील समांतरभुजचौकोनाशीं एकरूप आहे, असें सिद्ध करून दाखवा.

४. (१.४४) च्या रचनेंतील (२) ह्या कलमांत **अब** रेषा **ब** बिंदूपलीकडे वाढविली आहे; तसें न करितां ती **अ** बिंदूपलीकडे वाढवून सारी रचना करून दाखवा.

५. (१.४४) च्या रचनेंतील (४) व (५) ह्या कलमांतल्या **फग**. **अह** ह्या रेषा परस्परांस मिळतात, असें (१.३० उप. ह्याच्या आधारानें) सिद्ध करा.

६. (१.४४) च्या रचनेंतील (६) ह्या कलमांत **हब** सांधिली आहे, ती न सांधितां जर **अग** सांधिली, व पुढील सर्व रचना ह्या कृत्याच्या सामान्यरीतीस अनुसरून केली, तर इच्छिलेला चौकोन तयार होईल काय?

७. (१.४४) च्या रचनेंतील (९) ह्या कलमांतल्या **अह**, **गब** ह्या रेषा (८) ह्या कलमांतल्या **सल** रेषेला मिळतीलच, असें सिद्ध करा.

८. (१.४४) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा.

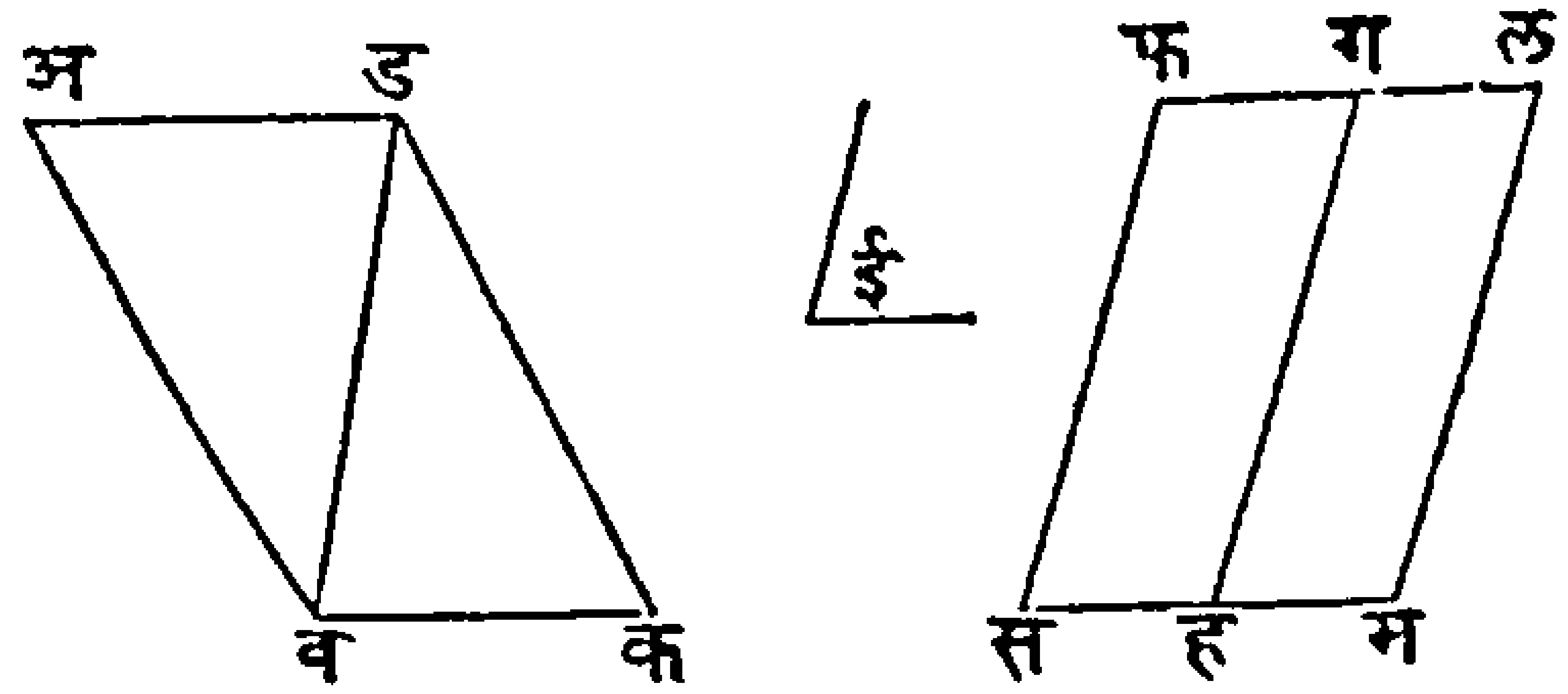
९. "असा एक समांतरभुज चौकोन काढा कीं, तो दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर होईल, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल, आणि त्याची एक बाजू दिलेल्या समर्याद रेषेबरोबर होईल." हें कृत्य व १.४४ ह्यांतील भेद सांगा; आणि हें कृत्य करून दाखवा.

१०. "असा एक काटकोनचौकोन काढावयाचा कीं, तो दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर होईल व त्याची एक बाजू दिलेल्या समर्याद सरल रेषेबरोबर होईल." हें कृत्य व १.४४ ह्यांतील भेद सांगा; व हें कृत्य करून दाखवा.

सिद्धांत ४५. कृत्य.

जो दिलेल्या सरलरेषाकृतीबराबर होईल व ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन काढावयाचें.

अबकड ही दिलेली सरलरेषाकृति आहे, व **ई** हा दिलेला कोन आहे; तर असा एक समांतरभुजचौकोन काढावयाचा आहे कीं, तो **अबकड** ह्या सरलरेषाकृतीबराबर होईल व त्याचा एक कोन **ई** कोनाबराबर होईल.



(१) **डब** सांध; (गृ. कृ. १)
(म्हणजे दिलेल्या सरलरेषाकृतींत नुसते त्रिकोण पडतील.)

(२) **फह** हा असा एक समांतरभुज चौकोन काढ कीं, तो **अबड** त्रिकोणाबरोबर होईल व त्याचा **स** कोन दिलेल्या **ई** कोनाबरोबर होईल. (१.४२ व १.४४ ह्या रचनेंतील कलम ३)

(३) **गम** हा दुसरा असा समांतरभुज चौकोन पहिल्याच्या **गह** बाजूवर काढ कीं, तो **डबक** त्रिकोणाबराबर होईल व त्याचा **गहम** कोन दिलेल्या **ई** कोनाबराबर होईल; (१.४४)
म्हणजे **फसमल** हा इच्छिलेला चौकोन होईल.

(पहिल्यानें **फसमल** हा चौकोन आहे, असें सिद्ध करूं.)

फसह, गहम हा प्रत्येक कोन **ई** कोनाबराबर आहे; (रचना)
म्हणून ते कोन समान आहेत. (प्र. प्र. १)
ह्या प्रत्येकांत **सहग** कोन मिळविला;
तेव्हां **फसह, सहग** ह्यांची बेरीज **गहम, सहग** ह्यांच्या बेरजेबराबर झाली. (प्र. प्र. २)
परंतु **फसह, सहग** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे; (१.२९ भाग ३)
म्हणून **गहम, सहग** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे. (प्र. प्र. १)
आतां **गह** रेषेच्या भिन्न अंगांकडून **सह, मह** ह्या रेषा येऊन तिच्या **ह** ह्या एकाच टोंकांत तिला मिळाल्या आहेत, व तिच्याशीं झालेल्या **गहम, सहग** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, असें सिद्ध झालें; म्हणून **सह, मह** ह्या दोन्ही मिळून

सम ही एकच सरलरेषा आहे. (१.१४)
आतां **सम, फग** ह्या समांतर रेषांस **हग** रेघ मिळते,
म्हणून **महग, हगफ** हे व्युत्क्रमकोण परस्पर समान आहेत. (१.२९ भाग १)
ह्या प्रत्येकांत **हगल** कोन मिळविला,
तेव्हां **महग, हगल** ह्या कोनांची बेरीज **हगफ, हगल** ह्या कोनांच्या बेरजेबरोबर झाली. (प्र. प्र. २)
परंतु **महग, हगल** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे; (१.२९ भाग ३)
म्हणून **हगफ, हगल** ह्यांची बेरीज ही दोन काटकोनांबरोबर आहे; (प्र. प्र. १)
म्हणून **फग, गल** ह्या दोन सरलरेषा मिळून **फल** ही एकच सरलरेषा आहे. (१.१४)
सम, फल ह्या एकेकच सरलरेषा आहेत असें ठरलें;
म्हणून **फसमल** हा चौकोन आहे. (व्याख्या २२)
(आतां **फसमल** हा चौकोन समांतरभुज आहे, असें सिद्ध करूं)
सफ, हग शीं समांतर आहे व **हग, मल**शीं समांतर आहे, (रचना)
म्हणून **सफ, मल**शीं समांतर आहे; (१.३०)
आणि **सम, फल**शीं समांतर आहे; (रचना)
म्हणून **फसमल** हा चौकोन समांतरभुजही आहे. (व्याख्या ३५)
(आतां **फसमल** हा समांतरभुज चौकोन दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर आहे, असें सिद्ध करूं.)
अवड त्रिकोण **हफ** चौकोनाबराबर आहे, व **डबक** त्रिकोण **गम** चौकोनाबरोबर आहे; (रचना)
म्हणून **अबकड** ही आकृति **फसमल** चौकोनाबराबर आहे. (प्र.प्र.२)
फसमल चौकोनाचा **स** कोन रचनेवरूनच **ई** कोनाबराबर आहे.
ह्याकरितां **फसमल** हा असा समांतरभुजचौकोन काढिला आहे

कीं, तो दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर आहे, व त्याचा **स** हा एक कोन दिलेल्या ई कोनाबरोबर आहे.

उपसिद्धांत. "जो दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर होईल व ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल असा एक समांतरभुजचौकोन दिलेल्या रेषेवर काढावयाचा." ह्या कृत्याची रीति वरील सिद्धांतावरून उघड दिसते. ती अशी:—प्रथम दिलेल्या सरलरेषाकृतीचे कोणबिंदु सांधून तीमध्यें नुसते त्रिकोण तयार करावे. मग (१.४४ प्रमाणें) असा एक समांतरभुजचौकोन दिलेल्या रेषेवर काढावा कीं, तो त्या त्रिकोणांपैकीं एकाबरोबर होईल, व त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल. पुढें ह्या पहिल्या चौकोनाची जी बाजू दिलेल्या रेषेसमोर असेल, तिजवर दिलेल्या सरलरेषाकृतींतल्या दुसऱ्या त्रिकोणाएवढा समांतरभुजचौकोन (ह्या सिद्धांताच्या रचनेंत दाखविल्याप्रमाणें) काढावा. असेच इतर त्रिकोणांएवढाले समांतरभुजचौकोन एकापुढें एक जोडीत गेल्यानें इच्छिलेला चौकोन तयार होतो.

प्रश्न.

१. (१.४५) व त्याचा उपसिद्धांत, १.४२ व १.४५, १.४४ व १.४५, १.४४ व १.४५ चा उपसिद्धांत ह्या दोन दोन कृत्यांमधील भेद सांगा.

२. (१.४५) ह्यांत दिलेली सरलरेषाकृति ही जर पंचकोणाकृति असती, तर तीमध्यें नुसते त्रिकोण पाडण्याकरितां तिचे निदान किती कोणबिंदु सांधावे लागते?

३. "एका सरलरेषाकृतीमध्यें नुसते त्रिकोण पाडावयाचे आहेत, आणि त्या त्रिकोणांची संख्या जितकी कमी करवेल तितकी करावयाची आहे." ह्या कृत्याची एखादी सामान्यरीति सांगा; आणि त्या रीतीनें किती त्रिकोण पडतात हेंही सांगा.

४. (१.४५) च्या रचनेंतील (२) ह्या कलमांतला (म्हणजे पहिला) चौकोन काढण्याची रीति सविस्तर सांगा.

५. (१.४५) च्या रचनेंतील (२) ह्या कलमांतला चौकोन पहिल्या त्रिकोणापासून दूर काढिला आहे; तसा न काढितां तो पहिल्या त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या अर्ध्या भागावरच काढून बाकीची सारी कृति करून दाखवा.

६. (१.४५) च्या रचनेंतील तिसऱ्या कलमांतल्या **गम** समांतरभुजचौकोनाचा **गहम** कोन दिलेल्या ई कोनाबरोबर केला आहे; तसें न करितां **हगल** कोन ई कोनाबरोबर केला तर चालेल काय? कारण काय?

७. (१.४५) ह्यांत दिलेल्या सरलरेषाकृतीमध्यें जर तिसरा एक त्रिकोण झाला असता, तर त्याच्या एवढा समांतरभुजचौकोन **गम** चौकोनाच्या कोणत्या बाजूवर काढावा लागता; व त्याचा ई कोनाएवढा कोन **गम**च्या कोणत्या कोणबिंदूजवळ आणावा लागता?

८. (१.४५) च्या रचनेंतील दुसरा **गम** चौकोन पहिल्याच्या **गह** बाजूवर काढिला आहे; तसें न करितां तो **गफ** बाजूवर काढून बाकीची सारी रचना करून दाखवा.

९. (१) (१.४५) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा, व (२) त्याच्या सिद्धतेला लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा.

१०. (१.४२), (१.४४) व (१.४५) ह्या प्रत्येक कृत्यामध्यें जी जी सरलरेषाकृति काढावयाची आहे, तिच्या इष्ट धर्मांपैकीं कोणते कोणते धर्म केवळ रचनेवरूनच सिद्ध होतात, व कोणते धर्म सिद्ध करावयास प्रत्यक्षप्रमाणादिकांचे आधार दाखवावे लागतात?

११. (१.४५) ह्याच्या सिद्धतेमध्यें "**सम**, **फग** ह्या समांतररेषांस **हग** रेघ छेदिते" असें वाक्य आहे; त्यांत **फग**च्या ठिकाणीं **फल** म्हटलें तर चालेल काय? कां?

१२. "दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर काटकोनचौकोन काढावयाचा." हें कृत्य व १.४५ ह्यांतील भेद सांगून हें करून दाखवा.

पहिल्या पुस्तकाच्या सहाव्या खंडावर

(म्हणजे १.४२ पासून १.४५ पर्यंत सिद्धांतांवर)

प्रश्न.

१. दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर असा एक त्रिकोण काढा कीं, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल.

२. दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर एक काटकोनत्रिकोण काढा.

३. दिलेल्या समांतरभुजचौकोनाबरोबर असा एक त्रिकोण काढा कीं, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल.

४. दिलेल्या समांतरभुजचौकोनाबरोबर काटकोनत्रिकोण काढा.

५. दिलेल्या समांतरभुज चौकोनाबरोबर असा एक समांतरभुजचौकोन काढा कीं, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल.

६. दिलेल्या समांतरभुजचौकोनाबरोबर एक काटकोनचौकोन काढा.

७. दिलेल्या समांतरभुजचौकोनाबराबर एक समभुजचौकोन काढा.

८. दिलेल्या चौकोनाबरोबर एक समद्विभुजत्रिकोण काढा.

९. "दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर एक त्रिकोण काढावयाचा." हें कृत्य (१) (१.४५) च्या साह्यानें करून दाखवा, आणि (२) (१.४५ व १.४४) ह्यांच्या साह्यावांचूनही करून दाखवा.

१०. (१.४५) हें कृत्य (१.४४) च्या साह्यावांचून करून दाखवा.

११. असा एक त्रिकोण काढा कीं, तो दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर होईल, त्याचा एक कोन दिलेल्या त्रिकोणाच्या एका कोनाबरोबर होईल, व त्याची त्याच कोनाजवळची एक बाजू दिलेल्या रेषेबराबर होईल.

१२. असा एक त्रिकोण काढा कीं, तो दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर होईल, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल, व त्याची त्याच कोनाजवळची एक बाजू दिलेल्या रेषेबराबर होईल.

१३. **अबकड** ह्या समांतरभुजचौकोनांतील **ई** ह्या एका बिंदूंतून **अब**शीं समांतर **गईफ** आणि **अड**शीं समांतर **नईम** ह्या रेषा काढून समोरासमोरच्या बाजूंस मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या आहेत, (**ग, न** हे बिंदु अनुक्रमें **अड, अब** ह्या रेषांमध्यें आहेत); आणि **गम** चौकोन **नफ** चौकोनाबराबर आहे, तर **ई** बिंदु **अक** कर्णामध्यें आहे, असें सिद्ध करा.

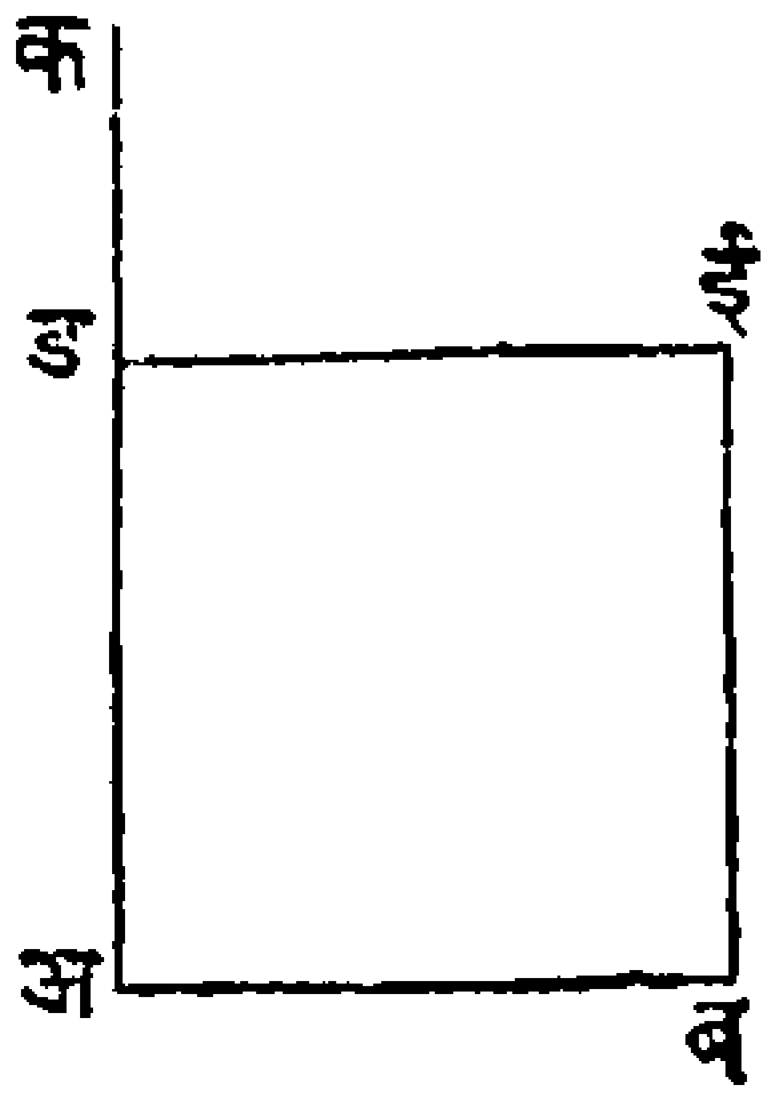
१४. समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांतील एका बिंदूंतून त्याच्या बाजूंशीं दोन समांतर रेषा काढून त्या समोरासमोरच्या बाजूंस मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या असतां, त्यांपैकीं एका रेषेनें मूळच्या चौकोनाचे जे दोन भाग होतात, ते दुसऱ्या रेषेनें झालेल्या दोन भागांशीं अनुक्रमें समान असतात.

१५. (१) दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर असणारे समांतरभुज चौकोन दिलेल्या रेषेवर किती काढितां येतील ? (२) दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर असणारे व ज्यांचा एकेक कोन दिलेल्या तिर्यक्कोनाबरोबर आहे, असे समांतरभुज चौकोन दिलेल्या रेषेवर किती काढितां येतील ? (३) दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर असणारे काटकोन चौकोन दिलेल्या रेषेवर किती काढितां येतील ?

सिद्धांत ४६. कृत्य.

दिलेल्या समर्याद सरलरेषेवर चौरस काढावयाचें.

अब ही एक दिलेली समर्याद सरलरेषा आहे; तिजवर (म्हणजे ती ज्याची एक बाजू होईल असा) चौरस काढावयाचा आहे.



अ बिंदूंतून **अब** रेषेवर **अक** लंब काढ. (१.११)

अड ही **अब** बराबर कर; (१.३)
ड बिंदूंतून **अब**शीं **डई** समांतर काढ; आणि **ब** बिंदूंतून **अड**शीं **बई** समांतर काढ. (१.३१)

डई, **बई** ह्या एकमेकींस **ई** बिंदूंत छेदितात असें मान.
म्हणजे **अ ई** हा **अब**वरील चौरस होईल.

कारण; **अड** ही **अब**शीं समान आहे, (रचना)
डई ही **अब**शीं समान आहे, (१.३४)
बई ही **अब**शीं समान आहे; (१.३४, प्रतिज्ञा व प्र. प्र. १)
म्हणून **अड**, **डई**, **बई** ह्या एकमेकींशीं समान आहेत, (प्र.प्र. १)
म्हणून **अई** चौकोनाच्या सर्व बाजू समान आहेत.

आतां **अब**, **डई** ह्या समांतर रेषांस **अड** रेघ मिळते, म्हणून **बअड**, **अडई**, ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे;
(१.२९ भाग ३)

परंतु **बअड** कोन काटकोन आहे, (रचना)

म्हणून **अडई** कोनही काटकोन आहे. (प्र.प्र. ३)

ह्याप्रमाणेंच **ब**, **ई** हे कोनही काटकोन आहेत, असें सिद्ध करितां येईल. ह्यास्तव **अई** चौकोनाचे सर्व कोन काटकोन आहेत; आणि त्याच्या सर्व बाजू समान आहेत असें वर सिद्ध केलें आहे; ह्यास्तव **अई** हें चौरस आहे; (व्या. ३०)

आणि तें **अब** रेषेवर काढिलें आहे.

उपसि.१—समांतरभुजचौकोनाचा एक कोन काटकोन असल्यास त्याचे सारे कोन काटकोन असतात.

उपसि. २—समांतरभुजचौकोनाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू समान असून त्याचा एक कोन काटकोन असला, तर तो चौरस असतो.

प्रश्न.

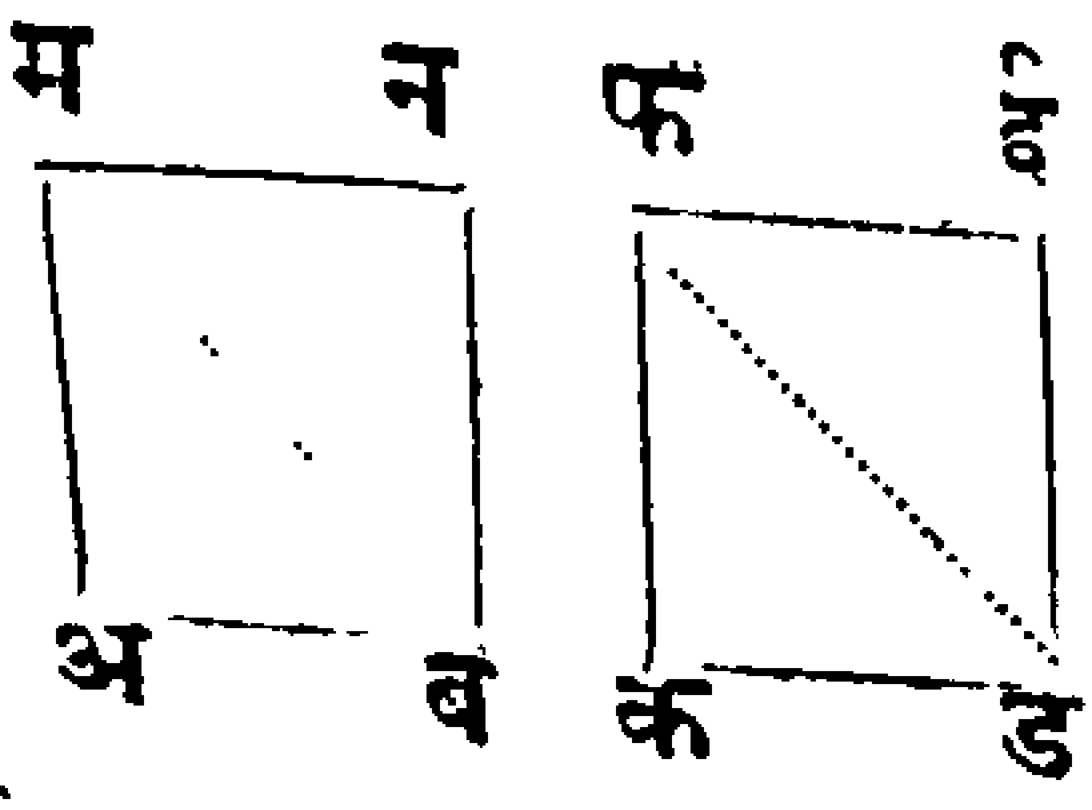
१. दिलेल्या रेषेवर चौरस काढणें म्हणजे काय ? दिलेल्या रेषेवर पराकाष्ठा किती चौरसें काढितां येतात.

२. दिलेल्या रेषेवर चौरस काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

३. " दिलेल्या रेषेवर असा एक समभुजचौकोन काढावयाचा कीं, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल," हें कृत्य व १.४६ ह्यांतील भेद सांगून हें करून दाखवा.

सिद्धांत ३. प्रमेय.

समान रेषांवरील चौरसें समान असतात.



अब, **कड** ह्या रेषा समान आहेत, व त्यांवर अनुक्रमें **अन**, **कई** हीं चौरसें काढिलीं आहेत; तर तीं समान आहेत, असें सिद्ध करावयाचें.

मव, **फड** सांधिल्या. (गृ. कृ. १)

आतां **अव**, **कड** ह्या रेषा समान आहेत; (प्रतिज्ञा)

आणि **अम**, **कफ** ह्या रेषा **अब**, **कड** ह्या समान रेषांशीं अनुक्रमें समान आहेत, (व्या. ३०)

म्हणून **अम**, **कफ** ह्या परस्पर समान आहेत; (प्र.प्र. १उप.१)

आणि **अ**, **क** हे कोन समान आहेत; (व्या. ३० प्र. प्र. ११)

म्हणून **अबम**, **कडफ** हे त्रिकोण समान आहेत. (१.४भाग ३)

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **बनम**, **डइफ** हे त्रिकोण ही समान आहेत;

म्हणून **अन**, **कई** हीं चौरसें समान आहेत. (प्र. प्र. २)

ह्याकरितां समान रेषांवरील इत्यादिक.

(एक चौरस दुसऱ्याशीं सर्वांशीं मिळतो असें दाखविल्यानेंही हा सिद्धांत सिद्ध होतो.)

उपसि. १—असमान रेषांवरील चौरसांपैकीं मोठीवरील चौरस मोठें असतें.

(मोठ्या रेषेच्या एका टोंकापासून तिचा लहान रेषेएवढा तुकडा पाडून त्यावर १.४६ प्रमाणें चौरस काढावें; तें मोठ्या रेषेच्या ज्या अंगास तीवरील चौरस काढिलें असेल, त्याच अंगास काढावें; हें नवीन चौरस मोठीवरील चौरसाच्या आंतच पडलें पाहिजे, असें सिद्ध करावें. म्हणजे इ सिद्धांत, प्र. प्र. ९, प्र. प्र. **अ** उप. ह्यांवरून इष्टसिद्धि होते.)

उपसि. २—समान चौरसांपैकीं एकाची प्रत्येक बाजू दुसऱ्याच्या प्रत्येक बाजूबराबर असते.

उपसि. ३—असमान चौरसांपैकीं मोठ्याची प्रत्येक बाजू धाकट्याच्या प्रत्येक बाजूपेक्षां मोठी असते.

(२ व ३ हे उपसिद्धांत, ई सिद्धांत व उप. १ ह्यांच्या आधारानें क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध करावे.)

प्रश्न.

१. समान चौरसांचे कर्ण समान असतात.

२. असमान चौरसांपैकीं मोठ्याचा कर्ण मोठा असतो.

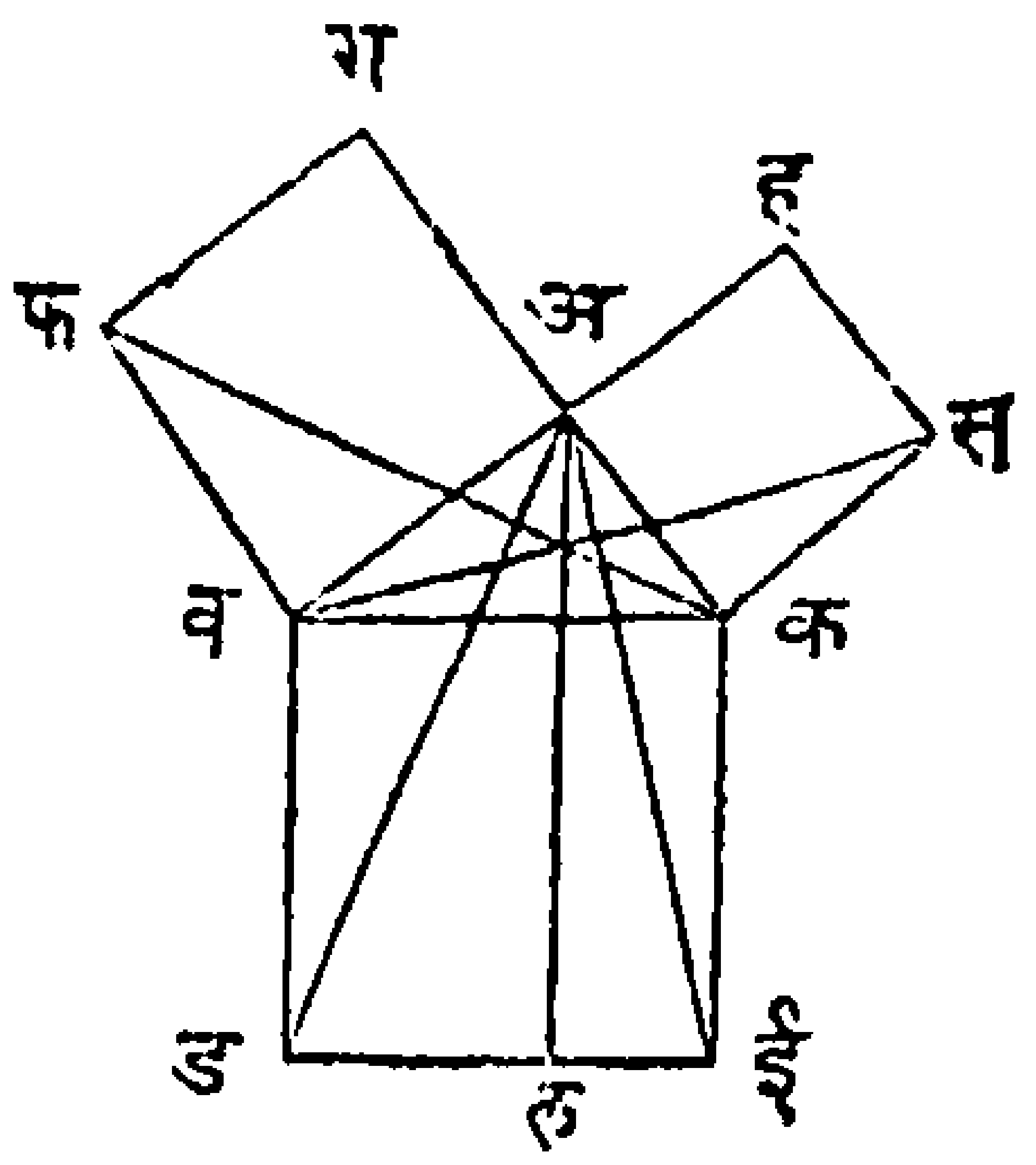
३. ज्यांचे कर्ण समान असतात तीं चौरसें समान असतात.

४. ज्या चौरसांचे कर्ण असमान असतात, त्यांपैकीं ज्याचा कर्ण मोठा असतो, तें चौरस मोठें असतें.

सिद्धांत ४७. प्रमेय.

काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णावरील चौरस इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर असतो.

अबक हा एक काटकोनत्रिकोण आहे, आणि त्याचा **बअक** कोन काटकोन आहे; तर **बक** कर्णावरील चौरस हा, **बअ** आणि **अक** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर होईल.



बकवर **बडईक** चौरस काढ, आणि **बअ**, **अक** ह्यांवर अनुक्रमें **गब**, **हक** चौरस काढ; (१.४६) **अ** बिंदूंतून **बड**शीं किंवा **कई**शीं **अल** रेघ समांतर काढ; (१.३१)

आणि **अड**, **फक** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **डबक**, **फबअ** हे काटकोन आहेत, (व्याख्या ३०)

म्हणून ते समान आहेत. (प्र. प्र. ११)

ह्या प्रत्येकांत **अबक** कोन मिळविला,

तेव्हां सगळा **डबअ** कोन सगळ्या **फबक** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. २)

अबड आणि **फबक** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **अब**, **बड** ह्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या **फब**, **बक** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत; (व्याख्या ३०)

आणि पहिल्याच्या त्या दोन बाजूंमधील कोन दुसऱ्याच्या त्या दोन बाजूंमधील कोनाबरोबर आहे, असें सिद्ध केलें आहे;

ह्मणून **अबड** त्रिकोण **फबक** त्रिकोणाबरोबर आहे. (१.४ भाग ३)

बअक, **बअग** हे दोन्ही कोन काटकोन आहेत, (प्रतिज्ञा व व्याख्या ३०)

म्हणून ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे.

म्हणून **कअ**, **गअ** ह्या रेघा **कग** ह्या एकाच सरलरेषेंत आहेत. (१.१४)

आतां **गब** समांतरभुजचौकोन व **फबक** त्रिकोण हे **फब** ह्या एकाच पायावर आणि **फब**, **गक** ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत;

म्हणून **गब** चौरस **फबक** त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर आहे. (१.४१)

बल समांतरभुजचौकोन व **अबड** त्रिकोण हे **बड** ह्या एकाच पायावर आणि **बड**, **अल** ह्या समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत आहेत;

म्हणून **बल** चौकोन **अबड** त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर आहे. (१.४१)

परंतु **अबड** त्रिकोण **फबक** त्रिकोणाबराबर आहे, असें वर सिद्ध केलें आहे;

म्हणून **बल** चौकोन **गब** चौरसाबराबर आहे. (प्र. प्र. ६)

ह्याप्रमाणेंच **अई**, **बस** सांधिल्यानें **कल** चौकोन **कह** चौरसाबराबर आहे, असें दाखवितां येईल; ह्मणून सगळा **बई** चौरस हा, **गब**, **कह** चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. २)

म्हणून **बक** कर्णावरील चौरस हा, **अब**, **अक** ह्या बाजूंवरील चौरसाच्या बेरजेबराबर आहे.

ह्याकरितां काटकोनत्रिकोणाच्या इत्यादिक.

उपसिद्धांत १–काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णावरील चौरस आणि इतर दोन बाजूंपैकीं एकीवरील चौरस ह्यांची वजाबाकी ही, त्याच्या राहिलेल्या बाजूवरील चौरसाबराबर असते.

(हें वरील सिद्धांत व प्र. प्र. ३ ह्यांवरून उघड आहे.)

उपसिद्धांत २–काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णाखेरीज दोन बाजू समान असल्यास, कर्णावरील चौरस हें, इतर बाजूंपैकीं प्रत्येकीवरील चौरसाच्या दुपटीबराबर असतें.

(हें १. ई, १. ४७ व प्र. प्र. १ ह्यांवरून सहज सिद्ध होतें.)

प्रश्न.

१. (१.४७) च्या आकृतींत **कल** समांतरभुजचौकोन **कह** चौरसाबराबर आहे, असें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवा.

२. (१.४७) च्या सिद्धतेकरितां जी रचना केली आहे, तिचें सामान्यस्वरूप सांगा.

३. (१.४७) च्या आकृतीमध्यें काटकोनत्रिकोणाच्या तीनही बाजूंवरील चौरसें त्रिकोणाच्या बाहेर काढून सिद्धता करून दाखविली आहे; तसें न करितां (१) तीनही चौरसें त्रिकोणावरच काढून सिद्धता करून दाखवा; (२) कर्णावरील चौरस त्रिकोणाच्या बाहेर आणि बाजूंवरील चौरसें त्रिकोणावर काढून सिद्धता करून दाखवा; तसेंच (३) कर्णावरील चौरस त्रिकोणावर आणि बाजूंवरील चौरसें त्रिकोणाच्या बाहेर काढून सिद्धता करून दाखवा.

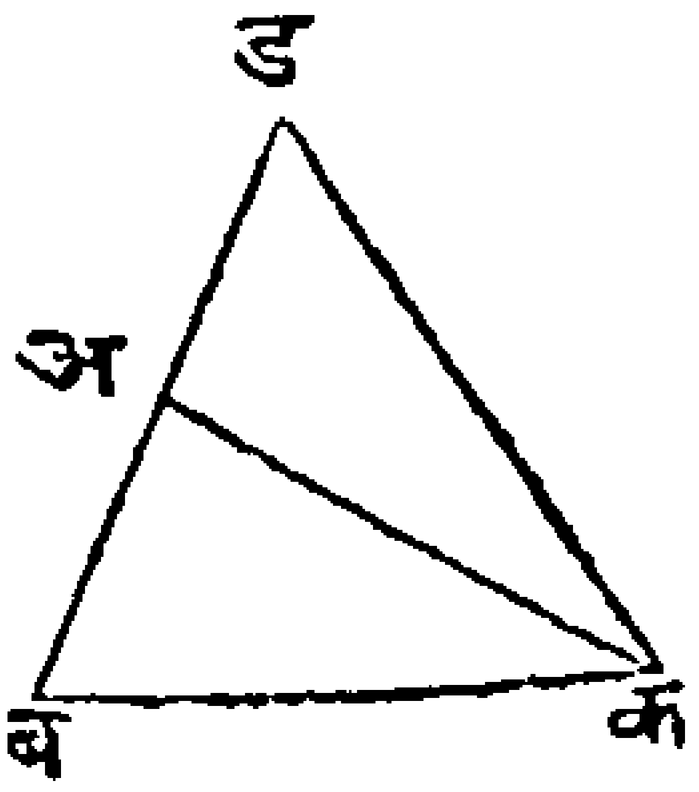
४. काटकोनत्रिकोणाच्या दोन बाजूंवरील चौरसांचे कसे भाग पाडिले असतां, त्यांच्या योगानें कर्णावरील चौरस नेमका व्यापिला जातो असें दाखवितां येईल ?

५ "दोन काटकोनत्रिकोणांपैकीं एकाचा कर्ण व एक बाजू हीं दुसऱ्याचा कर्ण व एक बाजू ह्यांशीं अनुक्रमें समान असल्यास, ते त्रिकोण एकरूप होतात" हा (अ सिद्धांतानें सिद्ध होणारा) सिद्धांत, १. ३, १.४७ उप. १, १.८, १.४, व कांहीं प्रत्यक्षप्रमाणें ह्यांच्या योजनेनेंही सिद्ध होतो, असें दाखवा.

सिद्धांत ४८. प्रमेय.

जर कोणत्याही त्रिकोणाच्या एका बाजूवरील चौरस दुसऱ्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर आहे, तर त्या दोन बाजूंच्या मधील कोन काटकोन असतो.

अबक त्रिकोणाच्या **बक** बाजूवरील चौरस हा, दुसऱ्या **बअ, अक** बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर आहे, तर **बअक** कोन काटकोन होईल.



अ बिंदूतून **अक** रेघेवर **अड** लंब काढ; (१. ११)

अड रेघ **अब** रेघेबरोबर कर; (१. ३

आणि डक सांध[illegible] (पृ. क. १)
आतां अड, अब ह्या बाजू समान आहेत, (रचना)
म्हणून ह्यांवरील चौरसही समान आहेत; (१. ई)
ह्या समान चौरसांमध्यें अकवरील चौरस [illegible] मिळविलें;
तेव्हां अड, अक ह्यांवरील चौरसांची बेरीज अब, अक ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर झाली. (प्र. प्र. २)
परंतु डअक कोन काटकोन आहे; (रचना)
म्हणून अड, अक ह्यांवरील चौरसांची बेरीज डकवरील चौरसाबरोबर आहे; (१.४७)
आणि अब, अक ह्यांवरील चौरसांची बेरीज बकवरील चौरसाबराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून डकवरील चौरस बकवरील चौरसाबराबर आहे; (प्र. प्र. १ उप. १)
म्हणून डक बाजू बक बाजू बराबर आहे. (१. ई उप. २.)
आतां डअक आणि बअक ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या डअ, अक ह्या बाजू दुसऱ्याच्या बअ, अक ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत,
आणि पहिल्याचा डक पाया दुसऱ्याच्या बक पायाबरोबर आहे;
म्हणून डअक कोन बअक कोनाबराबर आहे. (१.८)
परंतु डअक कोन काटकोन आहे, (रचना)
म्हणून बअक कोनही काटकोन आहे. (प्र. प्र. ११ उप.)

ह्याकरितां जर कोणत्याही त्रिकोणाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१.४८ व १.४७) ह्यांचा परस्परांशीं कोणता संबंध आहे?

२. (१.४८) च्या सिद्धतेकरितां जी रचना करावी लागते, तिचें सामान्य स्वरूप सांगा.

३. (१.४८) हा सिद्धांत (१.२४) च्या आधारानें क्रमविरुद्धरीतीनें सिद्ध करून दाखवा.

पहिल्या पुस्तकाच्या सातव्या खंडावर

(म्हणजे १.४६, १.४७ व १.४८ ह्यांवर)

प्रश्न.

१. विशालकोणत्रिकोणांत विशालकोणासमोरच्या बाजूवरील चौरस हा, इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां मोठा असतो.

२. त्रिकोणाच्या लघुकोनासमोरच्या बाजूवरचा चौरस हा, इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां लहान असतो.

३. त्रिकोणाच्या एका बाजूवरील चौरस इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां मोठा असल्यास, त्या बाजूसमोरचा कोन विशालकोण असतो.

४. त्रिकोणाच्या एका बाजूवरील चौरस इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां लहान असल्यास, त्या बाजूसमोरचा कोन लघुकोण असतो.

५. चौरसाच्या दोन्ही कर्णांवरील चौरसांची बेरीज त्याच्या प्रत्येक बाजूवरील चौरसाच्या चौपटीबरोबर असते.

६. अशी एक रेषा काढा कीं, तीवरील चौरस दिलेल्या दोन रेषांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर होईल.

७. अशी एक रेषा काढा कीं, तीवरील चौरस दिलेल्या (अनेक) रेषांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर होईल.

८. अशी एक रेषा काढा कीं, तीवरील चौरस दिलेल्या रेषेवरील चौरसाच्या दुपटीबरोबर होईल.

९. अशी एक रेषा काढा कीं, तीवरील चौरस दिलेल्या रेषेवरील चौरसाच्या अमुक (पूर्ण) पटीबरोबर होईल.

१०. अशी एक रेषा काढा कीं, तीवरील चौरस दिलेल्या दोन असमान रेषांवरील चौरसांच्या वजाबाकीबरोबर होईल.

११. अ रेषा ब रेषेच्या दुपटीबरोबर (अथवा तिपटीबरोबर) असेल, तर अवरील चौरसामध्यें बवरील चौरसाएवढालीं चौरसें नेमकीं चार (अथवा ९) पडतील, असें (प्रत्यक्ष रचनेच्या योगानें) प्रत्ययास आणून दाखवा.

१२. "अ रेषा ब रेषेच्या अमुक पटीबरोबर आहे, तर अवरील चौरस बवरील चौरसाच्या किती पटीबरोबर असेल"? ह्या प्रश्नाचें उत्तर काढण्याची सामान्यरीति सांगा.

१३. कोणत्याही रेषेवरील चौरस, तिच्या अर्धावरील चौरसाच्या चौपटीबरोबर असतें; तिच्या तृतीयांशावरील चौरसाच्या ९ पटीबरोबर असतें; तिच्या चतुर्थांशावरील चौरसाच्या १६ पटीबरोबर असतें, इत्यादिक.

१४. एक रेषा अ फूट लांबीची आहे, तर तीवरील चौरसांत चौरसफूट किती तयार करितां येतील?

१५. अ रेषेवरील चौरस ब रेषेवरील चौरसाच्या चौपटीबरोबर अथवा ९ पटीबरोबर किंवा १६ पटीबरोबर असलें, तर अ रेषा ब रेषेच्या अनुक्रमें दुपटीबरोबर अथवा तिपटीबरोबर किंवा चौपटीबरोबर असेल.

१६. "एका रेषेवरील चौरसामध्यें एक फूट लांबीच्या रेषेवरील चौरसाएवढालीं चौरसें तयार केलीं असतां, तसलीं अ चौरसें होतात, तर ती रेषा किती फूट लांबीची असेल?" ह्या प्रश्नाचें उत्तर काढण्याची सामान्यरीति सांगा.

१७. एका काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णाखेरीज बाजू अ रेषेच्या अनुक्रमें तिपटीबरोबर व चौपटीबरोबर आहेत, तर त्याचा कर्ण अच्या किती पटीबरोबर असेल?

१८. एका काटकोनत्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू हीं अनुक्रमें १३ व ५ फूट लांबीचीं आहेत, तर त्याची दुसरी बाजू किती फूट लांबीची असेल?

१९. "काटकोनत्रिकोणाच्या तीन बाजूंपैकीं कोणत्याही दोहोंच्या लांब्या एकाच रेषापरिमाणाच्या योगानें सांगितल्या असतां, तिसरीची लांबी काढावयाची." ह्या कृत्यामध्यें जीं दोन कृत्यें आहेत, तीं निरनिराळीं सांगून त्यांच्या सामान्यरीति सांगा.

२०. चौरसाची बाजू व त्याचा कर्ण हीं दोन्ही कोणत्याही एकाच रेषापरिमाणानें नेमकीं मोजितां येतील काय? कारण काय? "चौ-

रसाची बाजू व त्याचा कर्ण हीं अन्योन्यापरिच्छेद्य परिमेयें आहेत" ह्या वाक्याचा अर्थ काय ?

२१. प्रत्येक काटकोनत्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकाच रेषापरिमाणानें नेमक्या मोजून दाखवितां येतील काय ? ज्यांच्या तिन्ही बाजू कोणत्यातरी एकाच रेषापरिमाणानें नेमक्या मोजितां येतील, असे पांच काटकोनत्रिकोण काढा, व ज्यांच्या सर्व बाजू कोणत्याही एकाच रेषापरिमाणानें नेमक्या मोजितां येणार नाहींत, असे पांच काटकोनत्रिकोण काढा.

पुढील प्रश्नांचीं उत्तरें सुमाराचीं सांगा.

(१). काटकोनत्रिकोण समद्विभुज असल्यास त्याचा कर्ण इतर प्रत्येक बाजूच्या किती पटीबरोबर असतो ?

(२) ज्या काटकोनत्रिकोणाचा एक कोन ३० अंशांचा आहे, त्याची त्या कोनासमोरची बाजू व दुसरी (म्हणजे ६० अंशांच्या) कोनासमोरची बाजू ह्या, कर्णाच्या कितव्या कितव्या हिश्शाबरोबर असतात ?

(३) समभुजत्रिकोणाच्या कोणत्याही कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूवर काढिलेला लंब त्याच्या प्रत्येक बाजूच्या कितव्या हिश्शाबराबर असतो ?

(४) ज्या समभुज चौकोनाचा एक कोन १२० अंशांचा आहे, त्याचा त्या कोनासमोरचा कर्ण (व त्याच कोनांतून जाणारा कर्ण) त्याच्या प्रत्येक बाजूच्या किती पटीबराबर असतो ?

२२. ज्या त्रिकोणाच्या तीन बाजू (१) ९,१२,१५ अथवा १०, १२, १५ किंवा ५,१२,१५ फूट लांबीच्या आहेत, त्याच्या प्रत्येक कोनाची जाति (म्हणजे तो काटकोन, लघुकोन किंवा विशालकोन आहे हें) सांगा.

२३. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायावर टाकिलेल्या लंबानें जर पायाचे दोन भाग झाले, तर त्यांपैकीं एक भाग व त्याच्या जवळची त्रिकोणाची बाजू ह्यांवरील चौरसांची वजाबाकी ही, दुसरा भाग व त्याच्या जवळची बाजू ह्यांवरील चौरसांच्या वजाबाकीबरोबर असते.

२४. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायावर टाकिलेल्या लंबानें जर पायाचे असमान भाग झाले, तर त्या भागांवरील चौरसांची वजाबाकी इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या वजाबाकीबरोबर असते.

२५. (१.४७) च्या आकृतींत (१) **फग**, **सह** ह्या रेषा अनुक्रमें **ग**, **ह** बिंदूंकडे वाढविल्या असतां मिळतात; (२) त्यांचा मेलनबिंदु **क्ष** व **अ** बिंदु ह्यांस साधणारी **अक्ष** रेषा **बक** कर्णाबरोबर होते; आणि (३) ती रेषा **बक**ला मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां **बक**वर लंब होते.

२६. (१.४७) च्या आकृतींत **डब**, **ईक** ह्या रेषा अनुक्रमें **फग**, **सह** ह्या रेषांस अनुक्रमें **न**, **म** बिंदूंत मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या, आणि **नम** सांधिली; तर **बकमन** हें **बक** कर्णावरील चौरस होईल.

२७. मागच्या दोन प्रश्नांत सांगितलेली सर्व रचना केल्यानें **अबनक्ष**, **अकमक्ष** हे जे चौकोन तयार होतात, (१) ते समांतरभुजचौकोन असतात; (२) ते अनुक्रमें **बग**, **कह** चौरसांबरावर असतात; व (३) अनुक्रमें **बल**, **कल** चौकोनाबरोबर असतात.

२८. मागील प्रश्नाच्या आधारानें १.४७ ची सिद्धता करून दाखवा.

२९. **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजूंवर (त्रिकोणाच्या बाहेर) अनुक्रमें **अबफग**, **अकसह** हे समांतरभुजचौकोन काढिले; **फग**, **सह** बाजू **क्ष** बिंदूंत मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या; **अक्ष** सांधिली; आणि **बक** बाजूवर **डबकई** हा असा एक समांतरभुजचौकोन काढिला कीं, त्याच्या **बड**, **कई** ह्या बाजू **अक्ष**शीं समान व समांतर होतील. तर **बक**वरील चौकोन हा, **अब**, **अक** ह्यांवरील चौकोनांच्या बेरजेबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

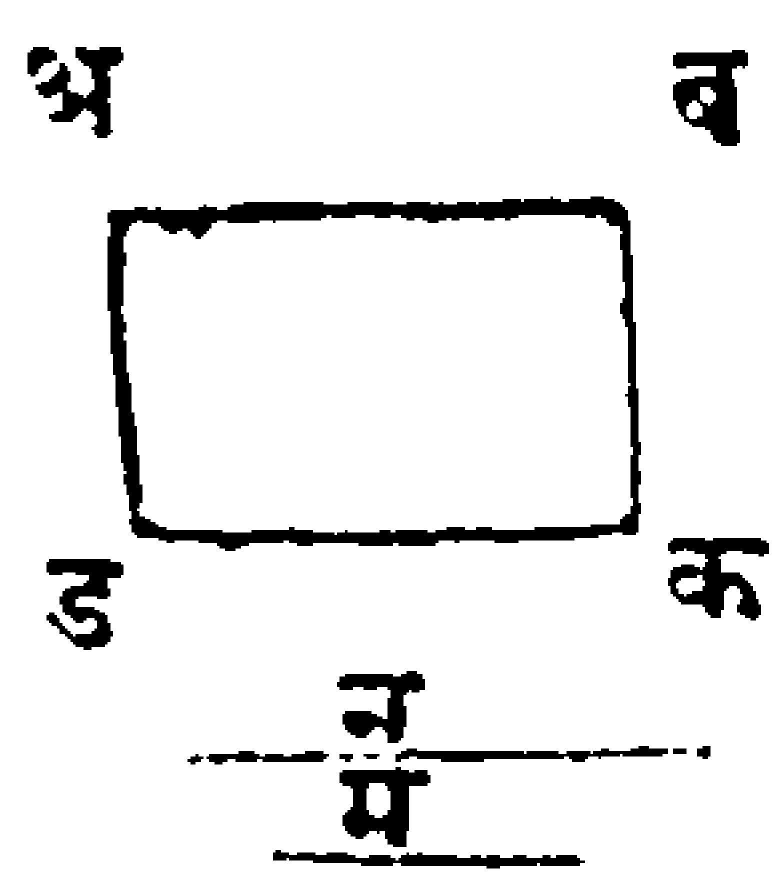
३०. (१.४७) हा मागील प्रश्नाचा विशेष प्रकार आहे, असें दाखवा.

३१. काटकोनत्रिकोणाच्या काटकोनबिंदूपासून कर्णावर टाकिलेल्या लंबानें कर्णाचे जे दोन भाग होतात, त्यांवरील चौरसें व लंबावरील चौरसांची दुप्पट ह्यांची बेरीज, कर्णावरील चौरसाबराबर असते.

दुसरें पुस्तक.

व्याख्या.

१. ज्या काटकोनचौकोनाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू दिलेल्या दोन रेषा असतील अथवा त्यांच्या बरोबरीच्या रेषा असतील, तो काटकोनचौकोन " दिलेल्या दोन रेषांनीं झालेला आहे " असें म्हणतात.



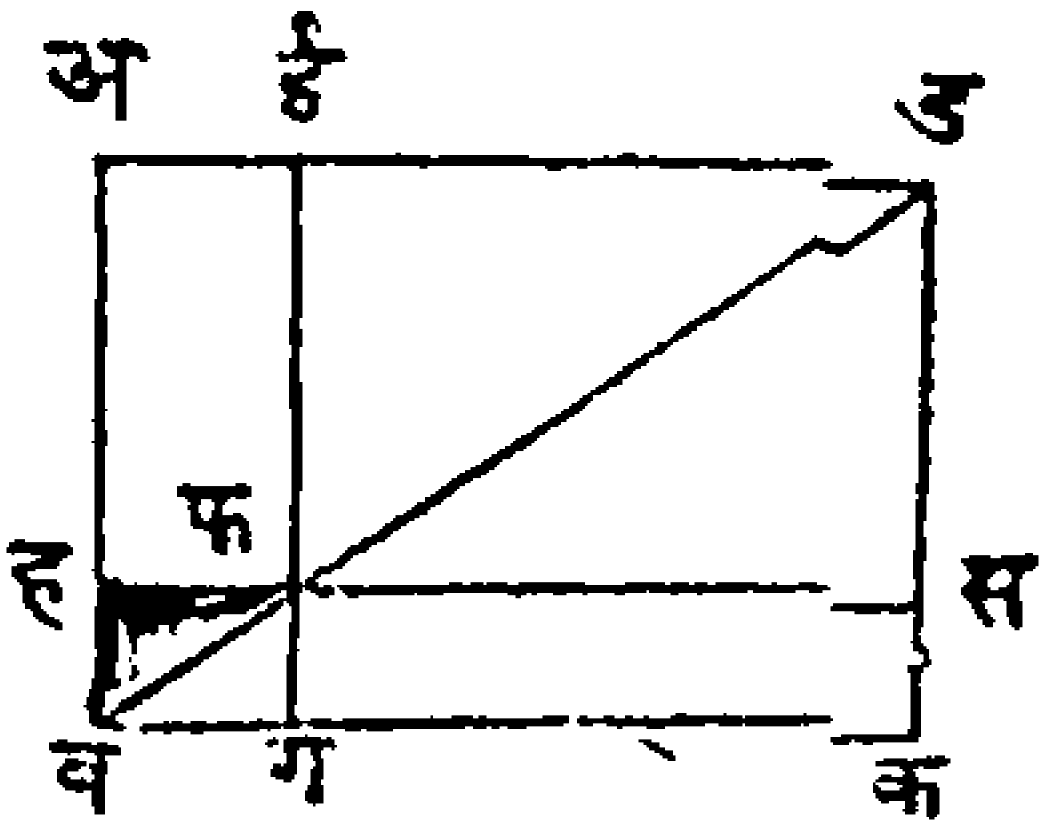
जसें, **अब**, **बक** ह्या दिलेल्या दोन रेषा **अक** काटकोनचौकोनाच्या जवळजवळच्या बाजू आहेत; म्हणून तो " **अब**, **बक** ह्या रेषांनीं झालेला काटकोनचौकोन " होय. जर **न**, **म** ह्या दिलेल्या दोन रेषा आहेत, आणि जर **अक** काटकोनचौकोनाच्या **अब**, **बक** ह्या जवळजवळच्या दोन बाजू अनुक्रमें **न**, **म** ह्या रेषांशीं समान आहेत; तर " **अक** काटकोनचौकोन **न**, **म** ह्या रेषांनीं झालेला आहे " असेंही म्हणतात. तसेंच जर **अब** आणि **म** ह्या दिलेल्या दोन रेषा आहेत, आणि जर **बक** ही **म** बरोबर आहे; तर " **अक** काटकोनचौकोन **अब** आणि **म** ह्या रेषांनीं झालेला आहे " असेंही म्हणतात.

" **अब** आणि **अक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन " ह्यांचे ठिकाणीं " **अब**, **अक** ह्यांचा काटकोनचौकोन " अथवा " **अब**, **अक** काटकोनचौकोन " असे शब्दही कोठें कोठें योजिले आहेत.

(**अ**) दिलेली रेषा अथवा तिच्या बरोबरीची रेषा ज्या चौरसाची एक बाजू असेल, त्याला दिलेल्या रेषेवरील चौरस म्हणतात.

" **अब** रेषेवरील चौरस " ह्यांचे ठिकाणीं " **अब** रेषेचा चौरस " किंवा " **अब**चा चौरस " हे शब्दही कोठें कोठें योजिले आहेत.

२. समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णाभोंवतालच्या दोन समांतरभुज चौकोनांपैकीं एक व दोन्ही पूरकसमांतरभुज चौकोन, हे तीन मिळून जी आकृति होते, तिला गोमुखी म्हणतात.



जसें, गह हा कर्णाभोंवतालचा समांतरभुजचौकोन व अफ, कफ हे पूरक, असे तीन चौकोन मिळून गोमुखी होय. ही गोमुखी अगस अथवा ईहक किंवा सगअ अथवा कहई अशी वाचितात.

ह्याच आकृतींत हईक ही दुसरी एक गोमुखी झाली आहे.

व्याख्यांविषयीं प्रश्न.

१. काटकोनचौकोनाच्या कोणत्या बाजू समान असतात व कोणत्या असमान असतात ?

२. पहिल्या व्याख्येंत कोणत्या परिभाषिकपदाचा अर्थ सांगितला आहे ? काटकोनचौकोन वस्तुतः किती रेषांनीं झालेला असतो ? "दोन रेषांनीं झालेला काटकोनचौकोन" ह्या पदाची व्याख्या करून ठेविली नसती, तर त्याचा कांहीं अर्थ करितां आला असता काय ? ज्या चौकोनाला "दिलेल्या दोन रेषांचा काटकोनचौकोन" म्हणावयाचें, त्याच्या जवळजवळच्या दोन बाजू प्रत्यक्ष त्या दिलेल्या रेषाच असल्या पाहिजेत काय ?

३. "रेषेवरील चौरस" ह्या पदाचा अ व्याख्येंत सांगितलेला अर्थ व त्याचा पहिल्या पुस्तकांत मानलेला अर्थ ह्यांच्यामध्यें भेद कोणता ? ह्या दोन अर्थांपैकीं व्यापक अर्थ कोणता ?

४. समांतरभुज चौकोनांतल्या कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या बाजूंशीं समांतर रेषा काढिल्या असतां दुसऱ्या व्याख्येंत सांगितल्या प्रकारची गोमुखी तयार होईल काय ?

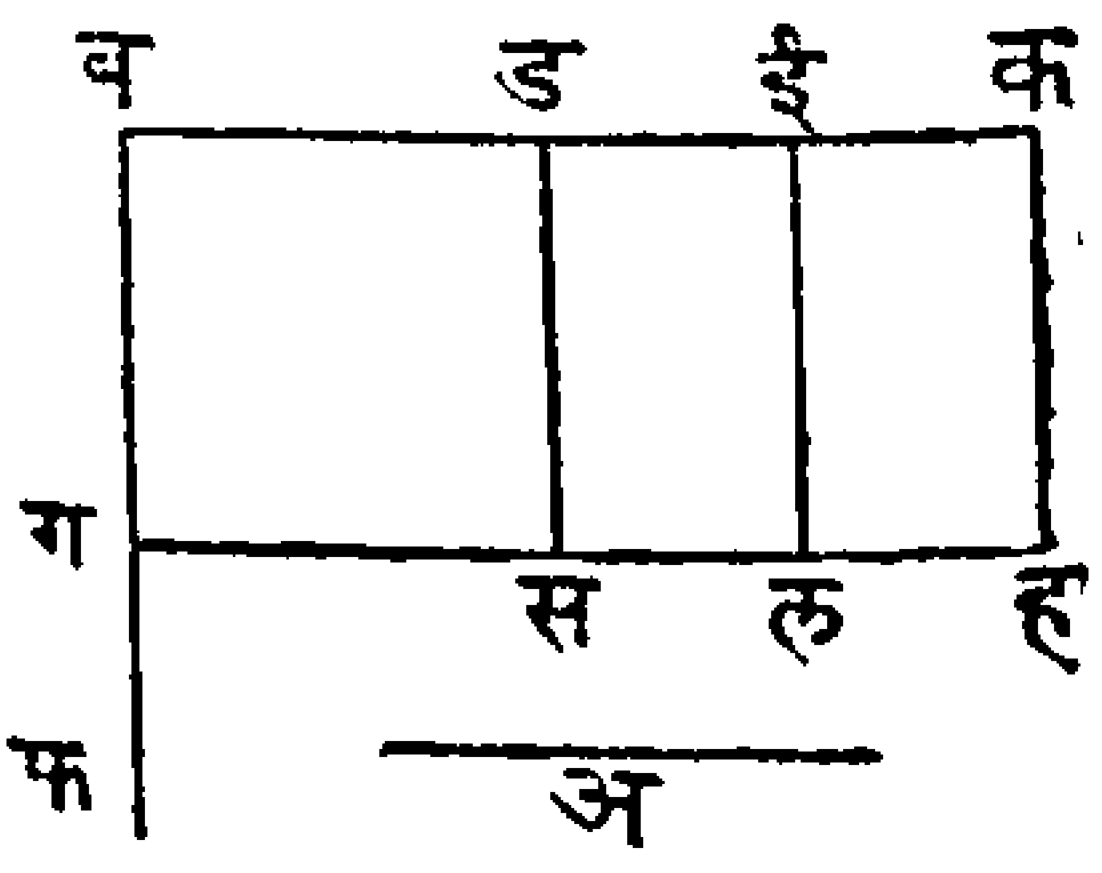
५. "समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णाभोंवतालचे दोन समांतरभुज चौकोन व दोन पूरक समांतरभुज चौकोन ह्यांपैकीं तीन चौकोनांच्या बेरजेला गोमुखी म्हणावें" हें वाक्य व दुसरी व्याख्या ह्यांच्यामध्यें भेद कोणता ?

६. गोमुखी वाचण्याची सामान्यरीति सांगा.

सिद्धांत १. प्रमेय.

जर दोन रेघांपैकीं एकीचे अनेक भाग केले, तर त्या दोन रेघांनीं झालेला काटकोनचौकोन हा, न विभागिलेली रेघ आणि विभागिलेल्या रेघेचा प्रत्येक भाग ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनांच्या बेरजेबरोबर होतो.

अ आणि **बक** ह्या दोन रेघा आहेत, आणि **बक**चे **ड**, **ई** ह्या बिंदूंत तीन भाग केले आहेत; तर **अ** आणि **बक** ह्या रेघांनीं झालेला काटकोनचौकोन हा, **अ** आणि **बड**, **अ** आणि **डई**, व **अ** आणि **ईक** ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनांच्या बेरजेबरोबर होईल.



ब पासून **बक** वर **बफ** लंब काढ; (१.११)
आणि **बग**, **अ** बरोबर कर. (१.३)
ग पासून **गह**, **बक**शीं समांतर काढ; आणि **बग**शीं **ड**, **ई**, **क** ह्यांपासून **डस**, **ईल**, **कह**, समांतर काढ. (१.३१)

आतां **बह** हा चौकोन **बस**, **डल**, **ईह** ह्या तीन चौकोनांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. ३.)

परंतु **बह** हा, **गब** आणि **बक** ह्या रेघांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे,
आणि **गब**, रेघ **अ** बराबर आहे; (रचना)
म्हणून तो **अ** आणि **बक** ह्यांनीं झालेला आहे; (२. व्याख्या १)
बस हा, **गब** आणि **बड** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे,
आणि **गब**, **अ** बराबर आहे, (रचना)
म्हणून तो **अ** आणि **बड** ह्यांनीं झालेला आहे; (२. व्याख्या १)
डल हा, **डस** व **डई** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे,
परंतु **डस**, **अ**बराबर आहे, (१.३४, रचना व प्र. प्र. १)
म्हणून तो **अ** आणि **डई** ह्यांनीं झालेला आहे; (२. व्याख्या १)
आणि असेंच **ईह** हा **अ** आणि **ईक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे, हें सिद्ध करितां येईल.

म्हणून **अ** आणि **बक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन हा, अ आणि **बड**, **अ** आणि **डई**, व **अ** आणि **ईक** ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनांच्या बेरजेबरोबर आहे.

ह्याकरितां, जर दोन रेषांपैकीं इत्यादि.

प्रश्न.

१. दिलेल्या दोन समर्याद रेषांचा काटकोनचौकोन तयार करण्याची सामान्यरीति सांगा.

२. दोन रेषा दुसऱ्या दोन रेषांशीं अनुक्रमें समान असतील, तर पहिल्या दोन रेषांचा काटकोनचौकोन दुसऱ्या दोन रेषांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर असतो.

३. "दोन रेषांपैकीं प्रत्येकीचे कितीही व कसेही भाग केले, तर त्या दोन रेषांचा काटकोनचौकोन हा, एकीचा प्रत्येक भाग व दुसरीचा प्रत्येक भाग ह्यांच्या काटकोनचौकोनांच्या बेरजेबरोबर असतो." हें प्रमेय २. १ ह्याच्या आधारानें सिद्ध करून दाखवा.

४. (२.१) ह्यांत दिलेल्या दोन रेषांपैकीं एकीचे जे भाग केले आहेत, ते सारे दुसरी एवढाले असले, तर त्याच्या प्रतिज्ञेला कसें स्वरूप येईल.

५. तिसऱ्या प्रश्नांतल्या प्रमेयामध्यें दिलेल्या दोन रेषांपैकीं प्रत्येकीचे जे भाग कल्पावयाचे, ते तिसऱ्या एका रेषेएवढाले कल्पिले, तर त्या प्रमेयाचें स्वरूप कसें होईल ?

६. (२.१) ह्यांत दिलेल्या दोन्ही रेषा सारख्या असल्या व त्यांपैकीं एकीचे दोनच भाग कल्पिले असले, तर त्याची प्रतिज्ञा कशी म्हणावी लागेल ?

७. (२.१) ह्यांत दिलेल्या दोन रेषांपैकीं एकीचे दोनच भाग कल्पिले, आणि त्यांपैकीं एक भाग दुसऱ्या रेषेएवढा असला, तर त्याच्या प्रतिज्ञेचें स्वरूप कसें होईल ?

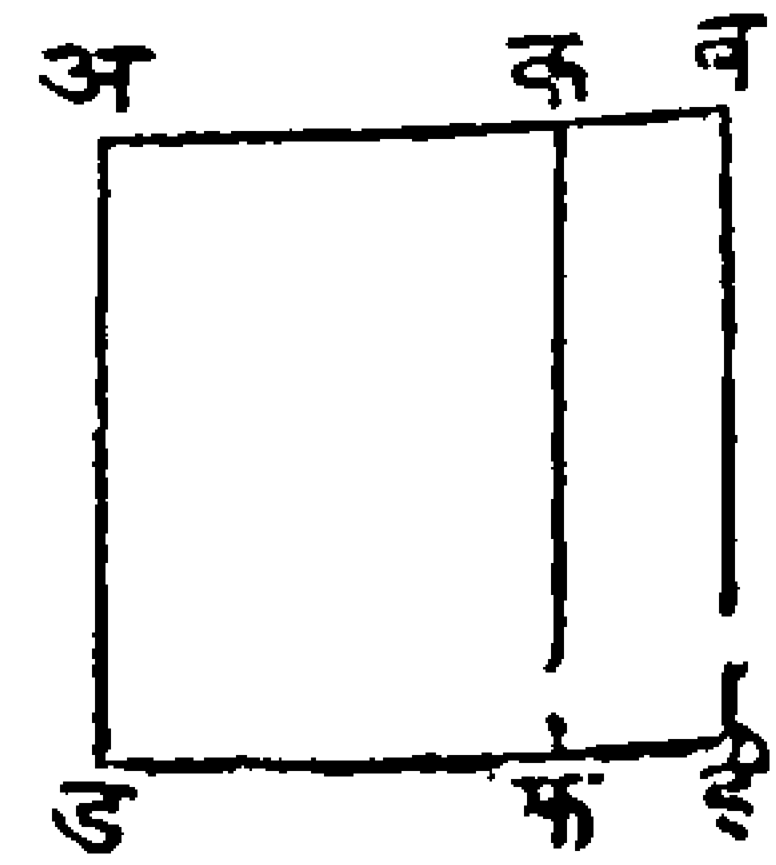
८. तिसऱ्या प्रश्नांतल्या प्रमेयामध्यें दिलेल्या दोन रेषांपैकीं प्रत्येकीचे दोन दोनच भाग कल्पिले आणि एकीचे दोन भाग दुसरीच्या दोन भागांशीं अनुक्रमें समान असले, तर त्या प्रमेयाचें स्वरूप कसें होईल ?

९. “ दिलेल्या अनेक रेषांची बेरीज व दिलेली दुसरी एक रेषा ह्यांचा काटकोनचौकोन हा, त्या अनेक रेषांपैकीं प्रत्येक व ती दुसरी रेषा ह्यांच्या वेगळ्या वेगळ्या काटकोनचौकोनांच्या बेरजेबरोबर असतो.” हें (२.१) ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

सिद्धांत २. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन भाग केले, तर सर्व रेघ आणि प्रत्येक भाग ह्यांनीं झालेले काटकोनचौकोन मिळून, सर्व रेघेवरील चौरसाबरावर होतात.

अबचे **क** बिंदूंत दोन भाग केले आहेत; तर **अब** आणि **बक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन, व **अब** आणि **अक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन मिळून, **अब**वरील चौरसाबरावर होतील.



अब वर **अबईड** चौरस काढ; (१. ४६) आणि **क**पासून **कफ** ही, **अड**शीं किंवा **बई**शीं समांतर काढ. (१.३१)

आतां **अई** हा चौकोन **अफ** आणि **कई** ह्या दोन चौकोनांच्या बेरजेबरावर आहे. (प्र. प्र. उ.)

परंतु **अई** हा **अब** वरील चौरस आहे;

अफ हा, **अड** आणि **अक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे,

परंतु **अड**, **अब**बरावर आहे; (१. व्याख्या ३०)

म्हणून **अफ** हा **अब** आणि **अक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे; (२. व्या. १)

आणि **कई** हा **बई** आणि **बक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे,

परंतु **बई**, **अब** बरावर आहे, (१. व्याख्या ३०)

म्हणून **कई** हा **अब** आणि **बक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे; (२. व्या. १)

म्हणून **अब**, **अक** काटकोनचौकोन आणि **अब**, **बक** काटकोनचौकोन मिळून, **अब**वरील चौरसाबरावर आहेत.

ह्याकरितां, जर एका रेघेचे इत्यादि.

प्रश्न.

१. (२.२) ह्याच्या सिद्धतेकरितां रचना कोणती करावी लागते?

२. (२.२) हा (२.१) ह्याचा विशेषप्रकार आहे, असें दाखवा.

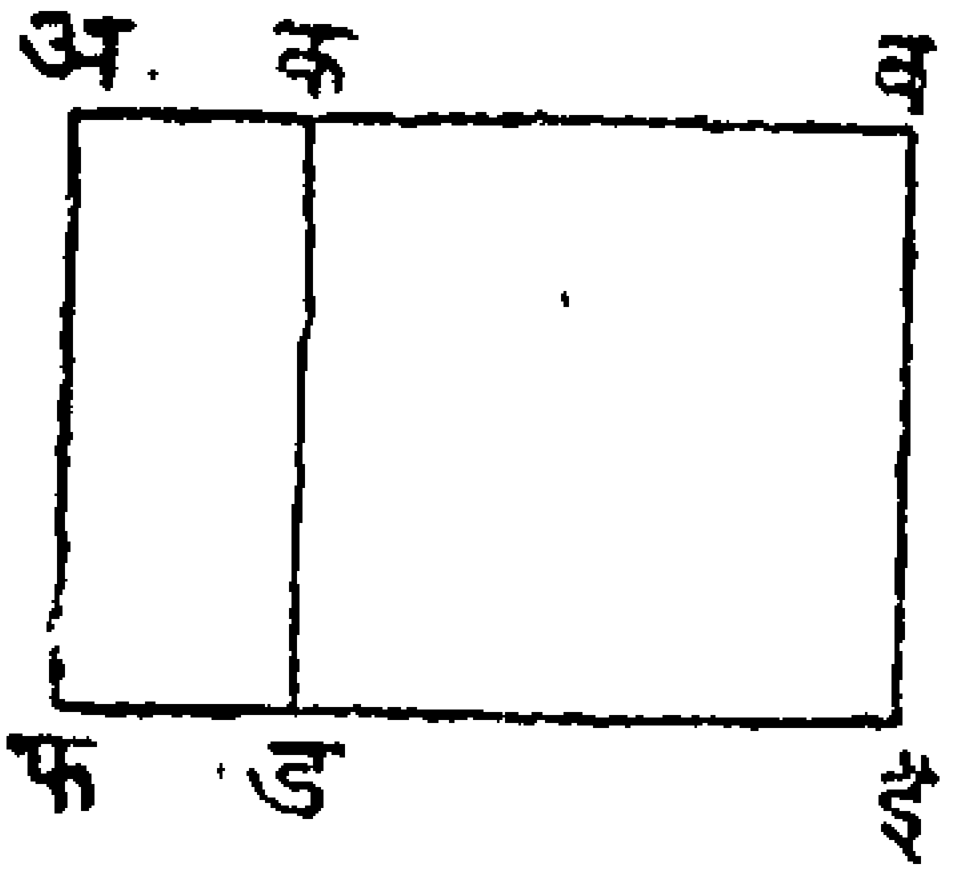
३. (२.२) ह्यांत दिलेल्या रेषेचे कितीही भाग केले, तर त्याची प्रतिज्ञा कशी म्हणावी लागेल?

४. (२.२) ह्यांत दिलेल्या रेषेचे दोन समान भाग केले, तर त्याची प्रतिज्ञा कशी म्हणावी लागेल?

५. "दोन रेषांच्या बेरजेवरील चौरस हें, ती बेरीज व प्रत्येक रेषा ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनांच्या बेरजेबरोबर असतें." हें (२.२) ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

सिद्धांत ३. प्रमेय.

एका रेघेचे दोन भाग केले, तर सगळी रेघ आणि एक भाग ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन हा, दोन भागांनीं झालेला काटकोनचौकोन व प्रथम घेतलेल्या भागावरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर होतो.



अब रेघेचे **क** बिंदूंत दोन भाग केले आहेत; तर **अब**, **बक** काटकोनचौकोन हा, **अक**, **कब** काटकोनचौकोन आणि **बक**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर होईल.

बक रेघेवर **कडईब** चौरस काढ; (१. ४६)
ईड रेघ **फ** बिंदूपर्यंत वाढीव, आणि **अ** बिंदूंतून **कड**शीं किंवा **बई**शीं **अफ** रेघ समांतर काढ. (१. ३१)

आतां **अई** चौकोन, **अड** आणि **कई** ह्या दोन चौकोनांच्या बेरजेबरावर आहे. (प्र. प्र. उ.)
परंतु **अई** हा **अब** आणि **बई** रेघांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे, आणि **बई**, **बक** बराबर आहे, (१. व्याख्या ३०)
म्हणून **अई** हा **अब** आणि **बक** ह्यांनीं झालेला आहे; (२. व्या. १)

तशीच **कड**, **कब** बरोबर आहे, (१. व्या. ३०)
म्हणून **अड** हा **अक**, **बक** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे; (२. व्या. १)
आणि **कई** हा **बक**वरील चौरस आहे. (रचना)
ह्मणून **अब**, **बक** काटकोनचौकोन हा, **अक**, **कब** काटकोनचौकोन आणि **बक**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे.

ह्याकरितां, जर एका रेषेचे दोन भाग इत्यादि.

प्रश्न.

१. (२.३) ह्यांच्या सिद्धतेकरितां रचना कोणती करावी लागते ?

२. (२.३) हा (२.१) ह्याचा विशेषप्रकार आहे, असें दाखवा.

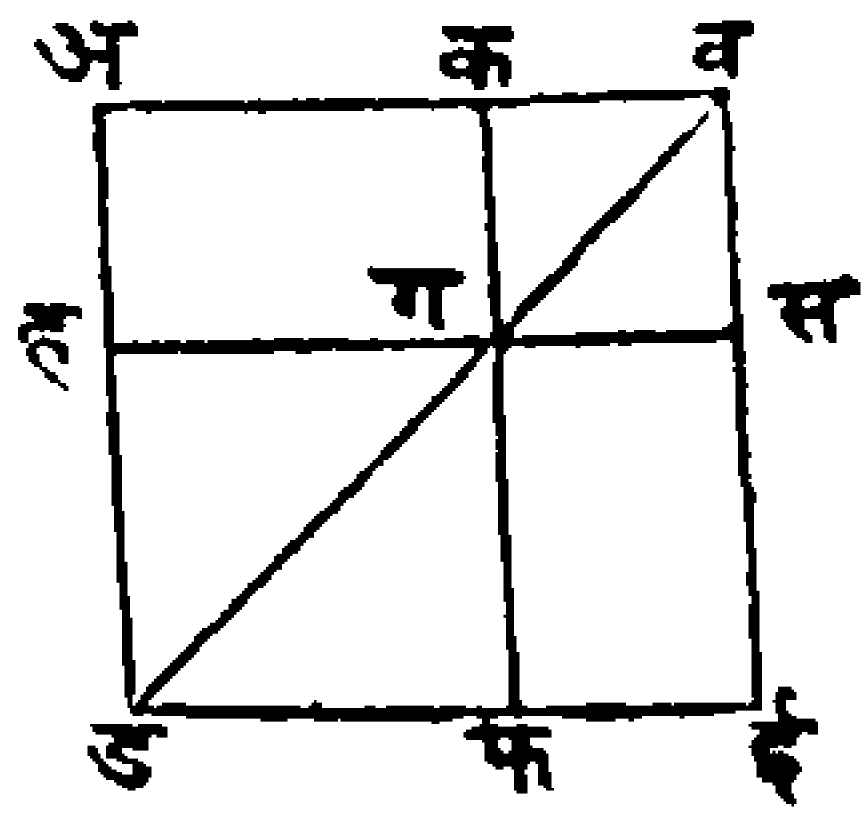
३. (२.३) ह्यांत दिलेल्या रेषेचे कितीही भाग केले, तर त्याच्या प्रतिज्ञेचें स्वरूप कसें होईल ?

४. (२.३) ह्यांत दिलेल्या रेषेचे दोन समान भाग केले, तर त्याच्या प्रतिज्ञेचें स्वरूप कसें होईल ?

५. "दोन रेषांपैकीं एक व त्यांची बेरीज ह्यांचा काटकोनचौकोन हा, त्या दोन रेषांचा काटकोनचौकोन व पूर्वोक्त रेषेवरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतो." हें (२.३) ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

सिद्धांत ४. प्रमेय.

जर एका रेषेचे दोन भाग केले, तर सर्व रेषेवरील चौरस हा, दोहों भागांवरील वेगवेगळे चौरस आणि त्या दोहों भागांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर होतो.



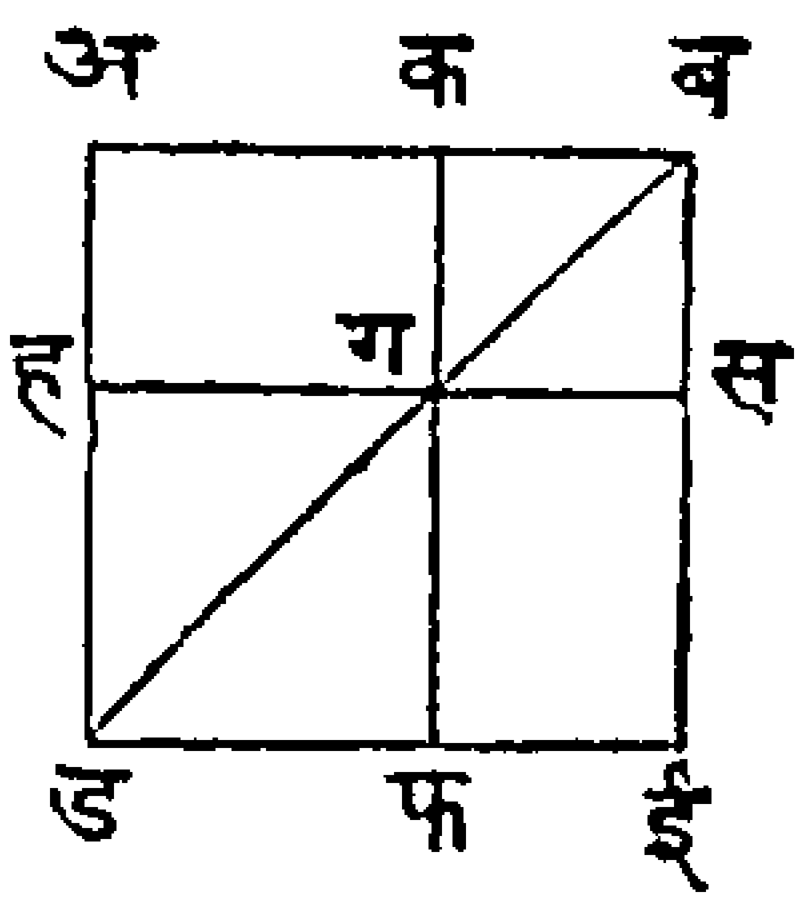
अब रेषेचे **क** बिंदूंत दोन भाग केले आहेत; तर **अब** रेषेवरील चौरस हा, **अक** आणि **बक** ह्या दोन भागांवरील चौरस व त्याच भागांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर होईल:

अब रेषेवर **अडईब** चौरस काढ; (१.४६).

बड सांध; (गृ. कृ. १)

आणि **क** बिंदूतून **कगफ**, **अड**शीं किंवा **बई**शीं समांतर काढ, आणि **ग** बिंदूतून **अब**शीं किंवा **डई**शीं **हस** समांतर काढ. (१.३१)

आतां **कफ**, **अड**शीं समांतर आहे, आणि **बड** त्यांस मिळते,
म्हणून **कगब** बाह्य कोन, **अडब** कोनाबराबर आहे; (१.२९)
परंतु **अब** बाजू **अड** बाजूबराबर आहे, (१. व्याख्या ३०)
म्हणून **अबड** कोन **अडब** कोनाबरोबर आहे, (१.५)
म्हणून **कगब** कोन **कबग** कोनाबराबर आहे; (प्र. प्र. १)
त्यास्तव **कग**, **कब** बराबर आहे. (१.६)



आतां **कस** हा समांतरभुज चौकोन आहे, (१. व्याख्या ३५)
त्याच्या **कग**, **कब** ह्या जवळजवळच्या बाजू समान आहेत असें सिद्ध झालें,
आणि त्याचा **ब** हा कोन काटकोन आहे; (१. व्याख्या ३०)
म्हणून **कस** हा चौरस आहे; (१.४६ उपसि. २)
आणि तो **कब**वरील चौरस आहे.

ह्याच प्रमाणें सिद्ध करितां येईल कीं, **हफ** हा **हग** वरील चौरस आहे, आणि **हग** ही **अक** बरोबर आहे, (१.३४)
म्हणून **हफ** हा **अक** वरील चौरस आहे. (२. व्याख्या **अ**)
सारांश **हफ**, **कस** हे अनुक्रमें **अक**, **कब** ह्यांवरील चौरस आहेत.

कग बाजू **कब** बाजूबराबर आहे, (१. व्याख्या ३०)
म्हणून **अग** हा, **अक**, **कब** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे. (२. व्याख्या १)
अग चौकोन **गई** चौकोनाबराबर आहे, (१.४३)
म्हणून **अग**, **गई** ह्यांची बेरीज **अग**च्या दुपटीबराबर आहे;
म्हणून **अग**, **गई** ह्यांची बेरीज, **अक**, **कब** ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीबरोबर आहे.
म्हणून **हफ**, **कस**, **अग**, **गई** ह्या चार चौकोनांची बेरीज ही,

अक, **कब** ह्यांवरील चौरसें व **अक**, **कब** काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरावर आहे.
परंतु त्याच चार चौकोनांची बेरीज **अड** चौकोनाबरोबर म्हणजे **अब** वरील चौरसाबरोबर आहे; (प्र. प्र. ३.)
म्हणून **अब**वरील चौरस हा, **अक**, **कब** ह्यांवरील चौरसें व **अक**, **कब** काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र.प्र.१)
ह्याकरितां जर एका रेषेचे इत्यादि.

उपसि. १ चौरसांच्या कर्णाभोंवतालचे समांतरभुज चौकोनही चौरस असतात.

उपसि. २ कोणत्याही रेषेवरील चौरस हें तिच्या अर्धावरील चौरसाच्या चौपटीबरावर असतें.

प्रश्न.

१. (१) (२.४) च्या सिद्धतेकरितां जी रचना केली आहे, तिचें सामान्य स्वरूप सांगा; व (२) त्याच्या सिद्धतेला लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा.

२. (२.४) च्या आकृतींत **हफ** हा चौरस आहे, असें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवा.

३. (२.४) च्या आकृतींत **गइ** हा **अक**, **बक** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे, असें सिद्ध करा.

४. "रेषेचे तीन भाग केले, तर त्या रेषेवरील चौरस हा, सर्व भागांवरील चौरसें आणि प्रत्येक दोन दोन भागांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतो." हें सिद्ध करा.

५. (२.४) ह्यांतील रेषेचे कितीही भाग केले, तर त्याच्या प्रतिज्ञेचें स्वरूप कसें होईल ?

६. (२.४) ह्यांतील रेषेचे ३, ४ अथवा कितीही समान भाग केले, तर त्याच्या प्रतिज्ञेचें स्वरूप कसें होईल ?

७. (२.४) च्या सिद्धतेकरितां जर अशी रचना केली कीं, **अब** वर **अड** चौरस काढून **कफ** ही **अड**शीं किंवा **बइ**शीं समांतर काढिली; **अड**, **बइ** ह्यांचे अनुक्रमें **अक**, **कब** एवढाले अनुक्रमें **अग**,

बग हे तुकडे पाडिले; आणि **न**, **स** बिंदूंतून **अब**शीं समांतर अशा **नम**, **सग** ह्या रेषा काढून त्या **कफ** रेषेला अनुक्रमें **म**, **ग** बिंदूंत मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या; तर २.४ ह्याची सिद्धता फार थोडक्यांत होते, असें दाखवा.

८. (२.४) ह्याच्या सिद्धतेकरितां रचना मुळींच न करितां २.३, प्र. प्र. २, २.२ व प्र. प्र. १ ह्यांची योजना अनुक्रमानें केली, तर त्याची सिद्धता थोडक्यांत होते, असें दाखवा.

९. "दोन रेषांच्या बेरजेवरील चौरस हें, त्या दोन्ही रेषांवरील चौरसें व त्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतें." हें (२.४) ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

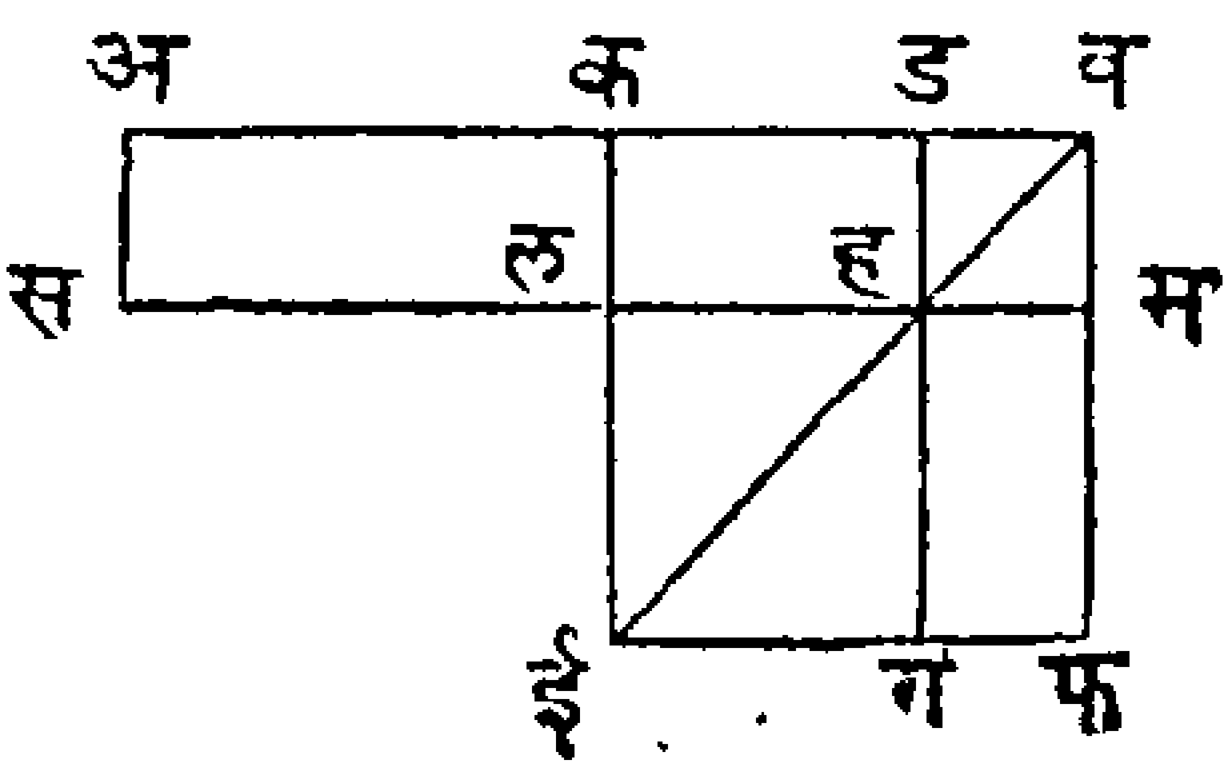
१०. दोन रेषांच्या बेरजेवरील चौरस व त्या रेषांवरील चौरसांची बेरीज ह्या दोहोंपैकीं जास्त परिमेय कोणतें? व केवढ्यानें जास्त?

११. (२.४) हा (२.१) ह्यावरील तिसऱ्या प्रश्नांतल्या प्रमेयाचा एक विशेष प्रकार आहे, असें दाखवा.

सिद्धांत ५. प्रमेय.

रेषेचे दोन समान व दोन असमान भाग केले असतां, असमान भागांचा काटकोनचौकोन व छेदनबिंदूंच्या मधील रेषेवरील चौरस हे दोन मिळून, अर्ध्या रेषेवरील चौरसाबरोबर होतात.

अब रेषेचे **क** बिंदूंत दोन समान आणि **ड** बिंदूंत दोन असमान भाग केले आहेत; तर **अड**, **डब** काटकोनचौकोन आणि **कड** वरील चौरस हे दोन मिळून, **कब** वरील चौरसाबरोबर होतील.



कब रेषेवर **कईफब** चौरस काढ; (१.४६)
बई सांध; (गृ. कृ. १)
आणि **ड** बिंदूंतून **कई**शीं अथवा **बफ**शीं **डहग** रेघ समांतर काढ; **ह** बिंदूंतून **कब**शीं अथवा **इफ**शीं **सलम** रेघ समांतर काढ; आणि **अ** बिंदूंतून **कल**शीं अथवा **बम**शीं **अस** रेघ समांतर काढ. (१.३१)

आतां **अक**, **कब** ह्या रेषा समान आहेत; (प्रतिज्ञा)
ह्मणून **अल**, **कम**, हे समांतरभुजचौकोन समान आहेत. (१.३६)
कह, **हफ** हे पूरक समान आहेत. (१.४३)
अल, **कम** ह्या समान चौकोनांत अनुक्रमें **कह**, **हफ** हे समान चौकोन मिळविले,
तेव्हां त्यांच्या बेरजा म्हणजे **अह** चौकोन व **कमग** गोमुखी हीं समान झालीं. (प्र.प्र. २)
ह्या दोन समान आकृतींपैकीं प्रत्येकींत **लग** चौकोन मिळविला,
तेव्हां **अह**, **लग** ह्या चौकोनांची बेरीज ही, **कमग** गोमुखी व **लग** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबरावर म्हणजे **कफ** चौकोनाबरावर आहे. (प्र. प्र. २)
आतां **डह**, **डब** ह्या रेषा समान आहेत, (२.४ उपसि.१ व १.व्या.३०)
ह्मणून **अह** हा **अड**, **डब** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे; (२. व्याख्या १)
लग हा **कड**वरील चौरस आहे; (१. ३४, २. ४ उपसि. १ व २. व्याख्या अ)
आणि **कफ** हा **कब**वरील चौरस आहे; (रचना)
म्हणून **अड**, **डब** काटकोनचौकोन व **कड**वरील चौरस मिळून **बक**-वरील चौरसाबरावर आहेत.

ह्याकरितां रेषेचे दोन समान इत्यादिक.

उपसि. "दोन असमान रेषांवरील चौरसांची वजाबाकी ही, त्या रेषांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाबरावर असते." ही गोष्ट, वरील सिद्धांताच्या आकृतीमध्यें **अक**, **कड** ह्या मूळच्या असमान रेषा मानिल्या असतां, स्पष्ट दिसेल.

प्रश्न.

१. (२.५) च्या सिद्धतेकरितां जी रचना करावी लागते, तिचें सामान्य स्वरूप सांगा.

२. (२.५) ह्याच्या आकृतींत **अक**, **कड** ह्या दिलेल्या दोन रेषा आहेत असें माना, आणि त्यांच्या योगानें "दोन असमान रेषांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांचा काटकोनचौकोन व धाकट्या रेषेवरील

चौरस ह्यांची बेरीज ही, मोठ्या रेषेवरील चारसाबराबर असते." हें २. ५ ह्याचें रूपांतर आहे, असें दाखवा.

३. "रेषेचे दोन समान व दोन असमान भाग केले, तर असमान भागांचा काटकोनचौकोन व अर्ध्या रेषेवरील चौरस त्या दोहोंपैकीं मोठी आकृति कोणती? व केवढ्यानें मोठी असते?

४. (२.५) च्या आकृतींत **अह** काटकोनचौकोन व **कफ** चौरस ह्यांच्या परिमिति (म्हणजे बाजूंच्या बेरजा) सारख्या आहेत, असें दाखवा.

५. "एक काटकोनचौकोन व एक चौरस ह्यांच्या परिमिति सारख्या असल्यास, चौरसाचें क्षेत्रफळ काटकोनचौकोनाच्या क्षेत्रफळापेक्षां जास्त असतें." हें २. ५ च्या आकृतींतील **अह** काटकोनचौकोन व **कफ** चौरस ह्यांच्या योगानें सिद्ध करा.

६. दिलेल्या समर्याद रेषेचे कोणत्या बिंदूंत दोन भाग केले असतां त्या भागांचा काटकोनचौकोन महत्तम होईल?

७. (२.५) च्या आकृतींत **अक, कड** ह्या दिलेल्या दोन रेषा माना, व त्यांच्या योगानें खालीं लिहिलेले सिद्धांत सिद्ध करून दाखवा.

(१) दोन असमान रेषांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांची बेरीज मोठीच्या दुपटीबरोबर असते.

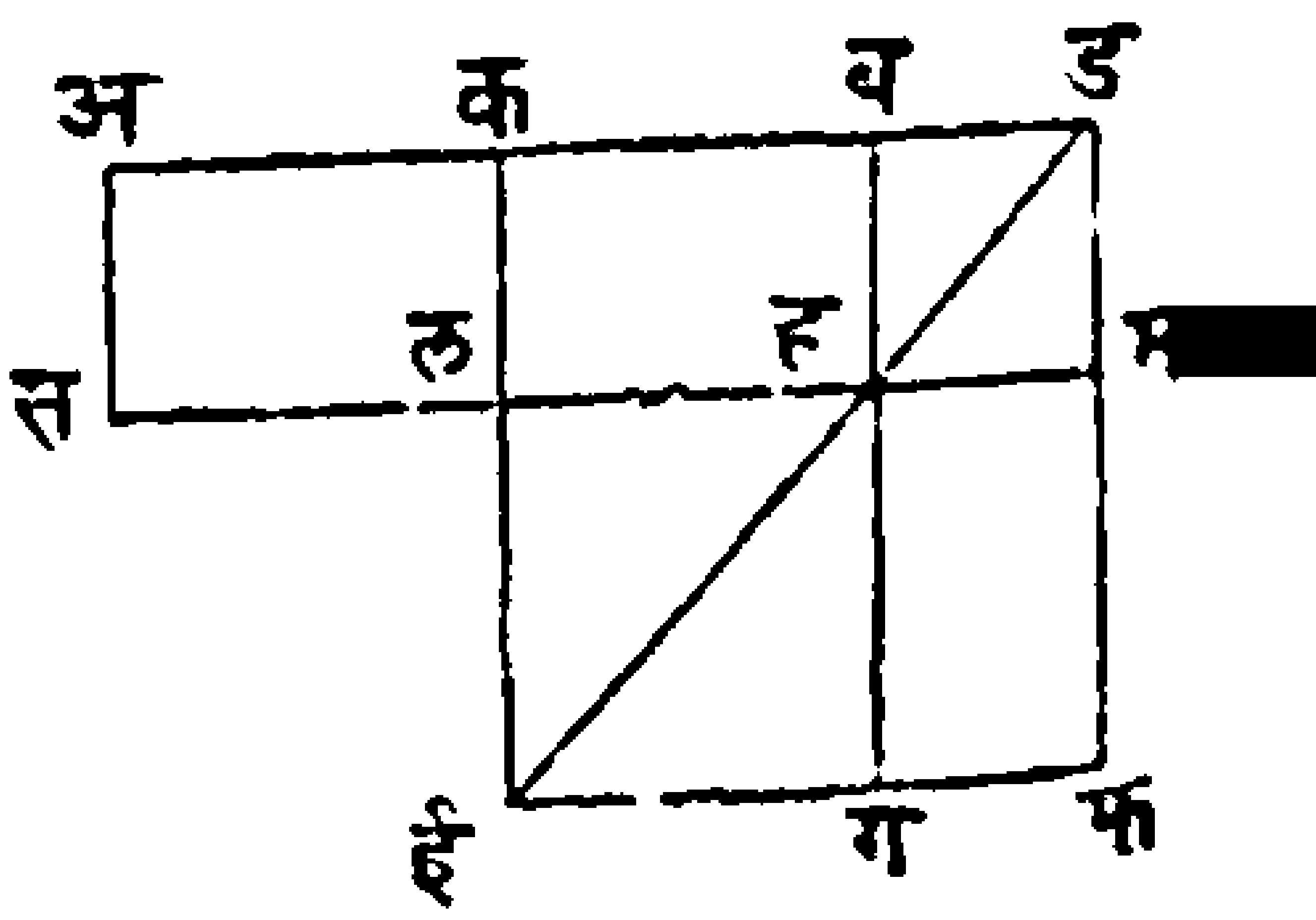
(२) दोन असमान रेषांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांची वजाबाकी धाकट्या रेषेच्या दुपटीबरोबर असते.

८. रेषेचे दोन समान व असमान भाग केले, तर छेदनबिंदूंमधील अंतर हें, असमान भागांच्या वजाबाकीच्या अर्धाबरोबर असतें.

९. (२.५) ह्याच्या सिद्धतेकरितां कोणतीही रचना केल्यावांचून तो सिद्ध करून दाखवा.

सिद्धांत ६. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन समान भाग करून, ती कोणत्याही एका बिंदूपर्यंत वाढविली, तर वाढविलेल्या भागासहित सर्व रेघ आणि वाढविलेला भाग ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन व अर्ध्या रेघेवरील चौरस ह्यांची बेरीज ही, अर्धी रेघ आणि वाढविलेला भाग मिळून झालेल्या रेघेवरील चौरसाबराबर होते.



अब रेघेचे **क** बिंदूंत दोन समान भाग केले आहेत, आणि ती **ड** बिंदूपर्यंत वाढविली आहे; तर **अड**, **डब** काटकोनचौकोन आणि **कब** वरील चौरस ह्यांची बेरीज ही, **कड** वरील चौरसाबरोबर होईल.

कड वर **कईफड** चौरस काढ; (१.४६)
डई सांध; (गृ. कृ. १)
ब बिंदूंतून **कई**शीं किंवा **डफ**शीं **बहग** समांतर काढ; **ह** बिंदूंतून **अड**शीं किंवा **ईफ**शीं **सलम** समांतर काढ; आणि **अ** बिंदूंतून **कल**शीं किंवा **डम**शीं **अस** समांतर काढ. (१.३१)

आतां **अक**, **कब** ह्या समान आहेत, (प्रतिज्ञा)
म्हणून **अल**, **कह** हे समांतरभुजचौकोन समान आहेत. (१.३६)
परंतु **कह** पूरक **हफ** पूरकाबरोबर आहे; (१.४३)
म्हणून **अल** चौकोन **हफ** चौकोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
ह्या प्रत्येकांत **कम** चौकोन मिळविला,
तेव्हां सगळा **अम** चौकोन, **कमग** गोमुखीबरोबर झाला. (प्र. प्र.२)
ह्या दोन समान आकृतींत **लग** चौकोन मिळविला,
तेव्हां **अम**, **लग** ह्या चौकोनांची बेरीज ही **कमग** गोमुखी व **लग** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबराबर, म्हणजे **कफ** चौकोनाबराबर झाली. (प्र. प्र. २)

आतां **डम**, **डब** समान आहेत (२.४ उपसि.१, व १. व्याख्या ३०)
म्हणून **अम** हा **अड**, **डब** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे; (२. व्याख्या१)
लग हा **कब** वरील चौरस आहे; (१.३४,२.४ उपसि १ व २. व्याख्या अ)
आणि **कफ** हा **कड**वरील चौरस आहे; (रचना)
म्हणून **अड**, **डब** काटकोनचौकोन आणि **कब**वरील चौरस मिळून, **कड**वरील चौरसाबराबर आहेत.

ह्याकरितां, जर एका रेघेचे इत्यादि.

प्रश्न.

१. (२.६) ह्याच्या सिद्धतेकरितां जी रचना करावी लागते, तिचें सामान्यस्वरूप सांगा.

२. (२.६) च्या आकृतींत **अक**, **कड** ह्या दिलेल्या असमान रेषा आहेत, असें मानून, २.५ चा उपसिद्धांत २.६ ह्यामध्येंही सिद्ध झाला आहे, असें दाखवा.

३. (२.५) ह्यावरील दुसऱ्या प्रश्नांत जें २.५ ह्याचें रूपांतर सांगितलें आहे, तें २.६ ह्याचेंही रूपांतर आहे, असें दाखवा; आणि त्यावरून २.५ व २.६ हीं दोन्ही एकाच प्रमेयाचीं भिन्न रूपें आहेत, असें प्रत्ययास आणून द्या.

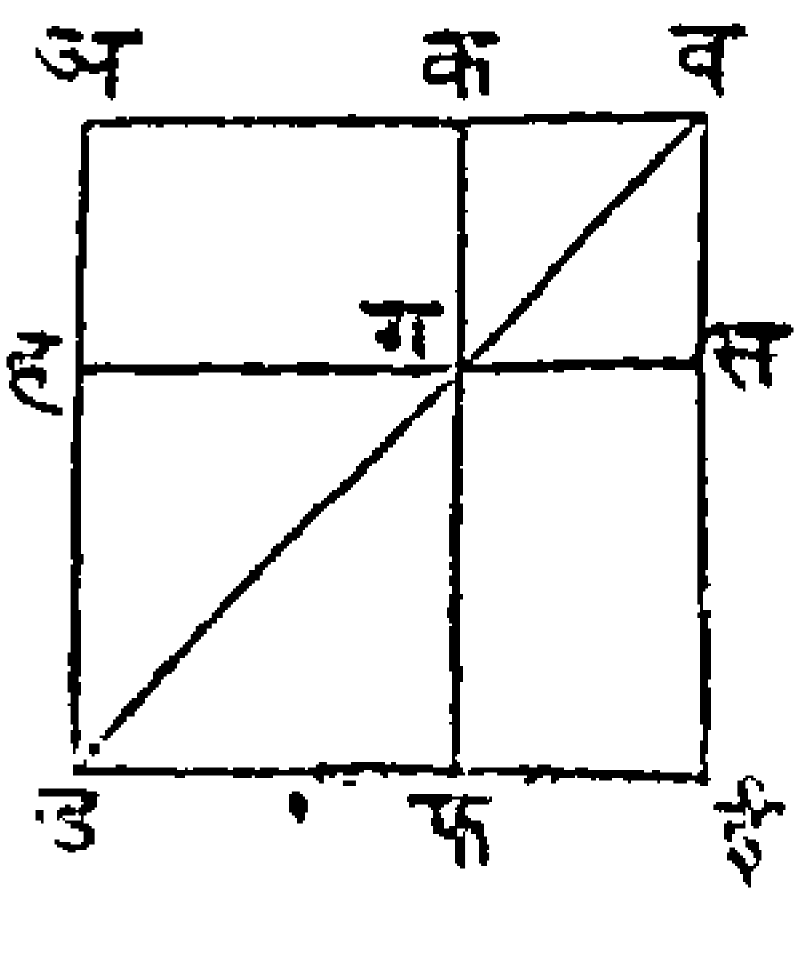
४. (२.६) ह्याच्या आकृतींत **बअ** रेषा **अ** बिंदूपलीकडे वाढवून तिचा **बड**एवढा **अई** तुकडा पाडा आणि त्याच्या योगानें, "**कड** हें **अड**, **बड** ह्यांच्या बेरजेचें **अर्ध** आहे" व "**कब** हें **अड**, **बड** ह्यांच्या वजाबाकीचें **अर्ध** आहे." ह्या दोन गोष्टी स्पष्ट करून दाखवा.

५. मागच्या प्रश्नाच्या आकृतीमध्यें **अड**, **बड** ह्या दिलेल्या दोन रेषा माना, आणि त्यांच्या योगानें "दोन रेषांचा काटकोनचौकोन व त्यांच्या वजाबाकीच्या **अर्धा**वरील चौरस ह्यांची बेरीज ही, त्याच रेषांच्या बेरजेच्या **अर्धा**वरील चौरसाबराबर असते" हें २.५ व २.६ ह्यांचें रूपांतर आहे असें दाखवा.

सिद्धांत ७. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन भाग केले, तर सर्व रेघ आणि तिचा एक भाग ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, सर्व रेघ आणि तोच भाग ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व दुसऱ्या भागावरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर होते.

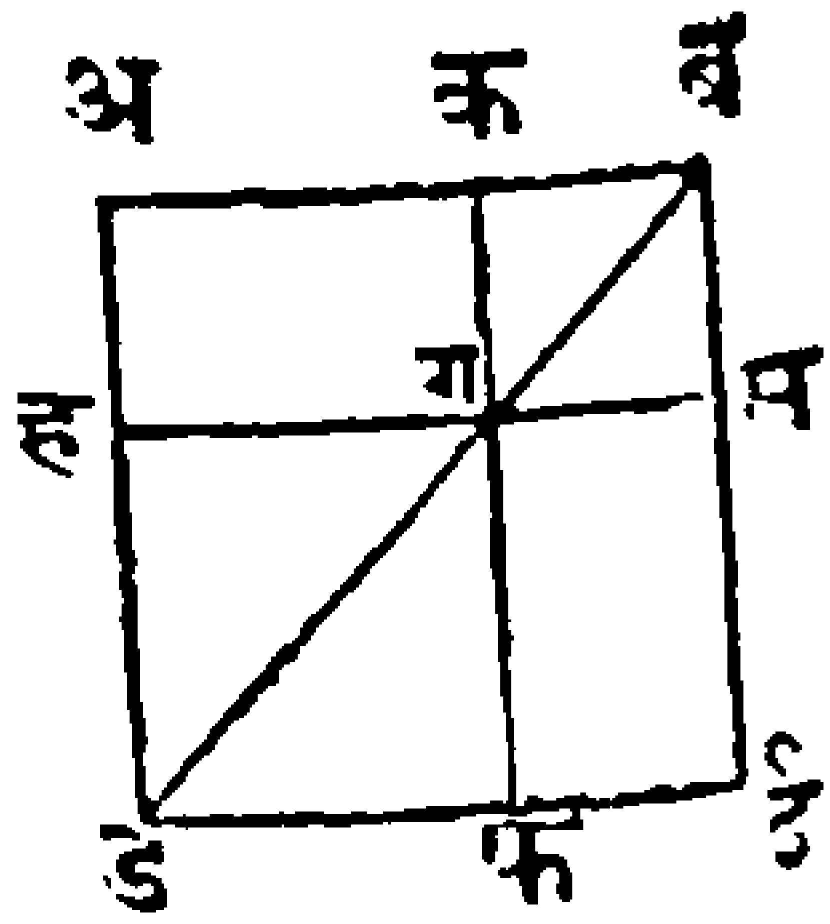
अब रेघेचे **क** बिंदूंत दोन भाग केले आहेत; तर **अब** आणि **बक** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **अब**, **बक** काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि **अक**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर होईल.



अब रेघेवर **अडईब** चौरस काढून, २.४ ह्यांतील रचनेप्रमाणेंच सर्व रचना कर.

आतां **अग**, **गई** हे चौकोन समान आहेत; (१.४३)
ह्या प्रत्येकांत **कस** चौकोन मिळविला,
तेव्हां **अस**, **कई** हे चौकोन समान झाले; (प्र. प्र. २)
म्हणून **अस**, **कई** ह्यांची बेरीज **अस**च्या दुप्पटीबरोबर आहे.

अस, **कई** ह्यांची बेरीज ही, **असफ** गोमुखी व **कस** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे;



म्हणून **असफ** गोमुखी व **कस** चौकोन ह्यांची बेरीज ही, **अस** चौकोनाच्या दुपटी-बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
ह्या प्रत्येकांत **हफ** चौकोन मिळविला; तेव्हां **असफ** गोमुखी, **हफ** चौकोन व **कस** चौकोन ह्या तीन आकृतींची बेरीज ही, **अस** चौकोनाची दुप्पट व **हफ** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबरावर झाली. (प्र. प्र. २)
पण त्या तीन आकृतींची बेरीज ही, **अई** चौकोन व **कस** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे, (प्र. प्र. ३. व प्र. प्र. २)
म्हणून **अई** चौकोन व **कस** चौकोन ह्यांची बेरीज ही, **अस** चौको-नाची दुप्पट व **हफ** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आतां **अई** चौकोन **अब**वरील चौरस आहे; (रचना)
कस चौकोन **कब**वरील चौरस आहे; (२.४ उपसि. १)
अस चौकोन **अब**, **कब** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे; (१. व्याख्या ३० व २. व्याख्या १)
आणि **हफ** चौकोन **अक** वरील चौरस आहे; (१. ३४, २.४ उपसि. १ व २. व्याख्या अ)

म्हणून **अब**, **बक** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **अब**, **बक** काट-कोनचौकोनाची दुप्पट व **अक**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे.

ह्याकरितां जर एका रेघेचे इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (२.७) च्या आकृतींत "**अब**, **अक** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **अब**, **अक** काटकोनचौकोनाची दुप्पट व **बक**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे" असें सिद्ध करून दाखवा.

२. (२.७) च्या आकृतींत **अई** चौरसाच्या बाहेर आणखी एक **फई**वर चौरस काढा, आणि त्याच्या योगानें "**अब**, **बक** काटकोन-चौकोनाची दुप्पट ही, **असफ** गोमुखी व **फई**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे" ही गोष्ट स्पष्ट करून दाखवा.

३. (२.७) च्या आकृतींत **अब**, **बक** ह्या दिलेल्या रेषा माना, आणि "दोन रेषांवरील चौरसांची बेरीज ही, त्या दोन रेषांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व त्यांच्या वजाबाकीवरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर असते" हें २.७ ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

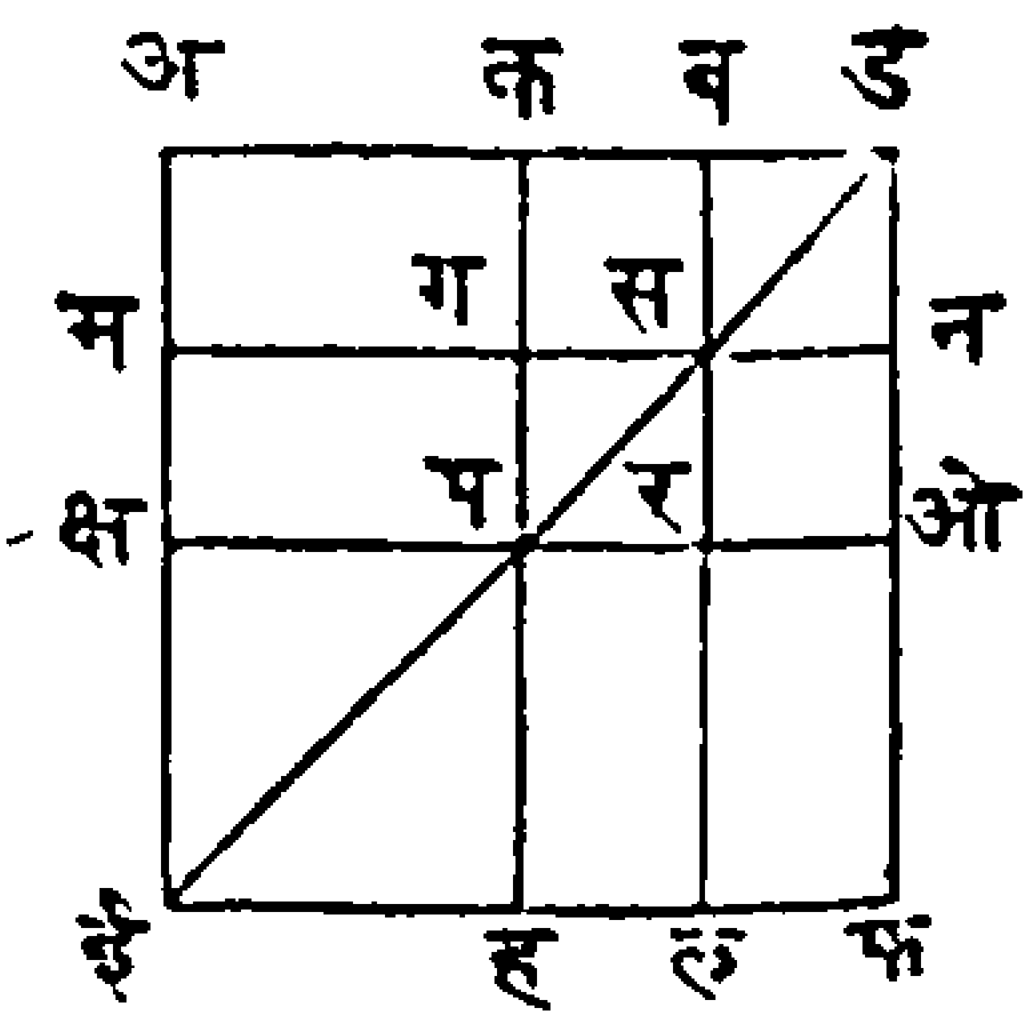
४. (२.७) च्या आकृतींत **अब**,**कब** ह्या मूळच्या रेषा माना, आणि त्यांच्या योगानें "दोन रेषांवरील चौरसांची वजाबाकी व त्याच रेषांच्या वजाबाकीवरील चौरस ह्यांपैकीं मोठी आकृति कोणती? व केवढ्यानें मोठी?" ह्या प्रश्नांचीं उत्तरें स्पष्ट करून दाखवा.

५. (२.७) च्या आकृतींत **अब**, **कब** ह्या मूळच्या रेषा माना, आणि त्यांच्या योगानें, "दोन रेषांच्या वजाबाकीवरील चौरस हें, त्या रेषांवरील चौरसांची बेरीज व त्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या वजाबाकीबरोबर असतें" हें २.७ ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

सिद्धांत ८. प्रमेय.

जर एका रेषेचे दोन भाग केले, तर सर्व रेषा व तिचा एक भाग ह्यांच्या बेरजेवरील चौरस हा, सर्व रेषा व तोच भाग ह्यांच्या काट-कोनचौकोनाची चौपट व दुसऱ्या भागावरील चौरस ह्यांच्या बेरजे-बरोबर असतो.

अब रेषेचे **क** बिंदूंत दोन भाग केले आहेत; तर **अब**, **बक**



ह्यांच्या बेरजेवरील चौरस हा, **अब,बक** काटकोनचौकोनाची चौपट व **अक** वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर होईल.

(१) **अब** वाढवून **बक** बरोबर **बड** कर; (गृ. कृ. २ व १.३) **अड**वर **अईफड** चौरस काढ; (१.४६) **डई** सांध; आणि **क, ब** बिंदूंतून **अई**शीं अथवा **डफ**शीं समांतर रेषा काढणें इत्यादिक बाकीची रचना २.४ ह्यांतील रचनेप्रमाणें कर.

(२) (आधीं **पर, रओ** ह्या रेषा समान आहेत, व **गप, कग** ह्या समान आहेत.असें सिद्ध करूं.)

पर बरोबर **कब** आहे, (१.३४)
कबबरोबर **बड** आहे, (रचना)
व **बड** बरोबर **रओ** आहे; (१.३४)
म्हणून **पर** बरोबर **रओ** आहे. (प्र. प्र. १ उपसि. २)
पुनः **गप**बरोबर **गस** आहे, (२.४ उपसि. १ व १. व्या. ३०)
गसबरोबर **कब** आहे, (१.३४)
कब बरोबर **बड** आहे, (रचना)
बडबरोबर **बस** आहे (२.४ उपसि. १. व १. व्या. ३०)
व **बस**बरोबर **कग** आहे; (१.३४)
म्हणून **गप** बरोबर **कग** आहे. (प्र. प्र. १ उपसि. २)

(३) **बन** चौकोनाबरोबर **कस** चौकोन आहे, (१.३६)
कस चौकोनाबरोबर **गर** चौकोन आहे, (१.३६)
व **गर** चौकोनाबरोबर **सओ** चौकोन आहे, (१.३६)
म्हणून **कस, बन, गर, सओ** हे चान्ही चौकोन समान आहेत; (प्र. प्र. १ उपसि. २)
म्हणून ह्या चोहोंची बेरीज **कस**च्या चौपटीबरोबर आहे.
पुनः **अग** चौकोन **मप** चौकोनाबराबर आहे. (१.३६)
मप चौकोन **पल** चौकोनाबराबर आहे, (१.४३)
व **पल** चौकोन **रफ** चौकोनाबराबर आहे; (१.३६)

म्हणून **अग**, **मप**, **पल**, **रफ** हे चारही चौकोन समान आहेत;
(प्र. प्र. १ उपसि. २)

म्हणून ह्या चोहोंची बेरीज **अग**च्या चौपटीबरोबर आहे.

(४) आतां **अग**, **मप**, **पल**, **रफ** ह्या चोहोंची बेरीज **अग**-च्या चौपटीबरोबर आहे, आणि **कस**, **वन**, **गर**, **सभो** ह्या चोहों-ची बेरीज **कस**च्या चौपटीबरोबर आहे;

म्हणून ह्या आठ चौकोनांची बेरीज **अग**, **कस** ह्यांच्या बेरजेच्या चौपटीबराबर आहे; ( )

म्हणजे **अओह** गोमुखी **अस** चौकोनाच्या चौपटीबरोबर आहे. ह्या प्रत्येकांत **क्षह** चौकोन मिळविला;

तेव्हां **अओह** गोमुखी व **क्षह** चौकोन ह्यांची बेरीज, **अस** चौको-नाची चौपट व **क्षह** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबराबर झाली; (प्र. प्र.२)

म्हणून **अफ** चौकोन हा, **अस** चौकोनाची चौपट व **क्षह** चौकोन ह्यांच्या बेरजेबराबर झाला. (प्र. प्र. ३ व प्र. प्र. १)

(५) आतां **अफ** चौकोन हा **अड**वरील, म्हणजे **अब**, **बक** ह्यांच्या बेरजेवरील चौरस आहे; (रचना)

वस रेषा **कब**बरोबर आहे, (२.४ उपसि. १, रचना व प्र. प्र. १)

म्हणून **अस** हा **अब**, **बक** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे,
(२. व्याख्या १)

आणि **क्षह** हा **अक**वरील चौरस आहे;

(१.३४,२.४ उपसि.१ व २.व्याख्या अ)

म्हणून **अब**, **बक** ह्यांच्या बेरजेवरील चौरस हा, **अब**, **बक** काट-कोनचौकोनाचो चौपट व **अक**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजबरोबर आहे.

ह्याकरितां जर एका रेषेचे इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (२.८) च्या सिद्धतेकरितां केलेली रचना सांगा.

२. (१) (२.८) च्या सिद्धतेचे जे पांच भाग मानिले आहेत, त्या प्रत्येकाचा विषय सांगा. (२) दुसऱ्या भागामध्यें पुढच्या भागाकरितां कोणकोणत्या रेघांची समानता ठरवून ठेवावी लागते? (३) ह्या सिद्धांताच्या सिद्धतेमध्यें कोणतें प्रमेय सिद्धतेवांचून स्वीकारिलेलें आहे? तें प्रमेय न स्वीकारितां २.८ ह्याची सिद्धता करून दाखवा.

३. "दोन रेघांच्या बेरजेवरील चौरस हा, त्या रेघांच्या काटकोनचौकोनाची चौपट व त्यांच्या वजाबाकीवरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरावर असतो" हें २.८ ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

४. दोन रेघांच्या बेरजेवरील चौरस आणि वजाबाकीवरील चौरस ह्यांपैकीं मोठा कोणता? केवढ्यानें मोठा?

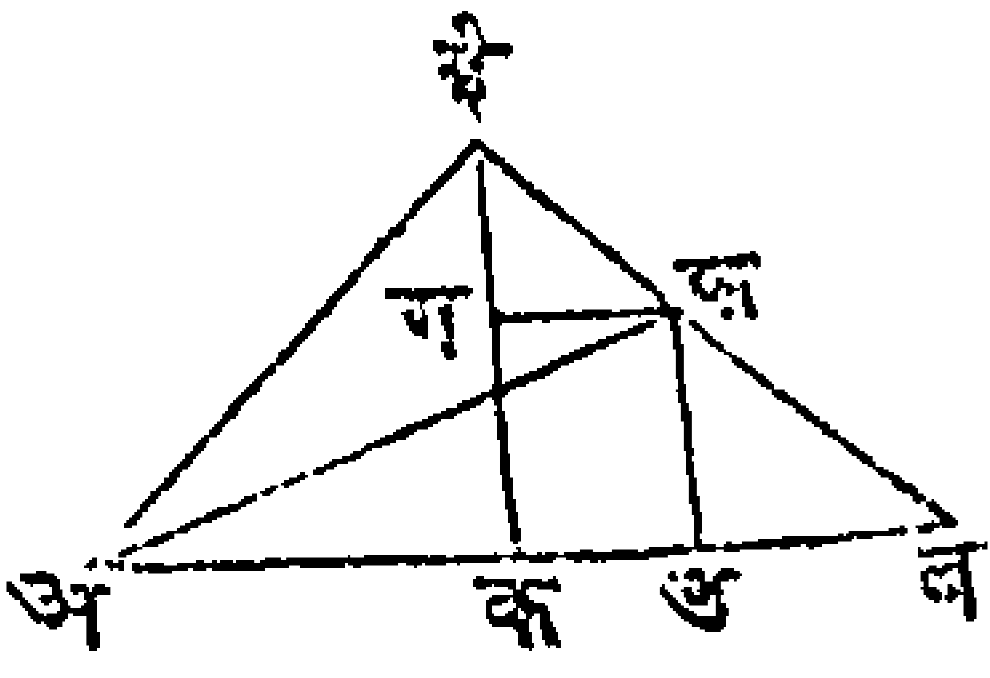
५. (२.८) ह्याच्या सिद्धतेकरितां चौरस काढणें इत्यादि रचना केल्यावांचून तो सिद्ध करून दाखवा.

६. "कोणत्याही रेघेवरील चौरस तिच्या अर्धावरील चौरसाच्या चौपटीबरावर असतो" हा सिद्धांत २.८ च्या आकृतीवरून स्पष्ट करून दाखवा.

सिद्धांत ९. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन समान आणि दोन असमान भाग केले, तर दोन असमान भागांवरील चौरसांची बेरीज ही, अर्धरेघेवरील चौरस आणि विभागणाऱ्या बिंदूंच्या मधील रेघेवरील चौरस ह्यांच्या दुपटीच्या बेरजेबरावर असते.

क बिंदूंत **अब** रेघेचे दोन समान भाग केले आहेत, आणि ड बिंदूंत दोन असमान भाग केले आहेत; तर **अड** व **डब** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **अक** आणि **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटीच्या बेरजेबरावर होईल.



(१) क बिंदूंतून **अब**वर **कई** लंब काढ; (१ ११)

कई, **अक** बरावर किंवा **कब** बरावर कर; (१.३)

ईअ, **ईब** सांध; (गृ. कृ. १)

ड मधून डफ, कईशीं समांतर काढ, आणि फ मधून फग, बअशीं समांतर काढ; (१.३१)

आणि अफ सांध. (पृ. कृ. १)

(२). (आधीं अईब, ईगफ आणि अडफ हे कोन काटकोन आहेत, असें सिद्ध करूं.)

आतां अकई त्रिकोणाचा अकई कोन काटकोन आहे; (रचना)

म्हणून त्याचे अईक, ईअक हे इतर दोन कोन मिळून एक काटकोनाबरोबर आहेत; (१.३२ उप. ४)

आणि ते परस्पर बरोबर आहेत; (रचना व १.५)

म्हणून त्यांतील प्रत्येक अर्धकाटकोन आहे.

ह्याच कारणास्तव कईब, ईबक ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक अर्धकाटकोन आहे.

म्हणून सर्व अईब कोन एक काटकोन आहे.

ईगफ कोन ईकब कोनाबरोबर आहे, (१.२९ भाग २)

आणि ईकब कोन काटकोन आहे, (रचना)

म्हणून ईगफ कोन ही काटकोन आहे. (प्र. प्र. ११ उप.)

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, अडफ कोन काटकोन आहे.

(आतां ईग, गफ ह्या रेषा समान आहेत व डफ, डब ह्या समान आहेत, असें सिद्ध करूं.)

फग, कब ह्या समांतर रेषांस ईब रेघ मिळते;

म्हणून ईफग कोन ईबक कोनाबरोबर आहे; (१.२९ भाग २)

आणि कईब कोन ईबक कोनाबरोबर आहे; (रचना व १.५)

म्हणून ईफग कोन कईब (म्हणजे गईफ) कोनाबरोबर आहे. (प्र.प्र.१)

म्हणून ईग बाजू गफ बाजूबरोबर आहे. (१.६)

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, डफ बाजू डब बाजूबरोबर आहे.

(३) आतां अकई हा काटकोनत्रिकोण आहे व त्याच्या अक, कई ह्या बाजू समान आहेत; (रचना)

म्हणून **अई** वरील चौरस **अक**वरील चौरसाच्या दुप्पटीबराबर आहे. (१.४७ उपसि. २)

त्याच कारणास्तव **ईफ** वरील चौरस **गफ** वरील चौरसाच्या दुप्पटीबराबर आहे.

आणि **गफ**, **कड** बराबर आहे; (१.३४)

म्हणून **ईफ**वरील चौरस **कड**वरील चौरसाच्या दुप्पटीबरोबर आहे; (१. इ, प्र. प्र. ६ व प्र. प्र. १)

म्हणून **अई**, **ईफ** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज, **अक**, **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु **अईफ** कोन काटकोन आहे,

म्हणून **अफ** वरील चौरस, **अई**, **ईफ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे; (१.४७)

म्हणून **अफ** वरील चौरस, **अक**, **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबरोबर आहे; (प्र. प्र. १)

परंतु **अडफ** कोन काटकोन आहे; म्हणून **अफ** वरील चौरस **अड**, **डफ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे; (१.४७)

म्हणून **अड**, **डफ** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **अक**, **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि **डफ**, **डब** बराबर आहे;

म्हणून **अड**, **डफ** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज, **अड**, **डब** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे; (१. इ, प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १)

म्हणून **अड**, **डब** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **अक**, **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां जर एका रेषेचे इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१) (२.९) च्या सिद्धतेकरितां जी रचना करावी लागते, तिचें सामान्यस्वरूप सांगा; व (२) सिद्धतेचे आधारही अनुक्रमानें सांगा.

२. (१) (२.९) च्या सिद्धतेचे जे तीन भाग मानिले आहेत, त्या प्रत्येकाचा विषय सांगा. (२) दुसऱ्या भागामध्यें पुढच्या भागाकरितां कोणते कोणते कोन काटकोन आहेत असें सिद्ध करून ठेवावें लागतें? व कोणत्या रेषांची समानता ठरवून ठेवावी लागते?

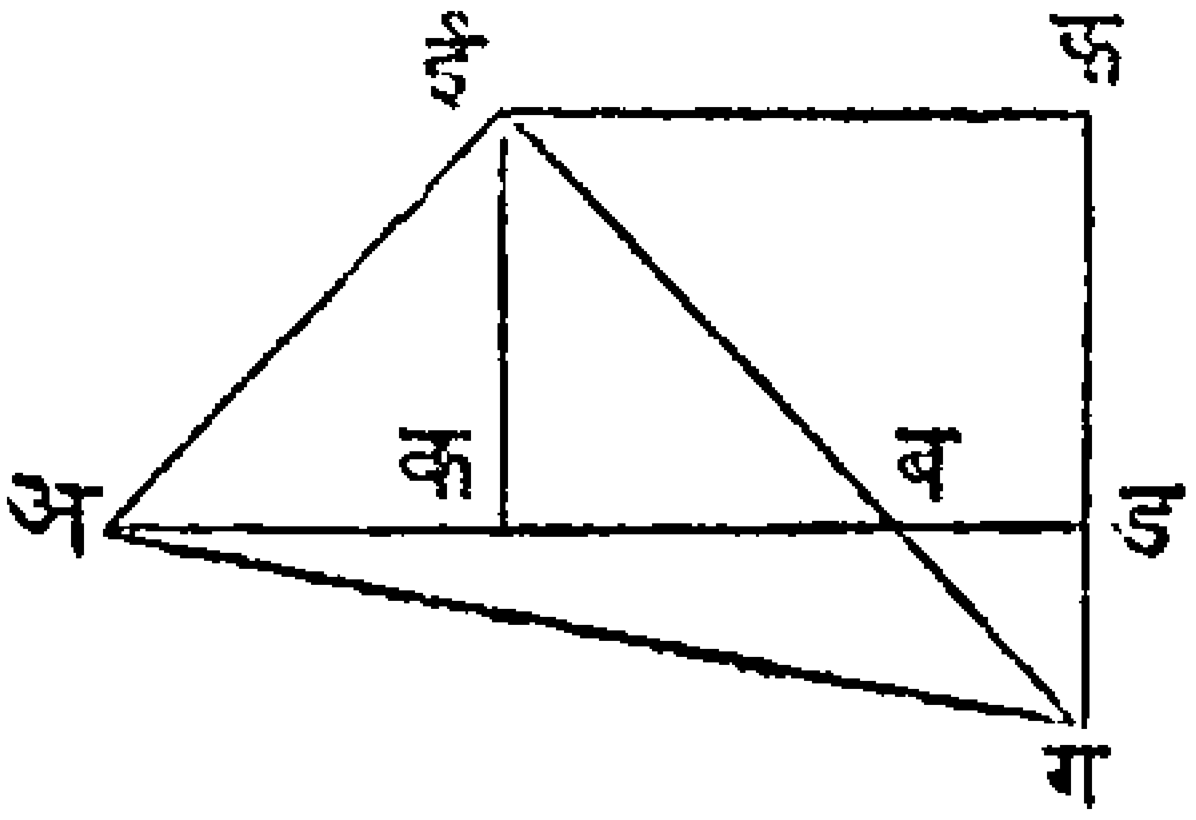
३. (२.९) च्या आकृतींत **अक**, **कड** ह्या दिलेल्या रेषा माना, आणि त्यांच्या योगानें "दोन रेषांची बेरीज आणि वजावाकी ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, त्या रेषांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबरोबर असते" हें २.९ ह्याचेंच रूपांतर आहे, असें दाखवा.

४. (२.९) ह्याची सिद्धता आणि त्याच्या मागच्या आठही सिद्धांतांच्या सिद्धता ह्यांच्यामध्यें मुख्य भेद कोणता दिसतो? मागच्या आठही सिद्धांतांमध्यें ज्याप्रमाणें रेषांचे काटकोनचौकोन व रेषांवरील चौरसें हीं प्रत्यक्ष तयार करून त्या सिद्धांतांच्या सिद्धता केल्या, त्याप्रमाणें २.९ ह्याचीही सिद्धता करून दाखवा.

५. (२.९) ह्याची सिद्धता रचनेवांचून करून दाखवा.

सिद्धांत १०. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन समान भाग करून ती कोणत्याही एका बिंदूपर्यंत वाढविली, तर एकंदर रेघेवरील चौरस आणि वाढविलेल्या भागावरील चौरस ह्यांची बेरीज ही, अर्ध्या रेघेवरील चौरसाची दुप्पट व अर्धी रेघ आणि वाढविलेला भाग मिळून झालेल्या रेघेवरील चौरसाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर असते.



अब रेघेचे **क** बिंदूंत दोन समान भाग करून ती **ड** बिंदूपर्यंत वाढविली आहे; तर **अड** आणि **डब** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही **अक** आणि **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबरोबर होईल.

(१) **क** बिंदूंतून **अब**वर **कई** लंब काढ; (१.११)
कई, **अक** बरोबर किंवा **कब** बरोबर कर; (१.३)
अई, **ईब** सांध; (पृ. कृ. १)

ई बिंदूतून अबशीं ईफ समांतर काढ, आणि ड बिंदूतून कईशीं डफ समांतर काढ. (१.३१)

आतां ईक, फड ह्या समांतर रेघांपैकीं एक ईक हिला ईब मिळते; ह्मणून ती फडच्या अंगास वाढविली असतां (व फड अमर्याद केली असतां) तिलाही मिळेल. (१.३० उप.)

त्या ग बिंदूत मिळत तोंपर्यंत वाढीव, आणि अग सांध. (गृ.कृ.२व१)

(२) (आधीं अईब, बडग आणि फ हे कोन काटकोन आहेत, असें सिद्ध करूं.)

आतां अकई कोन काटकोन आहे; (रचना)

म्हणून अईक, ईअक ह्या कोनांची बेरीज एक काटकोन आहे; (१. ३२ उप. ४)

आणि हे कोन समान आहेत; (रचना व १. ५)

म्हणून त्यांपैकीं प्रत्येक कोन अर्धकाटकोन आहे.

त्याच कारणास्तव कईब आणि ईबक हे कोनही प्रत्येकीं अर्धकाटकोन आहेत; ह्मणून सारा अईब कोन काटकोन आहे.

बडग आणि फ ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन ईकड ह्या काटकोनाबरोबर आहे. (१.२९भाग१ व१.३४)

ह्मणून हे दोन्ही कोन काटकोन आहेत. (प्र. प्र. ११ उप.)

(आतां बड, डग ह्या रेघा समान आहेत व ईफ, फग ह्या समान आहेत, असें सिद्ध करूं.)

ईबक कोन अर्धकाटकोन आहे, म्हणून त्या समोरचा डबग कोनही अर्धकाटकोन आहे; (१. १५)

परंतु बडग कोन काटकोन ठरला आहे,

म्हणून शेष डगब कोन अर्धकाटकोन आहे, (१.३२)

आणि त्यास्तव तो डबग कोनाबरोबर आहे; (प्र.प्र.७)

ह्मणून बड बाजू डग बराबर आहे. (१.६)

पुनः ईगफ कोन अर्धकाटकोन आहे, आणि फ कोन काटकोन आहे;

ह्मणून शेष फईग कोन अर्धकाटकोन आहे, (१ ३२)

आणि त्यास्तव तो ईगफ कोनाबरोबर आहे; (प्र.प्र.७)

म्हणून **गफ** बाजू **फई** बाजू बराबर आहे. (१.६)

(३) आतां **अकई** हा काटकोनत्रिकोण आहे व त्याच्या **अक**, **कई** ह्या बाजू समान आहेत; (रचना)

म्हणून **अई**वरील चौरस **अक** वरील चौरसाच्या दुपटीबराबर आहे. (१.४७ उप. २)

ह्याच कारणास्तव **ईग** वरील चौरस **फई**वरील चौरसाच्या दुपटी-बराबर आहे,

आणि **फई**, **कड** बराबर आहे; (१. ३४)

म्हणून **ईग** वरील चौरस **कड** वरील चौरसाच्या दुपटीबराबर आहे; (१. इ, प्र. प्र. ६ व प्र. प्र. १)

म्हणून **अई** व **ईग** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज, **अक** आणि **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु **अग** वरील चौरस **अई**, **ईग** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजे-बराबर आहे; (१. ४७)

म्हणून **अग** वरील चौरस **अक**, **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटीं-च्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

पण **अड**, **डग** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **अग** वरील चौरसाब-राबर आहे; (१. ४७)

म्हणून **अड**, **डग** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **अक**, **कड** ह्यांव-रील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि **डग**, **डब** बराबर आहे;

म्हणून **अड**. **डग** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **अड**, **डब** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे; (१. इ, प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १)

ह्यास्तव **अड** आणि **डब** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **अक** आणि **कड** ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां जर एका रेघेचे इत्यादि.

प्रश्न.

१. (२.१० व २.९) ह्यांच्या सिद्धतेकरितां ज्या रचना केल्या आहेत, त्यांच्यामध्यें भेद कोणता दिसतो ? २.९ ह्यांतील रचने-

सारखीच रचना करून तिच्या योगानें २.१० ह्याची सिद्धता करून दाखवा.

२. (२.१०) ह्याच्या सिद्धतेचे जे तीन भाग कल्पिले आहेत, त्या प्रत्येकाचा विषय सांगा.

३. (२.१०) च्या आकृतींत अक, कड ह्या दिलेल्या रेघा माना, आणि त्यांच्या योगानें, २.९ प्रश्न ३ ह्यांत जें २.९ चें रूपांतर सांगितलें आहे, तें २.१० ह्याचेंही रूपांतर आहे, असें दाखवा; व त्यावरून २.९ आणि २.१० हीं एकाच प्रमेयाचीं भिन्न स्वरूपें आहेत, असें दाखवा.

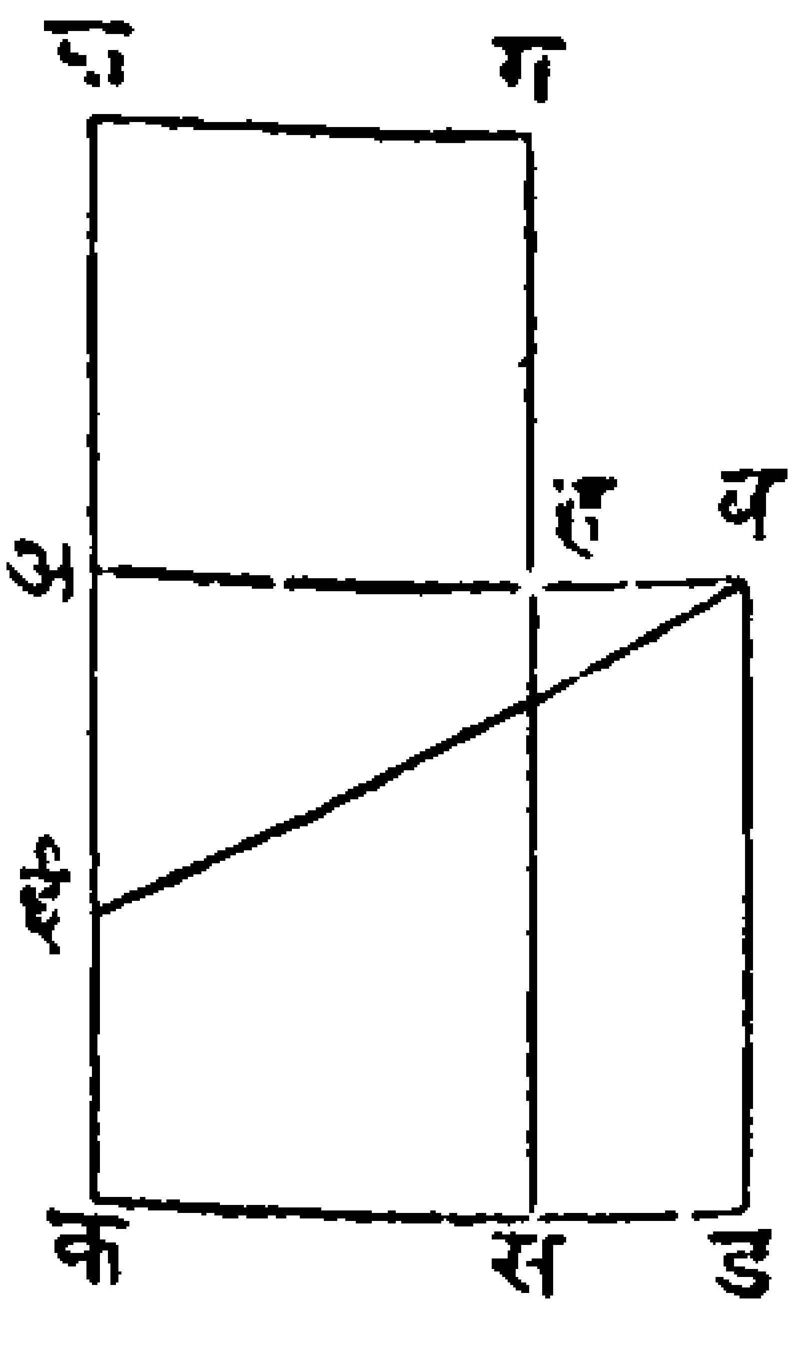
४. (२.१ पासून २.८ पर्यंत) सिद्धांत जसे त्यांतल्या रेघांवरील चौरसें वगैरे प्रत्यक्ष काढून त्यांच्या योगानें सिद्ध केले आहेत, तसा २.१० हा सिद्धांतही त्यांतल्या रेघांवरील चौरसें प्रत्यक्ष काढून त्यांच्या योगानें सिद्ध करून दाखवा.

५. (२.१०) ह्याच्या सिद्धतेकरितां कोणतीच रचना न करितां तो सिद्ध करून दाखवा.

सिद्धांत ११. क्रय.

दिलेल्या रेघेचे असे दोन भाग करावयाचे कीं, ती सगळी रेघ आणि तिचा एक भाग ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन, दुसऱ्या भागावरील चौरसाबरोबर होईल.

अब एक दिलेली रेघ आहे; तर तिचे असे दोन भाग करावयाचे आहेत कीं, सगळी रेघ आणि एक भाग ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन, दुसऱ्या भागावरील चौरसाबरोबर होईल.



अब वर अबडक चौरस काढ; (१.४६)

अक रेघ ई बिंदूंत दुभाग; (१ १०)

बई सांध; (गृ. कृ. १)

कअ वाढवून ईफ, ईब बराबर कर; (१.३)

आणि अफ वर अफगह चौरस काढ. (१.४६)
म्हणजे ह बिंदूंत अब रेघेचे असे दोन भाग होतील कीं, अब, बह काटकोनचौकोन, अह वरील चौरसाबराबर होईल.

गह रेघ कडला स बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)

आतां अकचे ई बिंदूंत दोन समान भाग केले आहेत, व ती फ बिंदूपर्यंत वाढविली आहे; म्हणून कफ, फअ काटकोनचौकोन आणि अई वरील चौरस मिळून, ईफ वरील चौरसाबराबर आहेत. (२.६)

परंतु ईफ, ईब बराबर आहे; (रचना)
म्हणून कफ, फअ काटकोनचौकोन आणि अई वरील चौरस मिळून, ईब वरील चौरसाबराबर आहेत. (१. इ व प्र. प्र. १)
परंतु ईअब कोन काटकोन आहे; म्हणून ईब वरील चौरस, अई, अब ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे; (१.४७)
म्हणून कफ, फअ काटकोनचौकोन आणि अई वरील चौरस मिळून, अई आणि अब ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहेत. (प्र. प्र.१)
ह्यांतील प्रत्येकांतून दोहोंस साधारण अई वरील चौरस काढून टाकिला, तेव्हां शेष कफ, फअ काटकोनचौकोन, शेष अबवरील चौरसाबराबर झाला. (प्र. प्र. ३)
आतां फग, फअ ह्या रेघा समान आहेत, (१. व्याख्या ३०)
म्हणून फस हा फक, फअ ह्या रेघांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे; (२. व्याख्या १)
आणि अड चौरस अब वर काढिलेला आहे;
म्हणून फस काटकोनचौकोन अड चौरसाबराबर आहे.
या दोहोंस साधारण जो अस चौकोन तो प्रत्येकांतून काढून टाकिला, तेव्हां शेष फह, हड हे चौकोन समान आहेत. (प्र. प्र. ३)
पण अब, बड ह्या रेघा समान आहेत, (१. व्याख्या ३०.)
म्हणून हड हा अब, बह ह्या रेघांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे; (२. व्याख्या १)

आणि फह हा अह वरील चौरस आहे;
म्हणून अब, बह काटकोनचौकोन अहवरील चौरसाबरोबर आहे.

ह्याकरितां दिलेल्या अब रेषेचे ह बिंदूंत असे दोन विभाग केले आहेत कीं, अब, बह काटकोनचौकोन अहवरील चौरसाबरोबर आहे.

प्रश्न.

१. (२.११) ह्या कृत्याची जी रीति एथें सांगितली आहे, तिचें सामान्य स्वरूप सांगा.

२. (२.११) ह्यांत जी रचना एथें केली आहे, तीपैकीं दिलेल्या रेषेचे इष्टभाग करण्यास आवश्यक असणारी रचना कोणती, व सिद्धतेमध्यें मात्र उपयोगीं पडणारी रचना कोणती?

३. "दिलेल्या रेषेवर तिच्या एका टोंकापासून लंब काढावा, लंबाचा दिलेल्या रेषेएवढा तुकडा (त्याच टोंकापासून) पाडावा, लंब दुभागावा, लंबाचा मध्य व दिलेल्या रेषेचें दुसरें टोंक हीं सांधावीं, सांधणाऱ्या रेषेचा लंबाच्या अर्धाएवढा तुकडा (लंबाच्या मध्यापासून) पाडावा, आणि शेवटीं सांधणाऱ्या रेषेच्या राहिलेल्या भागाएवढा दिलेल्या रेषेचा (दुसऱ्या टोंकापासून) तुकडा पाडावा." अशी रचना केल्यानेंही दिलेल्या रेषेचे २.११ ह्यांतील इष्ट प्रकारचे भाग होतात, असें सिद्ध करून दाखवा.

४. (२.११) च्या आकृतींत दिलेल्या रेषेचा अह हा भाग अबच्या अर्धापेक्षां जास्त आहे, असें सिद्ध करा.

५. (२.११) ह्यांत दिलेल्या रेषेचे जे दोन भाग केले आहेत, त्यांपैकीं ज्यावरील चौरस, सगळी रेषा व दुसरा भाग ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर असतो, तो भाग दुसऱ्या भागापेक्षां मोठा असतो, असें सिद्ध करा.

६. (२.११) च्या आकृतीमध्यें कफ रेषेचे अ बिंदूंत जे भाग झाले आहेत, ते २.११ मध्यें सांगितल्या प्रकारचेच आहेत व अक हा त्यांपैकीं मोठा भाग आहे, असें दाखवा.

७. "दिलेली रेषा इतकी वाढवावयाची आहे कीं, एकंदर रेषा

आणि वाढविलेला भाग ह्यांचा काटकोनचौकोन मूळच्या रेषेवरील चौरसाबरोबर होईल. ” हें कृत्य, दिलेली रेषा २.११ प्रमाणें विभागून तिच्या मोठ्या भागाइतकी ती रेषा वाढविल्यानें होते, असें दाखवा.

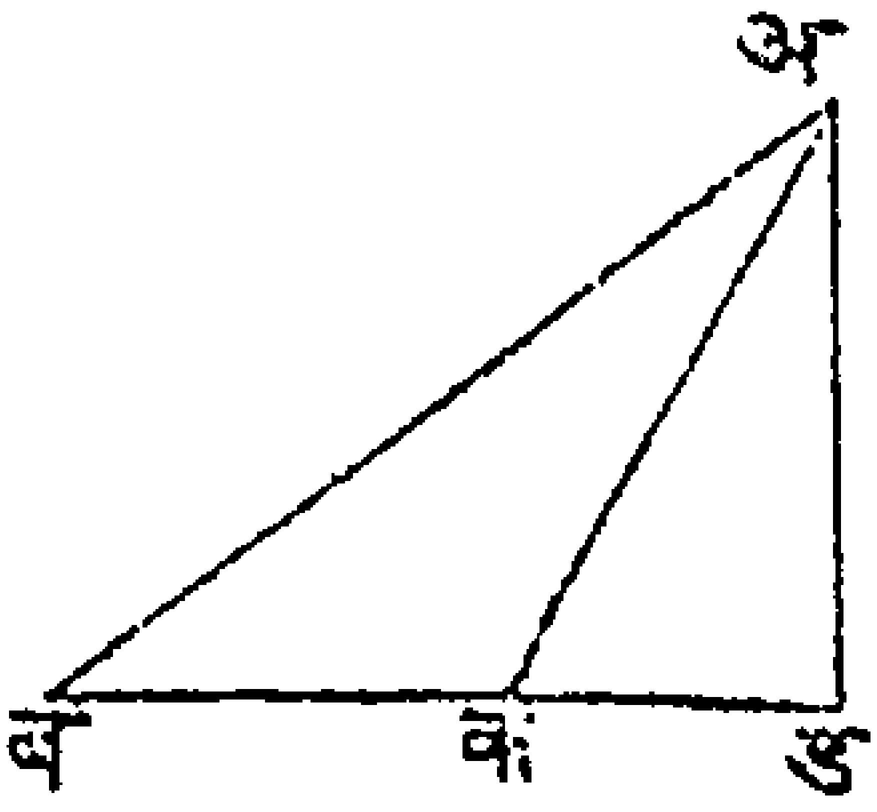
८. “ दिलेल्या रेषेचे २.११ प्रमाणें दोन भाग करून त्यांपैकीं मोठ्या भागाचा लहान भागाएवढा तुकडा पाडिला, तर ज्या बिंदूंत तुकडा पडतो त्या बिंदूंत मोठा भाग ही २.११ प्रमाणेंच विभागिला जातो, व तो तुकडा त्याचा मोठा भाग असतो ” असें सिद्ध करा.

९. (२.११) च्या आकृतीवरून असें दाखवा कीं, “ २.११ प्रमाणें विभागिलेल्या रेषेचा मोठा भाग हा, ती रेषा व तिचें अर्ध ह्यांच्या चौरसांच्या बेरजेबरोबर जिचा चौरस आहे, अशी रेषा व तें अर्ध ह्यांच्या वजाबाकीबरावर असतो. ”

सिद्धांत १२. प्रमेय.

विशालकोणत्रिकोणाच्या विशालकोणासमोरच्या बाजूवरील चौरस हा, इतर बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, इतर बाजूंपैकीं एक वाढवून तीवर समोरच्या कोणबिंदूपासून काढिलेल्या लंबाचें विशालकोणबिंदूपासून अंतर व तीच बाजू ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, जास्त असतो.

अबक त्रिकोणाचा **अकब** हा विशालकोण आहे; तर **अब** बाजूवरील चौरस हा, **अक** आणि **बक** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, **बक** वाढवून तीवर **अ** बिंदूपासून काढिलेल्या **अड** लंबाचें **क** बिंदूपासून अंतर **कड** आणि तीच बाजू **बक** ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, जास्त होईल.



क बिंदूंत **बड** रेषेचे दोन भाग झाले आहेत, म्हणून **बड** वरील चौरस हा, **बक** आणि **कड** ह्यांवरील चौरस आणि **बक**, **कड** काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे. (२.४)

ह्यांतील प्रत्येकांत **डअ** वरील चौरस मिळविला;

तेव्हां **बड** व **डअ** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **बक, कड, डअ** ह्यांवरील चौरसें आणि **बक, कड** काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरावर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु **अडब** कोन काटकोन आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून **अब** वरील चौरस हा, **बड, डअ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे; आणि **कअ** वरील चौरस हा, **कड, डअ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे. (१.४७)

म्हणून **अब** वरील चौरस हा, **बक** व **कअ** ह्यांवरील चौरसें आणि **बक, कड** काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरावर आहे.

(प्र. प्र. १. प्र प्र. २ व प्र. प्र. १)

म्हणजे **अब** वरील चौरस हा, **बक, कअ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, **बक, कड** काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, जास्त आहे.

ह्याकारितां विशालकोणत्रिकोणाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (२.१२) ह्यामध्यें विशालकोणत्रिकोणाच्या कोणत्या बाजूवरील चौरस जास्त ठरविला आहे? कशापेक्षां जास्त ठरविला आहे? केवढ्यानें जास्त ठरविला आहे? इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेमध्यें काय मिळविल्यानें विशालकोणासमोरच्या बाजूवरचा चौरस होईल? विशालकोणासमोरच्या बाजूवरचा चौरस, आणि इतर बाजूंपैकीं एकीवर समोरच्या कोणबिंदूपासून काढिलेल्या लंबाचें विशालकोण बिंदूपासून अंतर व तीच बाजू ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट, ह्या दोहोंपैकीं जास्त कोणतें? केवढ्यानें जास्त?

२. (२.१२) च्या आकृतीमध्यें **बक** वाढवून तीवर **अ** बिंदूपासून लंब काढिला आहे; तसें न करितां **अक** वाढवून तीवर **ब** बिंदूपासून लंब काढा; आणि त्या सिद्धांताची व्यक्तिप्रतिज्ञा सांगून तो सिद्ध करून दाखवा.

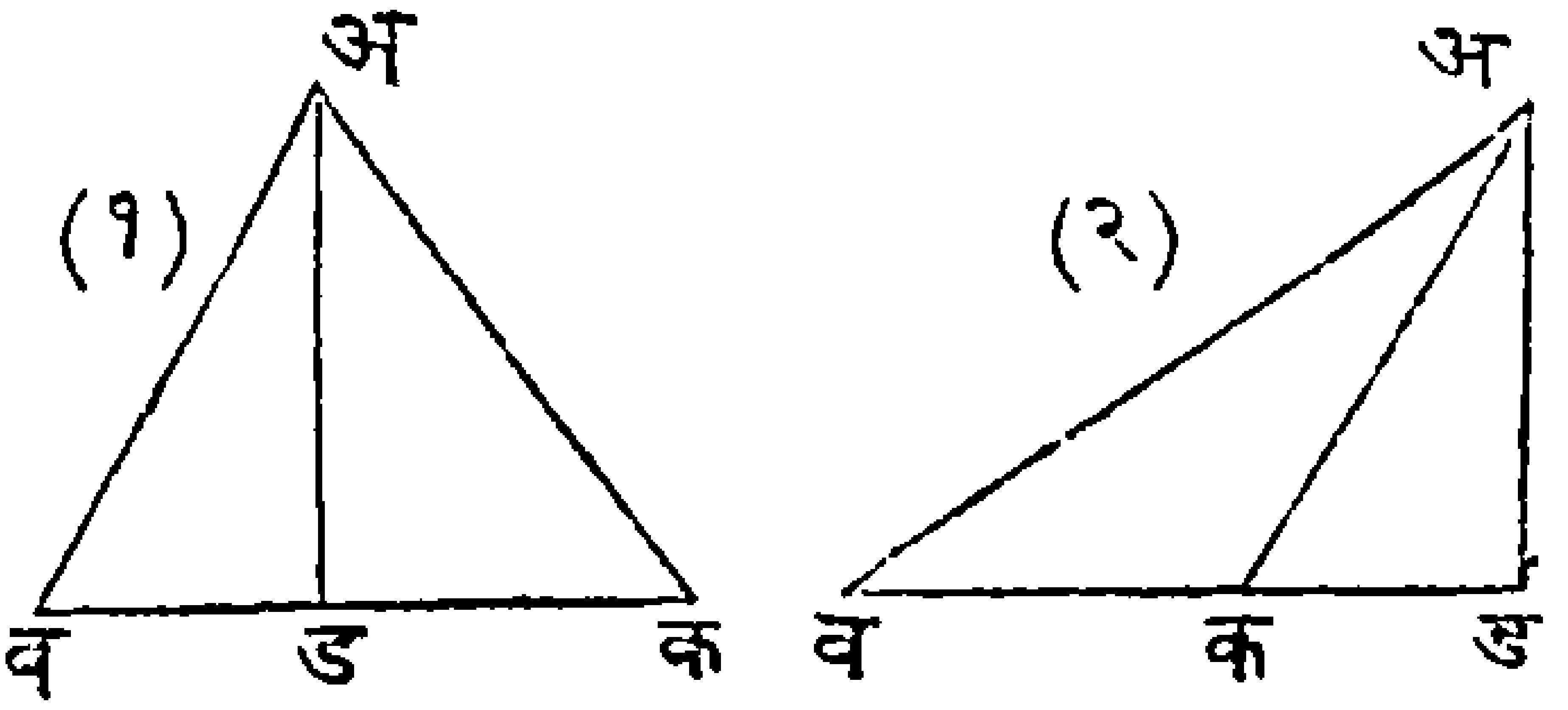
३. विशालकोणत्रिकोणाच्या विशालकोणाजवळच्या दोन्ही बाजू वाढवून त्यांवर समोरच्या कोणबिंदूपासून लंब काढिले, तर एक बाजू व विशालकोणबिंदूपासून तीवरच्या लंबापर्यंत अंतर ह्यांचा

काटकोनचौकोन हा, दुसरी बाजू व विशालकोणबिंदूपासून तीवरच्या लंबापर्यंत अंतर ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर असतो.

सिद्धांत १३. प्रमेय.

कोणत्याही त्रिकोणाच्या लघुकोनासमोरच्या बाजूवरील चौरस हा, इतर बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, इतर बाजूंपैकीं एकीवर समोरच्या कोणबिंदूपासून काढिलेल्या लंबाचें लघुकोणबिंदूपासून अंतर व तीच बाजू ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, कमी असतो.

(लघुकोन त्रिकोण (१) व विशालकोणत्रिकोण (२) ह्यांस एकच सिद्धता लागू पडते. ती आधीं लिहिली आहे; आणि मग (३) काटकोनत्रिकोणाची लिहिली आहे.)



(१) व (२) ह्या प्रत्येक आकृतींत **अबक** त्रिकोणाचा **ब** हा लघुकोण आहे; **अ** बिंदूपासून, (१) ह्या आकृतींत **बक**वर आणि (२) ह्या आकृतींत **बक** वाढवून तीवर, **अड** लंब काढिला आहे. तर **अक**वरील चौरस हा, **अब**, **बक** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, **बक**, **बड** काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, कमी होईल.

(१) ह्या आकृतींत **बक** रेषेचे **ड** बिंदूंत दोन भाग झाले आहेत व (२) ह्या आकृतींत **बड** रेषेचे **क** बिंदूंत दोन भाग झाले आहेत, म्हणून प्रत्येक आकृतींत **बक**, **बड** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **बक**, **बड** काटकोनचौकोनाची दुप्पट व **कड**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे. (२.७)

ह्या प्रत्येकांत **अड**वरील चौरस मिळविलें;

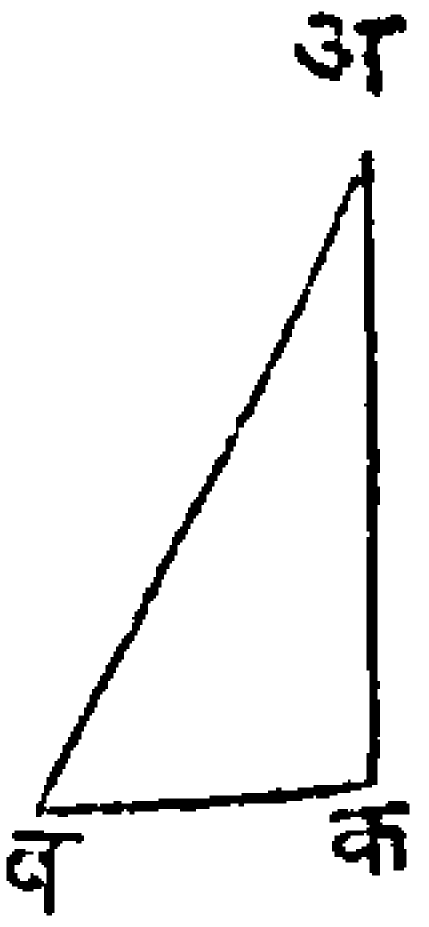
तेव्हां **बक**, **बड**, **अड** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, **बक**, **बड** काटकोनचौकोनाची दुप्पट व **कड**, **अड** ह्यांवरील चौरसें ह्यांच्या बेरजेबरोबर झाली. (प्र.प्र.२)

परंतु **बड**, **अड** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **अब**वरील चौरसाबरा-

वर आहे; व कड, अड ह्यांवरील चौरसांची बेरीज अकवरील चौरसाबरोबर आहे; (१.४७)
म्हणून बक, अब ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, बक, बड काटकोनचौकोनाची दुप्पट व अकवरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. २, प्र. प्र. १, प्र. प्र.२ व प्र.प्र १)
म्हणजे एकटा अक वरील चौरस हा, अब, बक ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, बक, बड काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, कमी आहे.

(३) आतां जर अबक त्रिकोणाची अक बाजू बकवर लंब असेल, तर बक बाजू हेंच लंबाचें लघुकोणबिंदूपासून अंतर होईल; आणि मग ह्या सिद्धांताच्या प्रतिज्ञेला असें स्वरूप येईल कीं, "अकवरील चौरस हा, अब, बक ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, बकवरील चौरसाच्या दुपटीनें, कमी होईल."

(३)



आतां अक, बक ह्यांवरील चौरसांची बेरीज अबवरील चौरसाबरोबर आहे. (१.४७)
ह्या प्रत्येकांत बक वरील चौरस मिळविलें; तेव्हां अकवरील चौरस व बकवरील चौरसाची दुप्पट ह्यांची बेरीज ही, अब, बक ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर झाली. (प्र. प्र. २)
म्हणजे एकटा अकवरील चौरस हा, अब, बक ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, बकवरील चौरसाच्या दुपटीनें, कमी आहे.

ह्याकरितां कोणत्याही त्रिकोणाच्या इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (२. १३) ह्यामध्यें त्रिकोणाच्या लघुकोणासमोरच्या बाजूवरील चौरस कशापेक्षां कमी ठरविला आहे? केवढ्यानें कमी ठरविला आहे? लघुकोनासमोरच्या बाजूवरील चौरसांत काय मिळविल्यानें इतर दोन बाजूंवरील चौरसांची बेरीज तयार होईल?

२. (२. १३) च्या (१) व (२) ह्या आकृतींत बक वर अ बिंदूपासून लंब काढिला आहे, तसें न करितां अब वर क बिंदूपासून लंब काढा, आणि तो सिद्धांत सिद्ध करून दाखवा.

३. (२. १३) च्या प्रत्येक आकृतींत **अ** ह्या लघुकोनासमोरच्या **बक** बाजूवरील चौरस इतर बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां केवढ्यानें कमी आहे? हें सांगून प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवा.

४. (२. १३) च्या (१) व (२) ह्या आकृतींत **क** बिंदूपासून **अब** वर काढिलेला लंब तिला **इ** बिंदूंत मिळतो असें माना; आणि **बक**, **बड** काटकोनचौकोन **बअ**, **बइ** काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

५. (२. १३) च्या (३) आकृतींत **अक** रेषेंतल्या **ड** ह्या एका बिंदूपासून **अब**वर **डइ** लंब काढिला आहे; तर **अब**, **अइ** काटकोनचौकोन **अक**, **अड** काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

६. त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनाच्या दोन बाजूंपैकीं एकीच्या टोकापासून दुसरीवर (किंवा दुसरी वाढवून तीवर) काढिलेल्या लंबाचें त्या कोनाच्या कोणबिंदूपासून जें अंतर, त्याला "पहिल्या बाजूची दुसऱ्या बाजूवरील **छाया**" अशी संज्ञा दिली असतां, २.१२ व २.१३ ह्यांच्या प्रतिज्ञांमध्यें बराच संक्षेप करितां येतो, असें दाखवा.

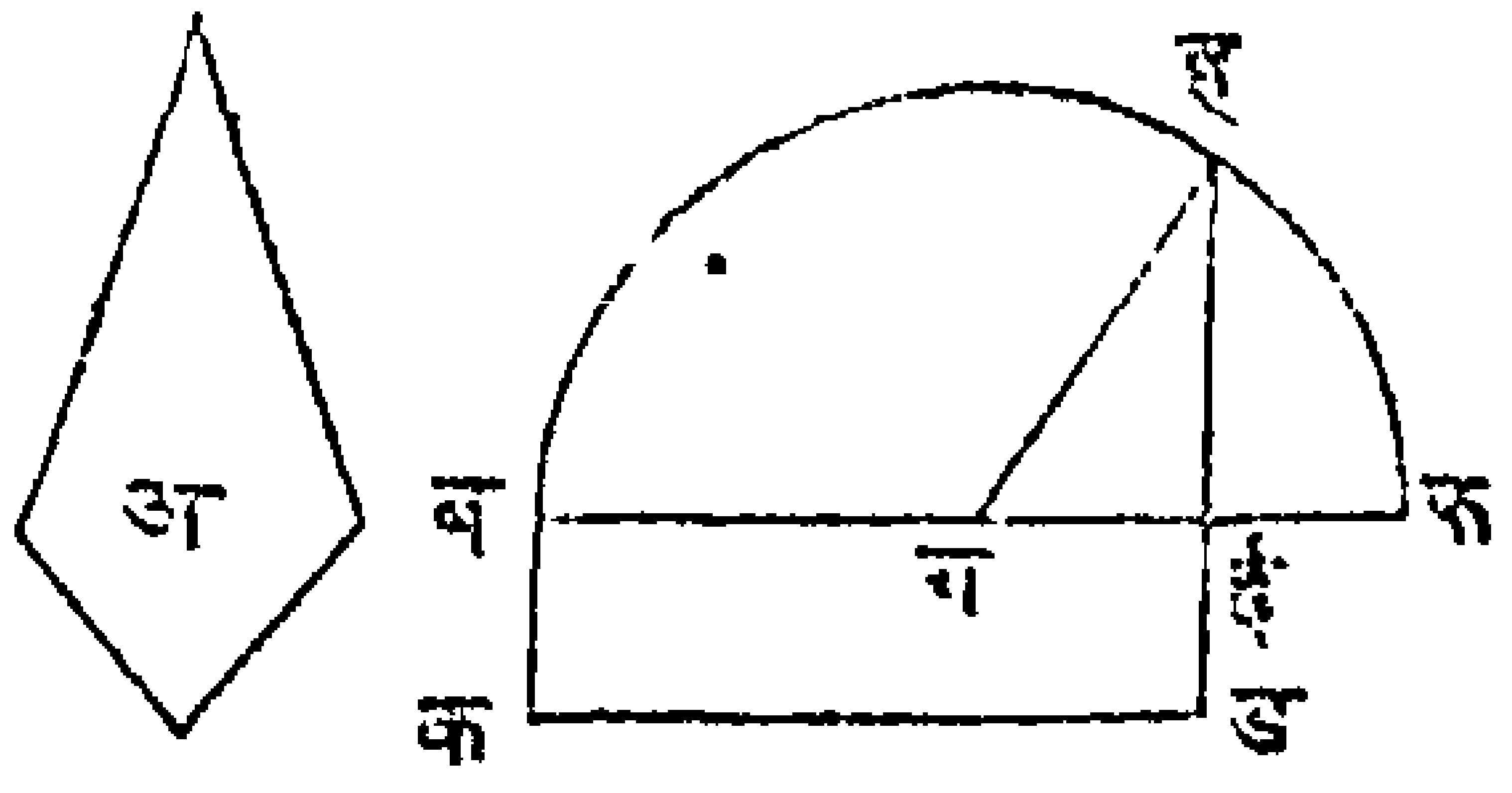
सिद्धांत १४. प्रमेय.

दिलेल्या सरळरेषाकृतीबरोबर एक चौरस काढावयाचें.

अ ही एक दिलेली सरलरेषाकृति आहे, व तीबरोबर एक चौरस काढावयाचा आहे.

बकडई हा असा एक समांतरभुजचौकोन काढ कीं, तो **अ** ह्या सरलरेषाकृतीबरोबर होईल व त्याचा एक कोन काटकोन होईल. (१.४५)

आतां **बकडई** हा समांतरभुजचौकोन आहे व त्याचा एक कोन काटकोन आहे, (रचना) म्हणून त्याचे सर्व कोन काटकोन आहेत; (१.४६ उपसि. १)



आणि जर त्याच्या बई, ईड ह्या बाजू समान असतील,
तर बकडई हें चौरस ठरेल; (१.४६ उपसि. २)
आणि मग अर्थातच हें इच्छिलेलें चौरस होईल.

परंतु जर बई, ईड ह्या समान नसतील,
तर बई ही त्यांपैकीं कोणती तरी एक बाजू वाढीव; (गृ. कृ. २)
तिचा ईड एवढा ईफ तुकडा पाड; (१.३)
बफ रेषा ग बिंदूंत दुभाग; (१. १०)
ग मध्य कल्पून गफ त्रिज्येनें बहफ अर्धवर्तुल काढ; (गृ. कृ. ३)
व डई रेषा परिघाला ह बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)

ह्मणजे ईह रेषेवरील चौरस अ सरलरेषाकृतीबरोबर होईल.
कारण; गह सांध. (गृ. कृ. १)
आतां बफचे ग बिंदूंत दोन समान भाग, आणि ई बिंदूंत दोन असमान भाग झाले आहेत, ह्मणून बई, ईफ काटकोनचौकोन आणि गई वरील चौरस मिळून, गफवरील चौरसाबरोबर आहेत. (२. ५)

पण गफ, गह बरोबर आहे; (१. व्याख्या १५)
ह्मणून त्यांवरील चौरसें समान आहेत. (१. इ)
ह्मणून बई, ईफ काटकोनचौकोन आणि गईवरील चौरस मिळून गहवरील चौरसाबरोबर आहेत. (प्र. प्र. १)
परंतु गहवरील चौरस, गई आणि ईह ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर आहे; (१.४७)
ह्मणून बई, ईफ काटकोनचौकोन आणि गईवरील चौरस मिळून, गई आणि ईह ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर आहेत. (प्र. प्र. १)

ह्या प्रत्येकांतून दोहांत साधारण असणारा गईवरील चौरस काढून टाकिला;
तेव्हां बई, ईफ काटकोनचौकोन, ईह वरील चौरसाबरोबर आहे. (प्र.प्र. ३)

परंतु ईफ, ईड बरोबर आहे, (रचना)

म्हणून **बड** हा **बई**, **ईफ** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे; (२. व्या.१)
म्हणून **बड** काटकोनचौकोन, ईहवरील चौरसाबरोबर आहे.
पण **बड** काटकोनचौकोन **अ** सरळरेषाकृतीबरोबर आहे; (रचना)
म्हणून ईहवरील चौरस **अ** सरळरेषाकृतीबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, ईह ही अशी रेषा काढिली आहे कीं, तीवर १.४६ प्रमाणें चौरस काढिलें असतां तें दिलेल्या **अ** आकृतीबरोबर होईल.

प्रश्न.

१. (२. १४) च्या रचनेंत **बई** रेषा वाढवून तिचा **डई** एवढा तुकडा पाडिला आहे; तसें न करितां **डई** रेषा वाढवून तिचा **बई** एवढा तुकडा पाडा, आणि त्याच्या योगानें इच्छिलेलें चौरस काढून दाखवा.

२. (२.१४) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

३. (२. १४) च्या आकृतींत **बई** ही **ईड**पेक्षां मोठी मानिल्यास, **ईह** रेषा **बई**पेक्षां लहान आहे व **ईड** पेक्षां मोठी आहे, असें ठरवा; आणि त्यावरून, "दोन असमान रेषांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर जिचें चौरस असतें, ती रेषा त्या असमानरेषांपैकीं मोठीपेक्षां लहान असते व धाकटीपेक्षा मोठी असते" हीं दोन प्रमेयें सिद्ध होतात, असें दाखवा.

४. "दिलेल्या चौरसाबरोबर असणाऱ्या एका काटकोनचौकोनाची एक बाजू दिली आहे, तर तो काटकोनचौकोन तयार करावयाचा" हें कृत्य १. ४४ ह्याचाच एक विशेष प्रकार आहे, असें दाखवा; आणि ह्याची रीति सांगा.

दुसऱ्या पुस्तकावर प्रश्न.

(१) दुसऱ्या पुस्तकाचे मुख्य विषय कोणते? (२) दुसऱ्या पुस्तकाच्या कोणकोणत्या सिद्धांतांचा त्यांतीलच इतर सिद्धांतांमध्यें समावेश होतो, असें दाखवितां येतें? (३) दुसऱ्या पुस्तकांत वस्तुतः निरनिराळे सिद्धांत कोणते कोणते आहेत? (४) रेषेचे आंतरभाग व बाह्यभाग म्हणजे काय? (५) रेषेचे असे दोन प्रकारचे भाग मा-

निले, तर (२. ९ व २. १०) ह्यांचा एकाच प्रतिज्ञेंत समावेश होतो, असें दाखवा.

२. " दिलेल्या दोन रेषांपैकीं प्रत्येकीचे तिसऱ्या एका रेषेएवढाले भाग केले, तर त्या दोन रेषांचा काटकोनचौकोन हा, तिसऱ्या रेषेवरील चौरसाच्या, भागसंख्यांच्या गुणाकाराइतक्या पटीबरोबर असतो " हें प्रमेय आकृतीच्या योगानें सिद्ध करून दाखवा.

३. " दिलेल्या रेषेचें दुसऱ्या एका रेषेएवढाले भाग केले, तर पहिल्या रेषेवरील चौरस हें, दुसऱ्या रेषेवरील चौरसाच्या, भागसंख्येच्या वर्गाइतक्या पटीबरोबर असतें " हें प्रमेय आकृतीच्या योगानें सिद्ध करून दाखवा.

४. आकृतीचें क्षेत्रफळ म्हणजे काय ? आकृतींचीं क्षेत्रफळें बहुधा कोणत्या प्रकारच्या आकृतींनीं मोजितात ? इंच, फूट, हात, मैल, सांखळी इत्यादिक परिमाणें कोणतें परिमेय मोजण्याकरितां कल्पिलीं आहेत ? ज्या रेषेची लांबी एक इंच, एक फूट अथवा एक हात इ० आहे, तिच्यावरील चौरसाला काय म्हणतात ?

५. पहिल्या पुस्तकाचें पांचवें खंड आणि वरील दुसरा आणि तिसरा ह्या प्रश्नांतलीं प्रमेयें ह्यांच्या आधारावर (१) काटकोनचौकोन, (२) चौरस, (३) त्रिकोण, (४) समभुजचौकोन, (५) समांतरभुज चौकोन, (६) समांतरद्विभुजचौकोन, (७) कोणताही चौकोन, व (८) कोणतीही सरलरेषाकृति ह्यांचीं क्षेत्रफळें काढण्याचे नियम तयार करून दाखवा.

६. दोन रेषा व त्यांचा काटकोनचौकोन ह्यांचें, दोन संख्या व त्यांचा गुणाकार ह्यांशीं एका प्रकारचें सादृश्य आहे, असें (दुसऱ्या प्रश्नांतल्या प्रमेयाच्या आधारानें) प्रत्ययास आणून द्या. तसेंच कोणतीही रेषा व तीवरील चौरस ह्यांचें, कोणतीही संख्या व तिचा वर्ग ह्यांशीं त्याच प्रकारचें सादृश्य आहे, असें (तिसऱ्या प्रश्नांतल्या प्रमेयाच्या आधारानें) प्रत्ययास आणून द्या.

७. दुसऱ्या पुस्तकाचे १२ व १३ हे दोन खेरीज करून बाकीचे सर्व सिद्धांत व त्यांचीं रूपांतरें, ह्यांच्या प्रतिज्ञा संख्यांस उद्देशून स्व-

णून दाखवा; आणि प्रत्येक सिद्धांताचें एकेक उदाहरण घेऊन त्या सिद्धांतांचा खरेपणा प्रत्ययास आणून द्या.

८. (२. ११) प्रमाणें एखाद्या रेषेचे जर दोन भाग केले, तर ती रेषा व तिचे दोन भाग हीं तिन्हीं अन्योन्यापरिच्छेद्य असतात (म्हणजे तीं कोणत्याही एकाच रेषा परिमाणानें नेमकीं मोजितां येत नाहींत) असें दाखवा.

९. (२.७), (२. १३), (१.४७), (२.१२) व (२.४), ह्या पांच सिद्धांतांची एक चमत्कारिक सांगड बनते, असें आकृतीच्या योगानें स्पष्ट करून दाखवा.

१०. त्रिकोणाचा शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेवरील चौरसाची दुप्पट व पायाच्या अर्धावरील चौरसाची दुप्पट ह्यांची बेरीज ही, त्रिकोणाच्या इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर असते. (ह्याला इतःपर दुसऱ्या पुस्तकाचा अ सिद्धांत म्हणूं).

११. समांतरभुजचौकोनाच्या दोन्ही कर्णांवरील चौरसांची बेरीज त्याच्या चारही बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर असते.

१२. "चौकोनाच्या चारही बाजूंवरील चौरसांची बेरीज ही, त्याच्या दोन्ही कर्णांवरील चौरसें व कर्णांचे मध्य सांधणाऱ्या रेषेवरील चौरसाची चौपट ह्यांच्या बेरजेबरोबर असते" हें प्रमेय सिद्ध करा; व ११ व्या प्रश्नांतील प्रमेयाचा ह्या प्रमेयांत अंतर्भाव होतो, असें दाखवा.

१३. त्रिकोणाच्या तीन्ही बाजूंवरील चौरसांच्या तिपटींची बेरीज ही, त्याचे तिन्ही कोणबिंदु व समोरच्या बाजूंचे मध्य ह्यांस सांधणाऱ्या तीन रेषांवरील चौरसांच्या चौपटींच्या बेरजेबरोबर असते.

१४. समद्विभुजत्रिकोणाच्या समान बाजूंपैकीं एक पायापलीकडे वाढवून तिचा त्याच बाजूएवढा (पायाच्या टोंकापासून) तुकडा पाडिला, आणि जेथें तुकडा पडला तो बिंदु व पायाचें दुसरें टोंक हीं सांधिलीं; तर सांधणाऱ्या रेषेवरील चौरस हें, पायावरील चौरसाची दुप्पट व समान बाजूंपैकीं एकीवरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतें.

१५. चौकोनाच्या दोन्ही कर्णांवरील चौरसांची बेरीज ही, समोरासमोरच्या दोन दोन बाजूंचे मध्य सांधणाऱ्या दोन रेषांवरील चौरसांच्या दुपटींच्या बेरजेबरोबर असते.

१६. एका वर्तुळाच्या अब व्यासामध्यें क, ड हे बिंदु वर्तुलमध्यापासून समान अंतरांवर आहेत आणि परिघांतल्या इ ह्या एका बिंदूपासून इक, इड रेषा काढिल्या आहेत. तर इक, इड ह्यांवरील चौरसांची बेरीज अक, अड ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे, असें सिद्ध करा.

१७. कोणत्याही बिंदूपासून काटकोनचौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन कोणबिंदूंपर्यंत काढिलेल्या रेषांवरील चौरसांची बेरीज ही, समोरासमोरच्या दुसऱ्या दोन कोणबिंदूंपर्यंत काढिलेल्या रेषांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर असते.

१८. काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णावरील चौरसाची पांचपट ही, इतर बाजूंचे मध्य व समोरचे कोणबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या दोन रेषांवरील चौरसांच्या चौपटींच्या बेरजेबरावर असते.

१९. अबक त्रिकोणाचे ब, क हे लघुकोण आहेत, आणि ब, क ह्या बिंदूंपासून समोरच्या बाजूंवर टाकिलेले लंब त्यांस अनुक्रमें इ, फ बिंदूंत मिळतात. तर बकवरील चौरस हें, अब, बफ काटकोनचौकोन व अक, कइ काटकोनचौकोन ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

२०. काटकोनत्रिकोणाच्या काटकोनबिंदूपासून कर्णावर लंब काढिला असतां, कर्णाचे जे दोन भाग होतात, त्यांचा काटकोनचौकोन लंबावरील चौरसाबरावर असतो.

२१. काटकोनत्रिकोणाच्या काटकोनबिंदूपासून कर्णावर लंब काढिला असतां कर्णाचे जे दोन भाग होतात, त्यांपैकीं कोणताही एक भाग व कर्ण ह्यांचा काटकोनचौकोन हा, त्या भागाजवळच्या (त्रिकोणाच्या) बाजूवरील चौरसाबरावर असतो.

२२. समद्विभुजत्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायांतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत काढिलेल्या रेषेवरील चौरस व पायाच्या दोन खंडांचा

काटकोनचौकोन ह्यांची बेरीज ही, त्रिकोणाच्या समान बाजूंपैकीं एकीवरील चौरसाबराबर असते.

२३. समद्विभुजत्रिकोणाचा पाया वाढवून वाढविलेल्या भागांतील कोणताही बिंदु व शिरोबिंदु हे सांधिले, तर सांधणाऱ्या रेषेवरील चौरस हें, त्या बिंदूपासून पायाच्या दोन्ही टोंकांपर्यंत अंतरांचा काटकोनचौकोन व त्रिकोणाच्या समान बाजूंपैकीं एकीवरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर होतें.

२४. (१) काटकोनत्रिकोणाचा कर्ण व काटकोनबिंदूपासून कर्णावर काढिलेला लंब ह्यांचा काटकोनचौकोन हा, इतर दोन बाजूंच्या काटकोनचौकोनाबराबर असतो. (२) काटकोनत्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू ह्यांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांचा काटकोनचौकोन हा, दुसऱ्या बाजूवरील चौरसाबराबर असतो.

२५. काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णाखेरीज दोन बाजूंच्या (१) बेरजेवरील चौरस हा, त्या बाजूंच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व कर्णावरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतो; आणि (२) वजाबाकीवरील चौरस व काटकोनचौकानाची दुप्पट ह्यांची बेरीज कर्णावरील चौरसाबराबर असते.

२६. "दोन रेषांची बेरीज दिलेल्या एका रेषेबराबर आहे, आणि वजाबाकी दिलेल्या दुसऱ्या रेषेबराबर आहे. तर त्या दोन रेषा केवढाल्या असतील?" ह्या प्रश्नाचें उत्तर काढण्याची सामान्य रीति सांगा; व ती रीति संख्यांनाही लावून दाखवा.

२७. काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णावरील चौरस हें, कर्णाचा मध्य व काटकोनबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेवरील चौरसाच्या चौपटीबरोबर असतें.

२८. ज्या काटकोनत्रिकोणाचा एक कोन काटकोनाच्या तृतीयांशाबराबर असतो, त्याच्या त्या बाजूवरील चौरसाच्या चौपटीबराबर कर्णावरील चौरस असतो, व तिपटीबरोबर दुसऱ्या बाजूवरील चौरस असतो.

२९. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायावर टाकिलेल्या लंबानें पायाचे जे दोन खंड होतात, त्यांचा काटकोनचौकोन जर लंबावरील चौरसाबरावर असेल, तर शिरकोन काटकोन असतो.

३०. (काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णाखेरीज दोन बाजूंपैकीं एकीला "भुज" व दुसरीला "कोटि" म्हणतात. काटकोन बिंदूपासून कर्णावर टाकिलेल्या लंबाला "लंब" च म्हणूं. लंबामुळें कर्णाचे जे दोन खंड होतात, त्यांस "आबाधा" म्हणतात. त्यांपैकीं भुजाजवळच्या खंडास "भुजाबाधा" व कोटीजवळच्या खंडास "कोट्याबाधा" ह्मणूं.)

काटकोनत्रिकोणाचा (१) भुज, (२) कोटि, (३) कर्ण, (४) लंब, (५) भुजाबाधा व (६) कोट्याबाधा ह्यांपैकीं कांहींच्या लांब्या (फूट, हात इत्यादिक) एकाच रेषापरिमाणाच्या योगानें दाखविणाऱ्या संख्या दिल्या असतां, बाकीच्या रेषांच्या लांब्या दाखविणाऱ्या संख्या काढावयाच्या; असल्या खालीं लिहिलेल्या कृत्यांच्या सामान्य रीति (पहिलीं दोन पुस्तकें व त्यांवरील प्रश्न ह्यांच्या आधारानें) तयार करून दाखवा.

(१) भुज व कोटी, हीं दिलीं असतां, लंब व दोन्ही आबाधा काढावयाच्या.

(२) भुज (अथवा कोटि) व कर्ण हीं दोन दिलीं असतां कोटि (अथवा भुज), लंब व दोन्ही आबाधा हीं काढावयाचीं.

(३) दोन्ही आबाधा दिल्या असतां, भुज, कोटि, कर्ण व लंब हीं काढावयाचीं.

(४) भुज व कोटि ह्यांपैकीं एक व त्याच्याच जवळची आबाधा हीं दिलीं असतां, इतर रेषा काढावयाच्या.

(५) लंब व एक आबाधा हीं दिलीं असतां, दुसरी आबाधा व भुज हीं काढावयाचीं.

(६) भुज व कोटि ह्यांपैकीं एक व लंब हीं दिलीं असतां कर्ण काढावयाचा.

(७) कर्ण व लंब हे दिले असतां, दोन्ही आबाधा व भुज हीं काढावयाचीं.

(८) भुज व कोटि ह्यांची बेरीज व कर्ण हीं दोन दिलीं असतां, भुज व कोटि हीं काढावयाचीं.

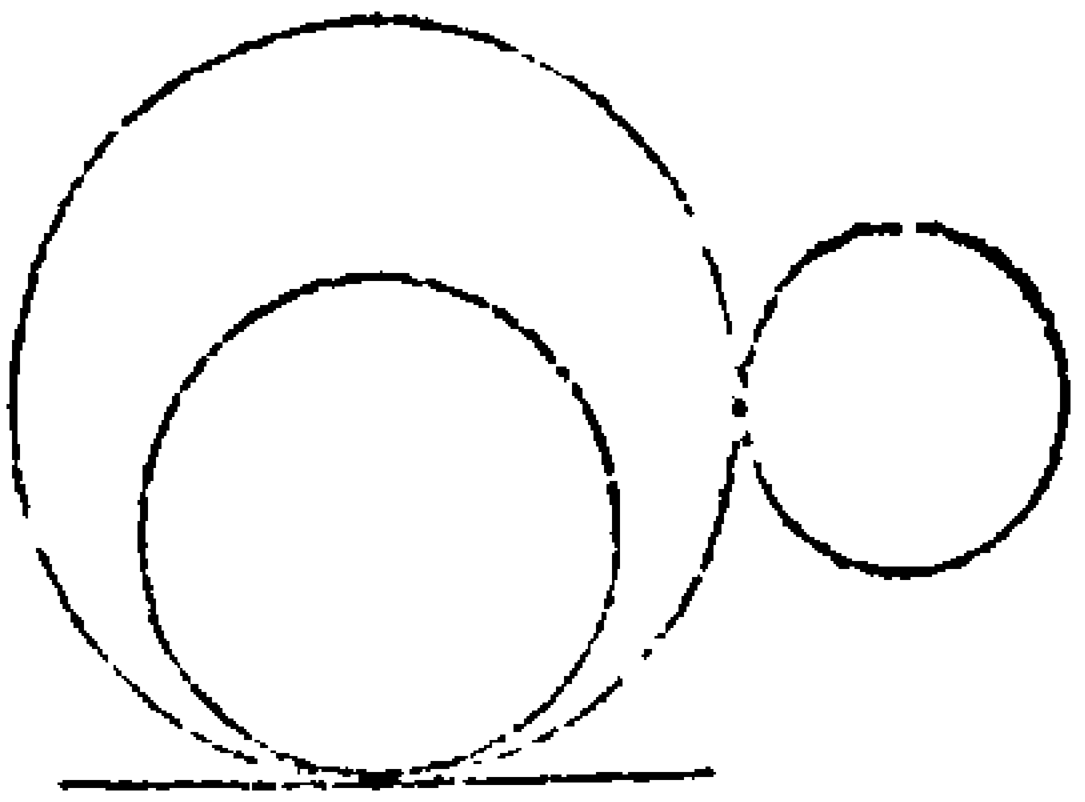
(९) भुज व कोटि ह्यांची वजाबाकी व कर्ण हीं दोन दिलीं असतां, भुज व कोटि हीं काढावयाचीं.

(१०) कर्ण व भुज (अथवा कोटि) ह्यांची बेरीज अथवा वजाबाकी आणि कोटि (अथवा भुज) हीं दोन दिलीं असतां, भुज व कोटि हीं काढावयाचीं.

तिसरें पुस्तक.

व्याख्या.

१ वर्तुलाच्या परिघांतल्या कोणत्याही दोन बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेला **ज्या** म्हणतात.



२ जी रेषा वर्तुलास मिळते, परंतु (दोन्ही अंगांस) कितीही वाढविली तरी त्याला कापीत नाहीं, तिला त्या वर्तुलाची **स्पर्शरेषा** म्हणतात.

(अ) जी रेषा वर्तुलास कापून पार जाते, तिला त्या वर्तुळाची **छेदकरेषा** म्हणावें.

३ जर दोन वर्तुलांचे परिघ परस्परांस कोठेंतरी (एखाद्या बिंदूंत मिळाले असतील, व (१) परिघांच्या त्या मेलनबिंदूखेरीज एका वर्तुलाचे सर्व बिंदु दुसऱ्या वर्तुलाच्या आंत असतील, तर तीं परस्परांस **आंतून स्पर्श करणारीं वर्तुलें** म्हणावीं; आणि (२) परिघांच्या त्या मेलनबिंदूखेरीज प्रत्येक वर्तुलाचे सर्व बिंदु दुसऱ्या वर्तुलाच्या बाहेर असतील, तर तीं परस्परांस **बाहेरून स्पर्श करणारीं** वर्तुलें म्हणावीं. (३) परस्परांस आंतून किंवा बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुलांस **स्पर्शक वर्तुलें** म्हणावें.

(वर्तुलाची स्पर्शरेषा व त्याचा परीघ ह्यांचें मेलन, तसेंच दोन स्पर्शक वर्तुलांच्या परिघांचें मेलन एकेकाच बिंदूमध्यें होतें, त्या

गोष्टी वरील व्याख्यांमध्यें स्वीकारिल्या आहेत, असें समजूं नये. ह्या पुढें सिद्ध केल्या पाहिजेत.)

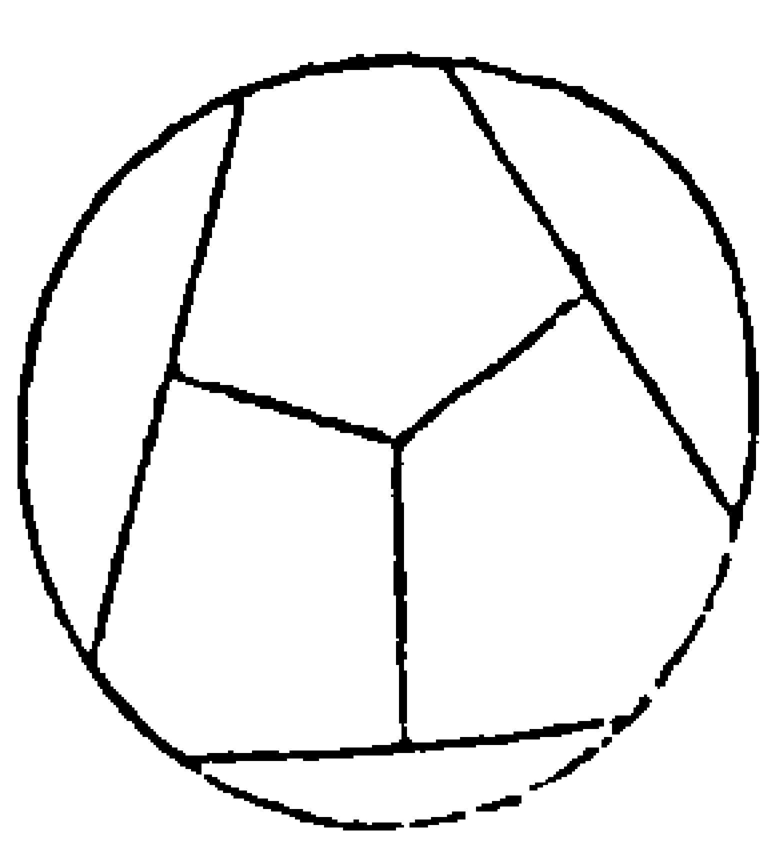
(४) वर्तुलाची स्पर्शरेषा व त्याचा परिघ ह्यांना, तसेंच स्पर्शक वर्तुलांच्या परिघांना जे एक किंवा अनेक बिंदु साधारण असतात, त्यांना **स्पर्शबिंदु** म्हणावें.

(आ) जीं वर्तुलें एकमेकांस कापितात, त्यांना **छेदक वर्तुलें** म्हणावें.

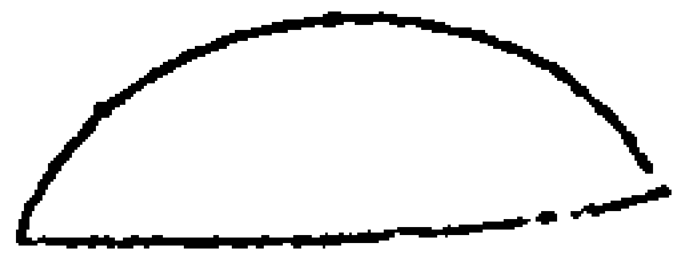
(इ) वर्तुलाच्या मध्यबिंदूपासून कोणत्याही रेषेवर काढिलेल्या लंबास त्या रेषेचें **मध्यांतर** ह्मणावें.

४. ज्या रेषांवर वर्तुलाच्या मध्यापासून काढिलेले लंब समान असतात, त्या रेषांस **सममध्यांतर** रेषा म्हणावें.

५. जर एका रेषेवर वर्तुळमध्यापासून काढलेला लंब, दुसऱ्या रेषेवर काढलेल्या लंबापेक्षां मोठा असेल, तर पहिलीस वर्तुलमध्यापासून दुसरीपेक्षां **दूरतर** रेषा म्हणतात.



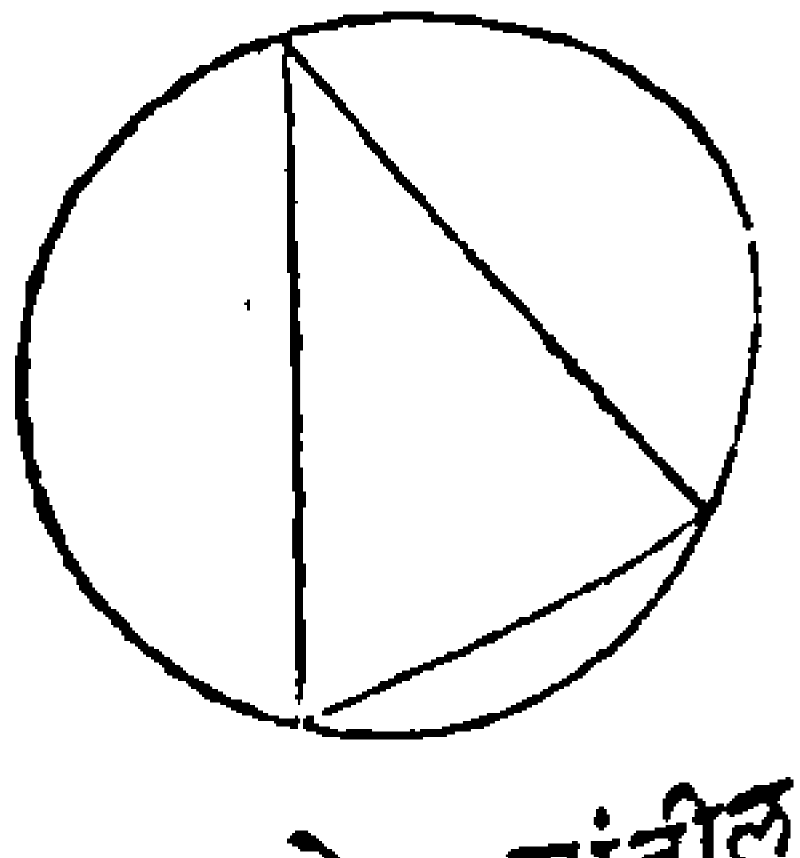
६. (१) ज्या व तिनें कापलेला परिघाचा भाग ह्यांच्या योगानें जी आकृति होते, तीस **वर्तुलखंड** म्हणतात.



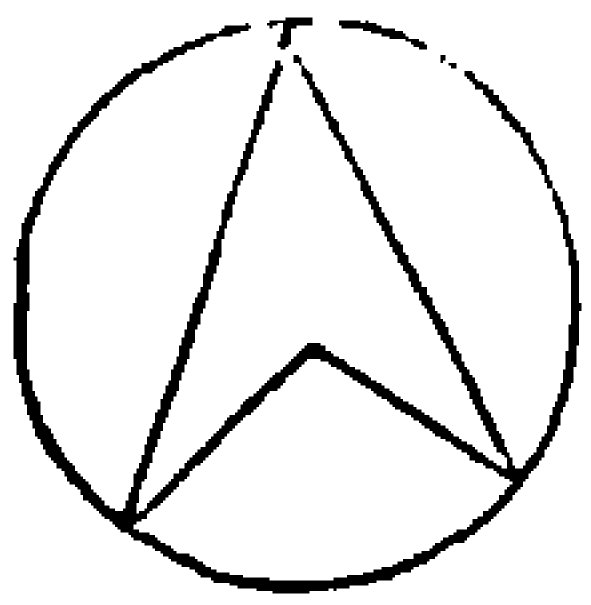
(२) एकाच ज्येनें वर्तुलाचे जे दोन वर्तुलखंड होतात, त्यांपैकीं प्रत्येकाला दुसऱ्याचा **व्युत्क्रमखंड** म्हणतात.

७. परिघाच्या कोणत्याही भागाला **कंस** म्हणतात.

८. वर्तुलखंडाच्या कंसांतील कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या ज्येच्या टोंकांपर्यंत दोन रेषा काढिल्या असतां त्यांच्यामध्यें त्या बिंदूजवळ जो कोन होतो, त्याला त्या **वर्तुलखंडांतला** कोन म्हणतात.



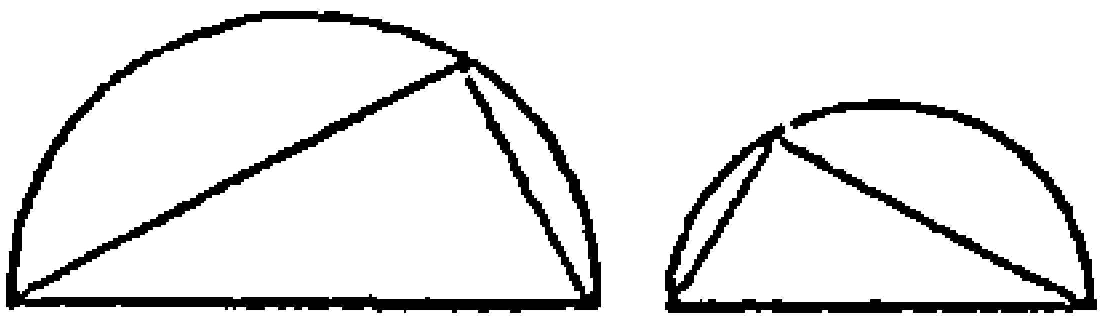
९. (१) विवक्षित कंसाखेरीज जो परिघाचा भाग असेल, त्यांतील



कोणत्याही बिंदूपासून त्या कंसाच्या दोन्ही टोकांपर्यंत रेघा काढिल्या असतां, त्यांच्यामध्यें त्या बिंदूजवळ जो कोन होतो, त्याला **विवक्षित कंसावरचा परिघकोण** म्हणतात.

(२) वर्तुलमध्यापासून विवक्षित कंसाच्या दोन्ही टोकांपर्यंत रेघा काढिल्या असतां त्यांच्यामध्यें त्या कंसाच्या अंगास जो कोन होतो, त्याला **विवक्षित कंसावरचा मध्यकोण** म्हणतात.

१०. दोन त्रिज्या व त्यांच्यामध्यें सांपडलेला कंस ह्यांच्या योगानें जी आकृति होते, तिला **वर्तुलविभाग** म्हणावें.



११. ज्या वर्तुलखंडांतले कोन समान असतात, त्यांना **सरूप वर्तुलखंड** म्हणतात.

(उ) ज्या चौकोनाचे सारे कोणबिंदु दिलेल्या वर्तुलाच्या परिधांत असतात, त्याला त्या **वर्तुलांत काढिलेला चौकोन** म्हणतात.

(ओ) ज्या वर्तुलांचा मध्यबिंदु एकच असतो, त्यांना **समकेंद्र वर्तुलें** म्हणावें.

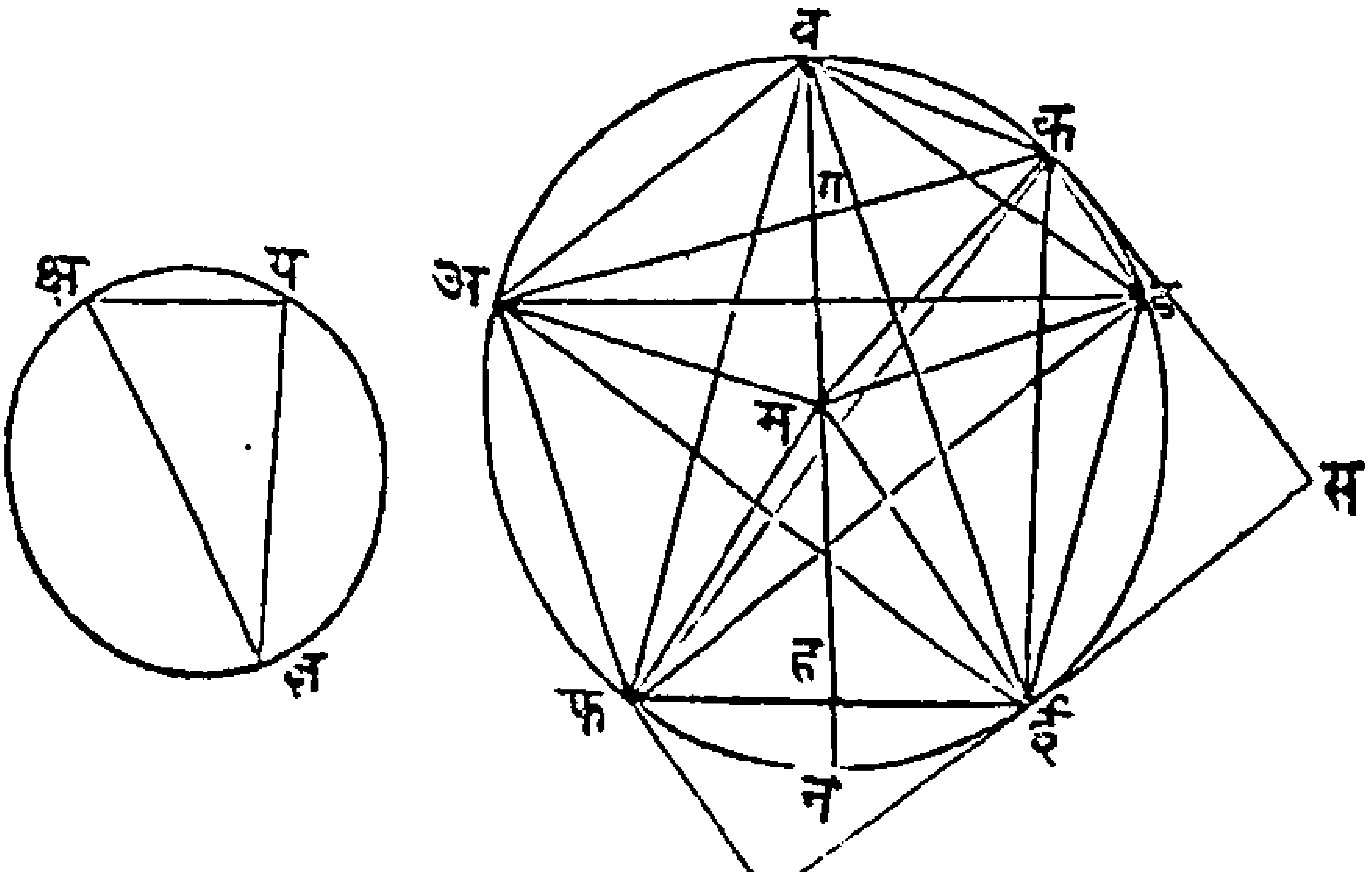
(क) वर्तुलाच्या मध्यबिंदूखेरीज त्या वर्तुलाच्या आंतल्या कोणत्याही बिंदूला **मध्येतरबिंदु** म्हणावें.

(ख) वर्तुलाच्या बाहेरील कोणत्याही एकाच बिंदूपासून त्या वर्तुलास दोन स्पर्शरेघा काढिल्या असतां, स्पर्शबिंदूस सांधणाऱ्या रेघेच्या योगानें परिघाचे जे दोन भाग होतात, त्यांपैकीं, सांधणाऱ्या रेघेच्या ज्या अंगास तो बिंदु असेल, त्या आंगच्या भागाला, त्या बिंदूच्या संबंधानें **बहिर्वक्र परिघ** म्हणतात; व दुसऱ्या आंगच्या भागास **अंतर्वक्र** परिघ म्हणतात.

व्याख्यांविषयीं प्रश्न.

अबकडइफ वर्तुलाचा **म** हा मध्यबिंदु आहे; **अ, ब, क, ड, इ, फ, म** ह्यांपैकीं प्रत्येक बिंदूपासून इतर सर्व बिंदूंपर्यंत रेघा का-

ढिल्या आहेत; **बगमहन** हा व्यास काढिला आहे; आणि **सक, सई, पफ,** पई ह्या स्पर्शरेषा काढिल्या आहेत. तर



१. (१) **अ** बिंदूंत मिळणाऱ्या प्रत्येक ज्येनें झालेले दोन दोन वर्तुलखंड सांगा. (२) **बड** ज्येनें झालेल्या दोन वर्तुलखंडांपैकीं प्रत्येकांतील कोन सांगा. (३) **कडई** कंसावरचे सारे परिघकोण व मध्यकोण सांगा.

२. वरील आकृतींत **बन** व्यासाच्या प्रत्येक अंगास वर्तुलत्रिभाग किती व कोणकोणते आहेत?

३. वरील आकृतींत **बन** व्यासानें झालेल्या प्रत्येक अर्धवर्तुळांतले दोन दोन कोन तयार करून दाखवा.

४. (१) एकाच वर्तुलखंडांत होणाऱ्या कोनांची संख्या सांगतां येईल काय? (२) एकाच कंसावर होणाऱ्या परिघकोनांची संख्या सांगतां येईल काय? (३) एकाच कंसावर अनेक मध्यकोण होतील काय? ("वर्तुलास एकच मध्यबिंदु असतो" ही गोष्ट सिद्ध करून ह्या प्रश्नाचें उत्तर द्या). (४) एकच परिघकोण एकाच वर्तुलाच्या अनेक वर्तुलखंडांतला किंवा अनेक कंसांवरचा होईल काय?

५. वरील आकृतीमध्यें **स, प** ह्या प्रत्येक बिंदूच्या संबंधानें अंतर्वक्रपरिघ कोणता व बहिर्वक्रपरिघ कोणता?

६. (१) कोणत्याही वर्तुलखंडांतला कोन हा, त्याच वर्तुलाच्या

कोणत्या कंसावरचा परिघकोण असतो? (२) कोणत्याही कंसावरचा परिघकोण हा त्याच वर्तुलाच्या कोणत्या वर्तुलखंडांतला कोन असतो?

७. वरील आकृतीमध्यें, **फअव**, **फवड**, **फकड**, **ईवक**, **कअफ**, **डअव** हे कोन कोणकोणत्या वर्तुलखंडांतले व कोणकोणत्या कंसांवरचे आहेत?

८. "**अगन**, **बगक**, **फहव**, **फईम**, **मडई** हे कोन कोणकोणत्या वर्तुलखंडांतले व कोणकोणत्या कंसांवरचे आहेत?" ह्या प्रश्नांचें उत्तर काय द्याल? कां?

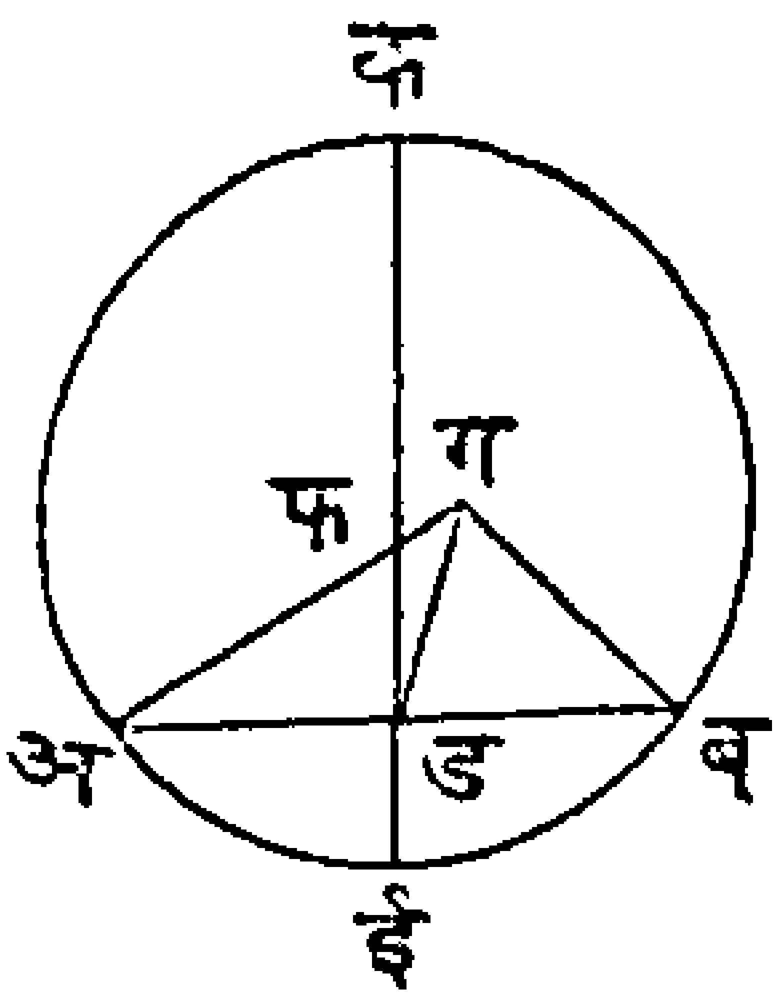
९. (१) एकाच वर्तुलाच्या, समांतर असून सममध्यांतर अशा दोन ज्या मध्यबिंदूच्या एकाच अंगास असणें संभवतें काय? (२) मध्यबिंदूच्या एकाच अंगास असून समांतर असणाऱ्या ज्या सममध्यांतर असणें संभवतें काय? उत्तरांचीं कारणें सांगा.

१०. (१) वरील आकृतीमध्यें **अबई** ह्या त्रिकोणाचे **अ**, **ब**, **ई** ह्या बिंदूजवळील तीन कोन **क्षयज्ञ** ह्या त्रिकोणाच्या **क्ष**, **य**, **ज्ञ** ह्या बिंदूजवळील कोनांशीं अनुक्रमें समान आहेत; तर त्या दोन वर्तुलांचीं कोणकोणतीं वर्तुलखंडें सरूप आहेत? (२) **अकई** हा त्रिकोण समभुज असला, तर **अबकडईफ** वर्तुलाचे कोणकोणते वर्तुलखंड सरूप होतील?

सिद्धांत १. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळाचा मध्य काढावयाचें.

अबक एक दिलेलें वर्तुळ आहे; आणि त्याचा मध्य काढावयाचा आहे.



परिघांतले **अ**, **ब** हे कोणते तरी दोन बिंदु सांध; (गृ. कृ. १)

अब ज्या **ड** बिंदूंत दुभाग; (१. १०)

ड बिंदूंतून **अब**वर **डक** लंब काढ; (१. ११)

तो परिघाला दोन्ही अंगांस **क**, **ई** बिंदूंत मिळेल असें कर;

आणि **कई**, **फ** बिंदूंत दुभाग. (१.१०)

ह्मणजे **फ** बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य होईल.

कारण; जर **फ** मध्य नसेल, तर **ग** मध्य आहे असें मान, आणि **गअ**, **गड**, **गब** सांध. (गृ. कृ. १)
आतां **डअ** बाजू **डब** बाजूबरोबर आहे, (रचना)
आणि **डग** ही **अडग** आणि **बडग** त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून **अडग** त्रिकोणाच्या **अड**, **डग** ह्या दोन बाजू **बडग** त्रिकोणाच्या **बड**, **डग** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत,
आणि **गअ** पाया **गब** पायाबरोबर आहे, कारण ते **ग** मध्यापासून काढिलेले आहेत; (१ व्याख्या १५)
म्हणून **अडग** कोन **बडग** कोनाबरोबर आहे; (१. ८)
म्हणून **बडग** कोन काटकोन आहे. (१. व्याख्या १०)
परंतु **बडफ** कोनही काटकोन आहे. (रचना)
म्हणून **बडग** कोन **बडफ** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. ११)
परंतु हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे;
म्हणून **ग** बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य नाहीं.

ह्याच प्रमाणें **अब**, **कई** ह्यांच्या बाहेरचा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं, असें दाखवितां येईल.

आतां **अब**, **कई** ह्या रेषांतील, **फ** बिंदूखेरीज एखादा बिंदु मध्य आहे असें मानिलें, तर एकच रेषा दोन बिंदूंत दुभागली गेली असें ठरून, ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध येईल;
म्हणून **फ** शिवाय दुसरा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं;
ह्याकरितां, **फ** बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य आहे.

आणि तोच काढावयाचा होता.

उपसि. ह्यावरून असें उघड होतें कीं, " वर्तुळांत जर एक रेघ ज्येवर लंब असून तीस दुभागते, तर त्या दुभागणाऱ्या रेघेमध्यें वर्तुळाचा मध्यबिंदु असतो. "

प्रश्न.

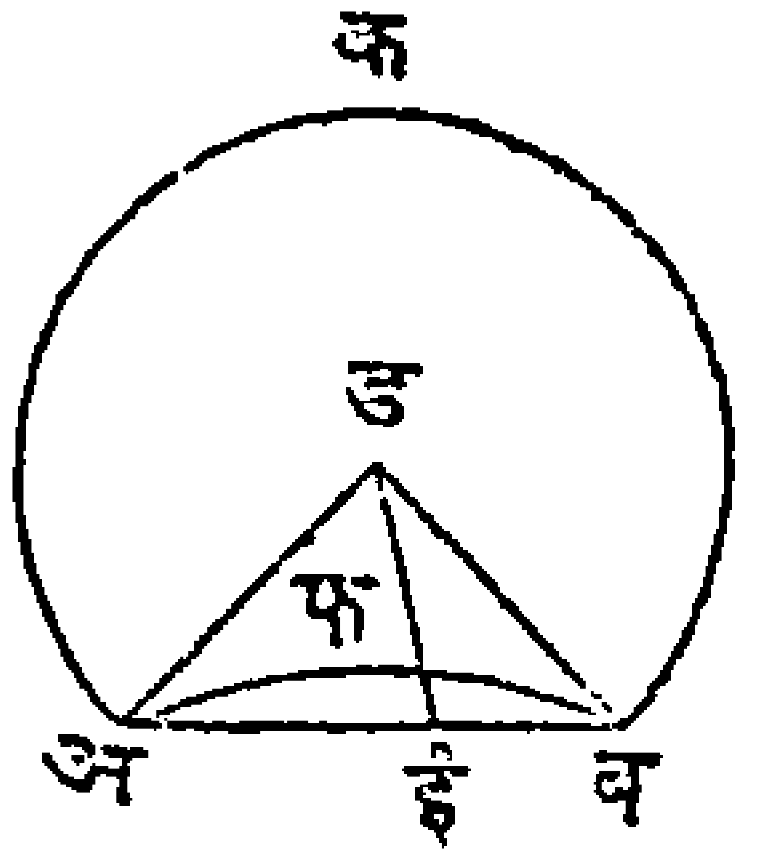
१. वर्तुळाचा मध्यबिंदु काढण्याची सामान्यरीति सांगा.

२. वर्तुळाचा मध्यबिंदु एकच असतो. असें सिद्ध करा.

३. (३.१) ह्याच्या रचनेमध्यें घेतलेली **अब** ज्या वर्तुळाच्या बाहेरून जाते, अशी कोणीं शंका काढिली, तर त्याच्या रचनेंत व सिद्धतेंत कांहीं फरक करावा लागेल काय ?

सिद्धांत २. प्रमेय.

जर वर्तुळाच्या परिघांत कोणतेही दोन बिंदु घेतले, तर ते सांधणारी रेघ वर्तुळाच्या आंतच पडते.



अबक एक वर्तुळ आहे, आणि **अ, ब** हे त्याच्या परिघांत दोन बिंदु आहेत; तर त्यांस सांधणारी रेघ वर्तुळाच्या आंतच पडेल.

कारण, जर ती आंत पडत नसेल, तर बाहेर **अईब** अशी पडते, असें समज.

अबक वर्तुळाचा **ड** मध्य काढ; (३.१)
डअ, डब सांध; **अब** कंसांत **फ** बिंदु घे; **डफ** सांध; (गृ.कृ. १)
आणि ती **अब** रेघेस **ई** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)

आतां **डअ** आणि **डब** परस्पर बराबर आहेत; (१. व्याख्या १५)
म्हणून **डअब** कोन **डबअ** कोनाबराबर आहे. (१.५)
आणि **डअई** त्रिकोणाची **अई** बाजू **ब** बिंदूपर्यंत वाढविली आहे,
ह्यास्तव **डईब** बाहेरील कोन, **डअई** कोनापेक्षां मोठा आहे. (१.१६)
पण **डअई** कोन **डबई** कोनाबराबर आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून **डईब** कोन **डबई** कोनापेक्षां मोठा आहे. (प्र. प्र. अ उप.)
ह्यास्तव **डब, डई** पेक्षां मोठी आहे. (१. १९)
पण **डब, डफ** बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)
म्हणून **डफ, डई** पेक्षां मोठी आहे, (प्र. प्र. अ)
परंतु हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध होय; ह्मणून **अब** रेघेचा **ई** (व तिचा दुसरा कोणताही) बिंदु वर्तुळाच्या बाहेर नाहीं.

अब रेघेचा **अ, ब** ह्या बिंदूखेरीज तिसरा कोणताही बिंदु वर्तुळाच्या परिघांत देखील नाहीं, हें ही बहुतेक असेंच सिद्ध होतें; ह्मणून **अब** रेघ वर्तुळाच्या आंतच पडेल.

ह्याकरितां, जर वर्तुळाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (३.२) च्या आकृतींत **अब** ही वर्तुळाच्या परिघाशीं मिळणार नाहीं, हें (सरल आणि वक्र रेघांच्या व्याख्यांवरूनच) सिद्ध करून दाखवा.

२. कोणतीही सरलरेषा आणि वर्तुलाचा परिघ ह्यांस दोहोंपेक्षां जास्त बिंदु साधारण असणें संभवत नाहीं, असें सिद्ध करा.

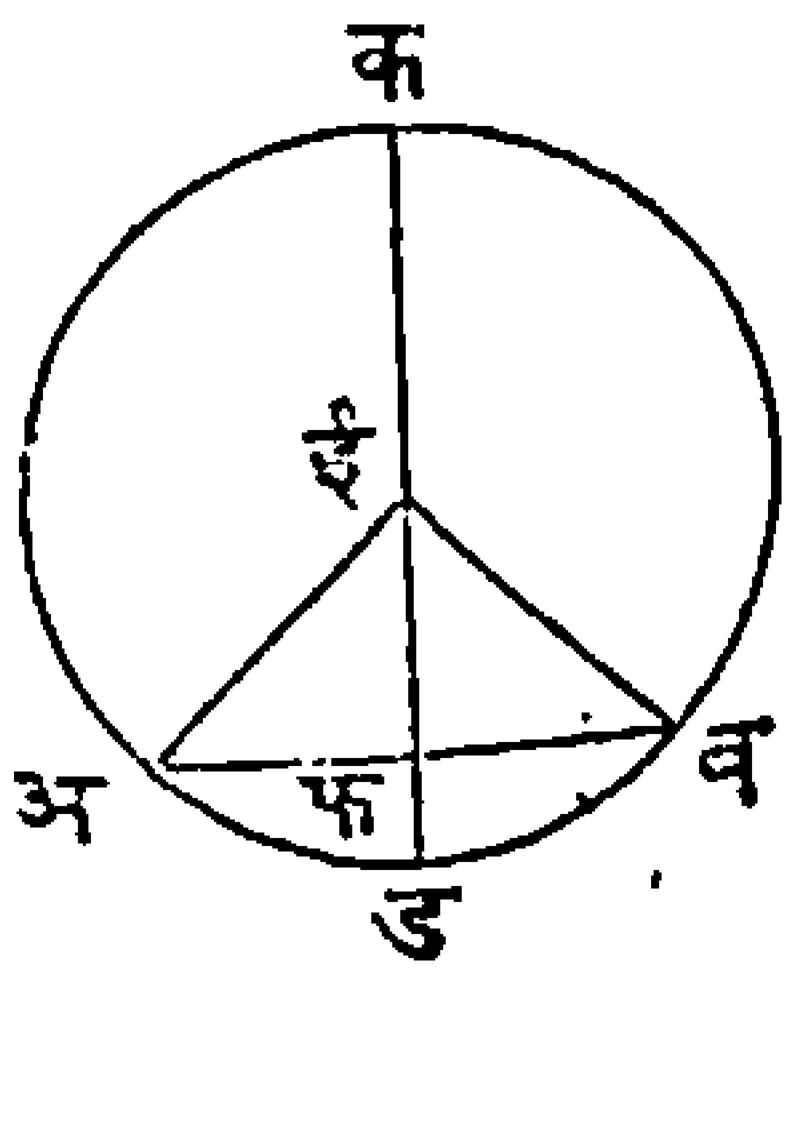
३. " जो बिंदु वर्तुळाच्या मध्यापासून त्याच्या त्रिज्येपेक्षां कमी अंतरावर असतो, तो त्या वर्तुलाच्या आंत असतो;" आणि (२) "जो बिंदु वर्तुळाच्या मध्यापासून त्याच्या त्रिज्येपेक्षां जास्त अंतरावर असतो, तो त्या वर्तुलाच्या बाहेर असतो." ह्यांपैकीं कोणतें प्रमेय प्रत्यक्षप्रमाण मानिलें असतां, ३.२ हा क्रमिक रीतीनें सिद्ध करितां येईल? हें सांगून त्याच्या योगानें तो क्रमिकरीतीनें सिद्ध करून दाखवा.

४. छेदकरेषा वर्तुलाच्या परिघास दोनच बिंदूंत छेदिते.

सिद्धांत ३. प्रमेय.

(१) जर वर्तुळाच्या मध्यांतून जाणारी रेघ मध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येला दुभागिते, तर ती त्या ज्येवर लंब होते; आणि (२) जर पहिली दुसरीवर लंब आहे, तर ती दुसरीस दुभागिते.

(१) **अबक** एक वर्तुळ आहे; आणि मध्यांतून जाणारी **कड** रेघ मध्यांतून न जाणाऱ्या **अब** ज्येस **फ** बिंदूंत दुभागिते; तर **कड** रेघ **अब** रेघेवर लंब होईल.



अबक वर्तुळाचा **ई** मध्य काढ, (३.१)

आणि **ईअ**, **ईब** सांध. (गृ. कृ.१)

आतां **अफ**, **फब** बराबर आहे, (प्रतिज्ञा) आणि **अफई** आणि **बफई** त्रिकोणांस **फई** साधारण आहे;

म्हणून **अफई** त्रिकोणाच्या **अफ**, **फई** बाजू **बफई** त्रिकोणाच्या **बफ**, **फई** बाजूशीं अनुक्रमें बराबर आहेत, आणि **ईअ** पाया **ईब** पायाबराबर आहे; (१. व्याख्या १५)

म्हणून **अफई** कोन **बफई** कोनाबराबर आहे. (१. ८)

म्हणून **कड**, **अब**वर लंब आहे. (१. व्याख्या १०)

म्हणून मध्यांतून जाणारी, व मध्यांतून न जाणाऱ्या **अब** ज्येस दुभागणारी अशी **कड** रेघ **अब**वर लंब आहे.

(२) आतां जर **कड** रेघ **अब** ज्येवर लंब आहे; तर **कड** रेघ **अब** ज्येस दुभागिते, हें सिद्ध करावयाचें.

पूर्वीप्रमाणें रचना केली असतां,

इअ, **इब** बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)

ह्मणून **इअफ** कोन **इबफ** कोनाबराबर आहे; (१. ५)

आणि **अफइ** कोन **बफइ** कोनाबराबर आहे; (१. व्याख्या १०)

म्हणून **इअफ**, **इबफ** ह्या त्रिकोणांपैकीं एकाचे दोन कोन अनुक्रमें दुसऱ्याच्या दोन कोनांबराबर आहेत,

आणि प्रत्येक त्रिकोणांतील समान कोनांच्या एका जोडासमोरची **इफ** बाजू दोहोंस साधारण आहे;

म्हणून **अफ**, **फब** बराबर आहे. (१.२६ भाग २)

ह्याकरितां, जर वर्तुळाच्या मध्यांतून जाणारी रेघ इत्यादि.

प्रश्न.

१. (३.३) ह्यांत किती सिद्धांत आहेत? त्यांच्या प्रतिज्ञा निरनिराळ्या म्हणून दाखवा.

२. "(१) वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येला दुभागणें, (२) तीवर लंब असणें, व (३) वर्तुलमध्यांतून जाणें ह्या तीन धर्मांपैकीं कोणतेही दोन धर्म ज्या सरलरेषेंत असतील, तीमध्यें तिसराही धर्म असतो" ह्या सिद्धांतामध्यें जे तीन सिद्धांत आहेत, त्यांच्या प्रतिज्ञा निरनिराळ्या म्हणून दाखवा.

३. (१) जी रेघ वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येला दुभागिते, पण तिजवर लंब नाहीं, ती वर्तुलमध्यांतून जात नाहीं. (२) जी रेघ वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येवर लंब आहे, पण तिला दुभागीत नाहीं, ती वर्तुलमध्यांतून जात नाहीं. (३) वर्तुलमध्यांतून जाणारी रेघ वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येला दुभागीत नसल्यास, ती त्या ज्येवर लंब असणार नाहीं. (४) वर्तुलमध्यांतून जाणारी रेघ वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येवर लंब नसेल, तर ती त्या ज्येला दुभागणार नाहीं.

४. दिलेल्या वर्तुलांतील दिलेल्या बिंदूतून जाणारी अशी एक ज्या काढा कीं, ती त्याच बिंदूंत दुभागिली जाईल.

५. परस्परांशीं समांतर असणाऱ्या दोन ज्यांचे मध्य सांधणारी रेषा (किंवा ती वाढविली तर) वर्तुलमध्यांतून जाते.

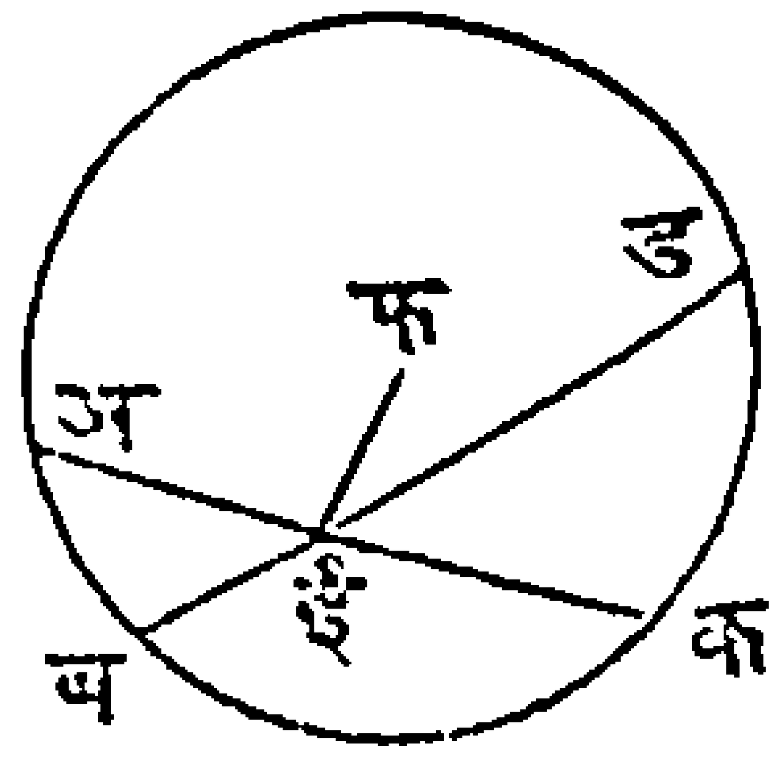
६. परस्परांशीं समांतर असणाऱ्या ज्यांचे मध्य सांधणारी रेषा त्यांवर लंब असते.

७. परस्परांशीं समांतर असणाऱ्या ज्यांपैकीं एकीस दुभागून तिजवर लंब असणारी रेषा दुसरीसही दुभागिते व तिजवर लंब असते.

सिद्धांत ४. प्रमेय.

जर दोन ज्या परस्परांस वर्तुळांत छेदितात, आणि त्यांपैकीं (१) एक किंवा (२) दोन्ही वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या आहेत; तर त्यांपैकीं निदान एकीचे तरी त्या बिंदूंत झालेले दोन भाग असमान असतात.

अबकड वर्तुळांत **अक**, **बड** ह्या दोन ज्या एकमेकींस ई बिंदूंत छेदितात, आणि त्यांपैकीं (१) एक अथवा (२) दोन्ही वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या आहेत; तर त्यांपैकीं निदान एकीचे तरी ई बिंदूंत झालेले दोन भाग असमान असले पाहिजेत.



(१) जर दिलेल्या दोन ज्यांपैकीं एक मध्यांतून जाणारी व दुसरी न जाणारी असली, तर जी मध्यांतून जाणारी असेल, तिचे छेदनबिंदूंत झालेले दोन भाग असमान असतील, हें सहज ठरवितां येतें.

(२) आतां जर दिलेल्या दोन्ही ज्या मध्यांतून न जाणाऱ्या आहेत; तर त्यांपैकीं निदान एकीचे तरी ई बिंदूंत झालेले दोन भाग असमान असतील, हें सिद्ध करावयाचें.

जर एकीचेही भाग असमान नसतील, तर प्रत्येकीचे दोन दोन भाग परस्परांशीं समान असले पाहिजेत;

म्हणून **अई**, **ईक** बराबर, आणि **बई**, **ईड** बराबर आहे, असें मान.
अबकड वर्तुलाचा **फ** मध्य काढ, (३.१)
आणि **ईफ** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां मध्यांतून जाणारी **फई** रेघ, मध्यांतून न जाणाऱ्या **अक** ज्येचे दोन समान भाग करिते; (असें मानिलें आहे)
ह्यास्तव **फई** रेघ **अक** रेघेवर लंब आहे; (३.३भा.१)
ह्मणून **फईअ** कोन काटकोन आहे. (१.व्याख्या १०)
पुनः मध्यांतून जाणारी **फई** रेघ, मध्यांतून न जाणाऱ्या **बड** रेघेचे दोन समान भाग करिते, (असें मानिलें आहे)
ह्यास्तव **फई** रेघ **बड** रेघेवर लंब आहे; (३.३भा.१)
ह्मणून **फईब** कोन काटकोन आहे. (१.व्याख्या १०)
परंतु **फईअ** कोनही काटकोन आहे, असें वर दाखविलें आहे;
ह्मणून **फईअ** कोन **फईब** कोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. ११)
परंतु हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे;
ह्यास्तव **अक**, **बड** ह्यांपैकीं निदान एकीचे तरी **ई** बिंदूंत झालेले भाग असमान असले पाहिजेत.

ह्याकरितां, जर दोन ज्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (३. ४) ह्यांतील दोन सिद्धांतांच्या प्रतिज्ञा निरनिराळ्या ह्मणा; व त्यांपैकीं पहिला सिद्धांत प्रत्यक्ष आकृति काढून सिद्ध करा.

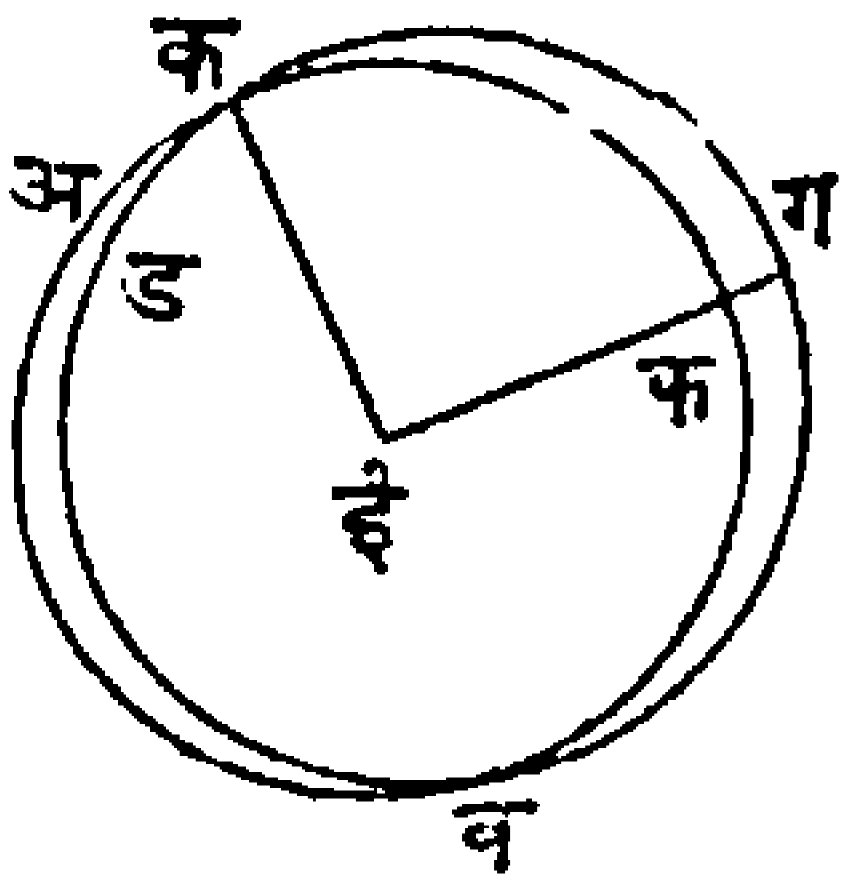
२. जर एकाच वर्तुळाच्या दोन ज्या परस्परांस दुभागितात, तर त्यांचा छेदनबिंदु हाच त्या वर्तुळाचा मध्यबिंदु असतो.

३. मागच्या प्रश्नाच्या आधारानें असें सिद्ध करा कीं, "वर्तुळांत काढिलेला समांतरभुजचौकोन हा काटकोनचौकोन असतो."

सिद्धांत ५. प्रमेय.

जर दोन वर्तुळें एकमेकांस छेदितात, तर एकच बिंदु त्यांचा मध्य असत नाहीं.

अबक आणि **कडग** हीं दोन वर्तुळें एकमेकांस **ब** आणि **क** बिं-



दूंत छेदितात, तर एकच बिंदु त्यांचा मध्य असणार नाहीं.

कारण, जर एकच बिंदु त्यांचा मध्य संभवत असेल, तर तो ई आहे असें मान; **ईक** सांध, आणि दोघांच्या परिघांस **फ** आणि **ग** बिंदूंत छेदणारी **ईफग** रेघ काढ. (गृ. कृ. १ व २)

आतां **अबक** वर्तुळाचा ई मध्य आहे,
ह्यास्तव **ईक**, **ईफ** बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
आणि **कडग** वर्तुळाचा ई मध्य आहे,
ह्यास्तव **ईक**, **ईग** बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
ह्मणून **ईफ**, **ईग** बराबर आहे, (प्र. प्र. १)
परंतु हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे;
म्हणून **अबक** आणि **कडग** ह्या दोन वर्तुळांचा ई मध्य नाहीं.

ह्याकरितां, जर दोन वर्तुळें इत्यादि.

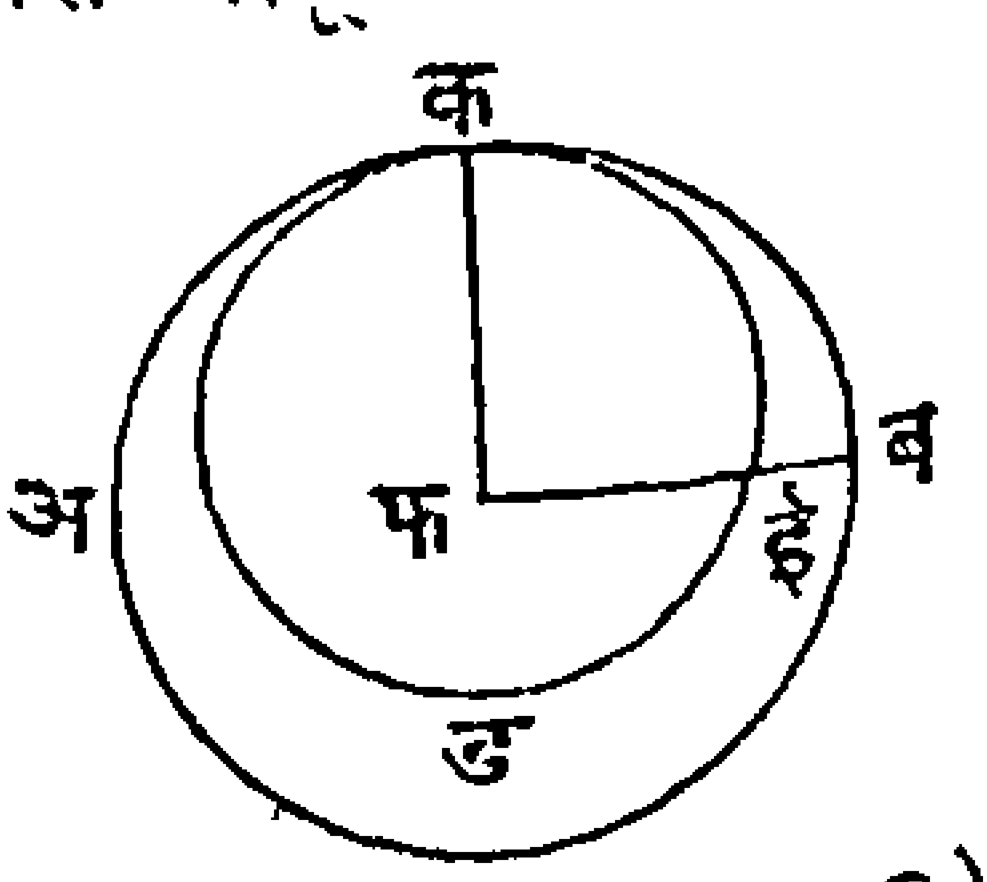
प्रश्न.

१. समकेंद्रवर्तुळांच्या परिघांस कांहीं बिंदु मात्र साधारण असणें संभवत नाहीं (म्हणजे त्यांचे परिघ परस्परांस सर्वांशीं मिळतील किंवा मुळींच मिळणार नाहींत).

सिद्धांत ६. प्रमेय.

जर दोन वर्तुळें एकमेकांस आंतून स्पर्श करितात, तर एकच बिंदु त्यांचा मध्य असत नाहीं.

अबक आणि **कडई** हीं दोन वर्तुळें एकमेकांस आंतून **क** बिंदूंत स्पर्श करितात; तर एकच बिंदु त्यांचा मध्य असणार नाहीं.



कारण, जर एकच बिंदु त्यांचा मध्य संभवत असेल, तर तो **फ** आहे, असें मान; **फक** सांध, आणि दोघांच्या परिघांस ई आणि **ब** बिंदूंत छेदणारी **फईब** रेघ काढ. (गृ. कृ. १ व २)

आतां **अबक** वर्तुळाचा **फ** मध्य आहे,
म्हणून **फक**, **फब** बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
आणि **कडई** वर्तुळाचा **फ** मध्य आहे,
म्हणून **फक**, **फई** बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)
परंतु **फक**, **फब** बराबर आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून **फई**, **फब** बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
परंतु हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे;
म्हणून **अबक** आणि **कडई** ह्या दोन वर्तुळांचा **फ** मध्य नाहीं.
ह्याकरितां, जर दोन वर्तुळें इत्यादि.

प्रश्न.

१. "ज्या वर्तुळांच्या परिघांस एक अथवा अनेक (पण कांहीं) बिंदु मात्र साधारण आहेत (म्हणजे ज्यांचे परिघ कांहीं बिंदूंमध्यें मिळतात, परंतु सर्वांशीं मिळत नाहींत), त्यांचा मध्यबिंदु एकच असणें संभवत नाहीं." ह्या प्रतिज्ञेंत ३.५ व ३.६ ह्या दोन्ही सिद्धांतांच्या प्रतिज्ञांचा समावेश होतो, असें दाखवा.

२. ज्या वर्तुळांचे मध्यबिंदु परस्परांशीं मिळाले आहेत व एकाच्या परिघांतील एक बिंदु दुसऱ्याच्या परिघांतील एका बिंदूशीं मिळाला आहे, तीं वर्तुळें परस्परांस सर्वांशीं मिळाल्यावांचून राहणार नाहींत.

सिद्धांत ७. प्रमेय.

वर्तुळांतल्या एका मध्येतरबिंदूंतून जाणारा व्यास व त्याच बिंदूपासून परिघापर्यंत दुसऱ्या अनेक रेषा व्यासाच्या दोन्ही अंगांस काढिल्या आहेत. तर

(१) मध्येतरबिंदूमध्यें व्यासाचे जे दोन भाग होतात, त्यांपैकीं ज्यांत मध्यबिंदु असतो, तो भाग, ही (व्यासाच्या दुसऱ्या भागासहित) सर्व रेषांमध्यें महत्तम रेषा असते (म्हणजे मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या इतर प्रत्येक रेषेपेक्षां ती मोठी असते).

(२) व्यासाचा दुसरा भाग, ही त्या सर्व रेषांमध्यें लघुतम रेषा असते.

(३) ज्या दोन रेषा व्यासाच्या कोणत्याही एकाच भागापासून समान अंतरांवर असतात (म्हणजे त्याच्याशीं समान कोन करितात), त्या समान असतात.

(४) व्यासाच्या ज्या भागांत मध्यबिंदु असतो, त्याच्या एकाच अथवा भिन्न अंगांस असणाऱ्या ज्या दोन रेषा त्या भागापासून असमान अंतरांवर असतात (म्हणजे त्याच्याशीं असमान कोन करितात), त्यांपैकीं समीपतर (म्हणजे लहान कोन करणारी) रेषा, दूरतर (म्हणजे मोठा कोन करणाऱ्या) रेषेपेक्षां मोठी असते.

(५) ज्या दोन रेषा व्यासाच्या दुसऱ्या भागापासून असमान अंतरांवर असतात, त्यांपैकीं समीपतर रेषा दूरतररेषेपेक्षां लहान असते.

(६) मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतात.

(७) मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या दोन समान रेषा, त्या बिंदूंतून काढिलेल्या व्यासाच्या भिन्न अंगांसच असतात.

अबकडन वर्तुळांतील **फ** ह्या मध्येतरबिंदूंतून जाणारा **अफड** व्यास काढिला आहे, व **फब, फक, फग, फन** इत्यादिक दुसऱ्या अनेक रेषा परिघापर्यंत काढिल्या आहेत; आणि वर्तुलाचा **ई** हा मध्य **अड** व्यासाच्या **फअ** ह्या भागांत आहे. तर

(१) **फअ** रेषा ह्या सर्वांमध्यें महत्तम होईल, म्हणजे ती **फब, फक, फड** इत्यादिकांपैकीं प्रत्येक रेषेपेक्षां मोठी होईल.

बई, सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अई, बई** ह्या रेषा समान आहेत, (१. व्या. १५)

म्हणून **अई, ईफ** ह्यांची बेरीज म्हणजे **अफ** ही, **बई, ईफ** ह्यांच्या बेरजेबरावर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु **बई, ईफ** ह्यांची बेरीज **फब** पेक्षां मोठी आहे; (१.२०)

म्हणून **फअ** ही **फब**पेक्षां मोठी आहे. (प्र. प्र. अ)

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **फअ** ही, **फक, फग** इत्यादिक (म्हणजे **फड** खेरीज) प्रत्येक रेषेपेक्षां मोठी आहे.

आणि **फड** पेक्षां **ईड** मोठी आहे, (प्र. प्र. ९)
ईड बराबर **ईअ** आहे, (१. व्या. १५)
व **ईअ** पेक्षां **फअ** मोठी आहे, (प्र. प्र. ९)
ह्मणून **फड** पेक्षां **फअ** मोठी आहे. (प्र. प्र. **अ** व इ.)
म्हणून **फअ** ही **फ** बिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या इतर प्रत्येक रेषे-पेक्षां मोठी आहे; म्हणजे ती महत्तम आहे.

(२) **फड** रेषा सर्वांमध्यें लघुतम होईल, म्हणजे ती **फग**, **फक**, **फअ** इत्यादिक प्रत्येक रेषेपेक्षां लहान होईल.

कारण; **इग** सांध. (गृ. कृ. १)

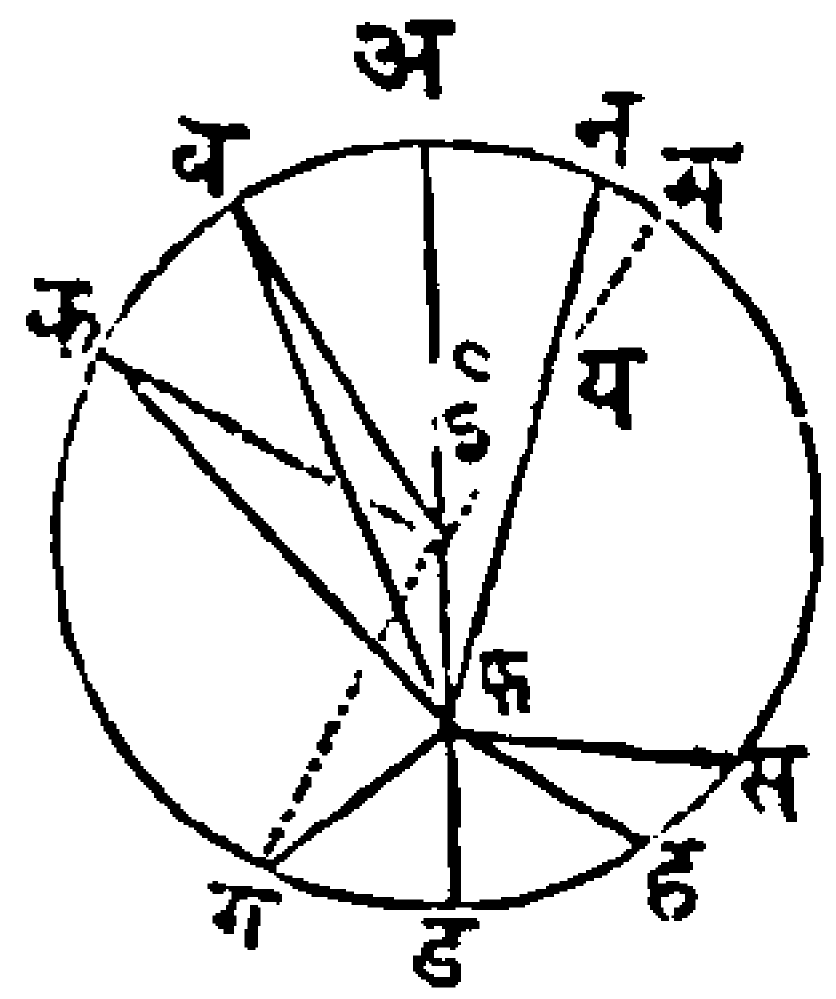
आतां; **ईड** ही **ईग** बराबर आहे, (१. व्या. १५)
आणि **ईग** ही, **ईफ**, **फग** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां लहान आहे; (१. २०)
ह्मणून **ईड** ही, **ईफ**, **फग** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां लहान आहे. (प्र. प्र. अ. उप.)
म्हणून **फड** ही **फग** पेक्षां लहान आहे. (प्र. प्र. ५)

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **फड** ही **फक**, **फब** इत्यादिक (म्हणजे **फअ** खेरीज) प्रत्येक रेषेपेक्षां लहान आहे; आणि ती **फअ** पेक्षां लहान आहे हें वर सिद्ध केलें आहेच; म्हणून **फड** ही लघुतम आहे.

(३) [१] **फब**, **फन** ह्या रेषा **फअ** ह्या रेषेपासून समान अंतरांवर आहेत, म्हणजे त्यांनीं **फअ**शीं केलेले **अफब**, **अफन** हे कोन समान आहेत; तर **फब**, **फन** ह्या समान होतील.

कारण; जर त्या समान नसतील, तर त्यांपैकीं एक **फन** ही **फब** पेक्षां मोठी मानून तिचा **फय** हा **फब** एवढा तुकडा पाडिला; **ईय** सांधून ती परिघास **म** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढविली; व **बई** सांधिली (१. ३, गृ. कृ. व २)

आतां **ईफब**, **ईफय** ह्या त्रिकोणांस १.४ भाग १ लाविल्यानें **ईब**, **ईय** ह्या रेषा समान ठरतील.
म्हणून **ईय**, **ईम** ह्या समान ठरून ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध येईल.
म्हणून **फन** ही **फब** पेक्षां मोठी नाहीं.
ह्याप्रमाणेंच **फन** ही **फब** पेक्षां लहान नाहीं, असें सिद्ध करितां येईल.
ह्मणून **फब**, **फन** ह्या समान आहेत.



[२] आतां, फड ह्या रेषेपासून समान अंतरांवरच्या रेषा फअ पासून ही समान अंतरांवर आहेत, असें १. १३, प्र. प्र. १ व प्र. प्र. ३ ह्यांवरून सिद्ध होतें; म्हणून [१] ह्यावरून त्याही समान आहेत.

(४) [१] **फअ** ह्या रेषेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या **फब**, **फक** ह्या रेषांपैकीं **फब** ही समीपतर आहे; ह्मणजे **फब**नें **फअ**शीं केलेला **अफब** कोन, **फक**नें **फअ**शीं केलेल्या **अफक** कोनापेक्षां लहान आहे. तर **फब** ही **फक** पेक्षां मोठी होईल.

कारण; **बई**, **कई** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **फईब** त्रिकोणाच्या **फई**, **ईब** ह्या बाजू, **फईक** त्रिकोणाच्या **फई**, **ईक** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत;

आणि **फईब** कोन **फईक** कोनापेक्षां मोठा आहे; (प्र.प्र.९)

म्हणून **फब** बाजू **फक** पेक्षां मोठी आहे. (१.२४)

[२] **फअ** ह्या रेषेच्या भिन्न अंगांस असणाऱ्या **फन**, **फक** ह्या रेषांपैकीं **फन** रेषा समीपतर आहे; ह्मणजे **फन**नें **फअ**शीं केलेला **अफन** कोन, **फक**नें **फअ**शीं केलेल्या **अफक** कोनापेक्षां लहान आहे; तर **फन** ही **फक**पेक्षां मोठी होईल.

कारण; **अफन** कोनाएवढा **अफ**च्या दुसऱ्या अंगास **अफ**शीं **फ** बिंदूजवळ **अफब** कोन कर. (१.२३)

अफब कोन **अफक** कोनापेक्षां लहान होईल. (प्रतिज्ञा व प्र.प्र.अ उप).

ह्मणून **फब** रेषा **फअ** पासून **फक**पेक्षां समीपतर होईल;

ह्मणून (४) [१] ह्या भागाप्रमाणें **फक**पेक्षां **फब** मोठी आहे;

आणि (३) [१] ह्या भागाप्रमाणें **फब** बरोबर **फन** आहे;

म्हणून **फक**पेक्षां **फन** मोठी झाली. (प्र.प्र.अ.)

(५) ह्याप्रमाणेंच **फड** ह्या रेषेच्या एकाच किंवा भिन्न आंगच्या व तीपासून असमान अंतरांवरच्या दोन रेषांपैकीं समीपतर रेषा दूरतर रेषेपेक्षां लहान आहे, हें सिद्ध करितां येईल.

(६) **फ** ह्या मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतील,

कारण; [१] जर **फ** बिंदूपासून **फग** ही एक रेषा परिघापर्यंत काढिली आहे, तर तिनें **फड**शीं (किंवा **फअ**शीं) केलेल्या **डफग** कोनाएवढा **डफह** कोन **फड**च्या दुसऱ्या अंगास केल्यानें, **फह** ही रेषा (३) ह्या भागाप्रमाणें **फग**शीं बरोबर होईल. ह्मणून मध्येतरबिंदूपासून दोन समान रेषा काढितां येतात, असें ठरलें.

[२] आतां दोहोंपेक्षां जास्त समान रेषा काढितां येत नाहींत, असें ठरवावयाचें.

शक्य असेल, तर **फग**, **फह**, **फस** ह्या तीन रेषा समान आहेत, असें मान.

परंतु (४) किंवा (५) ह्या भागाप्रमाणें **फह** पेक्षां **फस** मोठी आहे;

ह्मणून दोहोंपेक्षां जास्त समान रेषा काढितां येत नाहींत.

ह्याकरितां मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतात.

(७) **फ** ह्या मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या दोन समान रेषा व्यासाच्या भिन्न अंगांसच पडतील.

कारण, त्या व्यासाच्या एकाच अंगास पडतील असें मानिलें, तर (४) किंवा (५) ह्या भागाशीं विरोध येईल.

ह्याकरितां वर्तुळांतल्या एका इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (३.७ भाग ४) [१] ह्याची ग्रंथांतली सिद्धता (३.७ भाग ४ [२]) ह्यास लागू पडत नाहीं, असें दाखवा.

२. वर्तुलांतल्या मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या दोन रेषा समान असल्या; तर त्या रेषा, त्या बिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या महत्तम अथवा लघुतम रेषेपासून समान अंतरांवर असतात.

३. (३.७) ह्याच्या (४) व (५) ह्या भागांच्या व्यत्यासांच्या प्रतिज्ञा ह्मणून ते सिद्ध करून दाखवा.

४. वर्तुळांतल्या ज्या बिंदूपासून परिघापर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतात, तो मध्येतरबिंदु असतो.

५. वर्तुळांतल्या एका मध्येतरबिंदूपासून परिघापर्यंत एक रेषा काढिली आहे. तर तिच्याशीं समान अशी त्याच बिंदूपासून परिघापर्यंत दुसरी रेषा काढण्याची सुलभ रीति सांगा. दिलेल्या रेषेच्या कोणत्या स्थितींत तिच्या बरोबरीची रेषा काढितां येणार नाहीं?

६. वर्तुळाच्या परिघांतल्या एका बिंदूपासून व्यास व त्याच बिंदूपासून दुसऱ्या अनेक ज्या काढिल्या आहेत. तर

(१) व्यास त्या सर्वांमध्यें महत्तम असतो.

(२) व्यासापासून समान अंतरावरच्या ज्या समान असतात.

(३) व्यासाच्या एकाच अथवा भिन्न अंगच्या ज्यांपैकीं समीपतर ज्या दूरतर ज्येपेक्षां मोठी असते.

(४) परिघांतील कोणत्याही एकाच बिंदूपासून समान अशा दोनच ज्या काढितां येतात.

(५) परिघांतील एकाच बिंदूपासून काढिलेल्या दोन समान ज्या, त्याच बिंदूपासून काढिलेल्या व्यासाच्या भिन्न अंगांस असतात.

७. परिघांतील एका बिंदूपासून वर्तुलमध्यांतून न जाणारी एक ज्या काढिली आहे. तर त्याच बिंदूपासून तिच्याशीं समान अशी दुसरी ज्या काढण्याची सामान्यरीति सांगा.

८. सहाव्या प्रश्नांतल्या पहिल्या तीन सिद्धांतांच्या व्यत्यासांच्या प्रतिज्ञा सांगा आणि ते सिद्ध करा.

सिद्धांत ८. प्रमेय.

वर्तुलाच्या बाहेरील एका बिंदूपासून अंतर्वक्र आणि बहिर्वक्र परिघांपर्यंत अनेक रेषा काढिल्या आहेत व त्यांपैकीं एक वर्तुळमध्यांतून जात आहे; तर

(१) वर्तुलमध्यांतून जाणारी रेषा त्या सर्व रेषांमध्यें महत्तम असते.

(२) वर्तुळमध्यांतून जाणाऱ्या रेषेचा वर्तुळाबाहेरचा भाग त्या सर्व रेषांमध्यें लघुतम असतो.

(३) ज्या दोन रेषा अंतर्वक्र परिघासच किंवा बहिर्वक्र परिघासच मिळतात, व मध्यांतून जाणाऱ्या रेषेपासून समान अंतरांवर असतात, त्या समान असतात.

(४) अंतर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या रेषांपैकीं मध्यांतून जाणाऱ्या रेषेपासून समीपतर रेषा दूरतर रेषेपेक्षां मोठी असते.

(५) बहिर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या रेषांपैकीं मध्यांतून जाणाऱ्या रेषेपासून समीपतर रेषा दूरतर रेषेपेक्षां लहान असते.

(६) अंतर्वक्र परिघास मिळणारी कोणतीही रेषा बहिर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या रेषेपेक्षां मोठी असते.

(७) वर्तुलाच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून परिघापर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतात.

(८) वर्तुळाच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या दोन समान रेषा, मध्यांतून जाणाऱ्या रेषेच्या भिन्न अंगांस असतात.

(९) वर्तुळाच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या दोन समान रेषा, दोन्ही अंतर्वक्र परिघासच मिळणाऱ्या किंवा दोन्ही बहिर्वक्र परिघासच मिळणाऱ्या असतात.

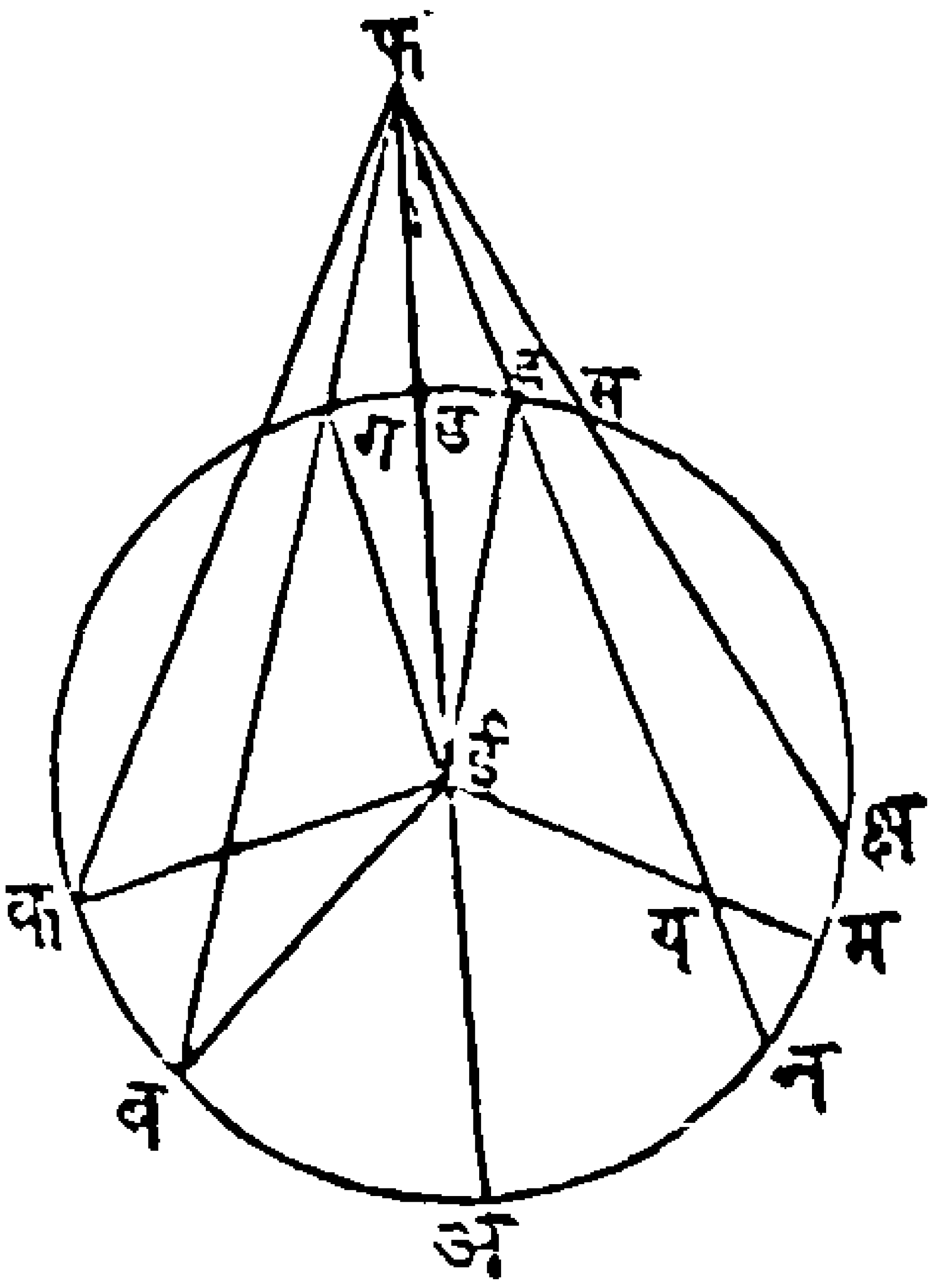
अबकडन वर्तुळाच्या बाहेरील एका **फ** बिंदूपासून **फअ**, **फब**, **फक**, **फन**, इत्यादिक अनेक रेषा अंतर्वक्र व बहिर्वक्र परिघांपर्यंत काढिल्या आहेत; व त्यांपैकीं **फअ** ही रेषा **ई** ह्या वर्तुळमध्यांतून गेली आहे. तर

(१) **फअ** ही रेषा त्या सर्वांमध्यें महत्तम होईल.

ईब, सांध. (गृ. कृ.१)

आतां **ईअ**, **ईब** ह्या समान आहेत, (१.व्या.१५)

ह्मणून **ईअ**, **ईफ** ह्यांची बेरीज म्हणजे **फअ** ही, **ईब**, **ईफ** ह्यांच्या



बरजेबरावर आहे; (प्र.प्र.२)
आणि ईब, ईफ ह्यांची बेरीज फब पेक्षां मोठी आहे; (१.२०)
म्हणून फअ ही फब पेक्षां मोठी आहे. (प्र.प्र.अ)
ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, फअ ही फक, फग इत्यादिक (फड खेरीज) प्रत्येक रेषे-पेक्षां मोठी आहे;
व ती फड पेक्षांही मोठी आहे. (प्र. प्र. ९)
ह्मणून फअ ही महत्तम आहे.

(२) फड ही सर्वांमध्यें लघुतम होईल.
ईग सांध. (गृ. कृ. १)

आतां फगई त्रिकोणाच्या फग, गई ह्या बाजूंच्या बेरजेपेक्षां फई बाजू लहान आहे. (१.२०)
म्हणून फग पेक्षां फड लहान आहे. (१.व्या.१५, प्र.प्र.५)
ह्याप्रमाणेंच फक, फह इत्यादिक (फअ खेरीज) प्रत्येक रेषेपेक्षां फड लहान आहे, असें सिद्ध करितां येईल;
आणि ती फअ पेक्षांही लहान आहे; (प्र.प्र.९)
ह्मणून फड ही सर्वांत लघुतम रेषा आहे.

(३) [१] फब, फन ह्या दोन्ही अंतर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या रेषा आहेत व त्या फअ पासून समान अंतरांवर आहेत, म्हणजे तिच्याशीं सारखे कोन करितात; तर त्या समान होतील.

कारण; जर त्या समान नसतील, तर फन, फब पेक्षां मोठी मानून तिचा फब एवढा फय तुकडा पाडिला, आणि ईय सांधून ती परिघास म बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढविली; व बई सांधिली. (१३, गृ. कृ. १ व २)

आतां ईफब, ईफय ह्या त्रिकोणांस १. ४ भाग १ लाविल्यानें ईब, ईय समान ठरतील; म्हणून ईय, ईम समान ठरतील. (१. व्या. १५ व प्र. प्र. १)

परंतु हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे;
ह्मणून **फन** ही **फब** पेक्षां मोठी नाहीं.
ह्याप्रमाणेंच ती लहान नाहीं असें ठरवितां येईल.
ह्मणून **फव, फन** ह्या समान आहेत.

[२] ह्याप्रमाणेंच बहिर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या व **फअ** पासून समान अंतरावरच्या रेषा समान आहेत, असें सिद्ध करावें.

(४) [१] अंतर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या व **फअ**च्या एकाच आंगच्या **फव, फक** ह्या रेषांपैकीं **फब** ही **फअ** पासून **फक**-पेक्षां समीपतर आहे; तर **फव** ही **फक**पेक्षां मोठी होईल.

कारण; **बई, कई** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **फईब** त्रिकोणाच्या **फई, ईब** ह्या बाजू, **फईक** त्रिकोणाच्या **फई, ईक** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत,
व **फईब** कोन **फईक** कोनापेक्षां मोठा आहे; (प्र. प्र. ९)
म्हणून **फव** बाजू **फक** पेक्षां मोठी आहे. (१. २४)

[२] अंतर्वक्रपरिघास मिळणाऱ्या व **फअ** रेषेच्या भिन्न अंगांस असणाऱ्या **फन, फक** ह्या रेषांपैकीं **फन** ही **फअ** पासून **फक** पेक्षां समीपतर आहे; म्हणजे **अफन** कोन **अफक** कोनापेक्षां लहान आहे; तर **फन** ही **फक** पेक्षां मोठी होईल;

कारण; **अफन** कोनाएवढा **फअ**च्या दुसऱ्या अंगास **फअ**शीं **फ** बिंदूजवळ **अफब** कोन कर. (१. २३)
अफव कोन **अफक** कोनापेक्षां लहान आहे; (प्रतिज्ञा व प्र. प्र. अ उप.)
म्हणून **फव** रेषा **फअ** पासून **फक**पेक्षां समीपतर होईल;
ह्मणून (४) [१] ह्या भागाप्रमाणें **फक** पेक्षां **फब** मोठी आहे.
आणि (३) [१] ह्या भागाप्रमाणें **फब** ही **फन** बरोबर आहे;
ह्मणून **फक** पेक्षां **फन** मोठी आहे. (प्र. प्र. अ)

(५) ह्याप्रमाणेंच बहिर्वक्रपरिघास मिळणाऱ्या व **फअ**च्या एकाच अथवा भिन्न अंगांस असणाऱ्या रेषांपैकीं **फअ** पासून समीपतर रेषा दूरतर रेषेपेक्षां लहान आहे, असें सिद्ध करितां येईल.

(६) **फव** ही अंतर्वक्रपरिघास मिळणारी व **फस** ही बहिर्वक्र परिघास मिळणारी रेषा आहे; तर **फस** पेक्षां **फब** ही मोठी होईल.

[१] जर **फव**, **फस** ह्या **फअ** पासून समान अंतरांवर असतील, तर **फस** बरोबर **फग** आहे, (भाग (३) [२])

आणि **फग** पेक्षां **फव** मोठी आहे; (प्र. प्र. ९)

म्हणून **फस** पेक्षां **फव** मोठी आहे. (प्र. प्र. अ. उप).

[२] **फव** ही **फअ** पासून **फस** पेक्षां दूरतर असेल, तर **फस** पेक्षां **फग** मोठी आहे, (भाग ५)

आणि **फग** पेक्षां **फव** मोठी आहे; (प्र. प्र. ९)

म्हणून **फस** पेक्षां **फव** मोठी आहे. (प्र. प्र. इ.)

[३] **फव** ही **फअ**पासून **फस** पेक्षां समीपतर असेल, तर **फस** ही अंतर्वक्र परिघास **क्ष** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)

आतां **फस**पेक्षां **फक्ष** मोठी आहे, (प्र. प्र. ९)

व **फक्ष** पेक्षां **फव** मोठी आहे; (भाग ४ [२])

म्हणून **फस** पेक्षां **फव** मोठी आहे. (प्र. प्र. इ).

(७) **फ** बिंदूपासून परिघापर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतील.

कारण; [१] जर **फ** बिंदूपासून **फग** ही एक रेषा बहिर्वक्र परिघापर्यंत काढिली आहे, तर तिनें **फअ**शीं केलेल्या **डफग** कोनाएवढा **डफह** कोन केल्यानें **फह** ही बहिर्वक्र परिघापर्यंत काढिलेली रेषा (भाग २) [२] प्रमाणें **फग** बरोबर होईल.

ह्याप्रमाणेंच जर **फ** बिंदूपासून **फब** ही एक अंतर्वक्र परिघापर्यंत काढिलेली रेषा असेल, तर तिच्याशीं समान अशी **फन** ही रेषा अंतर्वक्र परिघापर्यंत काढितां येईल.

म्हणून वर्तुळाबाहेरच्या बिंदूपासून परिघापर्यंत दोन समान रेषा काढितां येतात, असें ठरलें.

[२] आतां दोहोंपेक्षां जास्त समान रेषा काढितां येत नाहींत, असें ठरवावयाचें.

हें शक्य आहे, असें जर मानिलें, तर (४), (५) किंवा (६) ह्यांपैकीं एखाद्या भागाशीं विरोध येईल.

म्हणून दोहोंपेक्षां जास्त समान रेषा काढितां येत नाहींत.

ह्याकरितां **फ** बिंदूपासून परिघापर्यंत समान अशा दोनच रेषा काढितां येतात.

(८) **फ** बिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या दोन समान रेषा **फअ**च्या भिन्न अंगांसच पडतील.

कारण; त्या **फअ**च्या एकाच अंगास आहेत असें जर मानिलें, तर (४) किंवा (५) ह्या भागाशीं विरोध येईल.
म्हणून त्या रेषा **फअ**च्या भिन्न अंगांसच पडतील.

(९) **फ** बिंदूपासून परिघापर्यंत काढिलेल्या दोन्ही समान रेषा अंतर्वक्र परिघास मिळतील, किंवा दोन्ही बहिर्वक्र परिघास मिळतील.

कारण; त्यांपैकीं एक अंतर्वक्र परिघास व दुसरी बहिर्वक्र परिघास मिळते असें जर मानिलें, तर (६) ह्या भागाशीं विरोध येईल.

ह्याकरितां वर्तुळाच्या बाहेरील इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (३.८ भाग ३ [१]) ह्याच्या सिद्धतेमध्यें **फन** ही **फब** पेक्षां मोठी मानून तिचा **फब** एवढा तुकडा पाडिला आहे; तो तुकडा **फह** हाच मानिल्यास ग्रंथांतली सिद्धता व्यर्थ पडते, असें दाखवा. (३.८ भाग ३ [२]) ह्याची सिद्धता आधीं करून त्याच्या योगानें **फह** ही **फब** एवढी होणें संभवत नाहीं, असें दाखवा. तसेंच लहान मानिलेली **फब** ही वाढवून मोठीएवढी केली असतां, वरील अडचण मुळींच येत नाहीं, असें ही दाखवा.

२. (३.८ भाग ७ [१]) ह्यात "**डफग** कोनाएवढा कोन करणारी **फह** रेषा परिघास मिळेलच" हें, **फह**चा **फग** एवढा **फल** तुकडा पाडून **ईल** सांधिल्यास, १.४ च्या योजनेनें क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध होतें, असें दाखवा.

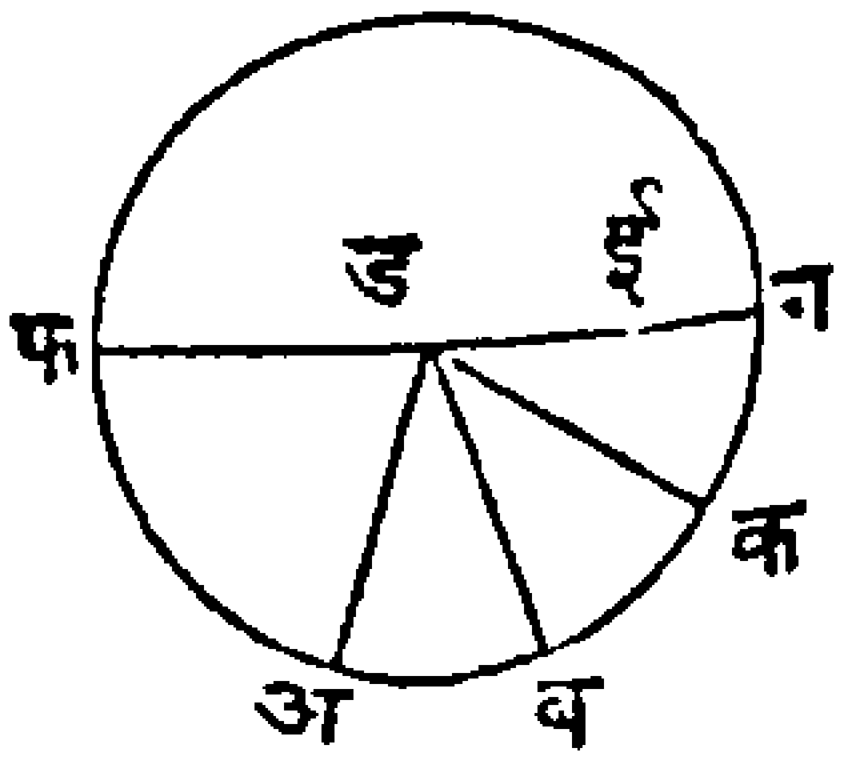
३. वर्तुळाच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून त्या वर्तुळास स्पर्श रेषा काढिली असली, तर ती, त्याच बिंदूपासून अंतर्वक्र परिघापर्यंत काढिलेल्या कोणत्याही रेषेपेक्षां लहान असते; व बहिर्वक्र परिघापर्यंत काढिलेल्या कोणत्याही रेषेपेक्षां मोठी असते.

४. "विवक्षित बिंदूपासून विवक्षित वर्तुलाच्या परिघापर्यंत काढि- लेली लघुतम रेषा, हें तो बिंदु व त्या वर्तुलाचा परिघ ह्यांच्या मधील अंतर ह्मणावें." ह्या व्याख्येस अनुसरून विवक्षित बिंदु व विवक्षित वर्तुलाचा परिघ ह्यांच्या मधील अंतर काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

सिद्धांत ९. प्रमेय.

वर्तुळांतील ज्या एका बिंदूपासून परिघापर्यंत दोहोंपेक्षां अधिक समान रेषा काढितां येतात; तो बिंदु वर्तुळाचा मध्य असतो.

अबक वर्तुळांत **ड** बिंदूपासून परिघापर्यंत **डअ, डब, डक** ह्या दोहोंपेक्षां अधिक समान रेषा काढितां आल्या आहेत, तर तो **ड** बिंदु वर्तुळाचा मध्य होईल.



कारण; जर **ड** बिंदु वर्तुळाचा मध्य नसेल, तर ई बिंदु मध्य आहे असें मान; डई सांध, आणि ती दोहों बाजूंनीं परिघास **फ** आणि **ग** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव (गृ. कृ. १ व २) ह्मणजे **फग** हा वर्तुळाचा व्यास होईल.

आतां **फग** हा व्यास आहे, त्यांतील **ड** हा मध्येतरबिंदु आहे, त्या व्यासाच्या **डग** ह्या भागांत ई हा वर्तुळमध्य आहे, आणि **डक** ही **डग** पासून **डब** पेक्षां समीपतर आहे;
म्हणून **डक** ही **डब** पेक्षां मोठी आहे. (३.७ भाग ४)
परंतु हा प्रतिज्ञेशीं विरोध आहे.
ह्मणून ई हा वर्तुळमध्य नाहीं.

त्याप्रमाणेंच **डब** ही मधली रेषा वाढवून होणाऱ्या ज्येच्या बाहेरचा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं, असें सिद्ध करितां येईल.

आतां **डब** रेषा वाढवून होणाऱ्या ज्येमध्यें **ड** बिंदूखेरीज एखादा बिंदु मध्य आहे असें जर मानिलें, तर **डब** ही ३.७ भाग (१) किंवा (२) ह्यावरून **डक** अथवा **डअ** हिशीं असमान ठरेल.
म्हणून **ड** बिंदूखेरीज कोणताही बिंदु मध्य नाहीं.
ह्मणून **ड** बिंदु मध्य आहे.

अथवा.

ड बिंदु वर्तुलमध्य नाहीं असें जर मानिलें, तर तो मध्येतरबिंदु होईल.

ह्मणून त्यापासून परिघापर्यंत दोहोंपेक्षां जास्त समान रेषा काढितां येणार नाहींत. (३.७ भाग (६))

परंतु ड पासून परिघापर्यंत दोहोंपेक्षां जास्त समान रेषा काढितां येतात. (प्रतिज्ञा)

ह्मणून ड हा मध्येतरबिंदु नाहीं.

ह्मणून तो मध्यबिंदु आहे.

ह्याकरितां वर्तुळांतील इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (३.९) च्या आकृतींत **अब, बक** सांधून त्या रेषा दुभागा, आणि त्यांचे मध्यांपासून ड बिंदूपर्यंत काढिलेल्या प्रत्येक रेषेमध्यें वर्तुलमध्य असला पाहिजे, असें ठरवून त्यावरून ड हा वर्तुलमध्य ठरवा.

२. वर्तुळांतील एखादा बिंदु त्या वर्तुळाचा मध्य आहे असें ठरण्यास त्यापासून परिघापर्यंत निदान किती समान रेषा काढितां आल्या पाहिजेत ?

३. (१) "त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंच्या मध्यांपासून त्या बाजूंवर लंब काढिले असतां ते मिळतात," व (२) "त्यांच्या मेलनबिंदूंपासून त्या त्रिकोणाच्या तिन्ही कोणबिंदूंपर्यंत काढिलेल्या रेषा समान असतात" हे दोन सिद्धांत सिद्ध करा; आणि "ज्या वर्तुळाचा परिघ दिलेल्या सरलरेषाकृतीच्या प्रत्येक कोणबिंदूंतून जाता, तें त्या सरलरेषाकृतीभोंवतीं काढिलेलें वर्तुळ ह्मणावें" अशी "सरलरेषाकृतीभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलाची" व्याख्या समजून, वरील दोन सिद्धांतांच्या आधारानें "त्रिकोणाभोंवतीं वर्तुल काढण्याची एक सामान्य रीति तयार करा." (४.५पहा.)

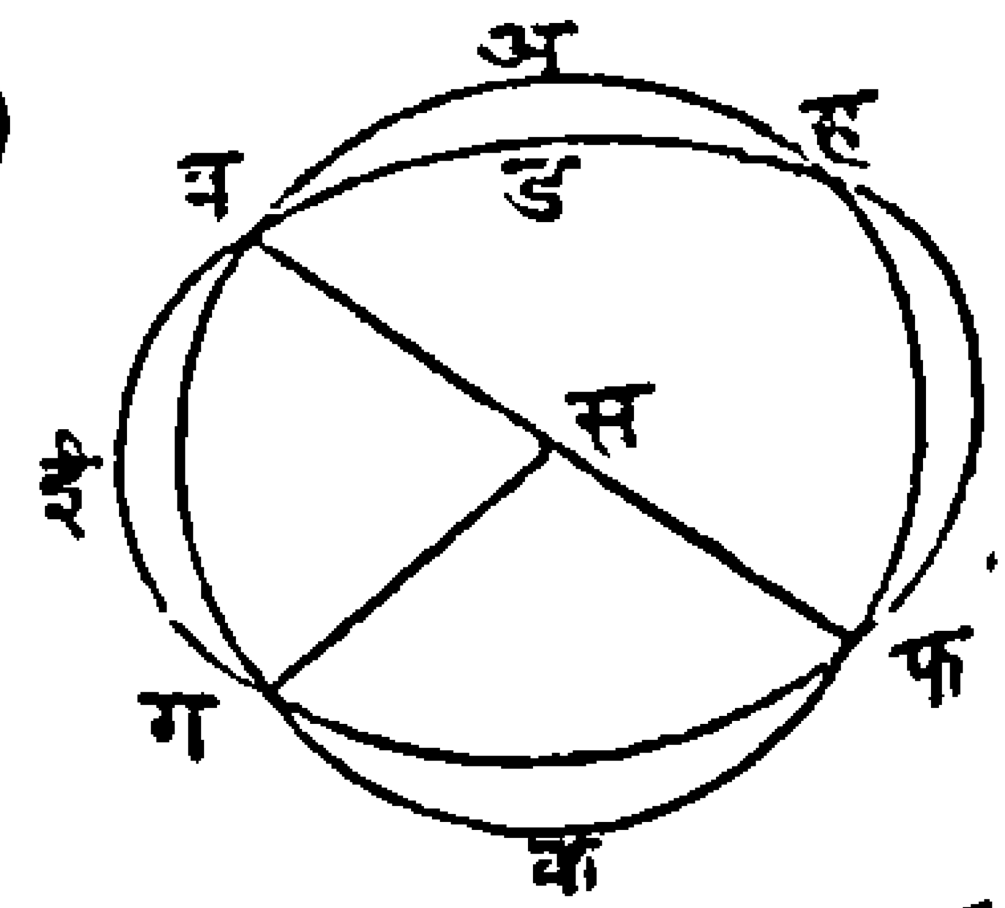
सिद्धांत १०. प्रमेय.

एका वर्तुळाचा परिघ दुसऱ्या वर्तुळाच्या परिघास दोहोंपेक्षां अधिक बिंदूंत छेदीत नाहीं.

जर ही गोष्ट शक्य असेल, तर **अबक** वर्तुळाचा परिघ **डईफ** वर्तुळाच्या परिघास **ब, ग, फ** ह्या तीन बिंदूंत छेदितो असें मान. (३.१)

अबक वर्तुळाचा **स** मध्य काढ;

आणि **सब, सग, सफ,** सांध. (गृ. कृ.१)



आतां **अबक** वर्तुळाचा **स** मध्य आहे, म्हणून **सब, सग, सफ,** ह्या रेघा परस्पर बराबर आहेत; (१. व्याख्या १५)

आणि **डईफ** वर्तुळांतील **स** बिंदूपासून परिघापर्यंत **सब, सग, सफ** ह्या तीन समान रेघा निघाल्या आहेत; ह्यास्तव **स** बिंदु **डईफ** वर्तुळाचा मध्य आहे. (३.९)

परतु **स, अबक** वर्तुळाचा ही मध्य आहे. (रचना)

म्हणून छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांचा एकच मध्यबिंदु झाला. (३.५)

पण हें होणें अशक्य आहे.

ह्याकरितां, एक वर्तुळाचा परिघ इत्यादि.

प्रश्न.

१. (३. १०) च्या सिद्धतेमध्यें **अबक** वर्तुळाचा **स** मध्य काढावयास सांगितलें आहे, तो जर (१) **डईफ** वर्तुळाच्या परिघामध्यें निघाला, अथवा (२) **डईफ** वर्तुळाच्या बाहेर निघाला, तर ग्रंथांतली सिद्धता लागू पडत नाहीं, असें दाखवा; आणि ह्या दोन प्रसंगीं अनुक्रमें ३.७ प्रश्न ६ ह्यांतील सिद्धांत व ३.८ भाग (७) ह्यांची योजना करून सिद्धता करून दाखवा.

२. दोन वर्तुळांच्या परिघांस दोहोंपेक्षां जास्त बिंदु साधारण असतील, तर तीं वर्तुळें परस्परांस सर्वांशीं मिळाल्यावांचून राहणार नाहींत.

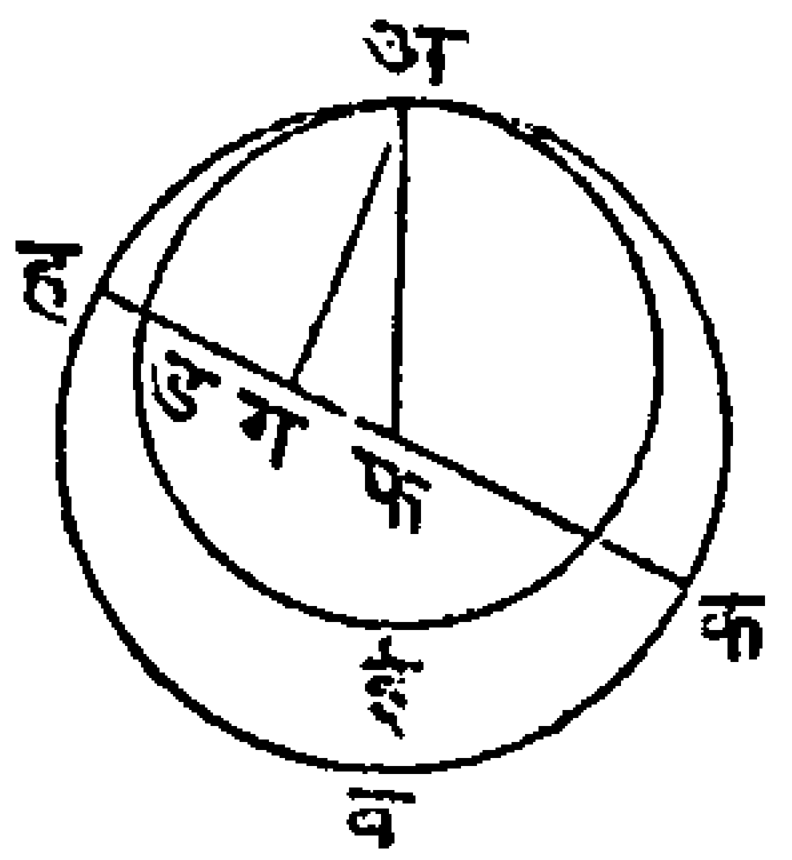
३. "जर दोन वर्तुळांच्या परिघांस कांहीं बिंदु साधारण आहेत, परंतु ते परिघ सर्वांशीं मिळत नाहींत; तर ते साधारण बिंदु दोहोंपेक्षां जास्त असावयाचे नाहींत." ह्या प्रमेयांत ३.१० ह्याचा समावेश होतो, असें दाखवा.

४. एकाच सरलरेपाकृतीभोंवतीं अनेक वर्तुळें काढितां येतील काय? कारण काय?

सिद्धांत ११. प्रमेय.

जर परस्परांस आंतून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचे मध्यबिंदु सांधणारी रेषा दोन्ही अंगांस वाढविली, तर त्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदु त्या अमर्यादरेषेच्या बाहेर असावयाचा नाहीं.

अबक आणि **अडई** हीं दोन वर्तुळें एकमेकांस आंतून स्पर्श करितात; **अबक** वर्तुळाचा **फ** मध्य आहे, **अडई** वर्तुळाचा **ग** मध्य आहे, व **फ** आणि **ग** बिंदु सांधणारी **फग** रेषा दोन्ही अंगांस वाढविली आहे. तर त्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदु **फग** ह्या अमर्यादरेषेच्या बाहेर असावयाचा नाहीं.



कारण; जर त्यांचा स्पर्शबिंदु **फग** ह्या अमर्याद रेषेच्या बाहेर असेल, तर तो **अ** बिंदु आहे असें मान; व **फग**ची स्थिति **कफगडह** ही आहे, असें समज.

आतां **अग** आणि **गफ** मिळून, **अफ** पेक्षां अधिक आहेत, (१.२०)
आणि **अफ**, **हफ** बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
म्हणून **अग** आणि **गफ** मिळून, **हफ** पेक्षां अधिक आहेत. (प्र. प्र. अ उप.)
प्रत्येकांतून **गफ** साधारण भाग काढून टाकिला;
तेव्हां शेप **अग**, शेप **गह** पेक्षां अधिक आहे. (प्र. प्र. ५)
पण **अग**, **डग** बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)
म्हणून **डग**, **गह** पेक्षां मोठी आहे. (प्र. प्र. अ उप.)
पण हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे.
म्हणून ह्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदु **फग** ह्या अमर्याद रेषेच्या बाहेर नाहीं.

ह्याकरितां जर परस्परांस आंतून इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (३.११) च्या आकृतीमध्यें आंतील वर्तुलाचा **ग** मध्य **फक** रेषेमध्यें आहे, असें मानून त्या सिद्धांताची सिद्धता करा.

२. (३.११) च्या आकृतींत बाहेरच्या वर्तुलाचा मध्य आंतल्या वर्तुलाच्या परिघांत आहे, असें मानून तो सिद्धांत सिद्ध करून दाखवा.

३. (३.११) च्या आकृतींत बाहेरच्या वर्तुळाचा मध्य आंतील वर्तुळाच्या बाहेर आहे, असें मानून तो सिद्धांत सिद्ध करा.

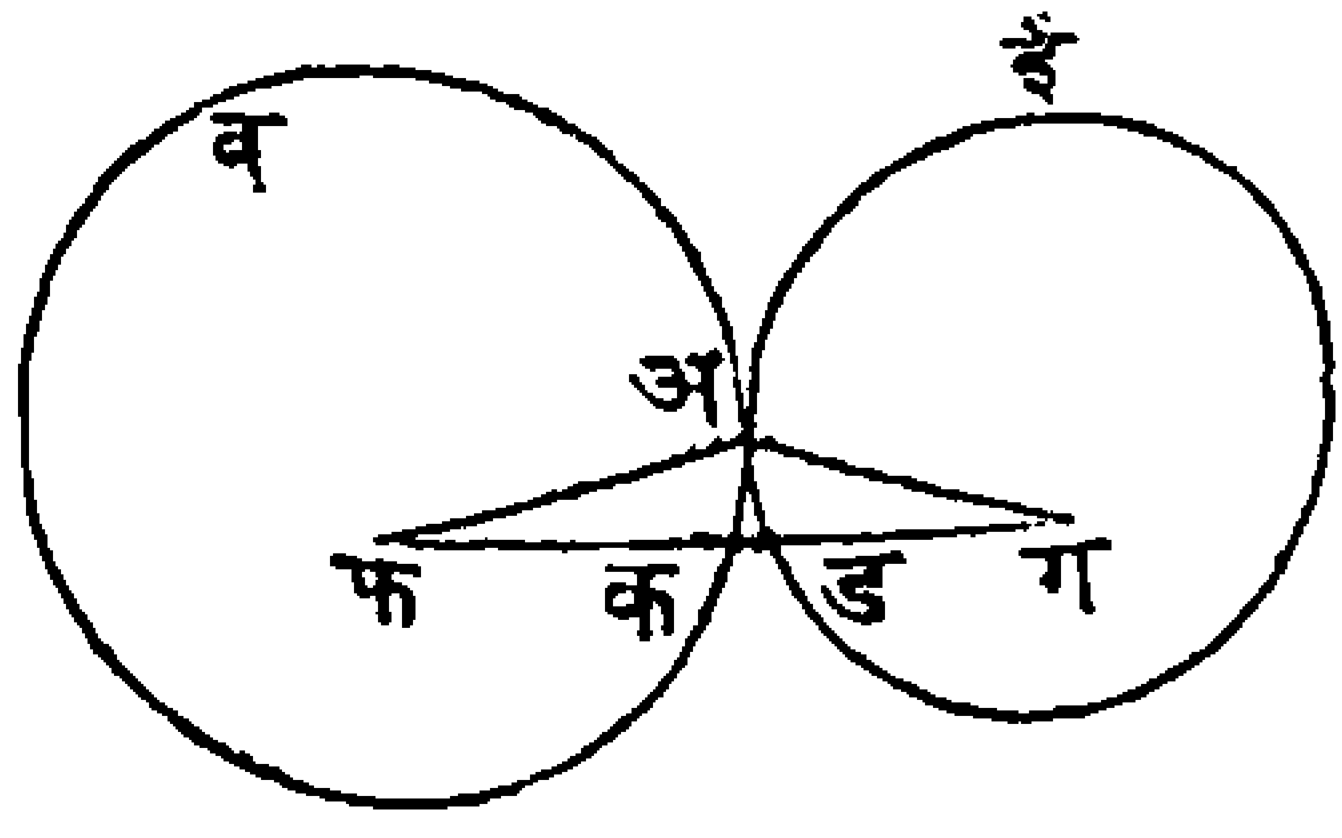
४. (३. ११) च्या सिद्धतेमध्यें १.२० ह्याची योजना आरंभीं केली आहे, तिच्या संबंधानें अशी एखादी खूण सांगा कीं, ती मागच्या प्रत्येक प्रश्नाचें उत्तर सांगण्यास उपयोगी पडेल.

५. (३. ११) च्या आकृतींत बाहेरच्या वर्तुळाचा मध्य (१) आंतल्या वर्तुळाच्या आंत असणें, (२) त्याच्या परिघांत असणें, व (३) त्याच्या बाहेर असणें, ह्या तीन स्थितींमध्यें अनुक्रमें ३. ७, ३.७ प्रश्न ६ व ३.८ ह्यांची योजना केली असतां फार थोडक्यांत सिद्धता होते, असें दाखवा.

सिद्धांत १२. प्रमेय.

परस्परांस बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदु त्या वर्तुलांचे मध्य सांधणाऱ्या रेषेच्या बाहेर असावयाचा नाहीं.

अबक आणि **अडई** हीं दोन वर्तुळें एकमेकांस बाहेरून स्पर्श करितात; **अबक** वर्तुळाचा **फ** मध्य आहे; आणि **अडई** वर्तुळाचा **ग** मध्य आहे. तर ह्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदु त्यांचे मध्य सांधणाऱ्या **फग** रेषेच्या बाहेर असावयाचा नाहीं.



कारण; जर **फग** रेषेच्या बाहेर त्यांचा स्पर्शबिंदु असेल, तर तो **अ** आहे, असें मान; व **फग**ची स्थिति **फकडग** ही आहे, असें समज.

आतां **अबक**, **अडई** ह्या वर्तुलांचे **फ**, **ग** हे मध्य आहेत;
म्हणून **फअ**, **अग**, ह्या रेषा अनुक्रमें **फक**, **डग** ह्या रेषांशीं समान आहेत; (१. व्याख्या १५)
म्हणून **फअ**, **अग** ह्यांची बेरीज, **फक**, **डग** ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. २)
आणि **फग** रेघ **फक**, **डग** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां मोठी आहे; (प्र.प्र.९)
ह्यास्तव **फग** रेघ, **फअ**, **अग** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां मोठी आहे. (प्र. प्र. अ. उप.)
पण **फग** रेघ, **फअ** आणि **अग** ह्यांच्या बेरजेहून लहानही आहे; (१. २०)
आणि हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून **फ** आणि **ग** ह्यांस सांधणाऱ्या रेघेच्या बाहेर ह्या वर्तुलांचा स्पर्शबिंदु नाहीं.

ह्याकरितां परस्परांस बाहेरून इत्यादिक.

प्रश्न.

१. "दोन छेदक वर्तुळांचे मध्य सांधणारी रेषा, त्यांचे छेदनबिंदु सांधणाऱ्या रेघेला दुभागिते व तीवर लंब असते." हें प्रमेय सिद्ध करा; व ३.११ आणि ३. १२ हे दोन्ही सिद्धांत ह्या प्रमेयाचे परमावधि आहेत, असें दाखवा.

२. (३. ११) व (३. १२) ह्यांत "दोन स्पर्शकवर्तुलांचा स्पर्शबिंदु एकच असतो" ही गोष्ट मानिली आहे, असें समजावयाचें काय? कां?

३. दोन स्पर्शक वर्तुळांचा स्पर्शबिंदु व त्यांपैकीं एकाचा मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा (किंवा ती वाढविली तर) दुसऱ्या वर्तुळाच्या मध्यबिंदूंतून जाते.

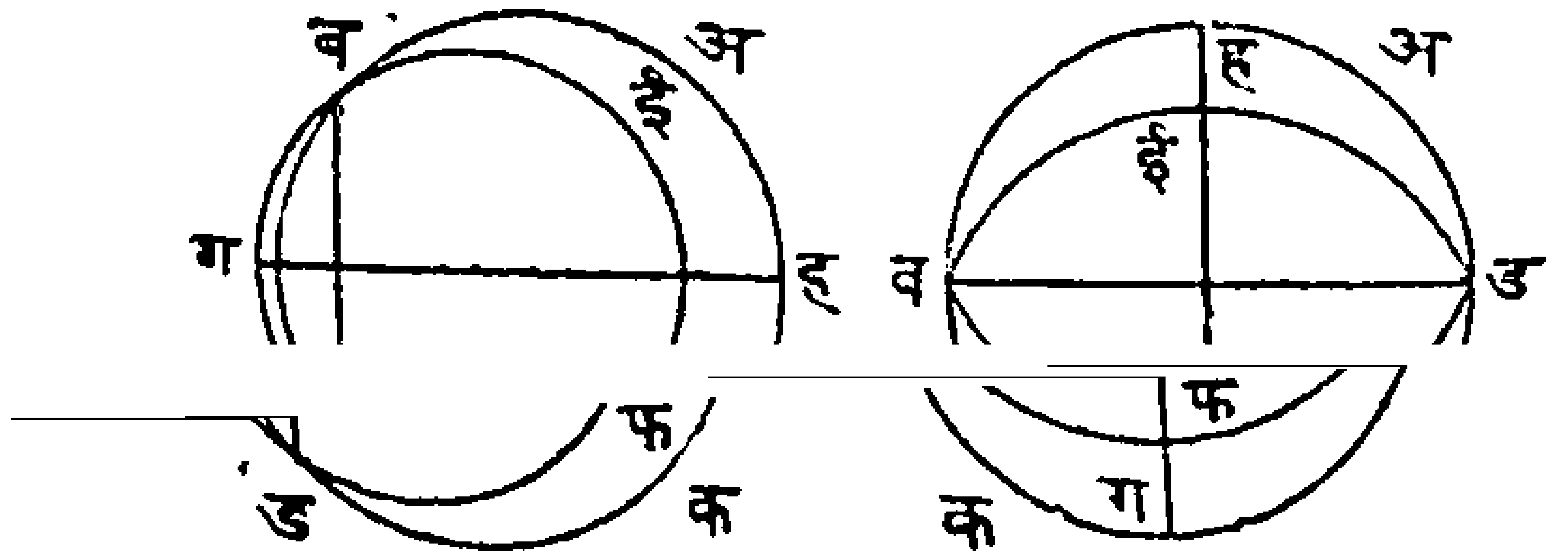
४. **अ**, **ब**, **क** हे परस्परांस बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचे मध्य आहेत; तर **अब**, **अक** ह्यांची वजाबाकी ही, ज्यांचे मध्य **ब**, **क** हे आहेत, त्यांच्या त्रिज्यांच्या वजाबाकीबरोबर होईल.

सिद्धांत १३. प्रमेय.

परस्परांस आंतून किंवा बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदु एकच असतो.

कारण; जर अनेक स्पर्शबिंदु असणें शक्य असेल, तर (१) पहिल्यानें **अबक** आणि **ईबफ** ह्या आंतून स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांचे **ब**, **ड** हे दोन स्पर्शबिंदु आहेत, असें मान; **बड** सांध; (गृ.कृ.१) आणि **बडस** दुभागणारी व तीवर लंब अशी **गह** रेघ काढ. (१.१०. व १.११)

आतां **ब** आणि **ड** बिंदु प्रत्येक वर्तुळाच्या परिघांत आहेत,



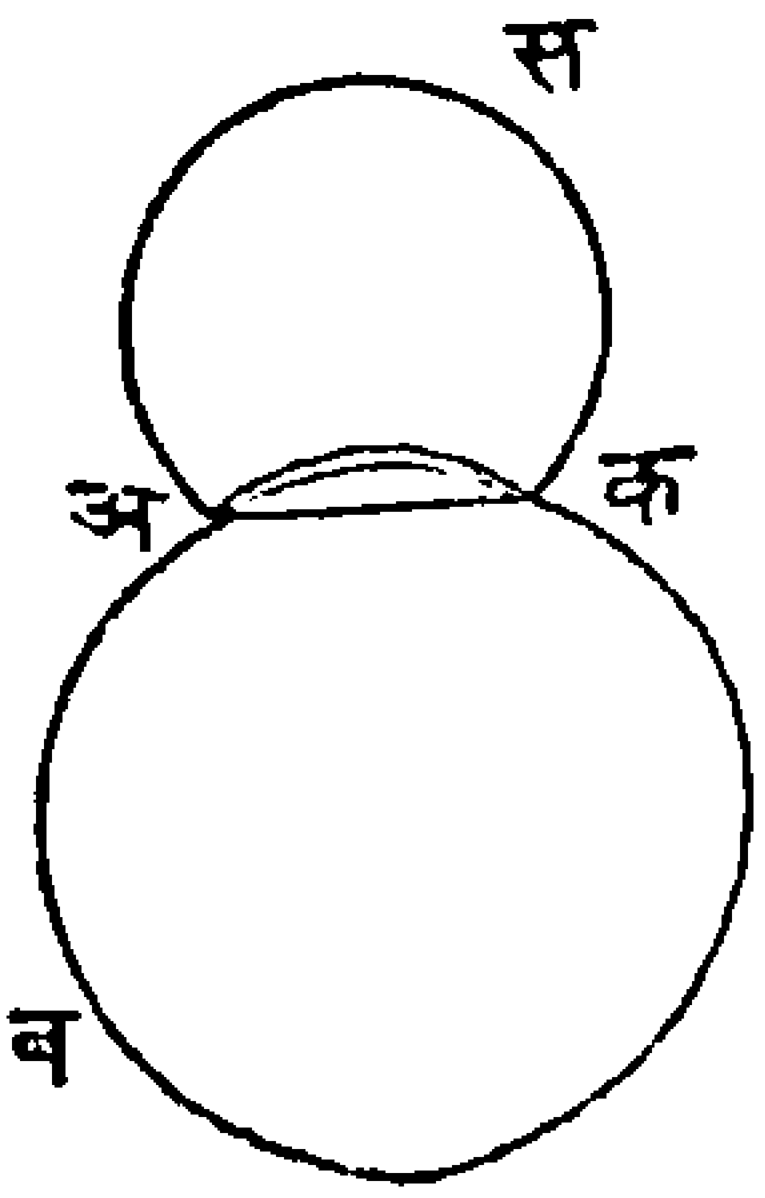
ह्मणून **बडस** दुभागणारी आणि तीवर लंब अशा **गह** रेघेंत प्रत्येक वर्तुळाचा मध्य आहे; (३. १ उप.)

ह्यास्तव त्यांचा कोणताही स्पर्शबिंदु **गह** रेघेच्या बाहेर असावयाचा नाहीं. (३.११)

परंतु **ब** आणि **ड** स्पर्शबिंदु **गह** रेघेबाहेर आहेत;

असें होणें अशक्य आहे.

म्हणून परस्परांस आंतून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचे स्पर्शबिंदु अनेक असणें संभवत नाहीं; म्हणून एकच असतो.



(२) आतां परस्परांस बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचे स्पर्शबिंदु अनेक असणें शक्य असेल, तर **अबक** आणि **अकस** हीं परस्परांस बाहेरून स्पर्श करणारीं वर्तुळें आहेत, व **अ** आणि **क** हे त्यांचे दोन स्पर्शबिंदु आहेत; असें मान.

अक सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अ** आणि **क** बिंदु **अकस** वर्तुळाच्या परिघांत आहेत, ह्या-स्तव त्यांस सांधणारी **अक** रेघ **अकस** वर्तुळांत पडते; (३.२)

आणि **अकस** वर्तुळ **अबक** वर्तुळाबाहेर आहे;

(प्रतिज्ञा व ३. व्याख्या ३)

ह्मणून **अक** रेघ **अबक** वर्तुळाबाहेर आहे.

परंतु **अ** आणि **क** बिंदु **अबक** वर्तुळाच्या परिघांत आहेत, ह्यास्तव **अक** रेघ **अबक** वर्तुळांत पडते; (३.२)

म्हणजे **अक** रेघ **अबक** वर्तुळाच्या आंत आहे व बाहेरही आहे.

पण असें होणें अशक्य.

म्हणून परस्परांस बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचे स्पर्शबिंदु अनेक असणें संभवत नाहीं; ह्मणून एकच असतो.

त्याकरितां, परस्परांस आंतून इत्यादिक.

प्रश्न.

१. "ज्या वर्तुळांचे परिघ परस्परांस एकाच बिंदूंत मिळतात, तीं वर्तुळें परस्परांस त्याच बिंदूंत स्पर्श करणारीं असतात" हा ३.१२ चा व्यत्यास सिद्ध करा.

२. (३.१३) च्या दुसऱ्या भागाची सिद्धता ३.१२ च्या साह्यानें पहिल्या भागाप्रमाणेंही करितां येते, असें दाखवा.

३. "जर दोन वर्तुळांच्या मध्यबिंदूंतून जाणाऱ्या अमर्याद रेघेमध्यें त्यांच्या परिघांचा एखादा साधारण बिंदु असेल, तर तीं स्पर्शक वर्तुळें असतात; व तोच साधारण बिंदु त्यांचा स्पर्शबिंदु असतो" हें प्रमेय सिद्ध करा.

४. "परस्परांस आंतून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचे मध्य सांधणारी रेघ त्यांच्या त्रिज्यांच्या वजाबाकीबरोबर असते" हा व ह्याचा व्यत्यास हे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध करा.

सिद्धांत १४. प्रमेय.

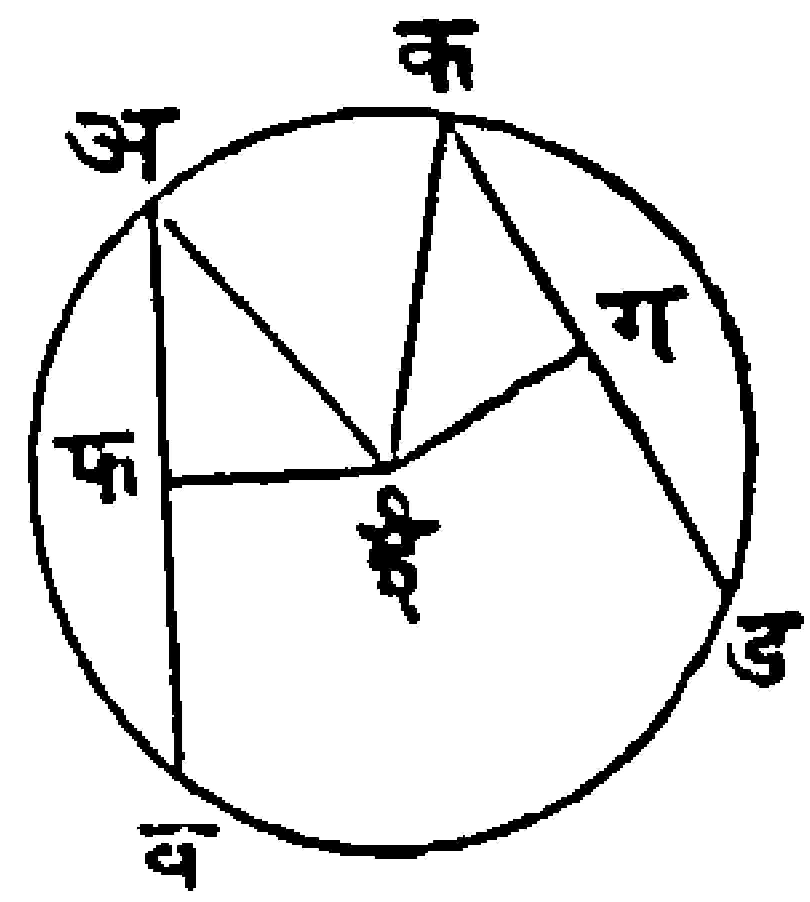
(१) एकाच वर्तुळाच्या समान ज्या सममध्यांतर असतात; व

(२) सममध्यांतर ज्या समान असतात.

(१) **अबडक** वर्तुळाच्या **अब** आणि **कड** ज्या परस्पर बरावर आहेत; तर त्या सममध्यांतर होतील (ह्मणजे मध्यबिंदूपासून त्यांवर लंब काढिले, तर ते समान होतील).

(३.१)

अबडक वर्तुळाचा **ई** मध्य काढ;



ई पासून **अब** वर **ईफ**, आणि **कड**वर **ईग** लंब काढ; (१.१२)

आणि **ईअ**, **ईक** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां मध्यांतून जाणारी **ईफ** रेघ मध्यांतून न जाणाऱ्या **अब** ज्येवर लंब आहे;

म्हणून ती **अब**चे दोन समान भाग करिते; (३.३)

ह्यास्तव **अफ**, **फब** बरावर आहे, आणि **अब**, **अफ**ची दुप्पट आहे.

असेंच, **कड**, **कग**ची दुप्पट आहे, हें ठरवितां येईल.

पण **अब**, **कड** बरावर आहे; (प्रतिज्ञा.)

म्हणून **अफ**, **कग** बरावर आहे; (प्र.प्र. ७)

ह्मणून त्यांवरील चौरसें ही समान आहेत. (१.ई)

आतां **अई**, **कई** बराबर आहे, (१.व्याख्या १५)

ह्मणून **अई**वरील चौरस **कई**वरील चौरसाबरावर आहे. (१.ई)

आणि **अफई**, **कगई** हे काटकोन आहेत, (रचना)

म्हणून **अई**वरील चौरस, **अफ**, **फई** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजे-बरावर आहे; व **कई**वरील चौरस, **कग**, **गई** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे. (१.४७)

ह्मणून **अफ**, **फई** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **कग**, **गई** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे; (प्र. प्र. १ उप. १)

परंतु **अफ**वरील चौरस, **कग**वरील चौरसाबरावर आहे, असें वर दाखविलें.

ह्मणून शेष **फई**वरील चौरस, शेष **गई**वरील चौरसाबरावर आहे. (प्र.प्र.३)

ह्मणून **ईफ** रेघ **ईग** रेघेबरावर आहे. (१.ई उप.२)

ह्मणून **अब**, **कड** ह्या ज्या सममध्यांतर आहेत. (३.व्याख्या४)

(२) जर **अब**, **कड** ह्या ज्या सममध्यांतर आहेत, ह्मणजे जर **ईफ**, **ईग** बरावर आहे; तर **अब**, **कड** बरावर होईल.

कारण; **ईफ**, **फअ** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **ईग**, **गक** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे,
हें पूर्वींप्रमाणेंच सिद्ध करून दाखवितां येईल.
परंतु **ईफ**, **ईग** बरावर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून त्यांवरील चौरसें समान आहेत. (१. ई)
ह्मणून **फअ**, **गक** ह्यावरील चौरसें समान आहेत. (प्र.प्र.३)
म्हणून **अफ** रेघ **कग** रेघेबराबर आहे. (१.ई उप.२)
पण **अब**, **अफ**ची दुप्पट आहे, आणि **कड**, **कग**ची दुप्पट आहे. (३.३)
ह्मणून **अब**, **कड** बराबर आहे. (प्र.प्र.६)
त्याकरितां, एकाच वर्तुळाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१) वर्तुलमध्यापासून ज्येवर काढिलेला लंब तिला वर्तुलांतच मिळतो, असें ठरवा. (२) ३.१४ हा १. अ ह्याच्या योजनेनें थोडक्यांत सिद्ध होतो, असें दाखवा.

२. एका वर्तुळाचा व्यास १० फूट आहे; तर त्याच्या ८ फूट लांबीच्या ज्येचें मध्यांतर किती असेल ?

३. एका वर्तुळाची त्रिज्या ६५ हात आहे व त्याच्या एका ज्येचें मध्यांतर २५ हात आहे; तर त्या ज्येची लांबी किती हात असेल ?

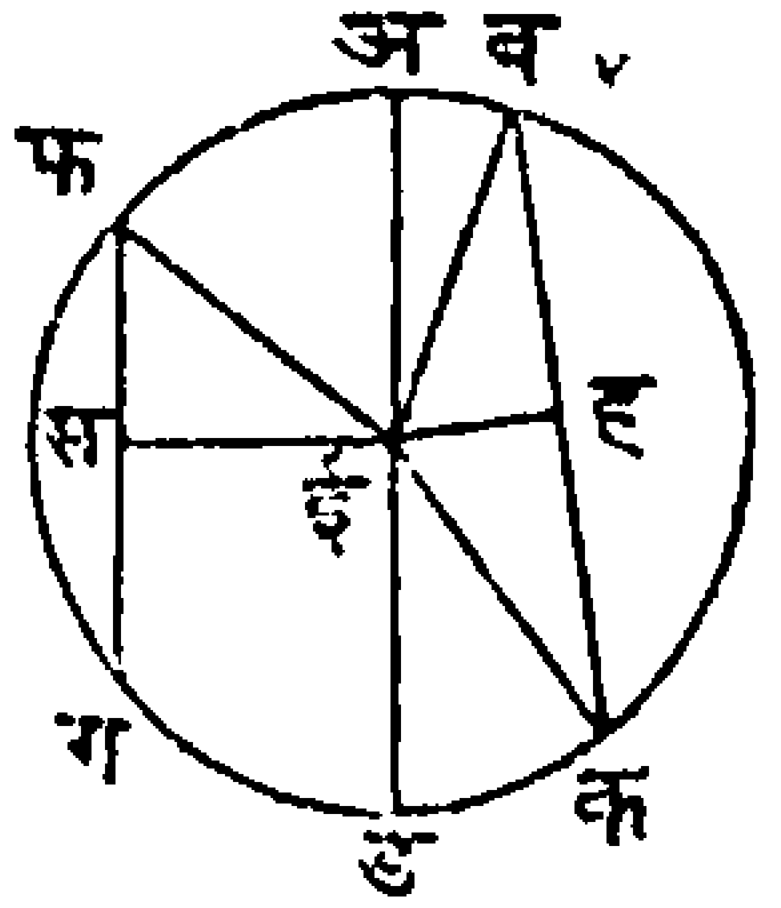
४. एका वर्तुळाची ३ इंच मध्यांतराची ज्या ८ इंच लांबीची आहे; तर त्या वर्तुळाचा व्यास किती इंचांचा असेल ?

५. व्यासांतील एकाच मध्येतरबिंदूतून जाणाऱ्या आणि त्या व्यासाच्या एकाच भागाशीं सारखे कोन करणाऱ्या ज्या समान असतात.

सिद्धांत १५. प्रमेय.

(१) वर्तुळाच्या सर्व ज्यांमध्यें व्यास महत्तम असतो; (२) व्यासाहून इतर कोणत्याही दोन ज्यांपैकीं वर्तुळमध्यापासून समीपतर

ज्या ही दूरतर ज्येपेक्षां मोठी असते; आणि (३) व्यासाहून इतर दोन ज्या असमान असल्यास, त्यांपैकीं मोठी ज्या वर्तुलमध्यापासून धाकटीपेक्षां समीपतर असते.



(१) **अबकडगफ** वर्तुळाचा **अड** हा व्यास आणि **बक** ही दुसरी एक ज्या आहे; तर **अड** व्यास **बक** ज्येपेक्षां मोठा होईल.

ई हा वर्तुळमध्य काढ; (३.१)
आणि **ईब, ईक** सांध. (गृ.कृ.१)

आतां **अई, बई** ह्या समान आहेत; व **ईड, ईक** ह्या समान आहेत; (१.व्या.१५)
ह्मणून **अड** ही, **बई, ईक** ह्यांच्या बेरजेबरावर आहे. (प्र.प्र.२)
पण **बई, ईक** ह्यांची बेरीज **बक**पेक्षां मोठी आहे; (१.२०)
म्हणून **अड** ही **बक** पेक्षां मोठी आहे. (प्र.प्र.अ)
ह्याप्रमाणेंच **अड**ही इतर कोणत्याही ज्येपेक्षां मोठी आहे, असें सिद्ध करितां येईल.

ह्मणून **अड** व्यास सर्व ज्यांमध्यें महत्तम आहे.

(२) **बक** ही ज्या **फग** ज्येपेक्षां वर्तुळमध्यापासून समीपतर आहे; तर **बक** ही **फग** पेक्षां मोठी होईल.

ई बिंदूपासून **बक, फग** ह्यांवर अनुक्रमें **ईह, ईस** लंब काढून **ईब, ईफ** सांध. (१.१२ व गृ. कृ.१)

आतां **बक, बह**ची दुप्पट आहे; **फग, फस**ची दुप्पट आहे; व **ईह, हब** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज, **ईस, सफ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे; हें सर्व मागील सिद्धांतांत सिद्ध केलेंच आहे.

परंतु **ईह, ईस**पेक्षां लहान आहे, (प्रतिज्ञा, व ३.व्या.५)
म्हणून **ईह**वरील चौरस **ईस**वरील चौरसापेक्षां लहान आहे. (१.ई उप.१)
हे असमान चौरस वरील समान बेरजांतून अनुक्रमें वजा केले;

तेव्हां शेष **हब**वरील चौरस, शेष **सफ**वरील चौरसापेक्षां मोठा आहे; ( )

ह्मणून **हब** रेषा, **फस** रेषेपेक्षां मोठी आहे; (१.ई उप.३)

ह्मणून **वक**, **फग** पेक्षां मोठी आहे. ( )

(३) जर **बक**, **फग** पेक्षां मोठी आहे; तर **बफ**ही **फग**पेक्षां वर्तुलमध्यापासून समीपतर होईल; ह्मणजे **ईह**, **ईस**पेक्षां लहान होईल.

कारण; **बक**, **फग** पेक्षां मोठी आहे, ह्मणून **बह**, **फस** पेक्षां मोठी आहे. ( )

ह्मणून **बह**वरील चौरस **फस**वरील चौरसापेक्षां मोठा आहे; (१.ई उप.१)

परंतु **बह**, **हई** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **फस**, **सई** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर आहे, असें ठरविलें आहे;

म्हणून **हई**वरील चौरस, **सई**वरील चौरसाहून लहान आहे; ( )

ह्याकरितां **ईह** रेघ **ईस** रेघेपेक्षां लहान आहे. (१. इ. उप. ३)

ह्याकरितां, वर्तुळाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (१) (३.१५) च्या सिद्धतेला लागणाऱ्या आधारांपैकीं जे पूर्वी सिद्ध न करितां स्वीकारिलेले दिसतात, ते सांगून सिद्ध करून दाखवा. (२) ३.१५ भाग ३ हा, ३.१४ भाग २ व ३.१५ भाग २ ह्यांच्या योजनेनें क्रमविरुद्धरीतिनें फार थोडक्यांत सिद्ध होतो, असें दाखवा.

२. २६ फूट त्रिज्येच्या वर्तुळाची एक ज्या ४८ फूट लांबीची आहे व दुसऱ्या ज्येचें मध्यांतर २४ फूट आहे; तर त्यांपैकीं मोठी ज्या कोणती ?

३. वर्तुळांतल्या कोणत्याही मध्येतरबिंदूंतून जाणाऱ्या ज्या अनंत ज्या असतात, त्या सर्वांमध्यें, त्या बिंदूंतून जाणाऱ्या व्यासावर लंब असणारी ज्या लघुतम असते.

४. वर्तुळाची त्रिज्या, एक ज्या व तिचें मध्यांतर ह्या तीन

रेषांपैकीं कोणत्याही दोन रेषांच्या लांब्या एकाच रेषापरिमाणानें दाखविणाऱ्या संख्या दिल्या असतां, तिसरीची लांबी दाखविणारी संख्या काढण्याच्या सामान्य रीति सांगा.

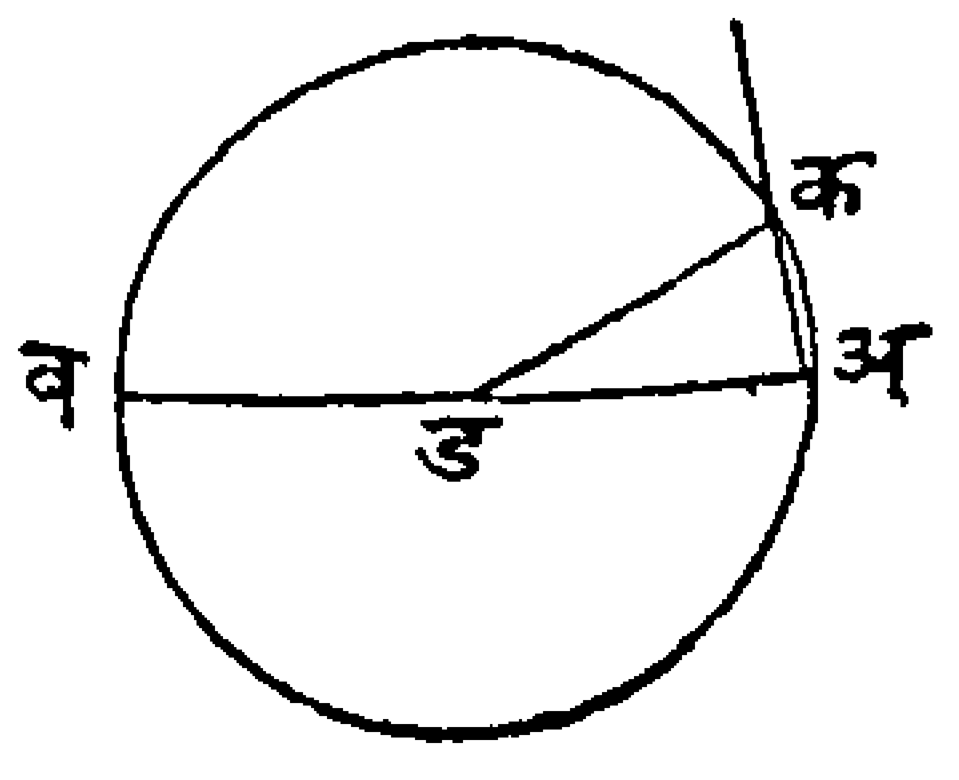
५. " एकाच वर्तुळाच्या दोन ज्यांच्या मध्यांतरांची बेरीज आणि वजाबाकी यांचा काटकोनचौकोन हा, त्या ज्यांच्या अर्धांवरील चौरसांच्या वजाबाकीबरोबर असतो, " असें सिद्ध करा.

६. " एकाच वर्तुळाच्या दोन समांतर असणाऱ्या ज्या मध्यबिंदूच्या भिन्न अंगांस किंवा एकाच अंगास आहेत, तर त्या ज्यांमधील अंतर हें, त्यांच्या मध्यांतरांच्या, अनुक्रमें बेरजेबराबर किंवा वजाबाकीबराबर असतें " असें सिद्ध करा.

७. एका वर्तुळाच्या दोन ज्या परस्परांशीं समांतर आहेत, त्यांच्या लांब्या अनुक्रमें ६ व ८ फूट आहेत, आणि त्यांच्यामधील अंतर १ फूट आहे; तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या किती फूट असेल? एकाच वर्तुळाच्या समांतर असणाऱ्या दोन ज्यांच्या लांब्या व त्यांच्या मधील अंतर हीं दिलीं असतां, त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढण्याची सामान्य रीति तयार करून दाखवा.

सिद्धांत १६. प्रमेय.

(१) वर्तुळाचे व्यासावर त्याचे टोंकांतून काढिलेला लंब वर्तुळाबाहेर पडतो; आणि (२) व्यासाच्या टोंकापासून त्याशीं (किती ही मोठा) लघुकोण करणारी रेषा काढिली असतां, ती वर्तुळास छेदितेच.



(१) **अबक** एक वर्तुळ आहे, आणि **अब** त्याचा व्यास आहे; तर **अब** व्यासावर **अ** टोंकापासून काढिलेला लंब वर्तुळाबाहेर पडेल (ह्मणजे तो वर्तुळास कापणार नाहीं व परिघावरही पडणार नाहीं).

कारण, जर तो लंब बाहेर पडत नाहीं, तर प्रथमतः तो **अक** ह्या स्थितीमध्यें वर्तुळास कापितो, असें मान; **ड** हा वर्तुलमध्य काढ;

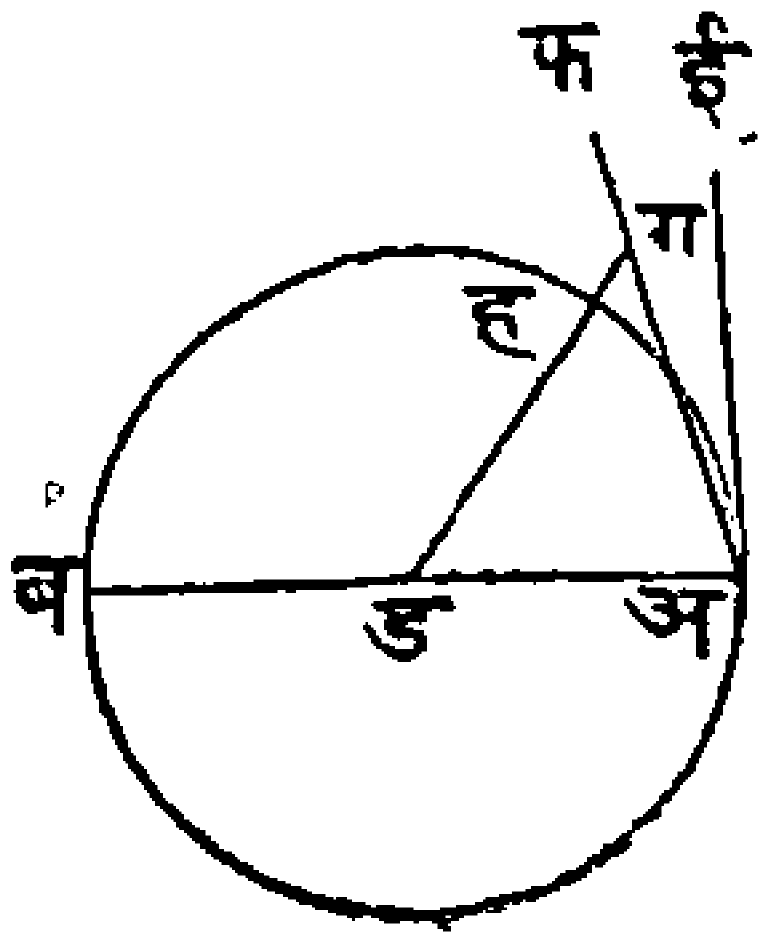
आणि **अक** रेघ वर्तुळास ज्या दुसऱ्या **क** बिंदूंत मिळते, तो व **ड** बिंदु सांध. (३.१ व ग्र.कृ.१)
आतां **डअ, डक** बरोबर आहे; (१. व्याख्या १५)
म्हणून **डअक** कोन, **डकअ** कोनाबरोबर आहे. (१.५)
परंतु **डअक** कोन काटकोन आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **डकअ** कोनही काटकोन आहे; (प्र. प्र. ११ उप.)
ह्यास्तव **डअक** आणि **डकअ** कोन मिळून, दोन काटकोनांबरोबर आहेत; हा १.१७ ह्याशीं विरोध आहे;
म्हणून **अ** पासून **अब** वर काढिलेला लंब वर्तुळांत पडत नाहीं.

आणि ह्या रीतीनेंच असें दाखवितां येईल कीं तो लंब परिघावरही पडत नाहीं.
म्हणून तो वर्तुळाबाहेर पडेल, व त्याची स्थिति **अई** अशी असेल.

(२) **अब** व्यासाच्या **अ** टोंकापासून त्याशीं लघुकोन करणारी **अफ** रेषा काढिली आहे; तर ती वर्तुलास छेदीलच.

कारण; ती छेदीत नसल्यास सर्वांशीं वर्तुलाबाहेर पडते असें मान; **ड** हा वर्तुलमध्य काढून त्यापासून **अफ**वर **डग** लंब काढ; (३.१ व १.१२)

(हा लंब **डअ**च्या **फ** कडील अंगासच **अफ**ला मिळेल, हें सहज सिद्ध करितां येईल)
आणि **डग** रेघ परिघास **ह** बिंदूंत छेदिते, असें मान.
आतां **डगअ** कोन काटकोन आहे, (रचना)
आणि **डअग** कोन लघुकोण आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **डगअ** कोन **डअग** कोनापेक्षां मोठा आहे; (१. व्या. १२)
म्हणून **डअ, डग** पेक्षां मोठी आहे. (१.१९.)
पण **डअ, डह** बरोबर आहे; (१. व्या. १५)
म्हणून **डह, डग** पेक्षां मोठी आहे, (प्र. प्र. अ)
पण हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे.
ह्यास्तव **अफ** रेघ सर्वांशीं वर्तुलाच्या बाहेर पडते असें नाहीं, ह्मणजे ती त्यास छेदिते.



ह्याकरितां, वर्तुळाचे व्यासावर इत्यादि.

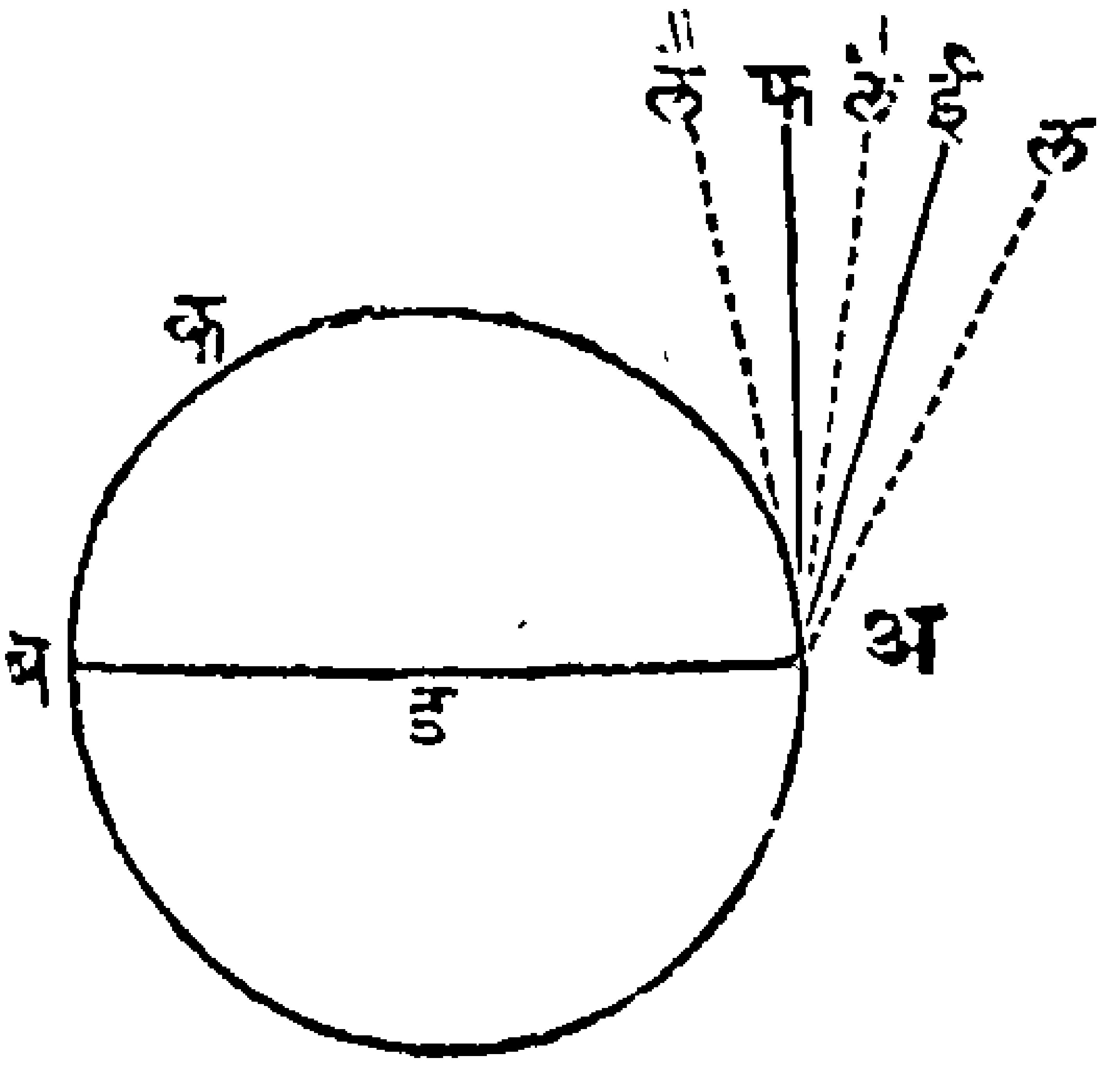
१ उपसिद्धांत—वरील सिद्धांतावरून उघड आहे कीं,

(१) वर्तुळाच्या व्यासावर त्याच्या टोंकापासून लंब काढिला असतां, ती त्या वर्तुलास स्पर्शरेषा होते. (३. व्याख्या २)

(२) स्पर्शरेषा वर्तुलास एकाच बिंदूंत स्पर्श करिते. (३. २)

(३) एकाच वर्तुळास त्याच्या परिघांतील एकाच बिंदूंत स्पर्श करणारी एकच रेषा असणें संभवतें.

कारण; जर शक्य असेल, तर **अबक** वर्तुळाच्या परिघांतील **अ** ह्या एकाच बिंदूंत त्याला स्पर्श करणाऱ्या **अई**, **अफ** ह्या दोन रेषा आहेत, असें मान.



ड हा मध्य बिंदु काढून **बअ** व्यास तयार कर; (३.१, गृ. कृ. १ व २) आणि **बअ** व्यासावर त्याच्या **अ** टोंकापासून **अल** लंब काढ. (१. १२)

आतां हा लंब जर (१) **अल** ह्या स्थितींत पडला, (२) **अई**शीं मिळाला किंवा (३) **अल'** ह्या स्थितींत पडला, तर ३.१६ ह्याच्या (२) ह्या भागाशीं विरोध येईल; आणि जर (४) **अफ**शीं मिळाला किंवा (५) **अल''** ह्या स्थितींत पडला, तर **अई**, **अफ**, **अल''** ह्या रेषा **अ**च्या दुसऱ्या अंगास वाढविल्यानें ३.१६ भाग (२) ह्याशीं विरोध येईल. म्हणून इष्टसिद्धि.

प्रश्न.

१. "व्यासावर त्याच्या टोंकापासून काढिलेला लंब परिघावर पडत नाहीं" ही गोष्ट प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवा. ही गोष्ट वक्र रेषेच्या व्याख्येवरूनही सिद्ध होते, असें दाखवा.

२. (३. १६) ह्याच्या पहिल्या भागाची प्रतिज्ञा "त्रिज्येवर तिच्या

परिघांतील टोंकापासून काढिलेला लंब, ही त्या वर्तुळाची स्पर्शरेषा असते" अशी म्हटली तरी चालेल, असें दाखवा.

३. "वर्तुळाच्या मध्यबिंदूपासून त्रिज्येपेक्षां जास्त अंतरावर असणारा प्रत्येक बिंदु वर्तुळाबाहेर असतो" ह्या प्रत्यक्ष प्रमाणाच्या आधारानें ३. १६ ह्याचा (१) हा भाग क्रमिक रीतीनें सिद्ध करून दाखवा.

४. "जी (अमर्याद) सरल रेषा वर्तुळास एकाच बिंदूंत मिळते, ती त्या वर्तुळास त्याच बिंदूंत स्पर्श करणारी असते" असें सिद्ध करा.

सिद्धांत १७. कृत्य.

(१) दिलेल्या वर्तुळाबाहेरील किंवा (२) वर्तुळाच्या परिघावरील दिलेल्या बिंदूपासून वर्तुळास स्पर्शरेघ काढावयाचें.

(१) प्रथमतः **अ** दिलेला बिंदु **बकड** दिलेल्या वर्तुळाबाहेर आहे; आणि त्या बिंदूपासून वर्तुळास स्पर्शरेघ काढावयाची आहे.

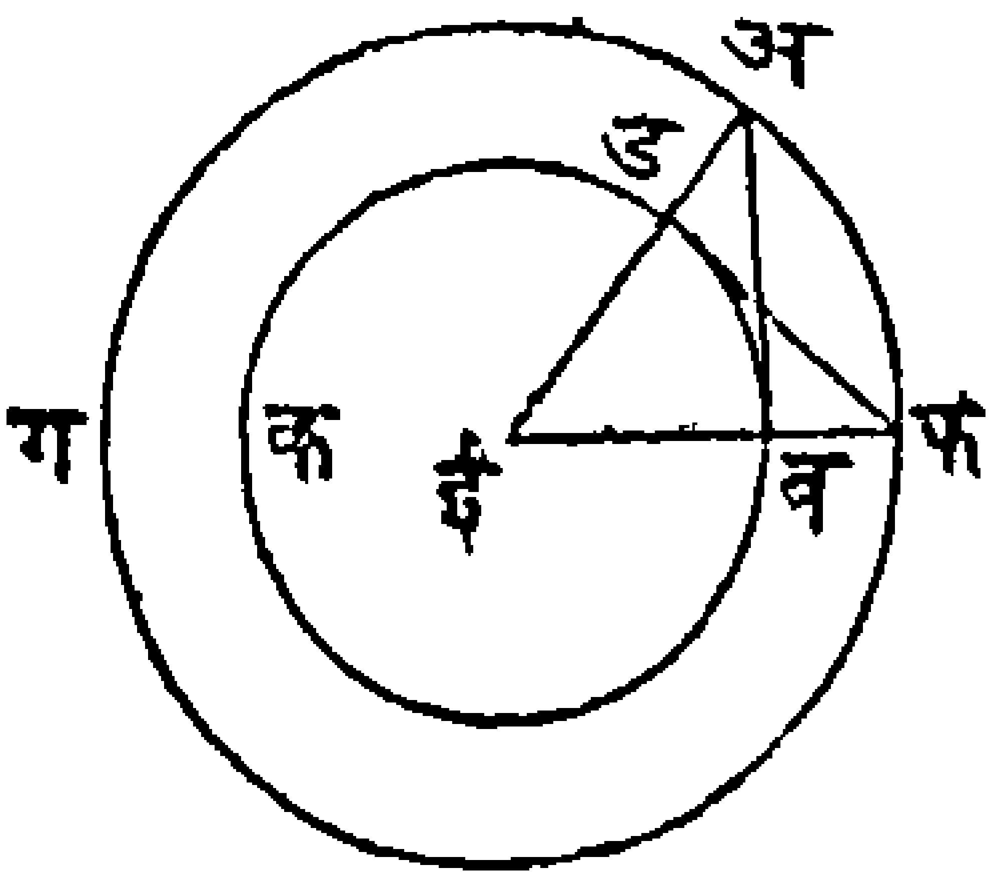
वर्तुळाचा **ई** मध्य काढ; (३. १)

अई सांध, ती परिघास **ड** बिंदूंत छेदिते असें मान, आणि **ई** मध्यापासून **ईअ** अंतरानें **अफग** वर्तुळ काढ; (गृ. कृ. १ व ३)

ड पासून **ईअ**वर **डफ** लंब काढ; (१. ११)

ईफ सांध; ती दिलेल्या वर्तुळाच्या परिघास **ब** मध्यें छेदिते, असें मान; आणि **अब** सांध. (गृ. कृ. १)

म्हणजे **अब** रेघ **बकड** वर्तुलास स्पर्श करणारी होईल.



कारण; **अफग** वर्तुळाचा **ई** मध्य आहे, म्हणून **ईअ**, **ईफ** बराबर आहे; आणि **बकड** वर्तुळाचाही **ई** मध्य आहे, म्हणून **ईब**, **ईड** बराबर आहे. (१. व्या. १५)

म्हणून **अईब** त्रिकोणाच्या **अई**, **ईब** ह्या दोन बाजू **फईड** त्रिकोणाच्या **फई**, **ईड** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत, आणि **ई** कोन त्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;

म्हणून **अबई** कोन, **फडई** कोनाबराबर आहे. (१.४ भाग २)

परंतु **फडई** कोन काटकोन आहे; (रचना)

म्हणून **अवई** कोन काटकोन आहे, (प्र. प्र. ११ उप.)

म्हणजे **अव**, **ईव**वर लंब आहे.

आणि **ईव** मध्यांतून काढिली आहे,

ह्याकरितां **अव** ही, वर्तुळास स्पर्शरेघ आहे. (३. १६, उप. (१))

व ती दिलेल्या बिंदूपासूनच निघाली आहे.

ह्याकरितां, दिलेल्या **अ** बिंदूपासून **वकड** दिलेल्या वर्तुळास **अव** स्पर्शरेघ काढिली आहे.

(२) दिलेला बिंदु वर्तुळाच्या परिघावर आहे, व तो **ड** आहे; आणि त्यापासून स्पर्शरेषा काढावयाची आहे.

ई हा वर्तुळमध्य काढ; (३. १)

डई सांध, व **ड** पासून **डई** वर **डफ** लंब काढ. (पृ.क्र.१व१.११)

म्हणजे **डफ** ही वर्तुळास स्पर्शरेघ होते. (३. १६, उप. (१))

प्रश्न.

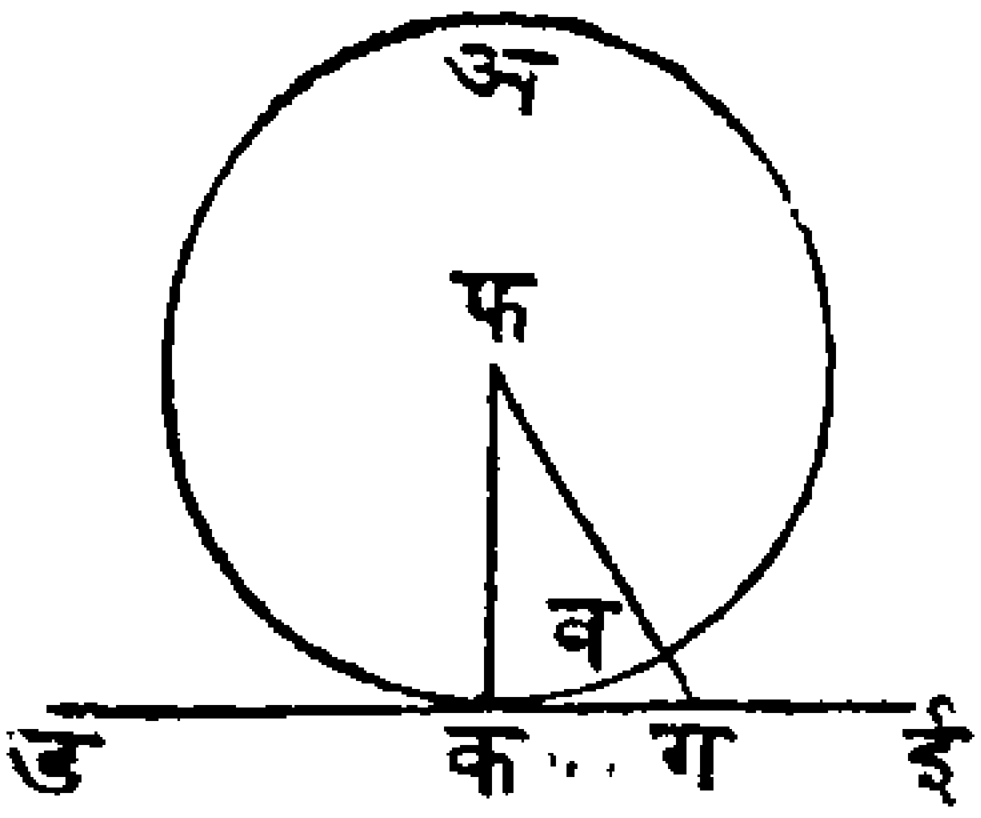
१. वर्तुळाच्या परिघांतील किंवा वर्तुळाबाहेरील कोणत्याही बिंदू-पासून त्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. वर्तुळाबाहेरच्या बिंदूपासून त्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढण्याची जी ग्रंथांतली रीति आहे, तीवरून "वर्तुळाबाहेरच्या कोणत्याही बिंदूपासून त्या वर्तुलास दोन स्पर्शरेषा काढितां येतात," असें दाखवा.

सिद्धांत १८. प्रमेय.

वर्तुळाच्या स्पर्शरेषेचा स्पर्शबिंदु आणि वर्तुळमध्य ह्यांस सांधणारी रेघ त्या स्पर्शरेघेवर लंब होते.

डई रेघ **अबक** वर्तुळास **क** बिंदूशीं स्पर्श करिते; **अबक** वर्तुळाचा **फ** मध्य आहे; आणि **फक** सांधिली आहे. तर **फक**, **डई**-वर लंब होईल.



कारण; जर डईवर **फक** लंब नसेल, तर **फ** पासून डईवर **फग** लंब काढ; **फग** ही परिघास **ब** मध्यें छेदिते, असें मान.

आतां **फगक** काटकोन आहे, (रचना)

ह्मणून **फकग** लघुकोन आहे; (१. १७ व प्र. प्र. ५)

ह्मणून **फक**, **फग** पेक्षां मोठी आहे. (१.१९)

परंतु **फक**, **फब** बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)

म्हणून **फब**, **फग**हून मोठी आहे. (प्र. प्र. अ)

पण हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे;

म्हणून **फग**, डईवर लंब नाहीं.

ह्याप्रमाणें असें दाखवितां येईल कीं, **फ** पासून **डई** वर **फक** खेरीज दुसरी कोणतीही रेघ लंब नाहीं;

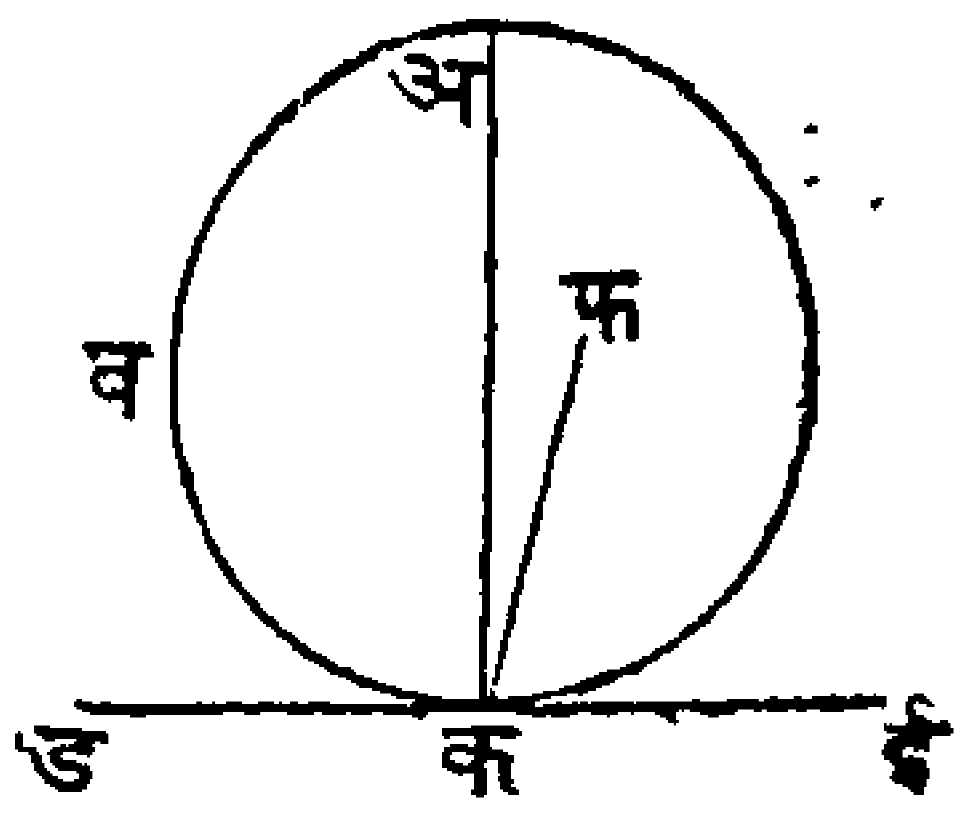
म्हणून **फक**, डईवर लंब आहे.

ह्याकरितां, जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते इत्यादि.

सिद्धांत १९. प्रमेय.

वर्तुळाच्या स्पर्शरेघेवर स्पर्शबिंदूपासून काढिलेल्या लंबामध्यें त्या वर्तुळाचा मध्य असतो.

अबक वर्तुळास **डई** रेघ **क** बिंदूशीं स्पर्श करिते, आणि **क** बिंदूतून तीवर **कअ** लंब काढून तो परिघास पुनः मिळे तोंपर्यंत वाढविला आहे; तर मध्यबिंदु **कअ** रेघेंत असेल.



कारण; जर तीमध्यें नसेल, तर तिच्या बाहेरचा **फ** हा बिंदु वर्तुलमध्य आहे, असें मान; व **फक** सांध. (गृ. कृ. १) आतां **अबक** वर्तुळास **डई** स्पर्श करिते,

आणि **फक** रेघ मध्यबिंदु व स्पर्शबिंदु ह्यांस सांधणारी आहे;

म्हणून **फक** रेघ **डई** रेघेवर लंब आहे. (३. १८)

म्हणून **फकई** कोन काटकोन आहे. (१.व्या. १०)

परंतु **अकई** कोनही काटकोन आहे; (रचना)
ह्यास्तव **फकई** कोन **अकई** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. ११)
पण हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध आहे;
म्हणून **फ** बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य नाहीं.

ह्याप्रमाणेंच, **कअ** रेघेबाहेरचा दुसरा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं असें दाखवितां येईल; म्हणून मध्य **कअ** रेघेंत आहे.

ह्याकरितां, जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते, इत्यादि.

३. १६, ३., १७, ३. १८ व ३. १९ ह्यांवर

प्रश्न.

१. वर्तुळाच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून त्या वर्तुळास दोनच स्पर्शरेषा काढितां येतात.

२. (१) वर्तुळाच्या बाहेरील कोणत्या ही एकाच बिंदूपासून त्या वर्तुळास काढिलेल्या स्पर्शरेषा समान असतात; (२) वर्तुळाबाहेरचा बिंदु व मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी रेघ, त्या बिंदूपासून काढिलेल्या दोन स्पर्शरेषांमधील कोनास दुभागिते; (३) तीच सांधणारी रेषा, मध्याबिंदूपासून दोन्ही स्पर्शबिंदूपर्यंत काढिलेल्या रेषांच्या मधील कोनासही दुभागिते.

३. (१) स्पर्शरेषेच्या स्पर्शबिंदूंतून जाणें, (२) स्पर्शरेषेवर लंब असणें, व (३) वर्तुळमध्यांतून जाणें, ह्या तीन धर्मांपैकीं कोणतेही दोन धर्म ज्या रेघेंत असतात, तीमध्यें तिसरा धर्मही असतो " ह्या सिद्धांताचे तीन भाग निरनिराळे सांगून, त्यांपैकीं जे सिद्ध झाले नसतील, ते सिद्ध करून दाखवा.

४. (१) जीं वर्तुळें एकाच रेघेस एकाच बिंदूंत स्पर्श करितात, तीं परस्परांसही त्याच बिंदूंत स्पर्श करितात; व (२) दोन स्पर्शक वर्तुळांपैकीं एकाला स्पर्शबिंदूंतून काढिलेली स्पर्शरेषा दुसऱ्यालाही त्याच बिंदूंत स्पर्श करिते.

५. (१) व्यासाच्या दोन्ही टोंकांपासून काढिलेल्या स्पर्शरेषा समांतर असतात; व (२) समांतर असणाऱ्या दोन स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदु सांधणारी रेघ वर्तुळमध्यांतून जाते.

६. कोन करणाऱ्या दोन त्रिज्यांच्या टोंकांतून काढिलेल्या दोन स्पर्शरेषा, त्या त्रिज्यांच्या मधील अंतर्वक्रकोनाच्या अंगासच मिळतात.

७. (१) वर्तुळाबाहेरच्या कोणत्याही एकाच बिंदूपासून त्या वर्तुलास काढिलेल्या दोन स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदु सांधणारी रेषा वर्तुलमध्यांतून जात नाहीं; व (२) मध्यबिंदु आणि तो बाहेरचा बिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा, स्पर्शबिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेला दुभागिते व तीवर लंब असते.

८. (१) दोन समकेंद्र वर्तुळांपैकीं बाहेरच्या वर्तुळाची जी ज्या आंतील वर्तुळास स्पर्श करिते, ती स्पर्शबिंदूंत दुभागिली जाते; व (२) बाहेरच्या वर्तुळाची जी ज्या आंतील वर्तुळास छेदिते, तिचे दोन्ही वर्तुळांच्या परिघांमधले भाग सारखे असतात.

९. (१) दोन समकेंद्रवर्तुलांपैकीं आंतील वर्तुलास स्पर्श करणाऱ्या, बाहेरील वर्तुळाच्या सर्व ज्या समान असतात; (२) आंतील वर्तुलास छेदणारी बाहेरच्या वर्तुलाची ज्या स्पर्श करणाऱ्या ज्येपेक्षां मोठी असते; व (३) आंतील वर्तुळास मुळींच न मिळणारी बाहेरच्या वर्तुळाची ज्या स्पर्श करणाऱ्या ज्येपेक्षां लहान असते.

१०. एकाच वर्तुळास स्पर्श करणाऱ्या चार रेषांचा जर चौकोन बनला, तर त्याच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंची बेरीज, दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजेबराबर असते.

११. एका कोनाच्या दोन्ही बाजूंस स्पर्श करणाऱ्या सर्व वर्तुळांचे मध्यबिंदु, तो कोन दुभागणाऱ्या रेषेमध्यें असतात.

१२. दोन वर्तुळांपैकीं प्रत्येकास स्पर्श करणाऱ्या दोन रेषा जर समांतर असल्या, तर त्या वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात.

१३. वर्तुळाच्या व्यासाच्या दोन्ही टोंकांपासून काढिलेल्या दोन स्पर्शरेषा तिसऱ्या एका स्पर्शरेषेस **अ, ब** बिंदूंत छेदितात; व **क** हा त्या वर्तुळाचा मध्य आहे. तर **अकब** कोन काटकोन आहे, असें सिद्ध करा.

१४. परस्परांवर लंब असणाऱ्या दोन त्रिज्या एका स्पर्शरेषेला ज्या दोन बिंदूंत छेदितात, त्यांपासून त्या वर्तुळास आणखी दोन

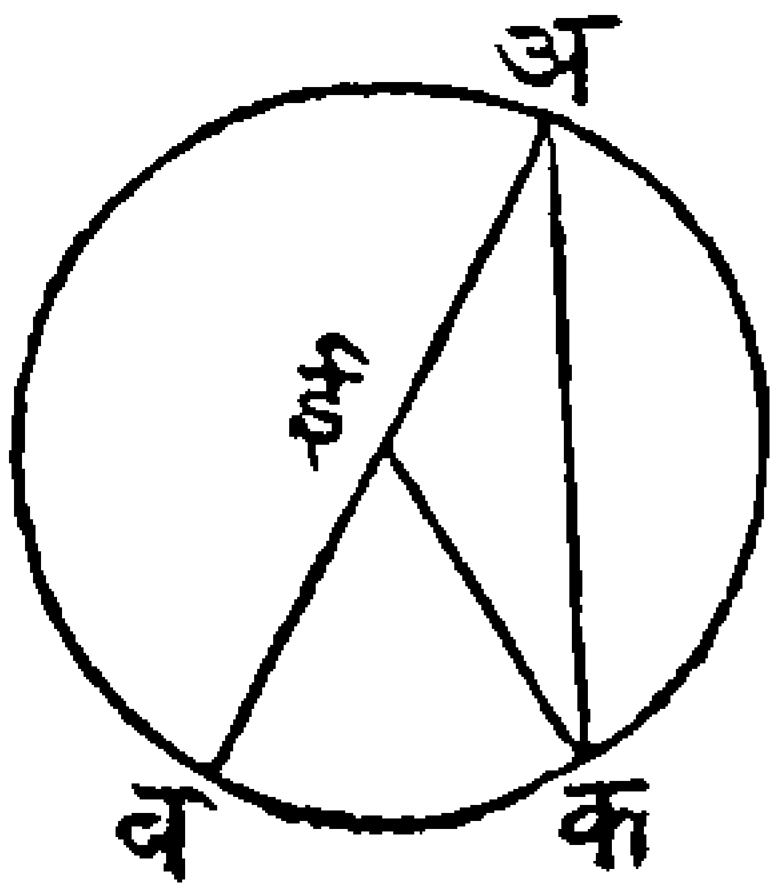
स्पर्शरेषा काढिल्या आहेत; तर त्या दोन स्पर्शरेषा समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत २०. प्रमेय.

वर्तुळाच्या कोणत्याही कंसावरचा मध्यकोण हा, त्याच कंसावरच्या परिघकोनाच्या दुपटीबरोबर असतो.

अबक वर्तुळ आहे, ई त्याचा मध्य आहे, **बईक** हा **बक** कंसावरील मध्यकोण आहे, व **बअक** हा त्याच कंसावरील परिघकोण आहे. तर **बईक** कोन **बअक** कोनाच्या दुप्पटीबरोबर होईल.

(१) ई हा वर्तुळमध्य **बअक** कोनाच्या **अब** ह्या एका बाजूंत आहे. असें मान. (१)

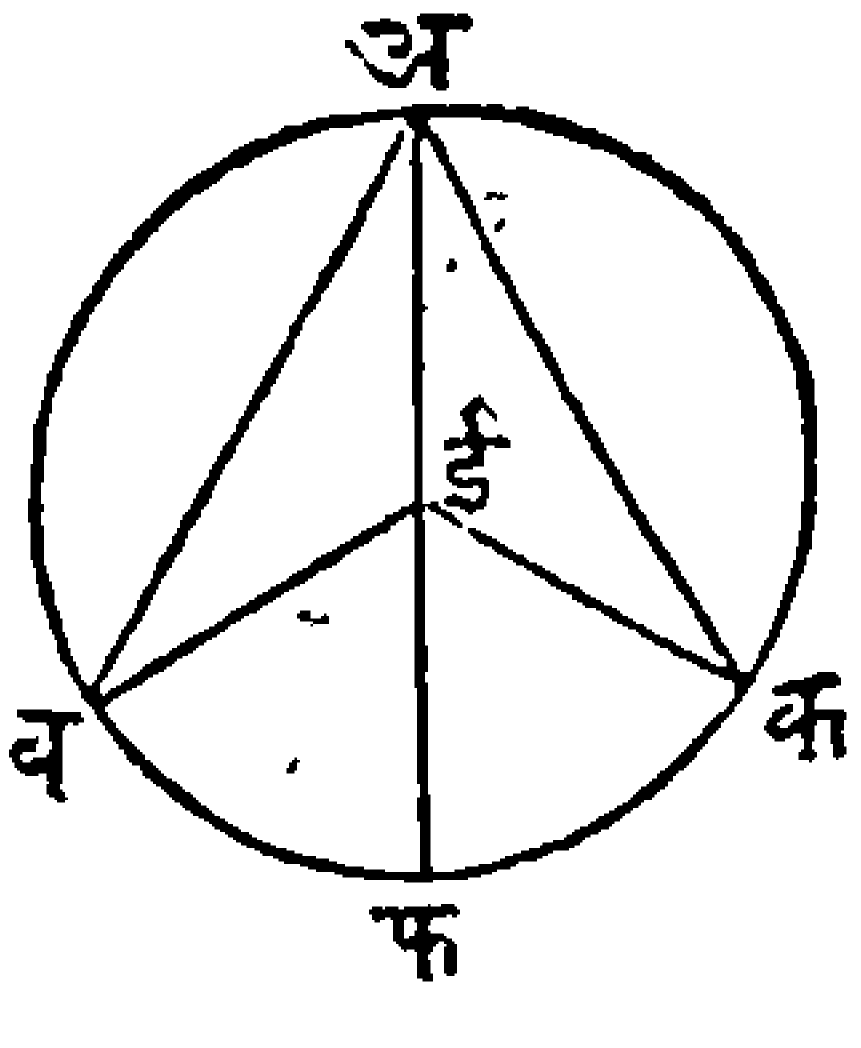


आतां **ईअ, ईक** ह्या रेषा समान आहेत, (१. व्या. १५)

म्हणून **ईअक** कोन **ईकअ** कोनाबरोबर आहे; (१.५)

म्हणून **ईअक** आणि **ईकअ** ह्या कोनांची बेरीज **बअक** कोनाच्या दुप्पटीबरोबर आहे.

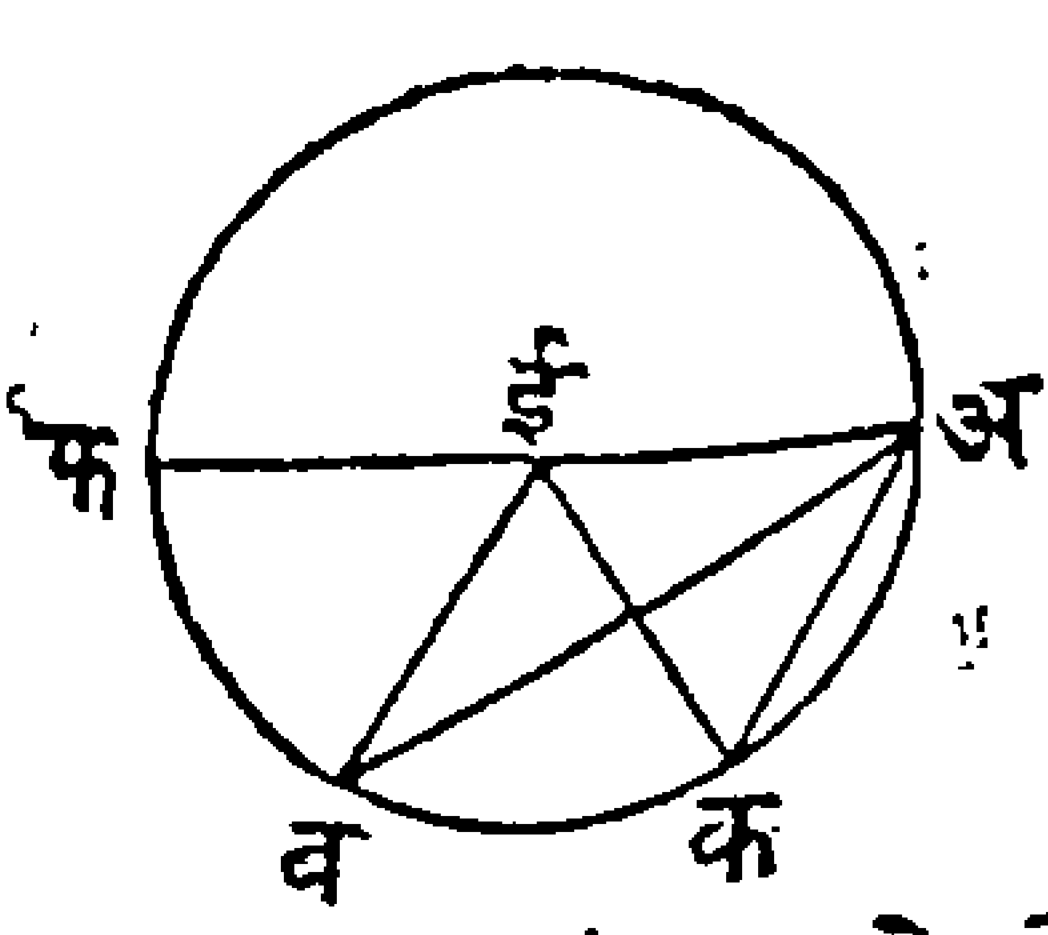
(२)



आणि **ईअक, ईकअ** ह्या कोनांची बेरीज **बईक** कोनाबरोबर आहे; (१.३२)

म्हणून **बईक** कोन **बअक** कोनाच्या दुपटीबरोबर आहे; (प्र.प्र.१)

(२) आतां ई हा वर्तुळमध्य **बअक** कोनाच्या आंत आहे, असें मान. (३)



अई सांधून ती पुढें **फ** बिंदूपर्यंत वाढीव. (पृ. कृ. १ व २)

आतां (१) ह्या भागावरून सिद्ध आहे कीं, **कईफ** कोन **कअफ** कोनाच्या दुपटीबराबर आहे, व **बईफ** कोन **बअफ** कोनाच्या दुपटीबरोबर आहे; म्हणून **कईफ**

आणि **बईफ** ह्यांची बेरीज म्हणजे **बईक** कोन हा, **कअफ** आणि **बअफ** ह्यांच्या दुपटींच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र.२)
आणि **कअफ, बअफ** ह्यांच्या दुप्पटींची बेरीज ही, त्या कोनांची बेरीज **बअक** कोन ह्याच्या दुप्पटीबरावर आहे. ( )
म्हणून **बईक** कोन **बअक** कोनाच्या दुप्पटीबरावर आहे. (प्र. प्र.१)

(३) आतां **ई** हा वर्तुळमध्य **बअक** कोनाच्या बाहेर आहे, असें मान;
अई सांधून ती पुढें **फ** बिंदूपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. १ व २)
आतां (१) ह्या भागावरून सिद्ध आहे कीं, **कईफ, बईफ** हे कोन अनुक्रमें **कअफ, बअफ,** ह्यांच्या दुप्पटींबरावर आहेत;
ह्मणून **कईफ** आणि **बईफ** ह्यांची वजाबाकी ह्मणजे **बईफ** कोन हा, **कअफ, बअफ** ह्यांच्या दुपटींच्या वजाबाकीबरावर आहे. (प्र.प्र.३.)
आणि **कअफ, बअफ** ह्यांच्या दुपटींची वजाबाकी ही, त्या कोनाची वजाबाकी **बअक** कोन ह्याच्या दुपटीबरावर आहे. ( )
म्हणून **बईक** कोन **बअक** कोनाच्या दुपटीबरावर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां वर्तुळाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (३. २०) च्या सिद्धतेच्या (२) व (३) ह्या भागांमध्यें जे सिद्धांत पूर्वीं सिद्ध केल्यावांचून स्वीकारिलेले दिसतात, ते सांगून दुसऱ्या उदाहरणांच्या योगानें स्पष्ट करून दाखवा; व त्यांचीं सामान्य स्वरूपें ही सांगा.

२. "अंतर्वक्र कोनासच कोन ही संज्ञा द्यावयाची" ह्या युक्लिडच्या संकेतावरून पाहिलें असतां, ज्या कंसावरचा परिघकोण काटकोन अथवा विशालकोण आहे, त्यास ३.२० हा सिद्धांत लागू होणें संभवतें काय? कां?

३. "दोन काटकोनांच्या बेरजेला व बहिर्वक्रकोणाला देखील कोन ही संज्ञा द्यावयाची" असा जर संकेत केला, तर कंसावरील परिघकोण कोणत्याही जातीचा असला, तरी त्याला ३.२० हा सिद्धांत लागू पडतो, असें सिद्ध करून दाखवा.

४. कोणत्याही कंसावरील परिघकोण दोन काटकोनांचा किंवा बहिर्वक्र असणें संभवतें काय ? कां ?

५. "दोन पदार्थांच्या दुपटींची बेरीज त्यांच्या बेरजेच्या दुप्पटी-बरोबर असते" व "दोन असमान पदार्थांच्या दुपटींची वजाबाकी त्यांच्या वजाबाकीच्या दुपटीबरोबर असते," हे जे सिद्धांत ३.२० ह्याच्या सिद्धतेमध्यें सिद्ध न करितां स्वीकारिले आहेत, त्यांची योजना मुळींच न करितां ३.२० ह्याचे (२) व (३) हे भाग सिद्ध करून दाखवा.

६. (३. २०) च्या सिद्धतेच्या (२) ह्या भागांतल्या रचने-सारिखी रचना करून (बहुतेक) त्याच भागासारिख्या सिद्धतेच्या योगानें "अर्धवर्तुळांतला कोन काटकोन असतो" असें सिद्ध करून दाखवा; आणि "सर्व अर्धवर्तुळें हीं सरूपवर्तुलखंडें असतात" असेंही सिद्ध करून दाखवा.

सिद्धांत २१. प्रमेय.

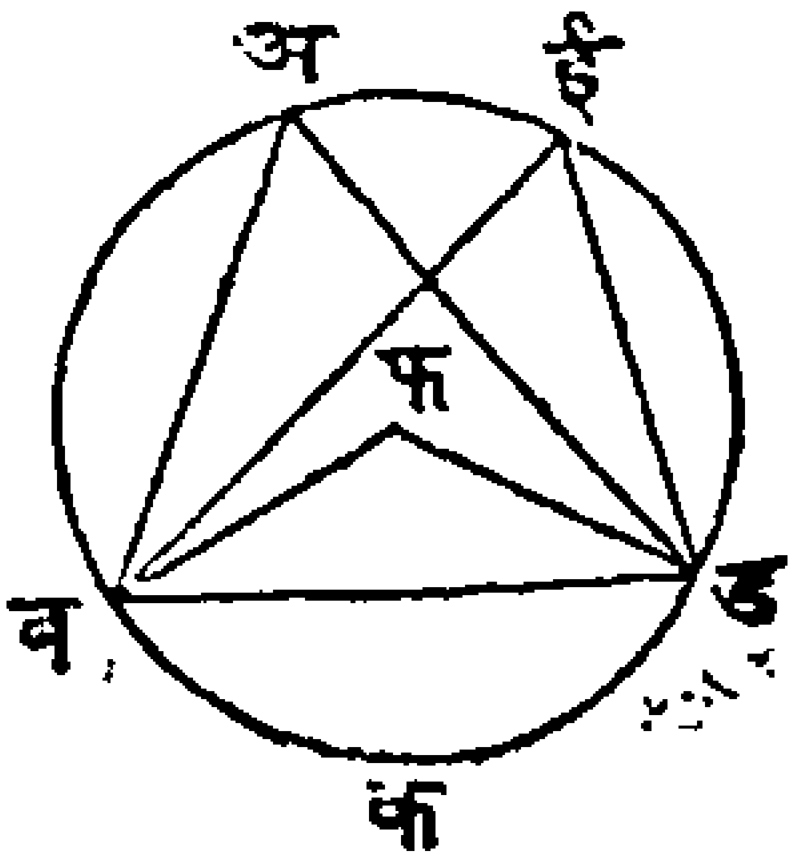
वर्तुळाच्या एकाच खंडांत असणारे कोन परस्पर बरोबर असतात.

अबकड एक वर्तुळ आहे, आणि **बअड** व **बईड** हे दोन कोन एकाच **बअईड** वर्तुळखंडांत आहेत; तर **बअड** आणि **बईड** हे दोन कोन परस्पर बरोबर होतील.

अबकड वर्तुळाचा **फ** मध्य काढ. (३.१)

(१) प्रथमत: **फ** मध्य **बअईड** वर्तुलखंडांत आहे, असें मान.

बफ, **डफ** सांध. (गृ. कृ. १)



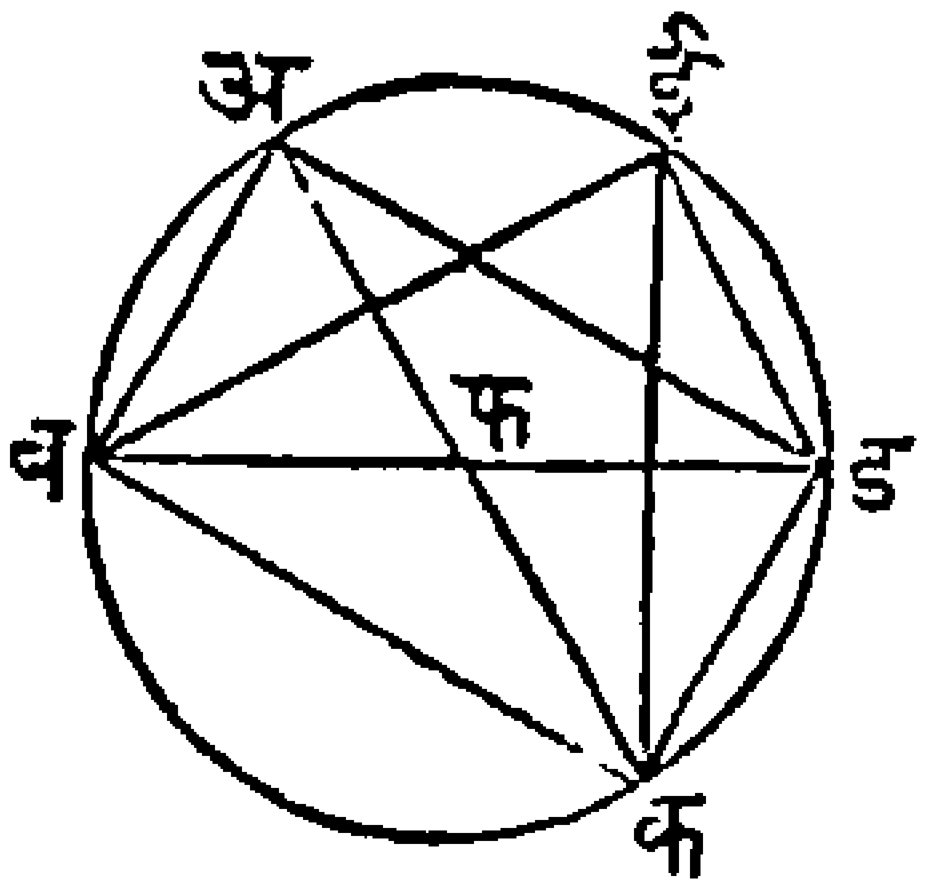
आतां **बफड** कोन **बकड** कंसावरचा (१) मध्यकोण आहे, व **बअड** कोन त्याच कं-सावरचा परिघकोण आहे;

म्हणून **बफड** कोनाच्या अर्धाबराबर **बअड** कोन आहे. (३.२०)

त्याच कारणास्तव **बफड** कोनाच्या अर्धाबरोबर **बईड** कोन आहे;

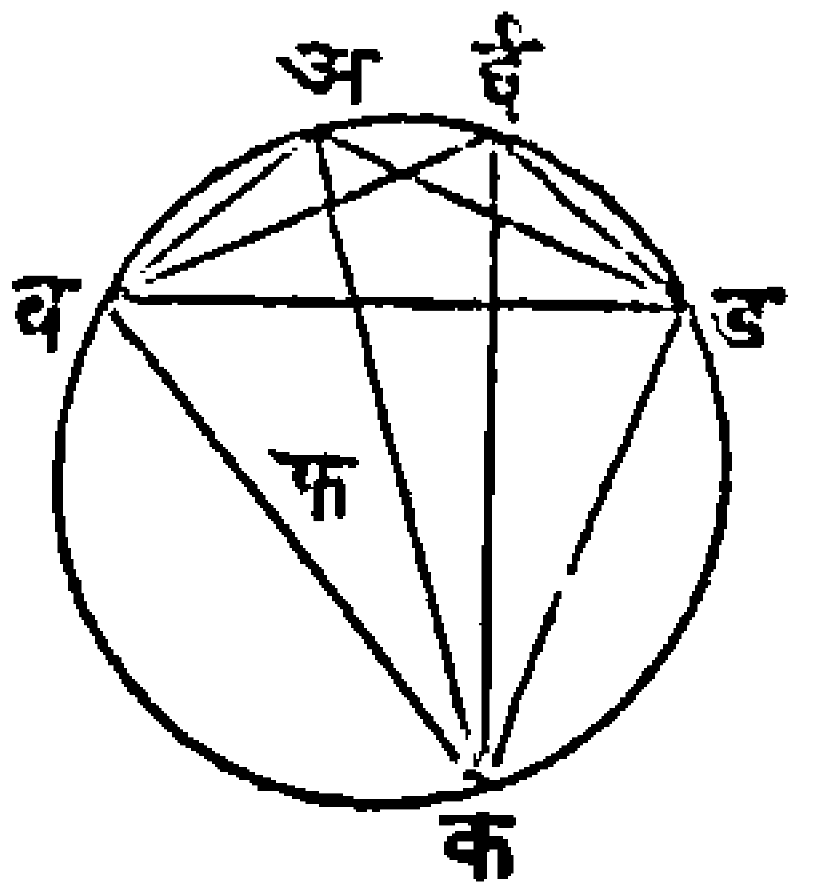
म्हणून **बभड** कोन **बईड** कोनाबरोबर आहे. (प्र.प्र.७)

(२) व (३) आतां **अबकड** वर्तुळा- (२)
चा **फ** मध्य (२) **बअईड** वर्तुलखंडा-
च्या ज्येमध्यें किंवा (३) त्या वर्तुलखं-
डाच्या बाहेर आहे, असें मान.



अफ सांध, ती परिघास **क** बिंदूत मिळे तोंपर्यंत वाढीव, आणि **कब, कई, कड** सांध. (गृ. कृ. १ व २)

आतां वर्तुलाचा मध्य **बअईडक** वर्तुल- (३)
खंडामध्यें आहे, म्हणून (१) ह्या भागाप्रमाणें
त्या वर्तुलखंडांतले **बअक, बईक** हे कोन
समान आहेत.



आणि तसेंच **कबअईड** ह्या एकाच वर्तुल-
खंडांतले **कअड, कईड** हे कोन समान आहेत.

ह्याकरितां सगळा **बअड** कोन सगळ्या **बईड** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. २)

ह्याकरितां वर्तुळाच्या एकाचें खंडांत इत्यादिक.

उपसि. एकाच कंसावरचे परिघकोण समान असतात.

प्रश्न.

१. (३.२१) ह्यांत दिलेल्या वर्तुलाच्या मध्यबिंदूच्या निरनिराळ्या स्थितींना लक्षून त्या सिद्धांताच्या सिद्धतेचे निरनिराळे भाग करावे लागले, ह्याचें मुख्य कारण काय?

२. दोन काटकोनांच्या बेरजेला व बहिर्वक्र कोनाला देखील कोन ही संज्ञा द्यावयाची, असें ठरवून जर ३.२० हा सिद्धांत ह्या सर्व कोनांस लागू पडेल अशा रीतीनें सिद्ध केला, तर ३.२१ ह्याच्या सिद्धतेचे अनेक भाग करावे लागणार नाहींत, असें दाखवा.

३. (३. २१) च्या (२) व (३) आकृतींमध्यें मध्यबिंदु काढणें वगैरे रचना न करितां **अई** सांधा; **अड, बई** ह्यांच्या छेदनाबिंदूस **फ** नांव द्या; आणि **अफब, डफई** ह्या त्रिकोणांच्या कोनांस उद्देशून

१.३२ भाग १, प्र.प्र. १, ३.२१ च्या सिद्धतेचा पहिला भाग व प्र.प्र. २ ह्यांच्या योजनेनें ३.२१च्या सिद्धतेचे (२) व (३) हे भाग सिद्ध करा

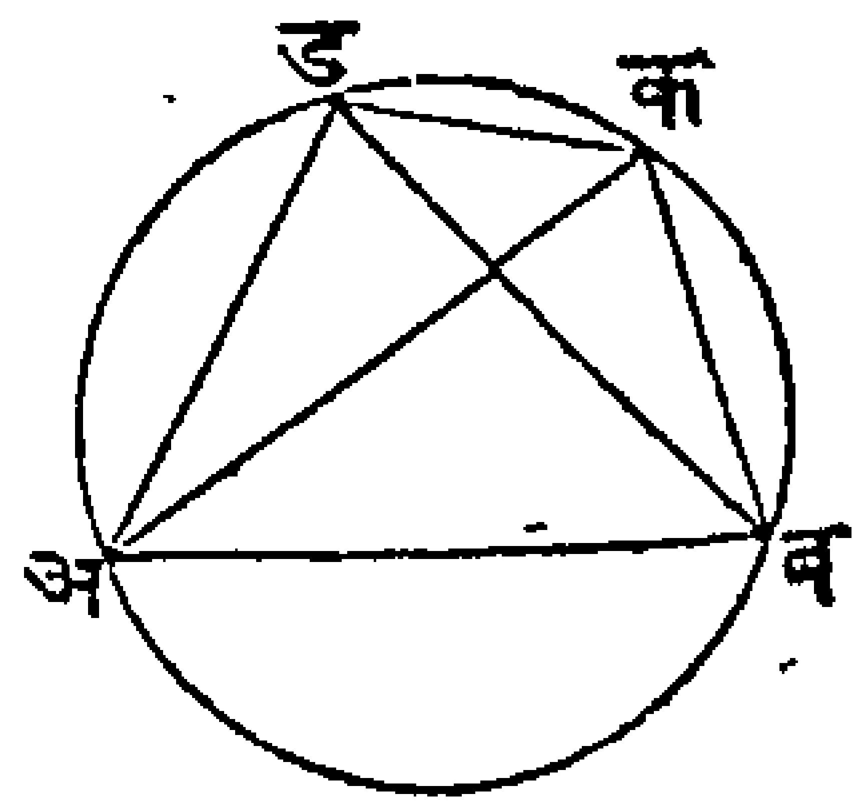
सिद्धांत २२. प्रमेय.

वर्तुळांत काढिलेल्या चौकोनाचे समोरासमोरचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबराबर असतात.

अबकड चौकोन **अबकड** वर्तुळांत काढिला आहे; तर त्याचे समोरासमोरचे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनांबराबर होतील.

अक आणि **बड** सांध. (गृ.कृ.१)

आतां **अडब**, **अकब** हे कोन **अडकब** ह्या एकाच वर्तुळखंडांतले आहेत;



म्हणून ते समान आहेत. (३.२१)

आणि **अबड**, **अकड** हे कोन **अबकड** ह्या एकाच वर्तुळखंडांतले आहेत;

म्हणून तेही समान आहेत. (३.२१)

ह्मणून **अडब**, **अबड** ह्या दोन कोनांची बेरीज, **अकब**, **अकड** ह्या कोनांच्या बेरजेबराबर म्हणजे **डकब** कोनाबराबर आहे. (प्र.प्र.२)

ह्या समान बेरजांपैकीं प्रत्येकींत **डअब** कोन मिळविला;

तेव्हां **अडब**, **अबड**, **डअब** ह्या तीन कोनांची बेरीज, **डकब** आणि **डअब** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र.प्र.२)

परंतु **अडब**, **अबड**, **डअब** ह्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे; (१.३२ भाग २)

म्हणून **डकब**, **डअब** ह्या समोरासमोरच्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे. (प्र.प्र. १)

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **अबक**, **अडक** ह्या दोन कोनांची बेरीजही दोन काटकोनांबराबर आहे.

ह्याकरितां वर्तुळांत काढिलेल्या इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (३.२२) च्या आकृतींत **अबक**, **अडक** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे, असें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवा.

२. "दोन काटकोनांच्या बेरजेला व बहिर्वक्र कोनाला देखील ३.२० हा सिद्धांत लागू आहे" असें मानिलें, तर ३.२२ हा सिद्धांत (वर्तुळांत काढिलेल्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या कोणबिंदूपासून मध्यबिंदूपर्यंत रेषा काढिल्यानें) थोडक्यांत सिद्ध होतो, असें दाखवा.

३. २०, ३. २१, व, ३. २२ ह्यांवर प्रश्न.

१. "परस्परांस वर्तुळांत छेदणाऱ्या दोन ज्यांचीं एकेका आंगचीं टोंकें सांधणाऱ्या दोन रेषा काढिल्या असतां जे दोन त्रिकोण होतात, ते मिथःसमकोण असतात," असें सिद्ध करा.

२. (१) वर्तुळखंडाच्या आंतील कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या ज्येच्या टोंकांपर्यंत काढिलेल्या दोन रेषांनीं त्या बिंदूजवळ जो कोन होतो, तो त्या वर्तुळखंडांतल्या कोणत्याही कोनापेक्षां मोठा असतो; आणि (२) वर्तुळखंडाच्या ज्येच्या ज्या अंगास तें वर्तुळखंड आहे, त्याच आंगच्या आणि त्या वर्तुळखंडाबाहेरच्या कोणत्याही बिंदूपासून त्या ज्येच्या दोन्ही टोंकांपर्यंत काढिलेल्या रेषांनीं त्याच बिंदूजवळ जो कोन होतो, तो त्या वर्तुळखंडांतल्या कोणत्याही कोनापेक्षां लहान असतो.

३. वर्तुळांत काढिलेल्या चौकोनाची एक बाजू वाढविली असतां होणारा बाहेरील कोन, आंतील त्याशीं सलग्नकोणासमोरच्या कोनाबरोबर असतो.

४. वर्तुळांत काढिलेला समांतरभुजचौकोन हा काटकोनचौकोन असतो.

५. वर्तुळांत काढिलेल्या चौकोनाच्या चारही बाजू समान असल्या, तर तो चौरस असतो.

६. वर्तुळांत काढिलेल्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन बाजू मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या, तर जे दोन त्रिकोण होतात, ते मिथःसमकोण असतात.

७. वर्तुळांत काढिलेल्या चौकोनाची एक बाजू वाढविल्यानें होणारा बाहेरील कोन व आंतील त्याशीं सलग्नकोणासमोरचा कोन ह्यांस दुभागणाऱ्या रेषा परस्परांस मिळतात; व त्या वर्तुळाच्या परिघांतच मिळतात.

८. **अबक** ह्या समद्विभुजत्रिकोणाचा **अब** पाया ही एका वर्तुळाची ज्या आहे; **क** हा शिरोबिंदु वर्तुलाबाहेर आहे; आणि **अक**, **बक** ह्या समान बाजू परिघास अनुक्रमें **ड**, **ई** बिंदूंत छेदितात, तर **कड**, **कई** ह्या रेषा समान आहेत, असें सिद्ध करा.

९. ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असते, त्याच्या भोंवतीं वर्तुळ काढितां येतें.

१०. समभुजचौकोनाभोंवतीं वर्तुल काढितां येणार नाहीं, असें सिद्ध करा.

११. ज्यांचे शिरकोण सारखे आहेत, असे अनेक त्रिकोण एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास असले, तर त्यांपैकीं कोणत्याही एका त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुळाचा परिघ, सर्व त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतून जातो.

१२. कोणत्याही वर्तुळखंडांतील कोन व त्याच्या कंसावरील परिघकोण ह्यांची बेरीज किती काटकोन असते ? कां ?

१३. जिची भुजसंख्या सम (म्हणजे दोहोंनीं विभाज्य) आहे अशी कोणतीही सरलरेषाकृति वर्तुळांत काढिली असतां, तिच्या एक टाकून एक अशा सर्व कोनांची बेरीज, त्या आकृतीच्या सर्व कोनांच्या बेरजेच्या अर्धाबरोबर असते.

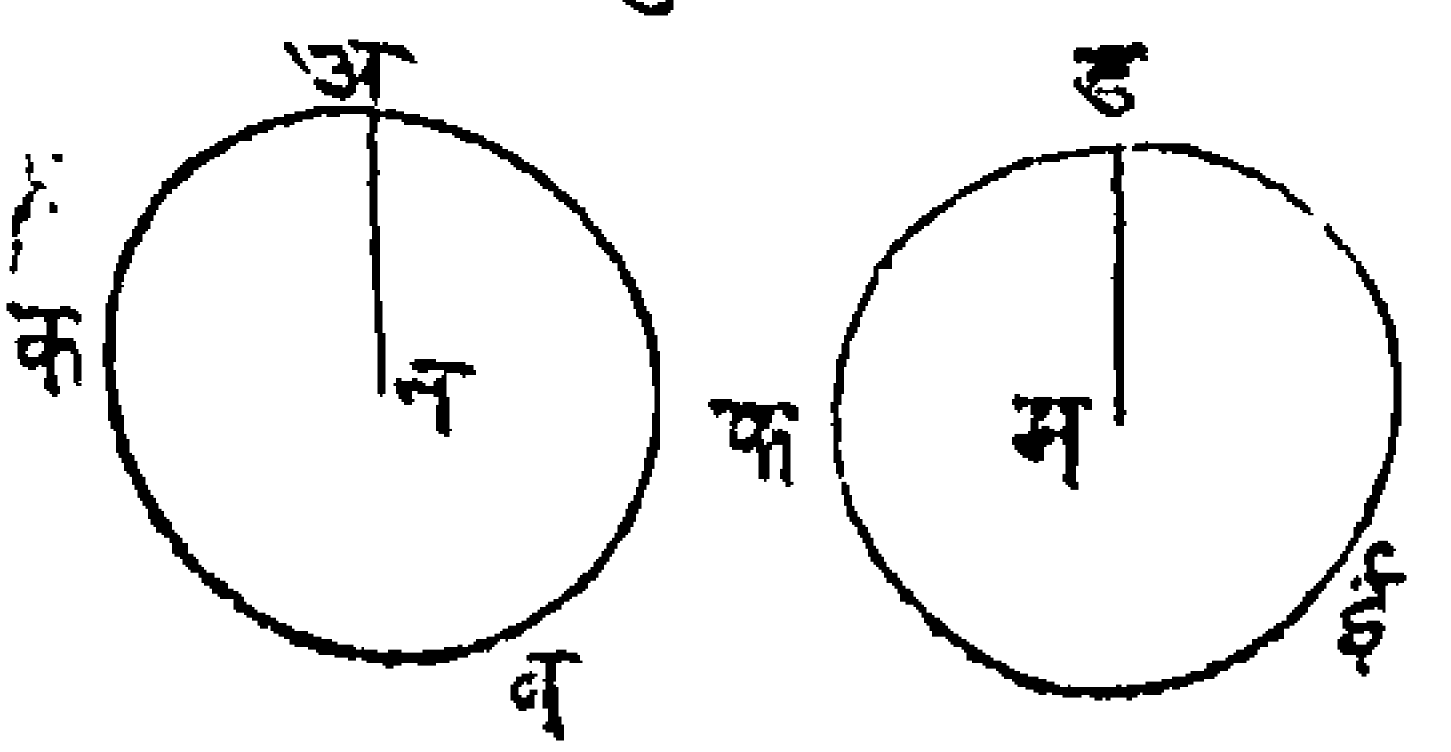
१४. वर्तुळांत काढिलेल्या चौकोनाच्या बाहेर जे त्या वर्तुळाचे वर्तुळखंड राहतात, त्यांतील एकेक कोन घेतला असतां, त्या चार कोनांची बेरीज सहा काटकोन असते.

(सूचना.—प्रश्नांतील कृतीनें वर्तुलांत अष्टकोणाकृति होते; ह्मणून मागच्या प्रश्नावरून इष्टसिद्धि.)

सिद्धांत अ. प्रमेय.

ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात, तीं वर्तुळें समान असतात.

अबक वर्तुलाची प्रत्येक त्रिज्या **डईफ** वर्तुलाच्या प्रत्येक त्रिज्येबरोबर आहे; तर हीं वर्तुळें समान होतील.



ह्या वर्तुळांचे **न**, **म** हे मध्य काढ; (३.१)

व **अन**, **डम** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां जर **अबक** वर्तुळ **डइफ** वर्तुळावर असें उचलून ठेविलें कीं, **न** बिंदु **म** बिंदूशीं मिळेल व **नअ**, **मड** ह्यांची दिशा एक होईल; तर **नअ**, **मड** ह्या रेषा समान आहेत, (प्रतिज्ञा)

म्हणून **अ** बिंदु **ड** बिंदूशीं मिळेल.

आतां **अबक** वर्तुल **डइफ** वर्तुळाशीं सर्वांशीं मिळेल;

कारण; जर तें सर्वांशीं न मिळेल, तर **डइफ** वर्तुळास छेदील किंवा स्पर्श करील, असें मानिलें पाहिजे.

परंतु छेदील असें मानिल्यास तीं वर्तुळें समकेंद्र असल्यामुळें ३.५ ह्याशीं विरोध येतो,

आणि स्पर्श करील असें मानिल्यास ३.६ ह्याशीं विरोध येतो;

म्हणून **अबक** वर्तुळ **डइफ** वर्तुळाशीं सर्वांशीं मिळेल.

म्हणून हीं वर्तुळें समान आहेत. (प्र.प्र.८)

ह्याकरितां ज्या वर्तुळांच्या इत्यादिक.

उपसि. १—ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या असमान असतात, त्यांपैकीं मोठ्या त्रिज्येचें वर्तुळ लहान त्रिज्येच्या वर्तुळापेक्षां मोठें असतें.

(दिलेल्या दोन वर्तुळांपैकीं एकाचा मध्य हाच ज्याचा मध्य होईल, व दुसऱ्या वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढी ज्याची त्रिज्या होईल, असें तिसरें एक वर्तुळ काढावें. पहिलें व तिसरें हीं वर्तुळें समकेंद्र असल्यामुळें त्यांपैकीं कोणतें तरी एक दुसऱ्याचे आंतच पडेल, हें ३.५, व ३.६ ह्यांच्या आधारानें क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध होतें. नंतर वरील सिद्धांत, प्र. प्र. ९ व प्र. प्र. अ. किंवा त्याचा उपसि. ह्यांवरून इष्टसिद्धि होते.)

उपसि. २—ज्या वर्तुळांचे व्यास समान असतात, तीं वर्तुळें समान असतात.

उपसि. ३—ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात, त्यांचे परिघ समान असतात.

सिद्धांत इ. प्रमेय.

समान वर्तुलांच्या त्रिज्या समान असतात.

कारण, त्या वर्तुलांच्या त्रिज्या असमान आहेत, असें जर मानिलें, तर ३. अ उपसि. १ ह्यावरून तीं वर्तुलें असमान ठरून प्रतिज्ञेशीं विरोध येईल."

ह्याकरितां समान वर्तुलांच्या इत्यादिक.

उपसि. १–ह्या सिद्धांताप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, " असमान वर्तुळांपैकीं मोठ्याची त्रिज्या धाकट्याच्या त्रिज्येपेक्षां मोठी असते."

उपसि. २–समान वर्तुळांचे व्यास समान असतात.

उपसि. ३–समान वर्तुळांचे परिघ समान असतात.

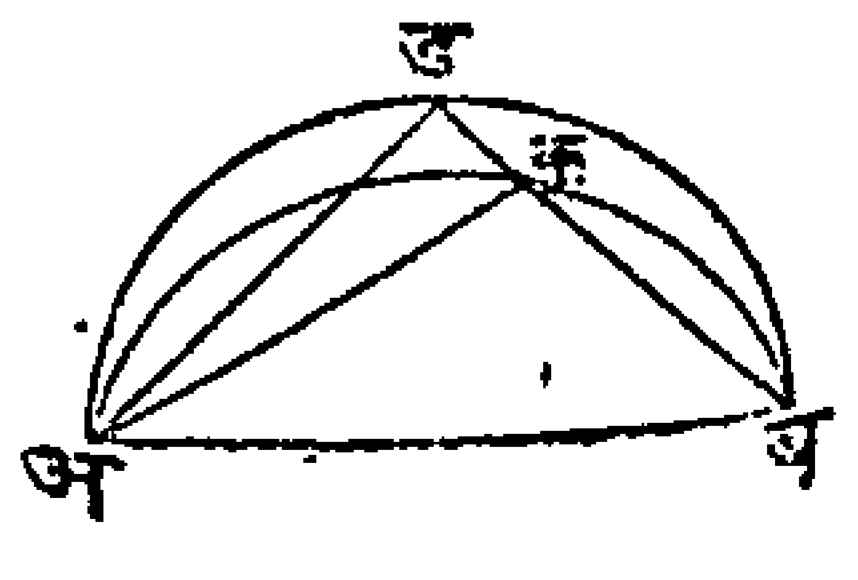
(ई सिद्धांत व **अ** सिद्धांताचा तिसरा उपसिद्धांत ह्यांच्या आधारानें क्रमिक रीतीनें हा शेवटचा उपसिद्धांत सिद्ध होतो.)

सिद्धांत २३. प्रमेय.

जीं दोन वर्तुलखंडें एकाच ज्येवर आणि तिच्या एकाच अंगास ठेविलीं आहेत, व सरूप आहेत, तीं निराळीं पडावयाचीं नाहींत (म्हणजे एकमेकांशीं सर्वांशीं मिळतील).

कारण; तीं निराळीं पडणें हें शक्य असेल, तर **अकब, अडब** हीं सरूप वर्तुळखंडें **अब** ह्या एकाच ज्येवर आणि तिच्या एकाच अंगास ठेविलीं असून तीं निराळीं पडलीं आहेत, असें समज.

आतां **अकब, अडब** ह्या वर्तुलांचे परिघ एकमेकांस **अ, ब** ह्या दोन बिंदूंत छेदितात; म्हणून तिसऱ्या कोणत्याही बिंदूंत ते एकमेकांस छेदणार नाहींत. (३.१०)



म्हणून दोहों वर्तुलखंडांपैकीं कोणतें तरी एक दुसऱ्यामध्यें पडलें पाहिजे. **अकब** खंड **अडब** खंडांत पडलें, असें मान; **अकब** वर्तुलखंडाच्या कंसांतला एक **क** बिंदु घेऊन

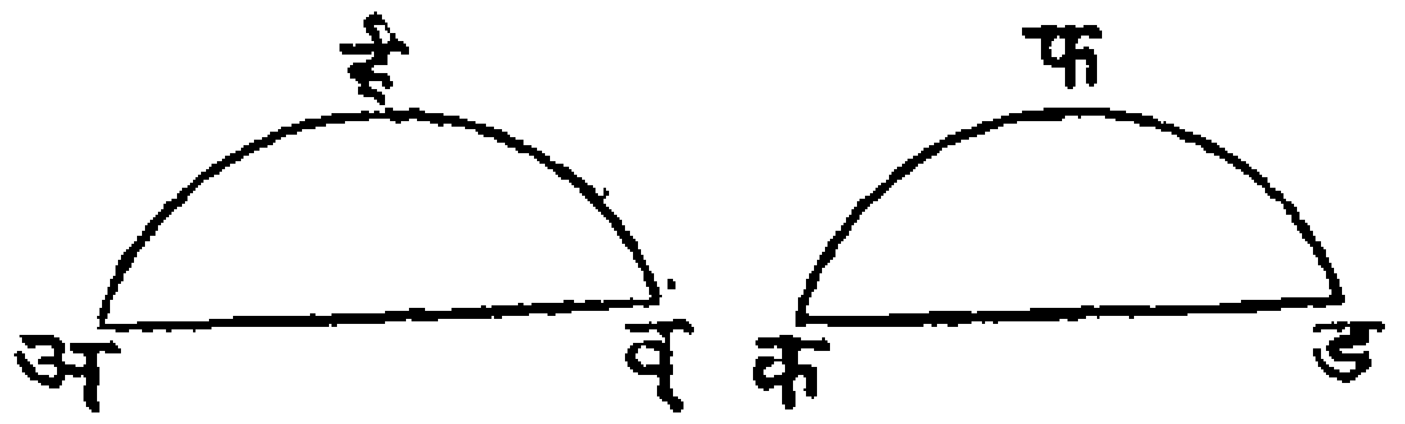
वक सांध व ती रेघ दुसऱ्या वर्तुलखंडाच्या कंसास **ड** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव; आणि **अक**, **अड** सांध. (गृ. कृ. १ व २)
आतां **अकब**, **अडब** हीं वर्तुलखंडें सरूप आहेत; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **अकब** कोन **अडब** कोनाबराबर झाला. (३. व्याख्या ११)
परंतु हा १.१६ ह्याशीं विरोध आहे; म्हणून हीं वर्तुलखंडें कोणत्याच प्रकारें निराळीं पडणें संभवत नाहीं.

ह्याकरितां, जीं दोन वर्तुलखंडें इत्यादि.

सिद्धांत २४. प्रमेय.

समान ज्यांवरील सरूप वर्तुळखंडें परस्पर समान असतात.

अब, **कड** ह्या समान ज्यांवर **अईब**, **कफड** हीं सरूप वर्तुळखंडें आहेत; तर **अईब** वर्तुळखंड **कफड** वर्तुळखंडाबराबर होईल.



कारण; जर **अईब** वर्तुळखंड **कफड** वर्तुळखंडावर असें ठेविलें, कीं **अ** बिंदु **क** बिंदूवर पडेल, आणि **अब** रेघ **कड** रेघेवर पडेल, तर **ब** बिंदु **ड** बिंदूवरच पडेल, कारण **अब**, **कड** बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)
आतां हीं वर्तुलखंडें **कड** ह्या एकाच ज्येवर आणि तिच्या एकाच अंगास ठेविलीं आहेत, व तीं सरूप आहेत; (प्रतिज्ञा)
म्हणून तीं सर्वांशीं मिळतील. (३.२३)
म्हणून **अईब** वर्तुळखंड **कफड** वर्तुळखंडाबराबर आहे. (प्र.प्र.८)
ह्याकरितां, समान ज्यांवरील इत्यादि.

उपसि.—समान ज्यांवरील सरूप वर्तुळखंडांचे कंस समान असतात.

३.अ, ३.इ, ३.२३ व ३.२४ ह्यांवर

प्रश्न.

१. जीं वर्तुलखंडें समान असून समान ज्यांवर असतात, तीं सरूप असतात (व त्यांचे कंसही समान असतात).

२. जीं वर्तुळखंडें सरूप असून समान असतात, त्यांच्या ज्या समान असतात (व त्यांचे कंसही समान असतात).

३. (३.२४) व मागच्या दोन प्रश्नांतील प्रमेयें ह्या तिहींचा ज्यांत समावेश होईल, असें एक वाक्य म्हणा.

४. " एकाच व समान वर्तुलांतलीं सर्व अर्धवर्तुलें समान असतात," हें प्रमेय ३.२० प्रश्न ६, ३. इ. ३.२४ इत्यादिकांच्या आधारानें (किंवा अशीं दोन अर्धवर्तुलें सर्वांशीं भिळतात, असें ठरवून) सिद्ध करा.

५. (१) "अर्धवर्तुल हें वर्तुलाच्या अर्धाबराबर असतें;" (२) "वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या एकाच ज्येनें वर्तुलाचे जे दोन वर्तुळखंड होतात, त्यांपैकीं ज्यांत वर्तुलमध्य असतो, तो वर्तुलखंड दुसऱ्यापेक्षां मोठा असतो;" (३) "अर्धवर्तुलाचा कंस हें परिघाचें अर्ध असतें;" (४) "वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या एकाच ज्येनें वर्तुलाचे जे दोन खंड होतात, त्यांपैकीं ज्यांत वर्तुलमध्य असतो, त्याचा कंस दुसऱ्याच्या कंसापेक्षां मोठा असतो." हे सारे सिद्धांत सिद्ध करा; आणि ह्या सर्वांच्या व्यत्यासांच्या प्रतिज्ञा म्हणून, त्यांपैकीं जे खरे असतील, ते सिद्ध करा.

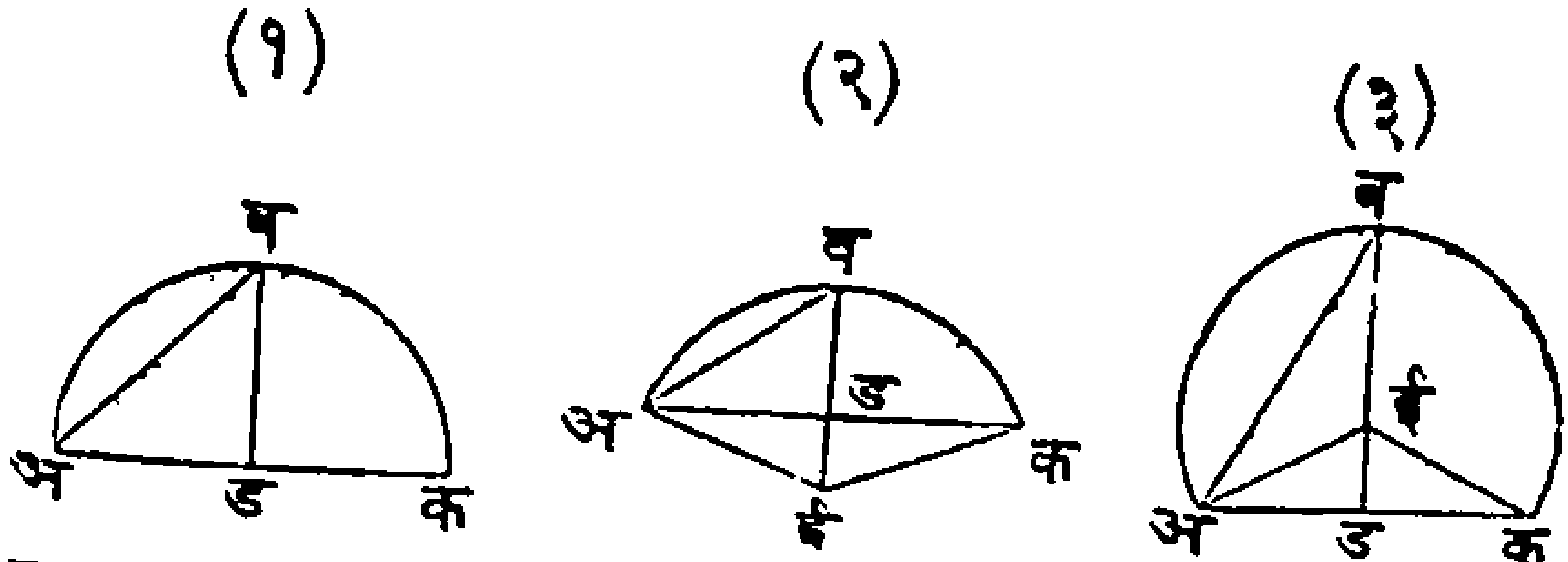
६. (१) एकाच सरलरेषेंत नसणाऱ्या दोन त्रिज्यांनीं जे दोन वर्तुलविभाग होतात, त्यांपैकीं ज्याचा मध्यकोण बहिर्वक्र असतो, तो दुसऱ्यापेक्षा मोठा असतो; आणि (२) त्याचा कंसही दुसऱ्याच्या कंसापेक्षां मोठा असतो.

७. (१) परस्परांवर लंब असणाऱ्या दोन त्रिज्यांनीं जो लहान वर्तुलविभाग होतो, तो वर्तुलाच्या चतुर्थांशाबराबर असतो; आणि (२) त्याचा कंसही परिघाच्या चतुर्थांशाबराबर असतो.

सिद्धांत २९. कृत्य.

एक वर्तुळखंड दिलें असतां, तें ज्या वर्तुलाचें खंड आहे, तें वर्तुल काढावयाचें.

अबक हें दिलेलें एक वर्तुलखंड आहे; आणि तें ज्या वर्तुलाचें खंड आहे, तें वर्तुल काढावयाचें आहे.



अक ज्या **ड** बिंदूंत दुभाग; (१. १०.)
ड बिंदूंतून **डब**, **अक** वर लंब काढ; (१. ११)
आणि **अब** सांध. (गृ. कृ. १)

(१) जेव्हां **अबड** कोन **बअड** कोनाबराबर आहे, तेव्हां **ड** हा इच्छिल्या वर्तुलाचा मध्य होईल.

कारण; **अड**, **बड** बराबर आहे; (१. ६)
आणि **डअ**, **डक** बराबर आहे; (रचना)
म्हणून **डब**, **डक** बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
म्हणून **डअ**, **डब**, **डक** ह्या तीन रेघा परस्पर बराबर आहेत.
ह्यास्तव **ड** हा इच्छिलेल्या वर्तुळाचा मध्य आहे. (३. ९)
म्हणून **ड** हा मध्यबिंदु व **डअ**, **डब**, **डक** ह्यांपैकीं एक त्रिज्या कल्पून तिसऱ्या गृहीत कृत्याप्रमाणें वर्तुल काढिलें असतां, ज्या वर्तुळाचें **अबक** खंड आहे, तें निघेल.

(ह्या स्थितींत **अक** ज्येमध्यें **ड** हा वर्तुलमध्य आहे, म्हणून **अबक** वर्तुळखंड हें अर्धवर्तुळ आहे.)

(२) व (३) जेव्हां **अबड** कोन **बअड** कोनापेक्षां (२) मोठा किंवा (३) लहान आहे,
तेव्हां **अब** रेपेशीं **अ** बिंदूजवळ **बअई** कोन **अबड** कोनाबराबर कर;
(१. २३)
आणि **बड**, **अई**स **ई** बिंदूंत मिळेल असें कर. (गृ. कृ. २)
म्हणजे **ई** हा इच्छिल्या वर्तुलाचा मध्य होईल.
कारण; **ईक** सांध. (गृ. कृ. १)
आतां **अडई** त्रिकोणाच्या **अड**, **डई** ह्या बाजू, **कडई** त्रिकोणाच्या **कड**, **डई** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत, (रचना)

व **अइई** कोन **कडई** कोनाबरोबर आहे; (१. व्या. १०)
म्हणून **ईअ** पाया **ईक** पायाबरोबर आहे. (१. ४ भाग १)
परंतु **ईअ**, **ईब** बरोबर आहे; (रचना व १. ६)
म्हणून **ईब**, **ईक** बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
ह्यास्तव **ईअ**, **ईब**, **ईक** ह्या तीनही रेघा परस्पर बरोबर आहेत;
म्हणून **ई**, हा इच्छिलेल्या वर्तुळाचा मध्य आहे. (३. ९)

म्हणून **ई** हा मध्यबिंदु व **ईअ**, **ईब**, **ईक** ह्यांपैकीं एक त्रिज्या कल्पून तिसऱ्या गृहीत कृत्याप्रमाणें वर्तुळ काढिलें असतां, ज्या वर्तुळाचें **अबक** खंड आहे, तें निघेल.

(हें उघड आहे कीं, **अबड** कोन **बअड** कोनाहून मोठा असतो, तेव्हां **ई** मध्य **अबक** वर्तुळखंडाबाहेर पडतो, आणि अर्थांतच तें खंड अर्धवर्तुळापेक्षां लहान असतें; परंतु जेव्हां **अबड** कोन **बअड** कोनाहून लहान असतो, तेव्हां **ई** मध्य **अबक** वर्तुळखंडांत पडतो, आणि अर्थांतच तें खंड अर्धवर्तुळाहून मोठें असतें.)

ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुळखंडापासून, तें ज्या वर्तुळाचें खंड आहे, तें काढिलें आहे.

प्रश्न.

१. (३.२५) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा.

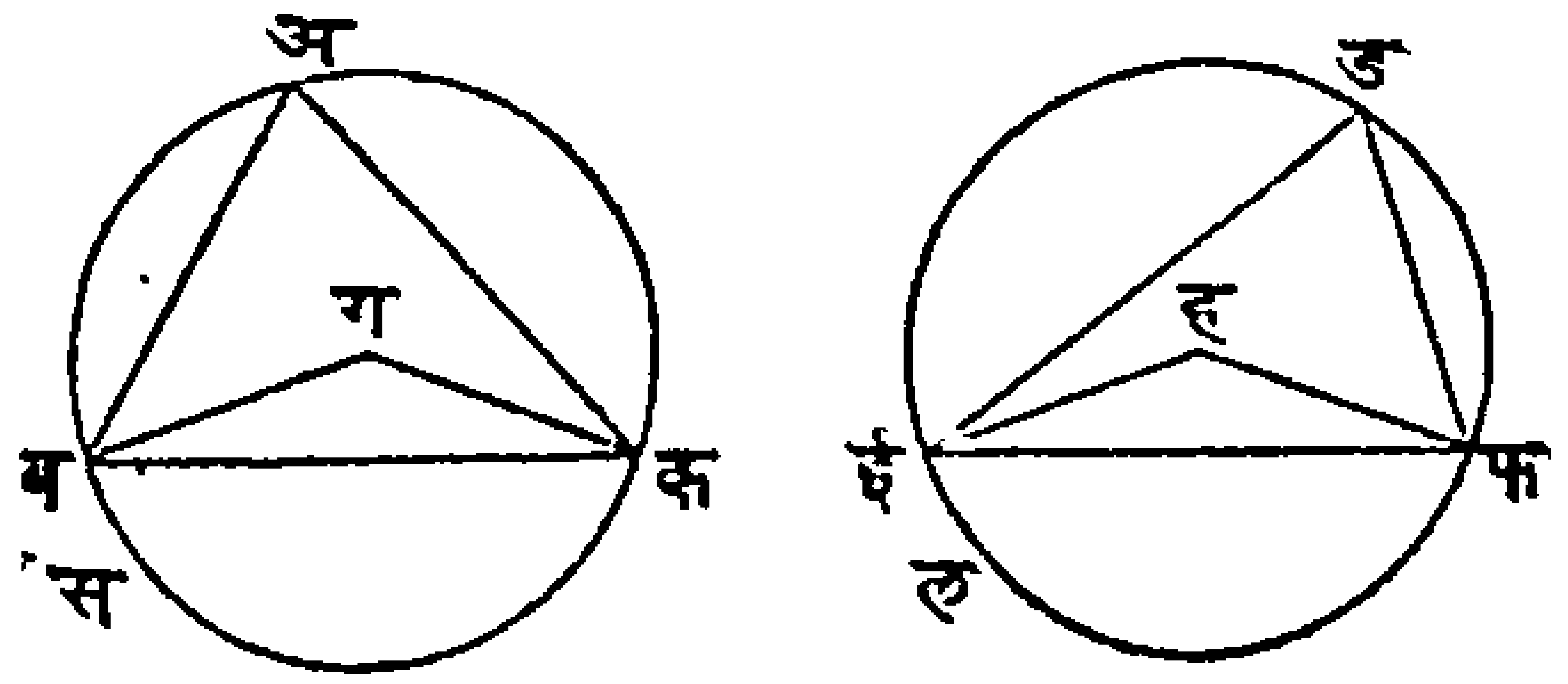
२. (३. २५) ह्यांत " दिलेल्या वर्तुळखंडाच्या कंसांतील एका बिंदूपासून ज्येच्या दोन्ही टोंकांपर्यंत (किंवा कंसांतील दुसऱ्या कोणत्याही दोन बिंदूंपर्यंत) रेघा काढणें, व त्या रेघांच्या मध्यांपासून त्यांवर लंब काढून ते मिळत तोंपर्यंत वाढविणें " ह्या कृतीनें ही इष्टवर्तुळाचा मध्यबिंदु सांपडतो, असें दाखवा.

३. दिलेला कंस ज्या वर्तुळाच्या परिघाचा भाग आहे, तें वर्तुळ काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

सिद्धांत २६. प्रमेय.

समानवर्तुळांतील (१) समानमध्यकोण किंवा (२) समानपरिघकोण ज्या कंसांवर असतात, ते कंस समान असतात.

(१) **अबक** आणि **डईफ** हीं वर्तुळें समान आहेत; व त्यांतील **बगक** आणि **ईहफ** हे मध्यकोण समान आहेत; तर **बसक** कंस **ईलफ** कंसाबराबर होईल.



बक आणि **ईफ** सांध. (गृ.कृ. १)

आतां **अबक** आणि **डईफ** वर्तुळें समान आहेत, (प्रतिज्ञा)
ह्यास्तव त्यांच्या त्रिज्या समान आहेत. (३. इ.)
म्हणून **बग**, **गक** बाजू, **ईह**, **हफ** बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;
आणि **ग** मध्यकोण **ह** मध्यकोणाबराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **बक** पाया **ईफ** पायाबराबर आहे. (१. ४ भाग १)
आतां **अ** कोन **ड** कोनाबराबर आहे, (३. २० व प्र. प्र. ७)
ह्यास्तव **बअक** आणि **ईडफ** हीं वर्तुलखंडें सरूप आहेत;(३.व्याख्या ११)
आणि तीं **बक** आणि **ईफ** ह्या समान ज्यांवर आहेत;
ह्यास्तव **बअक** कंस **ईडफ** कंसाबराबर आहे. (३. २४ उप.)

परंतु **अबक** वर्तुळ **डईफ** वर्तुळाबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून **अबक** परिघ **डईफ** परिघाबरोबर आहे. (३.इ. उप. ३)
म्हणून शेष **बसक** कंस शेष **ईलफ** कंसाबराबर आहे. (प्र.प्र. ३)

(२) आतां **अबक** आणि **डईफ** ह्या समान वर्तुळांतले **बअक**, **ईडफ** हे परिघकोण समान आहेत; तर ते ज्या कंसांवर आहेत, ते **बसक**, **ईलफ** हे कंस समान होतील.

कारण **बअक**, **ईडफ** ह्या समान कोनांच्या दुपटीबरोबर अनुक्रमें **ग**, **ह** हे कोन आहेत; (३. २०)
म्हणून **ग**, **ह** हे कोन समान आहेत. (प्र. प्र. ६)

म्हणून (१) ह्या भागाप्रमाणें **बसक** कंस **ईलफ** कंसाबरोबर आहे.

ह्याकरितां समान वर्तुलांतील इत्यादिक.

उपसि. एकाच वर्तुळांत समान मध्यकोण अथवा समान परिघ-कोण ज्या कंसांवर असतात, ते कंस समान असतात.

प्रश्न.

१. (३.२६) ह्याच्या (२) ह्या भागाचीच सिद्धता प्रथमतः करा; आणि तीमध्यें **बक, ईफ** ह्या ज्यांची समानता ठरल्यावर, आधीं **बसक, ईलफ** हीं वर्तुलखंडें ३. २२ आणि प्र. प्र. १, प्र. प्र. ३ व ३. व्या. ११ ह्यांच्या आधारानें सरूप ठरवून, मग ३.२४ उपसि. ह्याच्या योजनेनें **बसक, ईलफ** हे कंस समान ठरवून दाखवा.

२. समान (अथवा एकाच) वर्तुळांतले मध्यकोण किंवा परिघ-कोण जर असमान असतील, तर मोठा कोन ज्या कंसावर आहे, तो कंस, धाकटा कोन ज्या कंसावर आहे, त्या कंसापेक्षां मोठा असतो.

३. (३. २६) हा सिद्धांत एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळावर उचलून ठेविलें अशी कल्पना करून सिद्ध करून दाखवा.

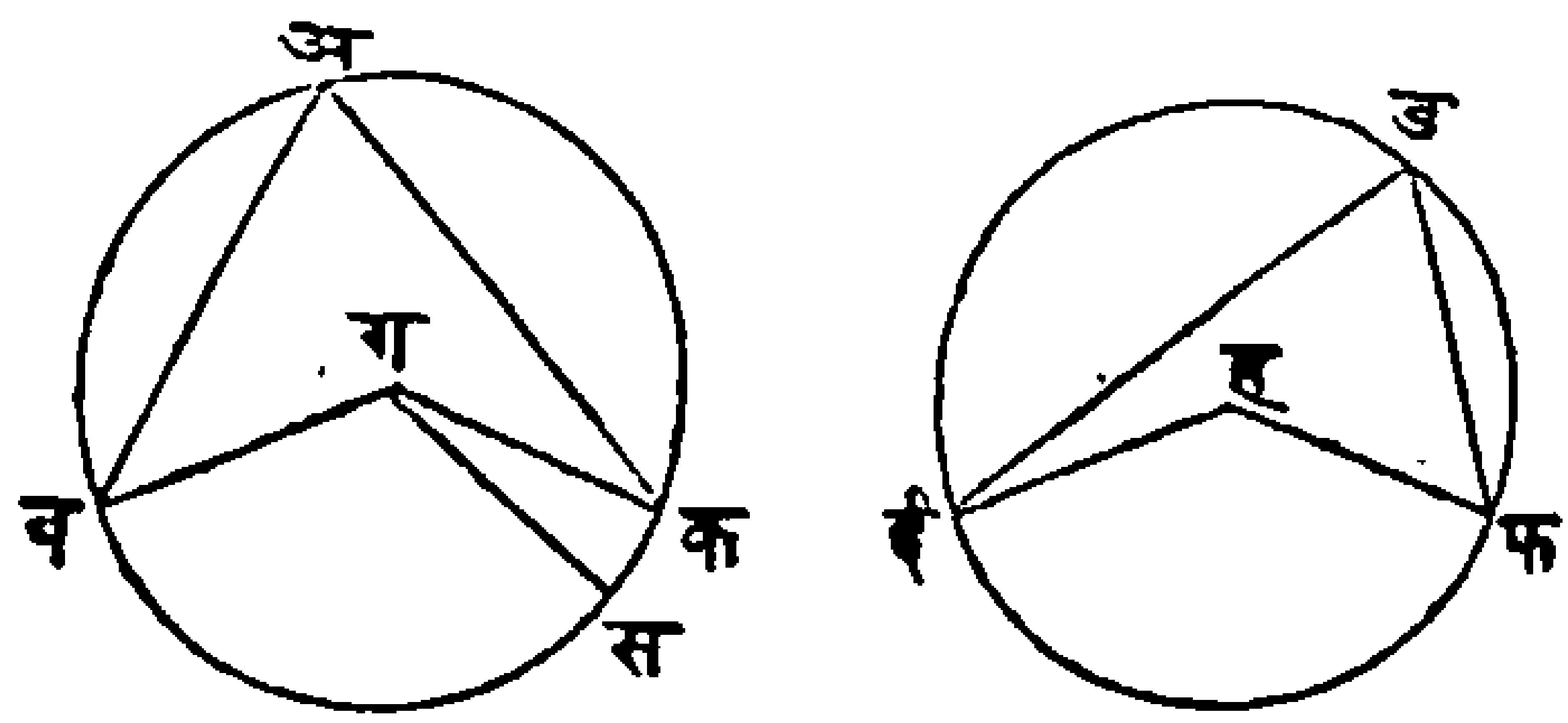
४. समान अथवा एकाच वर्तुळांतील दोन मध्यकोणांपैकीं (अ-थवा दोन परिघकोणांपैकीं) एक दुसऱ्याच्या कांहीं पटीबरोबर अ-सेल, तर पहिल्या कोनाचा कंस दुसऱ्या कोनाच्या कंसाच्या त्याच पटीबरोबर असतो.

५. (३. २६)च्या पहिल्या भागाची सिद्धता करीत असतां, **बक, ईफ** ह्या ज्यांची समानता ठरल्यावर **बअक, ईडफ** हीं वर्तुळखंडें समान ठरवा; आणि शेवटीं **बसक, ईलफ** हीं वर्तुळखंडें समान ठर-वून "समान ज्यांवरील समान वर्तुळखंडांचे कंस समान अस-तात" ह्या सिद्धांताच्या आधारानें इष्टसिद्धि करा.

सिद्धांत २७. प्रमेय.

समान वर्तुळांच्या समान कंसांवरील (१) मध्यकोण समान अस-तात; आणि (२) परिघकोणही समान असतात.

अबक आणि **डईफ** हीं वर्तुळें समान आहेत, आणि त्यांचे **बगक**, **ईहफ** मध्यकोण, आणि **बअक**, **ईडफ** परिघकोण, **बक** आणि **ईफ** ह्या समान कंसांवर आहेत; तर, (१) **बगक** कोन **ईहफ** कोनाबराबर होईल, आणि (२) **बअक** कोन **ईडफ** कोनाबराबर होईल.



(१) कारण; जर **बगक** कोन **ईहफ** कोनाबराबर नाहीं, तर त्यांतून एक दुसऱ्यापेक्षां मोठा असला पाहिजे. **बगक** कोन **ईहफ** कोनापेक्षां मोठा आहे, असें मान; आणि **बग** रेषेशीं **ग** बिंदूजवळ **बगस** कोन **ईहफ** कोनाबराबर कर. (१. २३)

आतां **बगस** कोन **ईहफ** कोनाबराबर आहे, आणि ते समान वर्तुळांतील मध्यकोण आहेत;

म्हणून **बस** कंस **ईफ** कंसाबराबर आहे. (३. २६ भाग १)

परंतु **ईफ** कंस **बक** कंसाबराबर आहे. (प्रतिज्ञा)

म्हणून **बस** कंस **बक** कंसाबराबर आहे; (प्र. प्र. १)

पण हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध होय.

म्हणून **बगक** कोन **ईहफ** कोनापेक्षां मोठा नाहीं.

ह्याप्रमाणेंच तो लहान नाहीं, असेंही सिद्ध करितां येईल;

म्हणून ते समान आहेत.

(२) आतां **अ** परिघकोण **बगक** कोनाचें अर्ध आहे, आणि **ड** परिघकोण **ईहफ** कोनाचें अर्ध आहे; (३. २०)

म्हणून **अ**, **ड** हे परिघकोण समान आहेत. (३.२७ भा.१ व प्र.प्र. ७)

ह्याकरितां, समान वर्तुळांच्या समान कंसांवरील इत्यादि.

उपसि. एकाच वर्तुळाच्या समान कंसांवरचे मध्यकोण समान असतात व परिघकोणही समान असतात.

प्रश्न.

१. समान (अथवा एकाच) वर्तुळांच्या असमान कंसांवरील मध्यकोणांपैकीं अथवा परिघकोणांपैकीं मोठ्या कंसावरील कोन मोठा असतो.

२. (३. २१) हा ३. २७ च्या उपसिद्धांताचा एक विशेष प्रकार आहे, असें दाखवा.

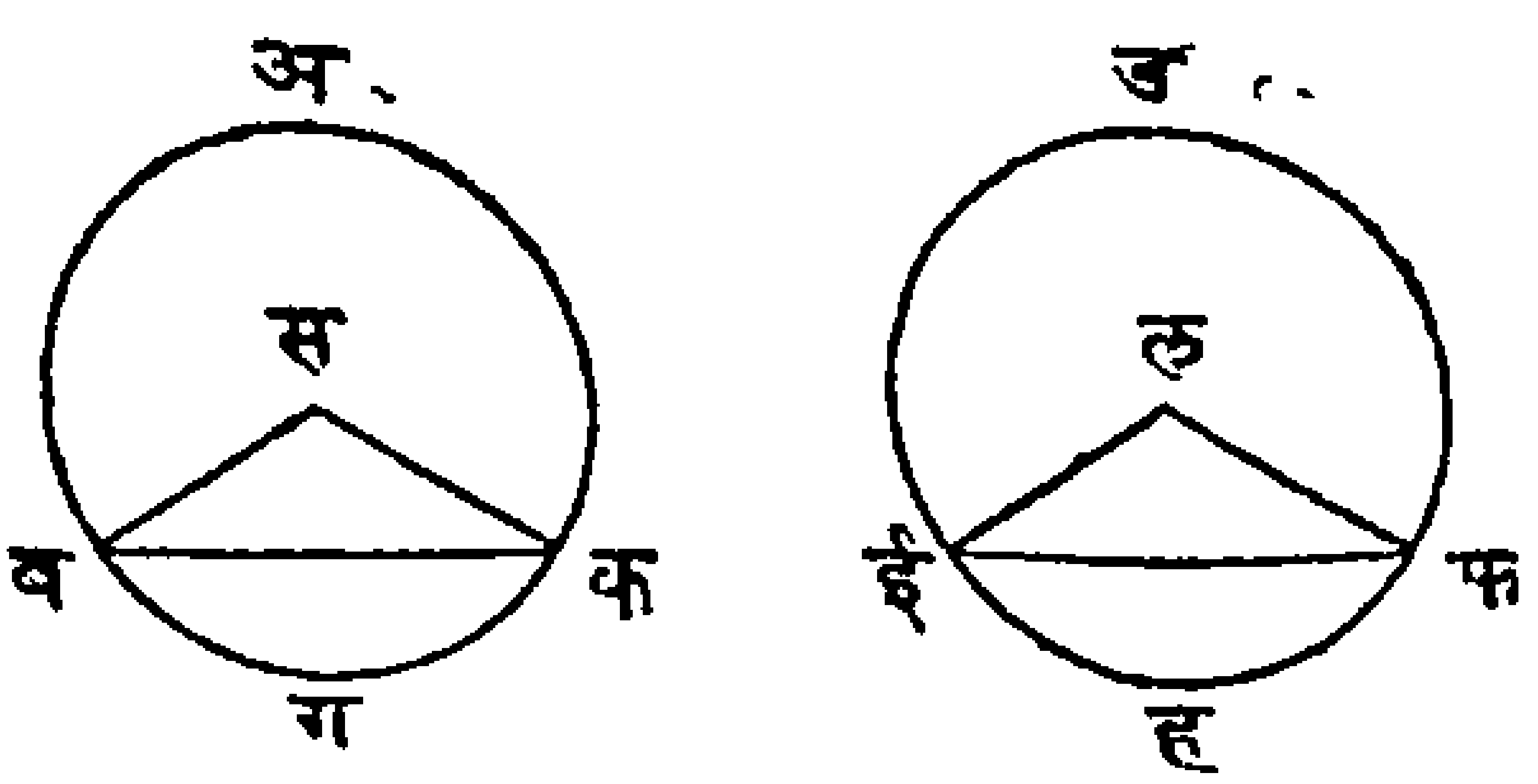
३. समान (अथवा एकाच) वर्तुळांच्या दोन कंसांपैकीं एक दुसऱ्याच्या कांहीं पटीबराबर असेल, तर पहिल्या कंसावरील मध्यकोण (अथवा परिघकोण) दुसऱ्या कंसावरील मध्यकोणाच्या अथवा परिघकोणाच्या त्याच पटीबराबर असतो.

सिद्धांत २८. प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान ज्यांनीं कापिलेल्या कंसांपैकीं (१) लहान कंस परस्पर समान असतात, व (२) मोठे कंस परस्पर समान असतात.

अवक, डईफ हीं वर्तुळें समान आहेत, व त्यांच्या **वक, ईफ** ह्या ज्या समान आहेत; तर त्यांनीं कापिलेल्या कंसांपैकीं (१) **वगक, ईहफ** हे लहान कंस समान होतील; व (२) **वअक, ईडफ** हे मोठे कंसही समान होतील.

(१) **स** आणि **ल** हे वर्तुळांचे मध्य काढ, (३. १)



आणि **वस, सक, ईल, लफ** सांध. (गृ.कृ. १

आतां **अबक** वर्तुळ **डईफ** वर्तुळाबरोबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून **बसक** त्रिकोणाच्या **बस**, **सक** ह्या बाजू **ईलफ** त्रिकोणाच्या **ईल**, **लफ** ह्या बाजूशीं अनुक्रमें बराबर आहेत; (३. इ.)
आणि **बक** पाया **ईफ** पायाबराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **बसक** कोन **ईलफ** कोनाबराबर आहे; (१. ८)
ह्यास्तव **बगक** कंस **ईहफ** कंसाबराबर आहे. (३. २६)
(२) आतां **अबगक** परिघ **डईहफ** परिघाबराबर आहे; (प्रतिज्ञा व ३. इ. उप.)
म्हणून शेष **बअक** कंस, शेष **ईडफ** कंसाबराबर आहे. (प्र.प्र. ३)

ह्याकरितां, समान वर्तुळांत इत्यादि.

उपसि. एकाच वर्तुळांत समान ज्यांनीं कापिलेल्या कंसांपैकीं मोठे कंस परस्पर समान असतात, व लहान कंसही परस्पर समान असतात.

प्रश्न.

१ (१) "समान वर्तुलांच्या समान ज्यांनीं कापिलेले कंस समान असतात," अशी ३. २८ ह्याची प्रतिज्ञा म्हटली असतां चालेल काय? (२) ३.२८ च्या आकृतींत **बअक** आणि **ईहफ** हे कंस समान वर्तुळांच्या समान ज्यांनीं कापिलेले आहेत; पण हे समान आहेत, असें सिद्ध करितां येईल काय?

२. (१) वर्तुलाच्या ज्येनें जे त्याचे दोन वर्तुलखंड होतात, त्यांचे कंस समान केव्हां असतात व असमान केव्हां असतात? (२) वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येनें जे दोन वर्तुलखंड होतात, त्यांपैकीं ज्याचा कंस मोठा असतो, त्यांतच वर्तुलमध्य असतो, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत २९. प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान कंसांच्या ज्या समान असतात.

अबक आणि **डईफ** हीं समान वर्तुळें आहेत, आणि त्यांचे

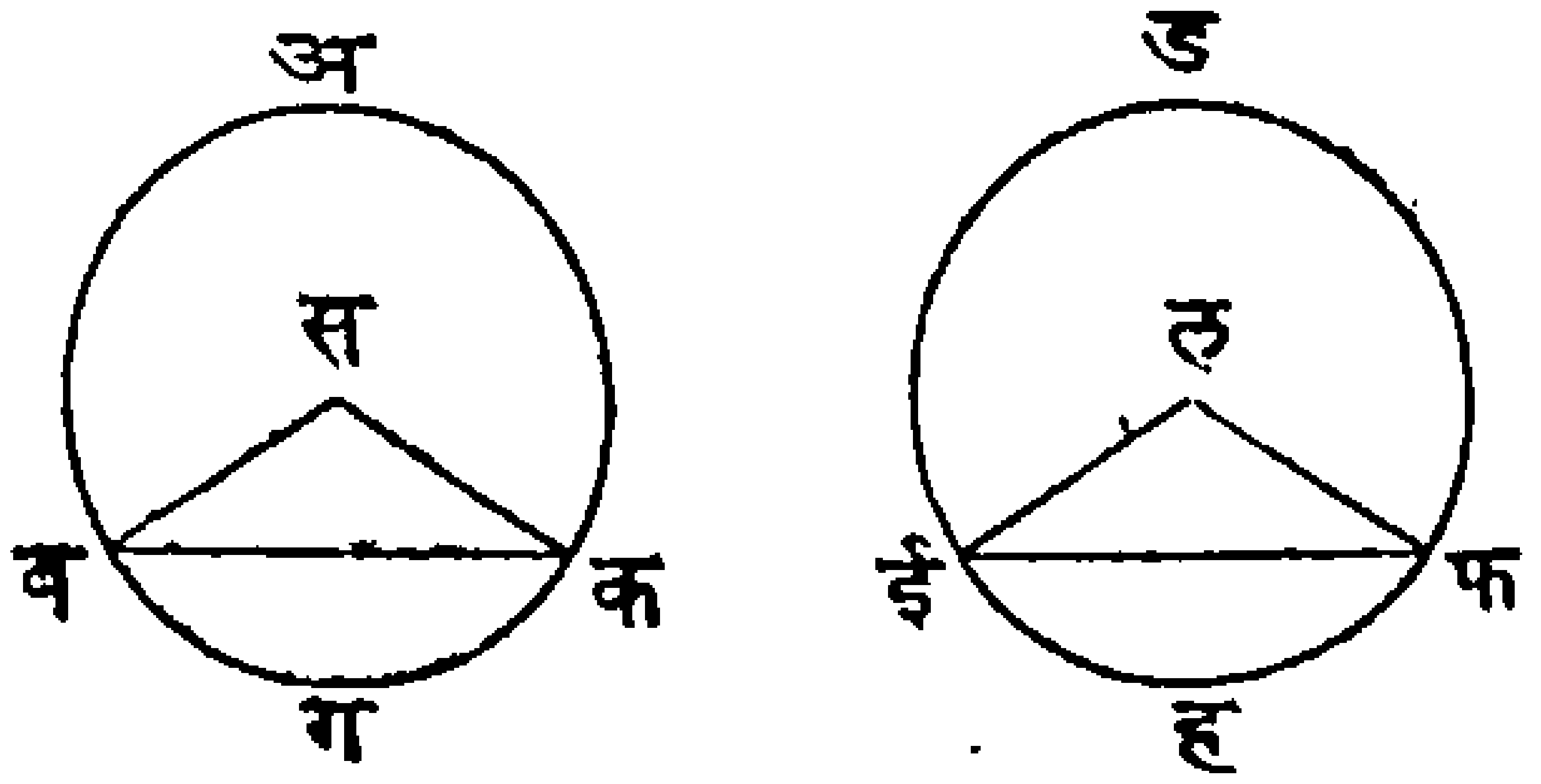
बगक आणि **ईहफ** हे कंस समान आहेत; तर **बक** ज्या **ईफ** ज्ये-बराबर होईल.

वर्तुळांचे **स** आणि **ल** मध्य काढ; (३.१)

आणि **बस, सक, ईल, लफ** सांध. (गृ.कृ. १)

आतां **बगक** कंस **ईहफ** कंसाबराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

ह्यास्तव **बसक** मध्यकोण **ईलफ** मध्यकोणाबराबर आहे. (३.२७)



आणि **अबक, ईडफ** हीं वर्तुळें समान आहेत; (प्रतिज्ञा)

ह्यास्तव त्यांच्या त्रिज्या समान आहेत. (३. इ.)

म्हणून **बसक** त्रिकोणाच्या **बस, सक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील कोन हीं, **ईलफ** त्रिकोणाच्या **ईल, लफ** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत;

म्हणून **बक** पाया **ईफ** पायाबराबर आहे. (१.४ भाग १)

ह्याकरितां, समान वर्तुळांत इत्यादि.

उपसि. एकाच वर्तुळांतील समान कंसांच्या ज्या समान असतात.

प्रश्न.

१. (३.२९) हा सिद्धांत ३.२८ ह्याचा व्यत्यास आहे, असें दाखवा.

२. (३.२९) हा सिद्धांत ३.२८ च्या आधारानें क्र. वि. रीतीनें सिद्ध करून दाखवा.

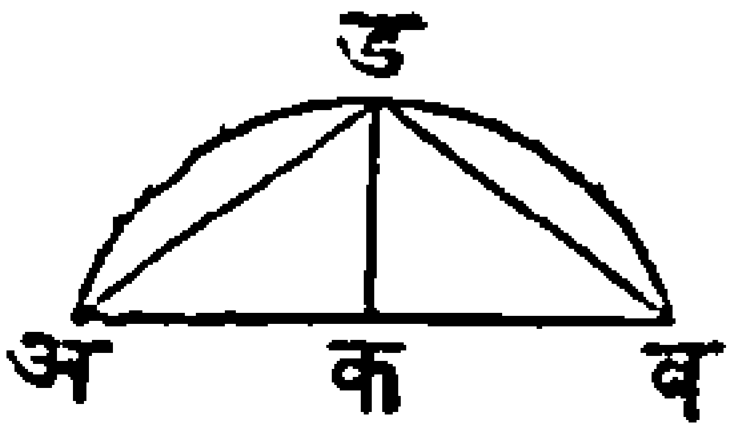
सिद्धांत ३०. कृत्य.

दिलेला कंस दुभागावयाचें (म्हणजे त्याचे दोन समान भाग करावयाचें).

अडब एक दिलेला कंस आहे; व तो दुभागावयाचा आहे.

अब सांध; (गृ.कृ. १)

क बिंदूंत अबचे दोन समान भाग कर; (१.१०)
क बिंदूतून अब रेघेवर कड लंब काढ,
(१.११)
आणि तो कंसास ड बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढीव.



म्हणजे अडब कंस ड बिंदूंत दुभागिला जाईल.

कारण; अड आणि डब सांध. (गृ.कृ. १)

आतां अक, कब बराबर आहे, (रचना)
आणि अकड, बकड त्रिकोणांस कड साधारण आहे;
म्हणून अकड त्रिकोणाच्या अक, कड ह्या दोन बाजू बकड त्रिकोणाच्या बक, कड ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत,
आणि अकड कोन बकड कोनाबराबर आहे; (१.व्या. १०)
म्हणून अड पाया बड पायाबराबर आहे. (१.४ भाग १)

आतां अडब हा कंस ज्या वर्तुलाचा आहे, त्याचा मध्यबिंदु कड रेषेंत आहे; (३.१ उप.)
म्हणून तो अड, बड ह्या वर्तुलखंडांच्या बाहेर आहे;
म्हणून त्या वर्तुलखंडांचे अड, बड हे कंस, अड, बड ह्या समान ज्यांनीं कापिलेल्या दोन दोन कंसांपैकीं लहान कंस आहेत.
म्हणून अड कंस बड कंसाबराबर आहे.

ह्याकरितां दिलेला अडब कंस ड बिंदूंत दुभागिला गेला आहे.

प्रश्न.

१. कंसाचे दोन समान भाग करण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. "(३.३०) च्या आधारानें कोणत्याही कंसाचे किती किती समान भाग करितां येतील"? ह्या प्रश्नाचें सामान्य उत्तर सांगा.

३.२६, ३.२७, ३.२८, ३.२९ व ३.३० ह्या सिद्धांतांवर

प्रश्न.

१. "वर्तुलांतल्या मध्यकोणाचे (अथवा परिघकोणाचे) कांहीं

समान भाग करून त्या विभागणाऱ्या रेषा, ती मध्यकोण (अथवा परिघकोण) ज्या कंसावर आहे, त्याला मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या असतां, त्या (१) कंसाचेही तितकेच समान भाग होतात; आणि (२) त्या कंसावरच्या वर्तुलविभागाचेही तितकेच समान भाग होतात" असें सिद्ध करा.

२. वर्तुलाच्या परिघाचे २, ४, ८, १६ इत्यादिक म्हणजे दोन ह्या संख्येच्या कोणत्याही घाताइतके समान भाग करण्याची सामान्य रीति सांगा.

३. वर्तुलाच्या परिघाचे तीन समान भाग कसे करावे ?

४. वर्तुलाच्या परिघाचे, दोन ह्या संख्येच्या कोणत्याही घातास ३ ह्या संख्येनें गुणून येणाऱ्या संख्येइतके समान भाग करण्याची सामान्य रीति सांगा.

५. "वर्तुलाच्या परिघाचे दोहोंपेक्षां जास्त समान भाग करून जवळजवळचे छेदनबिंदु अनुक्रमानें सांधिले असतां जी वर्तुलांत सरलरेषाकृति होते, ती समभुज असते" असें सिद्ध करा.

६. वर्तुलांत काढिलेली कोणतीही समभुजाकृति समकोण असते.

७. वर्तुलांत काढिलेल्या समकोणाकृतीची भुजसंख्या विषम असल्यास ती समभुजाकृति असते.

८. "वर्तुलांत काढिलेल्या समकोणाकृतीची भुजसंख्या सम असल्यास ती समभुजाकृति असते," हा सिद्धांत निरपवाद आहे काय? नसेल तर एखादा अपवाद आणून दाखवा.

९. वर्तुलखंडाच्या ज्येला दुभागून तीवर लंब असणारी रेषा त्याच्या कंसाला मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, तिनें त्या वर्तुलखंडाचे ही दोन समान भाग होतात.

१०. (१) "दोन समांतर ज्यांमध्यें सांपडलेले कंस समान असतात" व (२) "परस्परांस न मिळणाऱ्या दोन ज्यांच्या मधील कंस समान असल्यास त्या ज्या समांतर असतात" हे दोन सि. सि. करा.

११. समान अथवा एकाच वर्तुलांतील दोन परिघकोन परस्परांचे पूरक असतील, तर ते ज्या कंसांवर असतील त्यांची बेरीज त्या प्रत्येक वर्तुलाच्या परिघाबराबर असते.

१२. समान अथवा एकाच वर्तुलांतील अनेक मध्यकोणांची बेरीज जर चार काटकोन असले, तर ते ज्या कंसांवर असतील, त्यांची बेरीज त्या प्रत्येक वर्तुलाच्या परिघाबरोबर असते.

१३. वर्तुलांत परस्परांस न मिळणाऱ्या दोन ज्या समान असल्यास, त्यांचीं एकेका आंगचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेषा समांतर असतात.

१४. (१) जर वर्तुळांत परस्परांस छेदणाऱ्या दोन ज्या समान असल्या, तर एकीचे दोन खंड दुसरीच्या दोन खंडांशीं अनुक्रमें समान असतात; व (२) त्या समान खंडांच्या एका जोडीचीं टोंकें सांधणारी रेषा दुसऱ्या जोडीचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेषेशीं समांतर असते.

१५. वर्तुलांत परस्परांस एकाच बिंदूंत छेदणाऱ्या तीन ज्या जर समान असतील, तर तोच बिंदु त्या वर्तुळाचा मध्यबिंदु असतो.

१६. ज्या दोन वर्तुलांचे समान मध्यकोण समान ज्यांवर असतात, तीं वर्तुलें समान असतात.

१७. "(१) वर्तुलांची समानता, (२) मध्यकोणांची समानता, (३) ज्यांची समानता, व (४) कंसांची समानता ह्या चार गोष्टींपैकीं कोणत्याही दोन दिल्या असतां बाकीच्या दोन सिद्ध होतात." ह्या वाक्यामध्यें जे निरनिराळे सहा सिद्धांत आहेत, त्यांपैकीं "(२) व (४) ह्या दिल्या असतां बाकीच्या सिद्ध करणें" व "(३) व (४) ह्या दिल्या असतां बाकीच्या सिद्ध करणें" हे दोन सिद्धांत खेरीज करून बाकीचे सिद्ध करून दाखवा.

१८. जी रेषा दिलेल्या कंसाला व त्याच्या ज्येलाही दुभागिते, ती वर्तुलमध्यांतून जाते व त्या कंसावरच्या मध्यकोणासही दुभागिते.

१९. **अबक** ह्या अर्धवर्तुलाचा **अब** हा व्यास आहे; कंसांतील **क** ह्या एका बिंदूपासून **कडई** ही अशी एक छेदकरेषा काढिली आहे कीं, ती कंसाला पुनः **ड** बिंदूंत छेदून **ब** पलीकडे वाढविले-

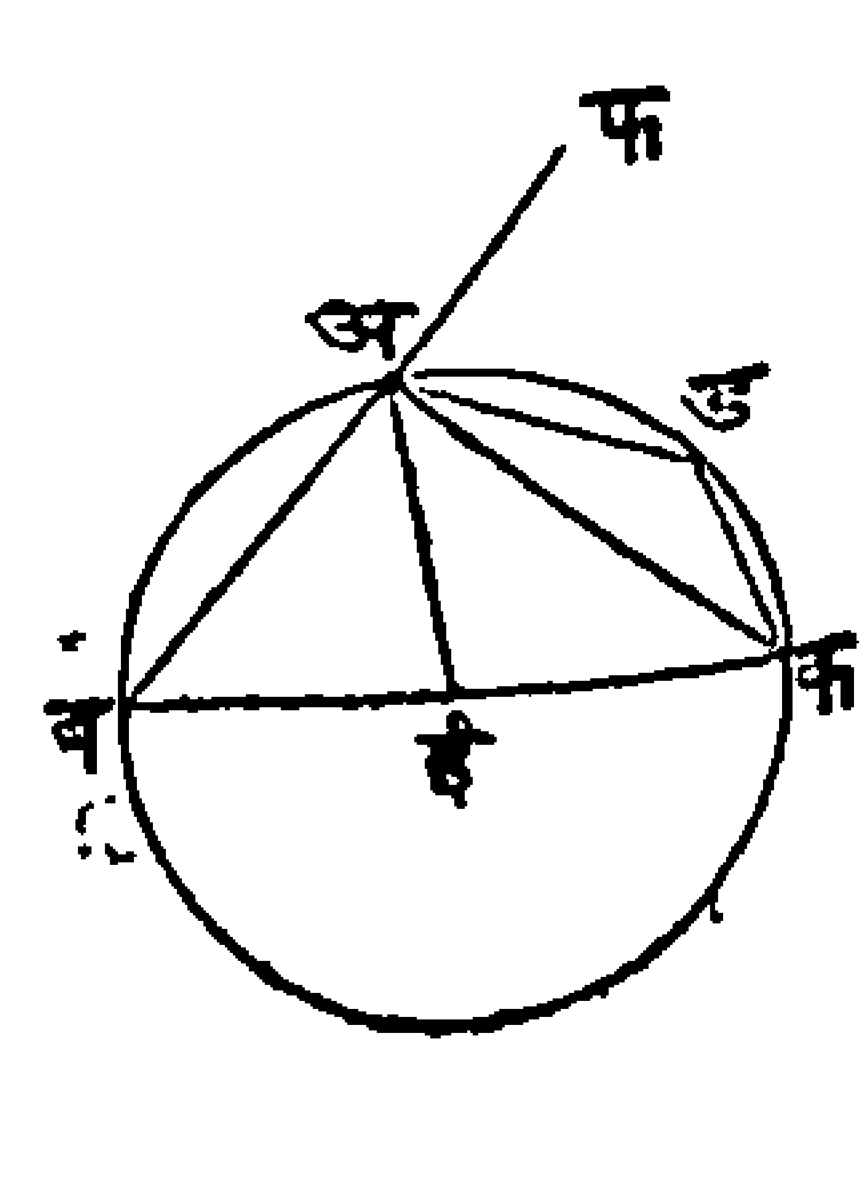
त्या व्यासाला ई बिंदूंत मिळते; आणि तिचा वर्तुलाबाहेरील डई भाग त्रिज्येबरावर आहे. तर अक कंस बड कंसाच्या तिपटी बरावर आहे, असें सिद्ध करा.

२०. कोणत्याही कंसाचे (अथवा कोणत्याही कोनाचे) तीन समान भाग भूमितीच्या योगानें करितां येतात काय? "अर्धवर्तुलाच्या कंसांतील कोणत्याही बिंदूपासून, त्या कंसास छेदणारी व पुढें वाढविलेल्या व्यासास मिळणारी अशी रेषा काढितां येते कीं, तिचा वर्तुलाबाहेरचा भाग त्या वर्तुलाच्या त्रिज्येबरावर होईल" हें आणखी एक गृहीतकृत्य मानिलें असतां कोणत्याही कंसाचे (अथवा कोणत्याही कोनाचे) तीन समान भाग भूमितीनें करितां येतील, असें दाखवा.

सिद्धांत ३१. प्रमेय.

(१) अर्धवर्तुलांतला कोन काटकोन असतो; (२) अर्धवर्तुलापेक्षां मोठ्या खंडांतला कोन लघुकोण असतो, व (३) अर्धवर्तुलापेक्षां लहान वर्तुलखंडांतला कोन विशालकोण असतो.

अबक वर्तुलाचा **बक** हा व्यास आहे; **अक** ह्या मध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येनें त्या वर्तुलाचे **अबक**, **अडक** असे दोन वर्तुलखंड केले आहेत; व **अब**, **अड**, **डक** सांधिल्या आहेत. तर (१) **बअक** ह्या अर्धवर्तुलांतला **बअक** कोन काटकोन होईल; (२) **अबक** ह्या अर्धवर्तुलापेक्षां मोठ्या वर्तुलखंडांतला **अबक** हा कोन लघुकोण होईल; व (३) **अडक** ह्या अर्धवर्तुलापेक्षां लहान वर्तुलखंडांतला **अडक** हा कोन विशालकोण होईल.



अबक वर्तुलाचा **ई** हा मध्यबिंदु काढून **अई** सांध, आणि **बअ** रेघ **फ** पर्यंत वाढीव.

(३.१, गृ.कृ. १ व २)

(१) आतां **ईअ**, **ईब** बरावर आहे,

(१.व्याख्या १५)

ह्यास्तव **ईअब** कोन, **ईबअ** कोनाबरावर आहे; (१.५)

आणि **ईभ**, **ईक** बराबर आहे; (१. व्या. १५)

ह्मणून **ईअक** कोन **ईकअ** कोनाबराबर आहे. (१.५)

ह्यास्तव सगळा **बअक** कोन, **अबक** आणि **अकब** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु **अबक** त्रिकोणाचा बाहेरील **फअक** कोन, **अबक** आणि **अकब** ह्या कोनांच्या बेरजेबराबर आहे; (१. ३२ भाग १)

म्हणून **बअक** कोन **फअक** कोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि ते सलग्नकोण आहेत,

म्हणून त्यांपैकीं प्रत्येक काटकोन आहे. (१. व्याख्या १०)

म्हणून **बअक** ह्या अर्धवर्तुळांतला कोन काटकोन आहे.

(२) आतां **अबक** त्रिकोणाचे **अबक** आणि **बअक** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी आहेत, (१. १७)

आणि **बअक** काटकोन आहे, हें वर दाखविलें आहे;

म्हणून **अबक** कोन काटकोनापेक्षां कमी आहे. (प्र. प्र. ५)

म्हणून अर्धवर्तुळापेक्षां मोठ्या **अबक** खंडांतला कोन लघुकोण आहे.

(३) आतां **अबकड** चौकोन वर्तुळांतला आहे, म्हणून **अबक** आणि **अडक** हे त्याचे समोरासमोरचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत. (३.२२)

परंतु **अबक** कोन काटकोनाहून कमी आहे, हें वर दाखविलें आहे;

म्हणून **अडक** कोन काटकोनापेक्षां मोठा आहे. ( )

म्हणून अर्धवर्तुळापेक्षां लहान **अडक** खंडांतला कोन विशालकोण आहे.

ह्याकरितां अर्धवर्तुळांतला इत्यादि.

उपसि. वरील सिद्धांताच्या आधारानें सहज सिद्ध करितां येईल कीं, (१) ज्या वर्तुलखंडांतील कोन काटकोन असतो, तें अर्धवर्तुल असतें; (२) ज्या वर्तुलखंडांतील कोन लघुकोण असतो, तें अर्धवर्तुलापेक्षां मोठें असतें; व (३) ज्या वर्तुलखंडांतला कोन विशालकोण असतो, तें अर्धवर्तुलापेक्षां लहान असतें.

प्रश्न.

१. "दिलेल्या वर्तुलाच्या बाहेरील कोणताही बिंदु व त्याचा मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा ज्याचा व्यास होईल, असें दुसरें वर्तुल काढून, त्यांच्या परिघांचा एक छेदनबिंदु व तो बाहेरील बिंदु हे सांधिले; तर सांधणारी रेषा ही पहिल्या वर्तुलाची एक स्पर्शरेषा होते" असें सिद्ध करा. (ही वर्तुलास त्याच्या बाहेरील बिंदूपासून स्पर्शरेषा काढण्याची रीति ३. १७ ह्यांतील रीतीपेक्षां सोपी आहे).

२. एका वर्तुलाची त्रिज्या ज्याचा व्यास होईल, असें दुसरें वर्तुल काढून त्यांच्या परिघांच्या मेलनबिंदूपासून पहिल्या वर्तुलाची ज्या काढिली, तर ती दुसऱ्या वर्तुलाच्या परिघानें दुभागिली जाते.

३. वर्तुलांत काढिलेल्या त्रिकोणाचा शिरकोन लघुकोण किंवा विशालकोण असेल, तर तो, आणि पायाच्या एका टोंकांतून काढिलेला व्यास व पाया ह्यांच्या मधील कोन, ह्यांची अनुक्रमें बेरीज किंवा वजावाकी एक काटकोन असते.

४. (१) व्यासाला वर्तुलांत न मिळणारी ज्या अमर्याद करून तीवर व्यासाच्या टोंकांतून लंब काढिले, तर ते तिला वर्तुलाबाहेरच मिळतात; आणि (२) त्या ज्येचे वर्तुलाबाहेरचे भाग समान असतात.

५. दोन छेदक वर्तुलांच्या एका छेदनबिंदूंतून दोहोंचे दोन व्यास काढिले, तर त्या व्यासांचीं दुसरीं टोंकें व दुसरा छेदनबिंदु हे तिन्ही बिंदु एकाच सरलरेषेंत असतात.

६. ज्याचा शिरकोन तिर्यक्कोण आहे, अशा त्रिकोणाच्या पायाच्या दोन्ही टोंकांपासून समोरच्या बाजूंवर लंब काढिले असतां, प्रत्येक लंब व पाया ह्यांच्या मधील कोन हा, दुसरा लंब व लंबांच्या दुसऱ्या टोंकांतून जाणारी रेषा ह्यांच्या मधील लघुकोणाबरावर असतो.

७. (१) परिघाच्या चतुर्थांशावरील व (२) तीन चतुर्थांशांवरील परिघकोन किती काटकोनांचा असतो?

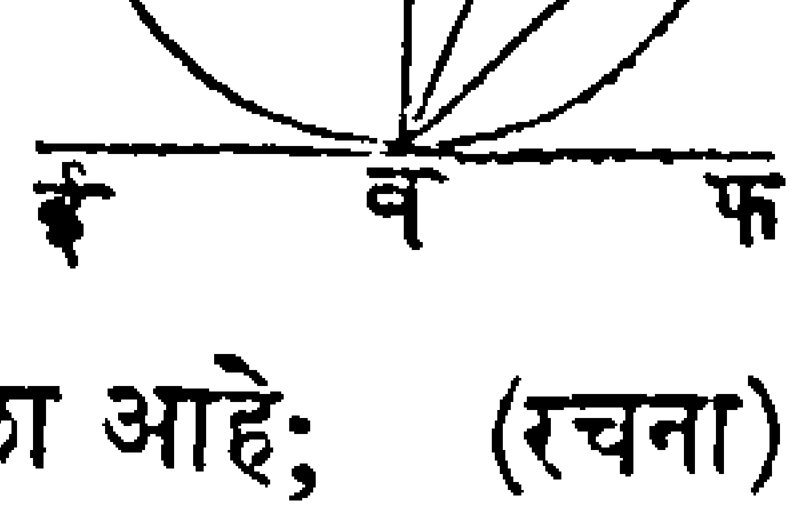
८. (१) (३.३१) ह्याच्या प्रत्येक भागांत एक वर्तुलखंड व त्यांतील कोन एवढेंच दिलें आहे, असें माना, व प्रत्येकाच्या सिद्धतेकरितां

नवीन रचना काय करावी लागते, हें स्पष्ट सांगा. (२) ३.३१ भा. १ ह्याच्या सिद्धतेंत १.३२ उप. ५ योजिल्यानें, व ३.३१ भा. ३ ह्याच्या सिद्धतेंत **बड** सांधिल्यानें त्या त्या सिद्धतेमध्यें बराच संक्षेप होतो, असें दाखवा.

सिद्धांत ३२. प्रमेय.

वर्तुलाच्या स्पर्शरेषेंतील स्पर्शबिंदूपासून त्या वर्तुलाची ज्या काढिली असतां, तिनें स्पर्शरेषेशीं केलेला प्रत्येक कोन हा, तीमुळें झालेल्या वर्तुलखंडांपैकीं ज्याकडे तो कोन असेल, त्याच्या व्युत्क्रमखंडांतील कोनाबराबर असतो.

अबकड वर्तुळास **ईफ** रेघ **ब** बिंदूशीं स्पर्श करिते, आणि **ब**-पासून **बड** ज्या काढिली आहे; तर तिनें **ईफ**शीं केलेल्या कोनांपैकीं (१) **डकब** वर्तुलखंडाकडचा **डबफ** कोन हा, त्या खंडाच्या व्युत्क्रमखंडांतील म्हणजे **डअब** खंडांतील कोनाबराबर होईल; आणि (२) **डबई** कोन **बकड** खंडांतील कोनाबराबर होईल.



ब बिंदूपासून **ईफ** रेघेवर **बअ** लंब काढ; (१.११)

आणि **बड** कंसांत **क** बिंदु घेऊन **अड**, **डक**, **कब** सांध. (गृ. कृ. १)

(१) आतां **ईफ** रेघ **अबकड** वर्तुळास **ब** बिंदूशीं स्पर्श करिते, (प्रतिज्ञा)

आणि स्पर्शबिंदूतन स्पर्शरेघेवर **बअ** लंब काढिला आहे; (रचना)

म्हणून वर्तुळाचा मध्य **बअ** रेषेंत आहे; (३.१९)

म्हणून **अडकब** हें अर्धवर्तुल आहे; (१ व्या. १८ व १९)

ह्यास्तव अर्धवर्तुळांतला **अडब** कोन काटकोन आहे; (३.३१)

म्हणून **बअड** आणि **अबड** ह्या कोनांची बेरीज एक काटकोनाबराबर आहे. (१.३२ उप.४)

परंतु **अबफ** कोनही काटकोन आहे; (१. व्या. १०)

म्हणून **अबफ** कोन, **बअड** आणि **अबड** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्या बराबरीच्या प्रत्येकांतून **अबड** कोन काढून टाकिला;
तेव्हां शेष **डबफ** कोन, शेष **बअड** कोनाबराबर, म्हणजे **डअब** ह्या वर्तुलखंडांतील कोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. ३)

(२) आतां **अबकड** चौकोन वर्तुळांत काढिलेला आहे,
म्हणून **बअड** आणि **बकड** ह्या दोन समोरासमोरच्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे. (३.२२)
परंतु **डबफ** आणि **डबई** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे; (१.१३)
म्हणून **डबफ** आणि **डबई** ह्या दोन कोनांची बेरीज, **बअड** आणि **बकड** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)
आणि **डबफ** कोन **बअड** कोनाबराबर आहे; (३.२२ भा. १)
म्हणून शेष **डबई** कोन, शेष **बकड** कोनाबराबर, म्हणजे **डकब** ह्या वर्तुलखंडांतील कोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. ३)

ह्याकरितां, वर्तुलाच्या इत्यादिक.

प्रश्न.

१. (३.३२)च्या आकृतींत **बड** ज्या **ईफ**वर लंब आहे, असें समजून तो सिद्ध करा.

२. (३.३२) च्या आकृतीमध्यें **अक** सांधा, आणि ह्याचा दुसरा भाग पहिल्या भागाच्या मदतीवांचून (३.१९, ३.३१, प्र. प्र. ११, ३.२१ व प्र. प्र. २ ह्यांच्या आधारानें) सिद्ध करून दाखवा.

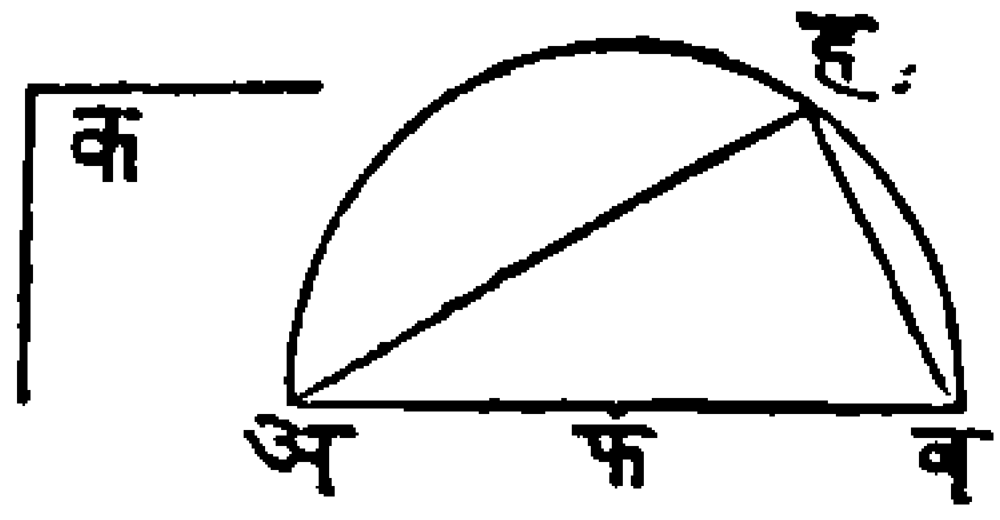
३. "एक रेषा वर्तुलास मिळते व मेलनबिंदूपासून काढिलेल्या ज्येनें तिच्याशीं झालेला कोन, तो ज्या वर्तुलखंडाकडे आहे, त्याच्या व्युत्क्रमखंडांतील कोनाबराबर आहे; तर ती मिळणारी रेषा त्या वर्तुलास स्पर्श करणारी असते." हा ३.३२ चा व्यत्यास सिद्ध करा.

सिद्धांत ३३. कृत्य.

दिलेली रेषा ज्याची ज्या होईल व ज्यांतील कोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल, असें एक वर्तुळखंड काढावयाचें.

अब ही दिलेली रेघ आहे, आणि **क** हा दिलेला कोन आहे; आणि **अब** रेघ ज्याची ज्या होईल व ज्यांतील कोन **क** कोनाबराबर होईल, असें वर्तुलखंड काढावयाचें आहे.

(१) जेव्हां **क** कोन काटकोन आहे, तेव्हां **अब**, **फ** मध्यें दुभाग; (१.१०)



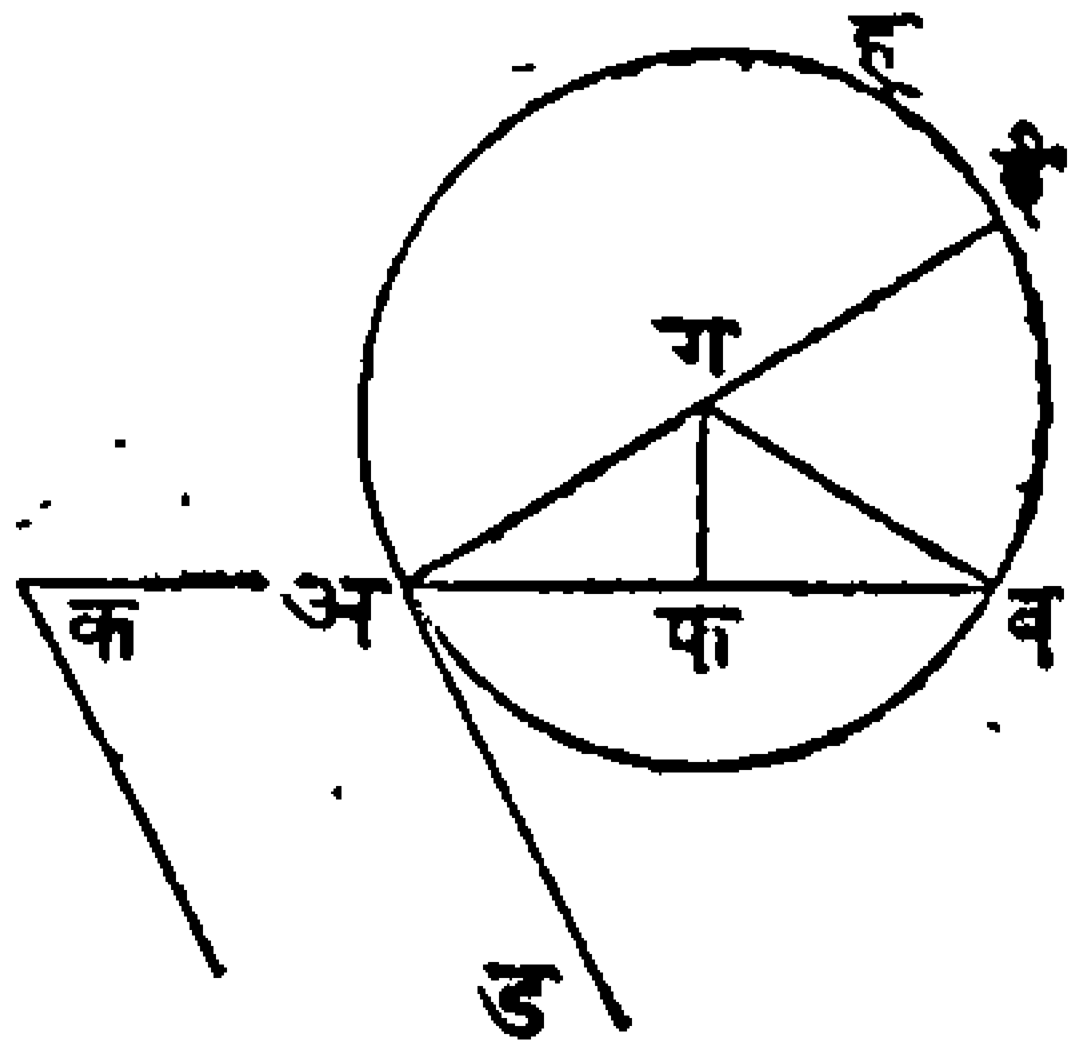
आणि **फ** मध्य कल्पून **फब** त्रिज्येनें **अहब** अर्धवर्तुळ काढ. (गृ. कृ. ३)
म्हणजे **अहब** हें इच्छिलेलें वर्तुलखंड होईल.

कारण अर्धवर्तुळांतील **अहब** कोन, **क** ह्या काटकोनाबरोबर आहे. (३.३१ व प्र. प्र. ११)

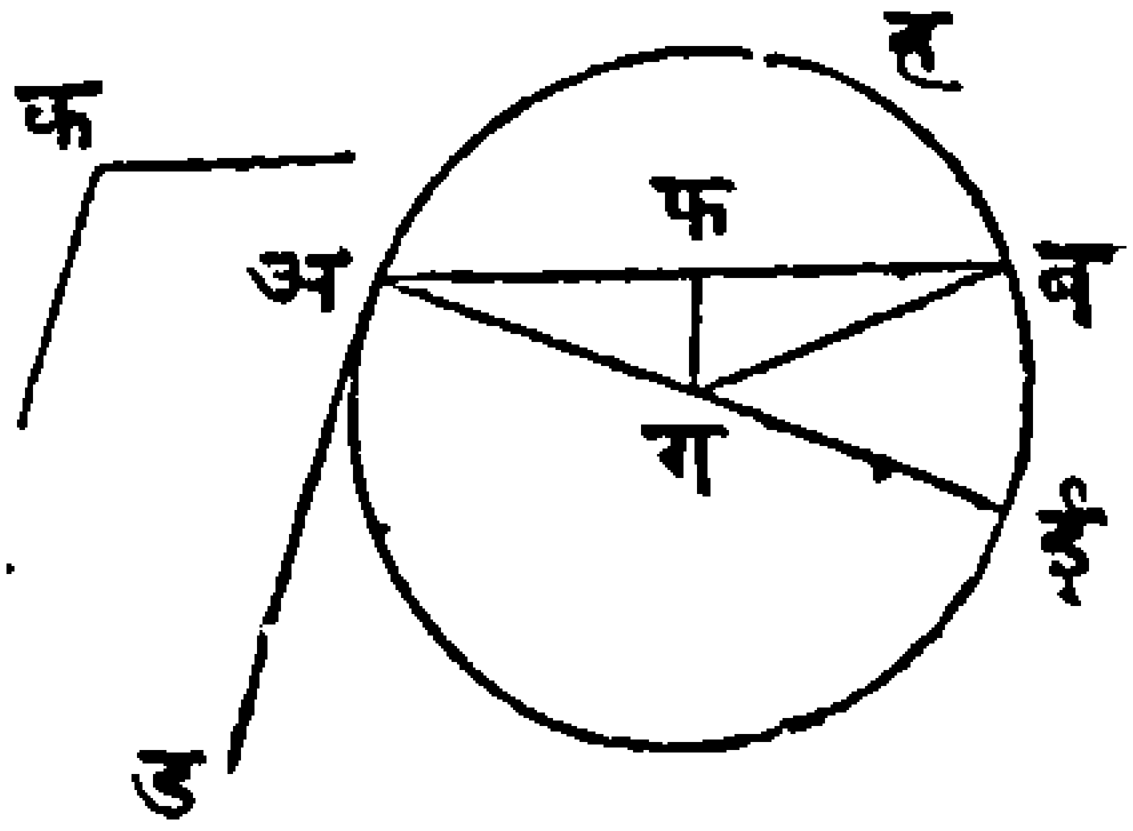
(२) आतां जेव्हां **क** कोन तिर्यक्कोण आहे, तेव्हां **अब** रेषेशीं **अ** बिंदूजवळ **बअड** कोन **क** कोनाबरोबर कर; (१.२३)
अ बिंदूपासून **अड**वर **अई** लंब काढ; (१.११)
अब ही **फ** मध्यें दुभाग; (१.१०)
फ बिंदूपासून **अब**वर **फग** लंब काढ; (१.११)
आणि तो **अई** लंबास **ग** बिंदूंत मिळतो, असें मान.
म्हणजे **ग** हा इच्छिल्या वर्तुलखंडाचा मध्य व **गअ** त्याची त्रिज्या होईल.

कारण; **गब** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अफग** त्रिकोणाच्या **अफ**, **फग** ह्या बाजू **बफग** त्रिकोणाच्या **बफ**, **फग** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत; (रचना)
आणि **अफग**, **बफग** हे कोन समान आहेत; (१. व्या. १०)



म्हणून **अग** पाया **बग** पायाबरोबर आहे. (१.४. भा. १)
म्हणून **ग** मध्य व **गअ** त्रिज्या कल्पून काढिलेलें वर्तुल **ब** बिंदूंतून जाईल.
आतां **अई** व्यासावर **अड** लंब आहे; (रचना)



म्हणून **अड** ही **अहब** वर्तुळास स्पर्श करिते. (३.१६ उप.)
आणि **अ** स्पर्शबिंदूपासून **अब** ज्या काढिली आहे;
म्हणून **डअब** कोन **अहब** ह्या वर्तुलखंडांतील कोनाबरोबर आहे. (३.३२)

परंतु **डअब** कोन **क** कोनाबरोबर आहे; (रचना)
म्हणून **अहब** वर्तुलखंडांतील कोन, **क** कोनाबरोबर आहे. (प्र.प्र.१)

ह्याकरितां, दिलेली **अब** रेघ ज्याची ज्या आहे, आणि ज्यांतील कोन दिलेल्या **क** कोनाबरोबर आहे, असें **अहब** वर्तुलखंड काढिलें आहे.

प्रश्न.

१. (३.३३) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

२. "ज्याचा शिरकोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल, असा त्रिकोण दिलेल्या समर्याद रेषेवर काढावयाचा" ह्या कृत्याची रीति तयार करा; आणि अशा प्रकारचे त्रिकोण दिलेल्या रेषेच्या दोन्ही अंगांस अनंत निघतील, असें दाखवा.

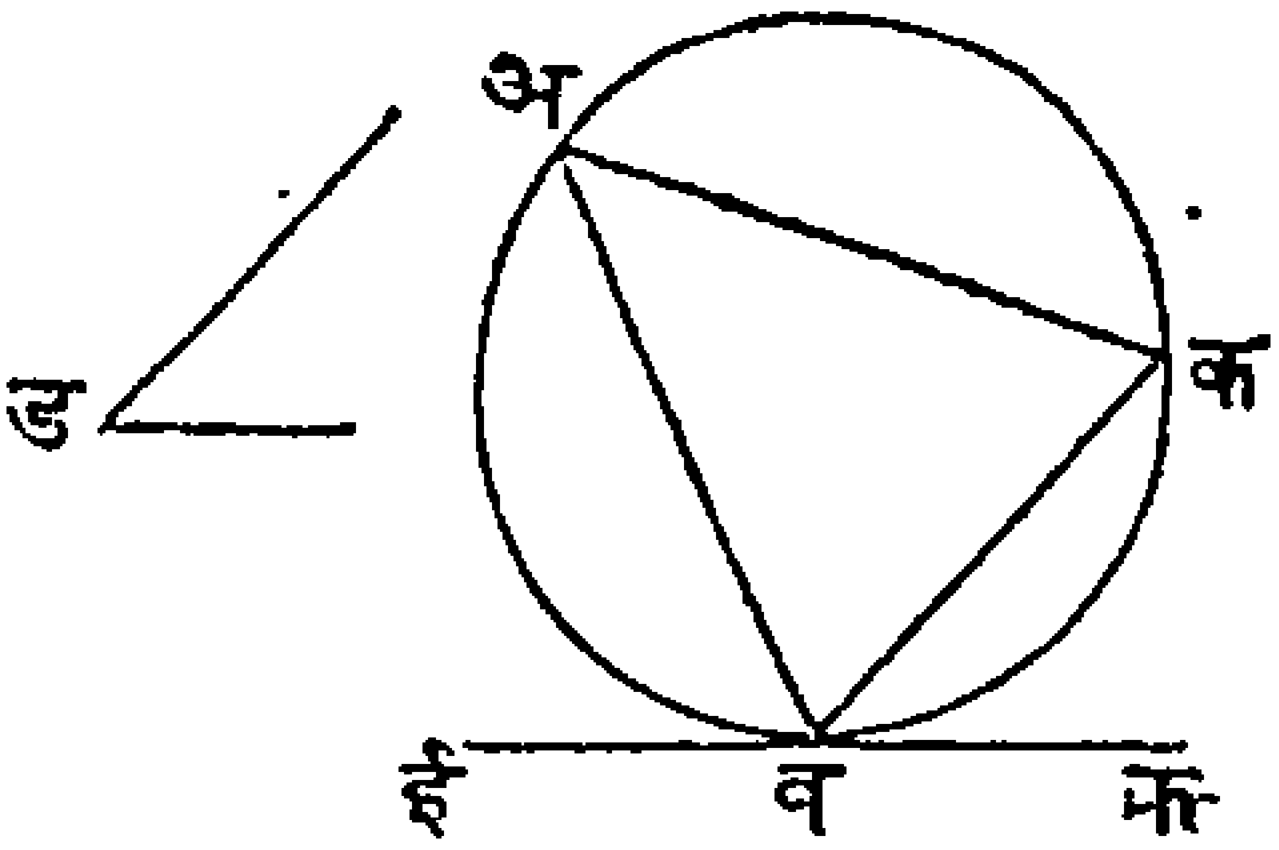
३. दिलेल्या रेषेवर असा एक वर्तुलखंड काढा कीं, तें वर्तुल पुरें करून त्या वर्तुलखंडाच्या कंसावर एखादा परिघकोन केला असतां, तो दिलेल्या कोनाबरोबर होईल.

सिद्धांत ३४. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळाचें असें एक वर्तुलखंड कापावयाचें कीं, त्यांतील कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल.

अबक दिलेलें वर्तुळ आहे, आणि **ड** दिलेला कोन आहे; आणि ज्यांतील कोन **ड** कोनाबरोबर होईल, असें **अबक** वर्तुळाचें वर्तुलखंड कापावयाचें आहे.

अबक वर्तुलास **ब** बिंदूशीं स्पर्श करणारी **ईफ** रेघ काढ; (३.१७



आणि **बफ** रेघेशीं **ब** बिंदूजवळ **ड** कोनाबरोबर **फबक** कोन कर. (१.२३)

म्हणजे **बअक** हें इच्छिलेलें वर्तुळखंड होईल.

कारण; **ईफ** रेघ **अबक** वर्तुळास स्पर्श करिते, आणि **ब** स्पर्शबिंदूपासून **बक** ज्या काढली आहे; (रचना)

म्हणून **फबक** कोन, **बअक** ह्या वर्तुलखंडांतील कोनाबरोबर आहे. (३.३२)

परंतु **फबक** कोन **ड** कोनाबरोबर आहे, (रचना)

म्हणून **बअक** वर्तुलखंडांतील कोन **ड** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, **अबक** दिलेल्या वर्तुळाचें **बअक** खंड असें पाडलें आहे कीं, त्यांतील कोन दिलेल्या **ड** कोनाबरोबर आहे.

प्रश्न.

१. (३.३४) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

३.३२, ३.३३ व ३.३४ ह्यांवर

प्रश्न.

१. वर्तुलखंडाच्या कंसाच्या मध्यांतून त्या वर्तुलास काढिलेली स्पर्शरेघा त्या वर्तुलखंडाच्या ज्येशीं समांतर असते.

२. वर्तुलखंडाच्या ज्येशीं समांतर असणाऱ्या स्पर्शरेषेच्या स्पर्शबिंदूमध्यें त्या वर्तुलखंडाच्या कंसाचे दोन समान भाग होतात.

३. दोन वर्तुळें परस्परांस स्पर्श करीत असलीं, आणि त्यांच्या स्पर्शबिंदूतून दोहोंस छेदणारी एक रेघा काढिली; तर तिनें जे त्या वर्तुळांचे वर्तुळखंड कापिले जातात, त्यांपैकीं, तीं वर्तुळें आंतून स्पर्श करणारीं असल्यास, छेदकरेषेच्या एकाच आंगचे वर्तुलखंड सरूप असतात, व बाहेरून स्पर्श करणारीं असल्यास, विरुद्ध आंगचे वर्तुलखंड सरूप असतात.

४. दोन वर्तुळें परस्परांस (आंतून किंवा बाहेरून) स्पर्श करीत असलीं, आणि त्यांच्या स्पर्श बिंदूतून दोन्ही वर्तुलांस छेदणाऱ्या दोन रेषा काढिल्या; तर एकाच्या परिघाच्या दोन छेदनबिंदूंस सांधणारी रेषा दुसऱ्याच्या परिघाच्या छेदनबिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेशीं समांतर असते.

५. त्रिकोणाचा पाया, शिरकोन व उंची हीं दिलीं असतां तो त्रिकोण काढण्याची रीति तयार करा. ह्या रीतीनें पायाच्या प्रत्येक अंगास इच्छिल्या प्रकारचे त्रिकोण पराकाष्ठा किती निघतील ?

६. त्रिकोणाचा पाया, शिरकोन व पायाच्या एका टोंकापासून समोरच्या बाजूचें अंतर हीं दिलीं असतां, तो त्रिकोण कसा काढावा.

७. एका वर्तुलाची **अब** ही ज्या आहे; **अड** ही त्याची स्पर्शरेषा आहे; **अड** मधील एका **ड** बिंदूपासून **अब**शीं समांतर अशी त्या वर्तुलास छेदकरेषा काढिली, ती परिघाला **प**, **स** बिंदूंत छेदिते. तर **अपड**, **अबस** हे त्रिकोण मिथःसमकोण होतात, असें दाखवा.

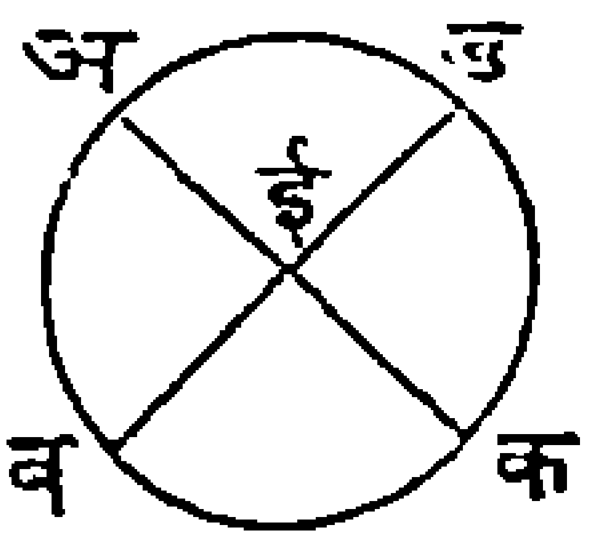
८. दोन वर्तुळें परस्परांस **अ**, **ब** बिंदूंत छेदितात; एका वर्तुलाच्या परिघांतील **प** ह्या एकाच बिंदूपासून **पअ**, **पब** ह्या रेषा काढून त्या दुसऱ्याच्या परिघास अनुक्रमें **क**, **ड** बिंदूंत मिळतील असें केलें आहे; व **प** बिंदूंतून पहिल्या वर्तुलास स्पर्शरेषा काढिली आहे. तर ती स्पर्शरेषा **कड**शीं समांतर होईल, असें सिद्ध करा.

९. दोन वर्तुळें एकमेकांस **अ**, **ब** बिंदूंत छेदितात; एकाला **ब** बिंदूतून काढिलेली स्पर्शरेषा दुसऱ्याच्या परिघाला पुनः **ड** बिंदूंत छेदिते; **अ** बिंदूंतून दोन्ही वर्तुलांस छेदणारी एक रेषा काढिली, ती पहिल्याच्या परिघास **ग** बिंदूंत व दुसऱ्याच्या परिघास **ह** बिंदूंत छेदिते. तर **बग**, **डह** ह्या रेषा समांतर आहेत, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत ३९. प्रमेय.

जर एकाच वर्तुलाच्या दोन ज्यांनीं वर्तुलांत एकमेकींस कापिलें; तर एकीच्या दोन खंडांनीं झालेला काटकोनचौकोन हा, दुसरीच्या दोन खंडांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाबरोबर होतो.

अबकड वर्तुळांत **अक**, **बड** ज्या एकमेकींस **ई** बिंदूंत कापितात; तर **अई**, **ईक** ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन, **बई**, **ईड** ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाबरोबर होईल.

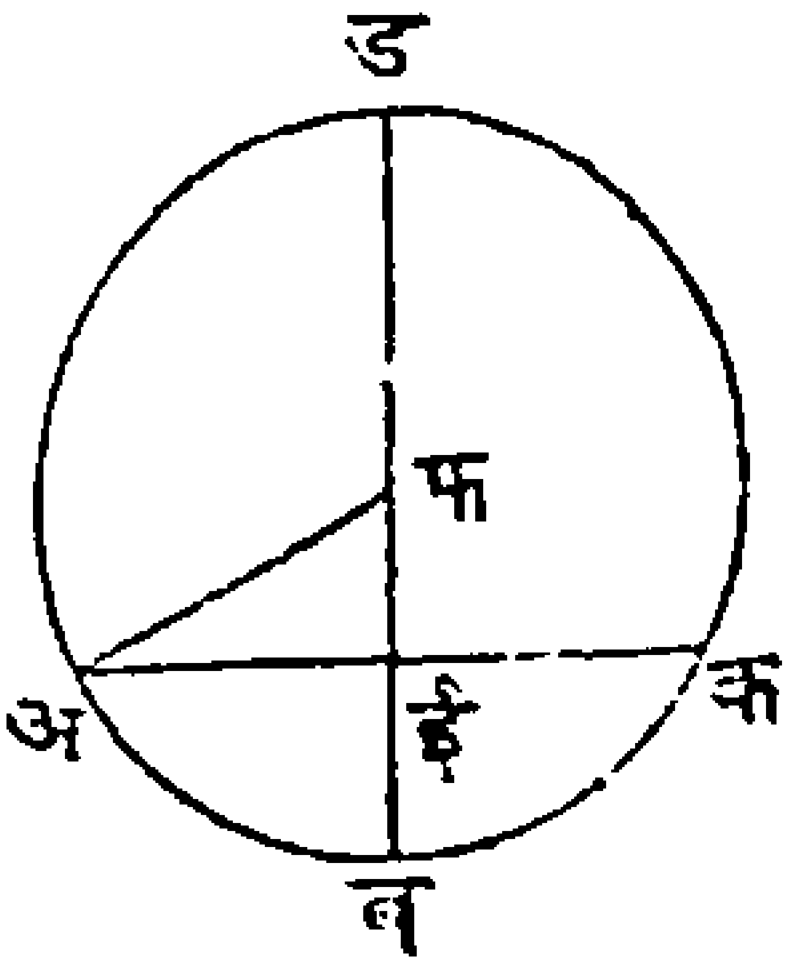


(१) जर **अक**, **बड** ह्या दोन्ही ज्या मध्यांतून जातात, ह्मणजे जर त्यांचा छेदनबिंदु **ई** हा वर्तुळाचा मध्य आहे, तर **ईअ**, **ईब**, **ईक**, **ईड** ह्या सर्व रेघा परस्पर बराबर आहेत;

(१. व्याख्या १५)

म्हणून **अई**, **ईक** काटकोनचौकोन, **बई**, **ईड** काटकोनचौकोनाबराबर आहे. (   )

(२) परंतु जर त्या ज्यांपैकीं एक **बड** ही वर्तुलमध्यांतून जाते, आणि मध्यांतून न जाणाऱ्या दुसऱ्या **अक** ज्येला छेदिते व तीवर लंबही आहे; तर



फ हा वर्तुलमध्य काढ; (३.१)

आणि **अफ** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **बड** रेषेचे **फ** बिंदूंत दोन समान भाग आणि **ई** बिंदूंत दोन असमान भाग झाले आहेत;

म्हणून **बई**, **ईड** काटकोनचौकोन आणि **ईफ**वरील चौरस ह्यांची बेरीज **फब**वरील चौरसा बराबर आहे.

(२.५)

आणि **अफ**, **फब** ह्या समान आहेत; (१. व्या. १५)

म्हणून ती बेरीज **अफ**वरील चौरसाबराबर आहे, (१. इ व प्र.प्र.१)

परंतु **अफ** वरील चौरस, **अई** आणि **ईफ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे. (१.४७)

म्हणून **बई**, **ईड** काटकोनचौकोन आणि **ईफ**वरील चौरस ह्यांची बेरीज, **अई** व **ईफ** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे.

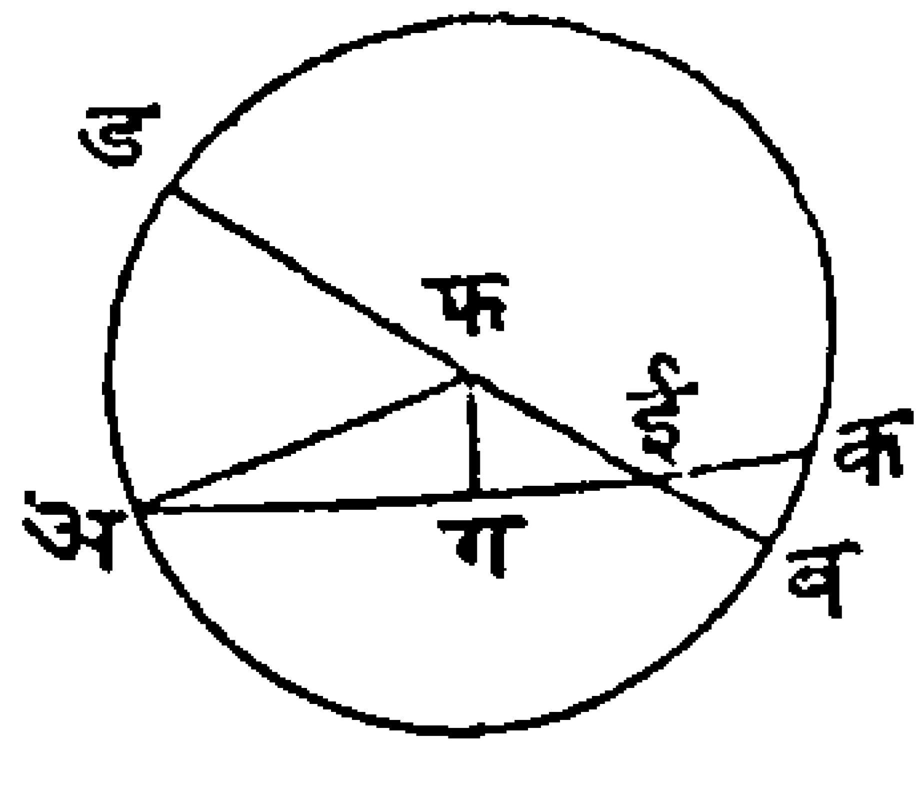
(प्र. प्र. १)

ह्या दोन समान बेरजांतून ईफ वरील चौरस काढून टाकिलें;
तेव्हां शेष बई, ईड काटकोनचौकोन, शेष अईवरील चौरसाबरावर आहे. (प्र. प्र. ३)
आतां अई, ईक समान आहेत; (३.३)
ह्मणून अई, ईक ह्यांचा काटकोनचौकोन अईवरील चौरसाबरावर आहे.
म्हणून बई, ईड काटकोनचौकोन अई, ईक काटकोनचौकोनाबरावर आहे. (प्र. प्र. १)

(३) जर मध्यांतून जाणारी बड, मध्यांतून न जाणाऱ्या अक ज्येला छेदिते, पण तीवर लंब नाहीं; तर फ हा वर्तुलमध्य काढ; अफ सांध, आणि फ पासून अकवर फग लंब काढ.

(३.१, गृ. क्र. १ व १.१२)

आतां अग, गक बराबर आहे; (३.३)
म्हणून अई, ईक काटकोनचौकोन आणि ईगवरील चौरस मिळून; अगवरील चौरसाबरावर आहेत. (२.५)



ह्या बराबरीच्या प्रत्येकामध्यें गफ वरील चौरस मिळविलें,
तेव्हां अई, ईक काटकोनचौकोन आणि ईग, गफ ह्यांवरील चौरस मिळून, अग, गफ ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहेत. (प्र. प्र. २)

परंतु ईग, गफ ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ईफवरील चौरसाबरावर आहे; आणि अग, गफ ह्यांवरील चौरसांची बेरीज अफ वरील चौरसाबरावर आहे; (१.४७)
म्हणून अई, ईक काटकोनचौकोन आणि ईफवरील चौरस ह्यांची बेरीज अफवरील चौरसाबरावर आहे. (प्र. प्र. २ व १)
आणि अफ, फब बराबर आहे. (१. व्याख्या १५

म्हणून ती बेरीज **फब**वरील चौरसाबराबर आहे; (१.ई व प्र.प्र. १)

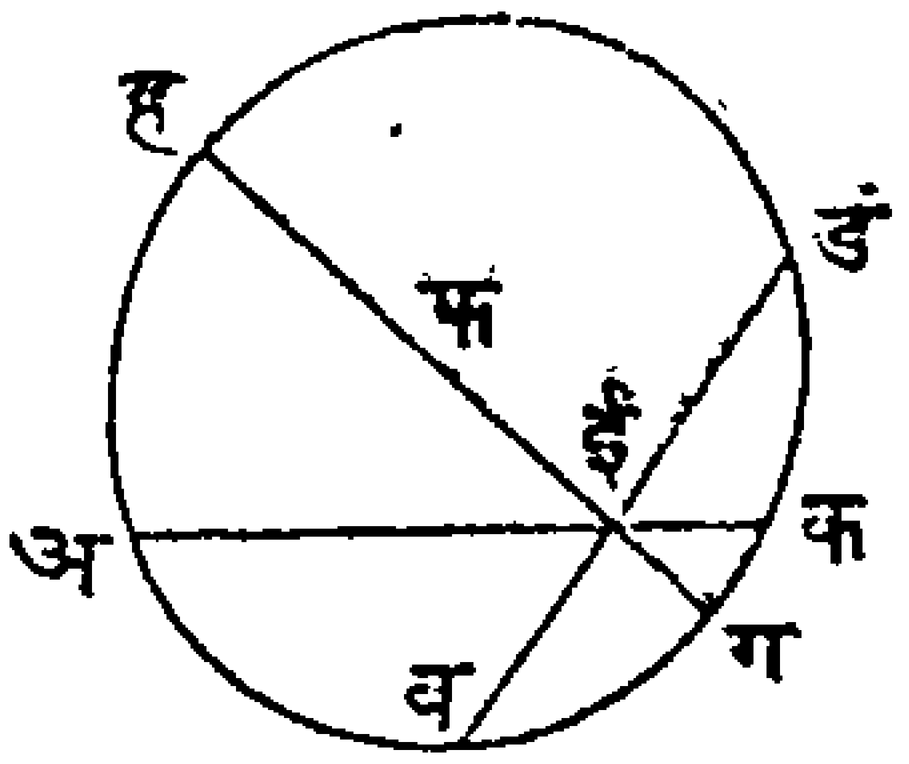
परंतु **फब**वरील चौरस हा, **बई, ईड** काटकोनचौकोन आणि **ईफ**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे; (२.५)

म्हणून **अई, ईक** काटकोनचौकोन आणि **ईफ**वरील चौरस मिळून, **बई, ईड** काटकोनचौकोन आणि **ईफ**वरील चौरस ह्यांच्या बेरजेबराबर आहेत. (प्र. प्र. १)

दोहोंस साधारण **ईफ**वरील चौरस काढून टाकिला;

तेव्हां शेष **अई, ईक** काटकोनचौकोन, शेष **बई, ईड** काटकोनचौकोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. ३)

(४) जर **अक, बड** ह्यांपैकीं एकही मध्यांतून जात नाहीं; तर **फ** वर्तुलमध्य काढ; (३.१)



आणि **अक, बड** ह्यांच्या **ई** छेदनबिंदूतून **गईफह** व्यास काढ. (गृ.कृ.१ व २)

आतां वर सिद्ध केल्याप्रमाणें **गई, ईह** काटकोनचौकोन हा, **अई, ईक** ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबराबर आहे; आणि **बई, ईड** ह्यांच्याही काटकोनचौकोनाबराबर आहे; म्हणून **अई, ईक** काटकोनचौकोन **बई, ईड** काटकोनचौकोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां जर एकाच वर्तुलाच्या इत्यादि.

प्रश्न.

१. (३.३५) च्या सिद्धंतेच्यां तिसऱ्या भागाच्या आकृतीमध्यें **कफ** सांधा; **अकफ** ह्या समद्विभुजत्रिकोणास २. प्रश्न २२ लावून **अई, ईक** काटकोनचौकोन व **फई**वरील चौरस ह्यांची बेरीज **अफ**वरील चौरसाबराबर आहे, असें दाखवा; आणि त्या योगानें त्या तिसऱ्या भागामध्यें संक्षेप करून दाखवा.

२. (३.३५) च्या सिद्धतेच्या चवथ्या भागाच्या आकृतीमध्यें **हग** व्यास काढिला आहे, तो न काढितां, मध्यबिंदूपासून दोन्ही ज्यांचीं टोंकें व त्यांचा छेदनबिंदु ह्यांपर्यंत रेषा काढा; ह्या रचनेनें दोन्ही ज्यांवर जे दोन समद्विभुजत्रिकोण होतात, त्यांस २. प्रश्न २२ लावून, प्रत्येक ज्येच्या खंडांचा काटकोनचौकोन व मध्यबिंदूपासून छेदनबिंदूपर्यंत काढिलेल्या रेषेवरील चौरस, ह्यांच्या बेरजा समान आहेत, असें दाखवा; आणि त्या योगानें हा भाग मागील कोणत्याही भागाच्या मदतीवांचून थोडक्यांत सिद्ध होतो, असें प्रत्ययास आणून द्या.

३. " चौकोनाच्या कर्णांनीं एकमेकांस छेदिल्यामुळें प्रत्येकाचे जे दोन दोन खंड होतात, त्यांपैकीं एकाच्या खंडांचा काटकोनचौकोन जर दुसऱ्याच्या खंडांच्या काटकोनचौकोनाबरावर असेल, तर त्या चौकोनाभोंवतीं वर्तुल काढितां येतें " हा ३.३५ चा व्यत्यास सिद्ध करून दाखवा.

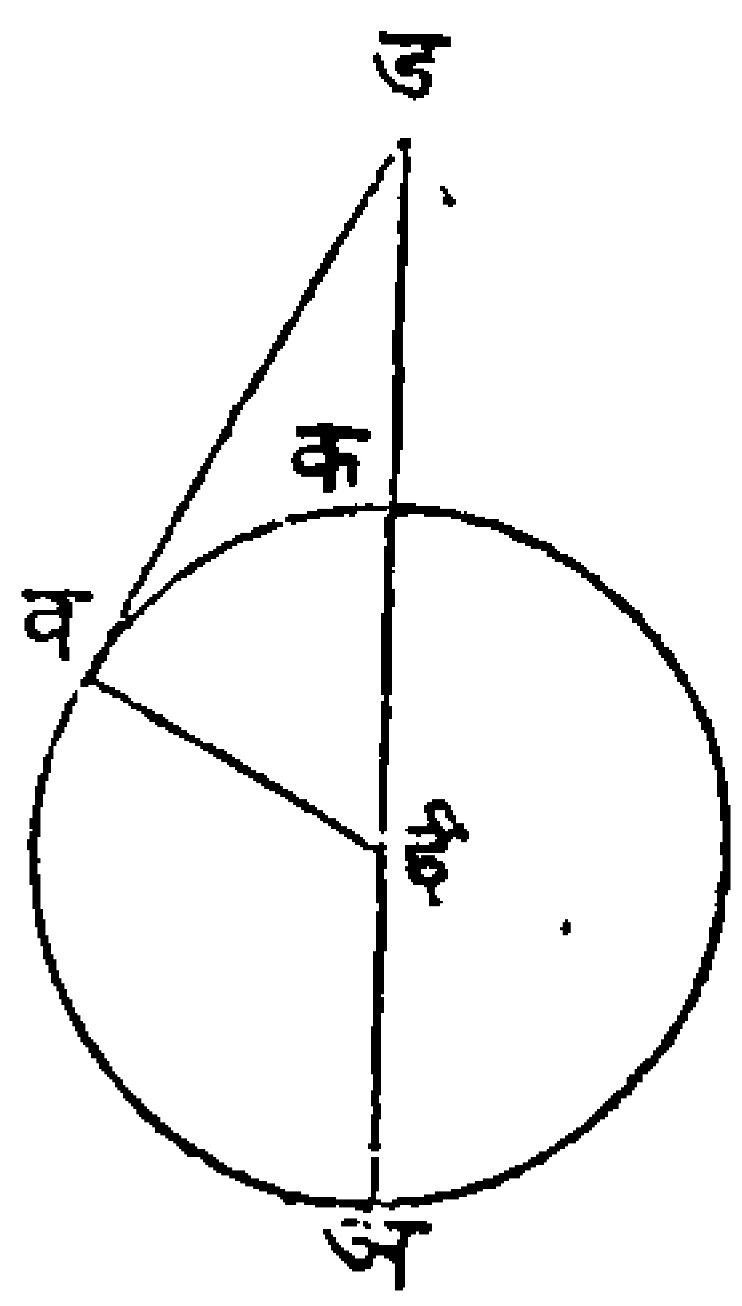
४. (३.३५) च्या सिद्धतेच्या दुसऱ्या भागाच्या आकृतीमध्यें **अफ** त्रिज्या न काढितां, **अब**, **अड** सांधून **बअड** हा ३.३१ वरून काटकोनत्रिकोण ठरविला, आणि त्याला २. प्रश्न २० लाविला, तर त्याची सिद्धता फार थोडक्यांत होते, असें दाखवा.

५. (३.३५) च्या ग्रंथांतल्या सिद्धतेला लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा.

सिद्धांत ३६. प्रमेय.

जर वर्तुळाबाहेरील एका बिंदूपासून त्या वर्तुळास छेदणारी एक व स्पर्श करणारी एक अशा दोन रेषा काढल्या, तर सारी छेदक रेषा आणि तिचा वर्तुळाबाहेरील भाग ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन हा, स्पर्शरेषेवरील चौरसाबरावर होतो.

अबक वर्तुळाबाहेर एक **ड** बिंदु आहे; आणि त्यापासून **डकअ** व **डब** रेषा काढल्या आहेत; त्यांत **डकअ** रेषा वर्तुळास छेदिते आणि **डब** स्पर्श करिते. तर **अड**, **डक** काटकोनचौकोन **डब** वरील चौरसाबरावर होईल.



(१) जेव्हां **डकअ** रेघ **ई** मध्यांतून जाते, तेव्हां **ईब** सांध. (गृ. कृ. १)

आतां **अक**चे **ई** बिंदूंत दोन समान विभाग झाले आहेत, आणि ती **ड**पर्यंत वाढविली आहे; म्हणून **अड, डक** काटकोनचौकोन आणि **ईक**वरील चौरस मिळून, **ईड**वरील चौरसाबराबर आहेत. (२.६)

परंतु **ईक, ईब** बराबर आहे; (१.व्याख्या१५)

म्हणून त्यांवरील चौरसें समान आहेत. (१.इ.)

ह्यास्तव **अड, डक** काटकोनचौकोन आणि **ईब**वरील चौरस मिळून, **ईड**वरील चौरसाबराबर आहेत. (प्र. प्र. २ व १)

परंतु **ईबड** कोन काटकोन आहे. (३.१८)

म्हणून **ईड**वरील चौरस, **ईब** आणि **बड** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे, (१.४७)

म्हणून **अड, डक** काटकोनचौकोन आणि **ईब**वरील चौरस ह्यांची बेरीज, **ईब** आणि **बड** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्या प्रत्येक बेरजेंतून **ईब**वरील चौरस काढून टाकिला; तेव्हां शेष **अड, डक** काटकोनचौकोन, शेष **डब**वरील चौरसाबराबर आहे. (प्र. प्र. ३)

(२) जेव्हां **डकअ** रेघ मध्यांतून जात नाहीं, तेव्हां **अबक** वर्तुळाचा **ई** मध्य काढ; (३.१)

आणि **ई** पासून **अक**वर **ईफ** लंब काढ; (१.१२)

आणि **ईब, ईक, ईड** सांध. (गृ. कृ. १)

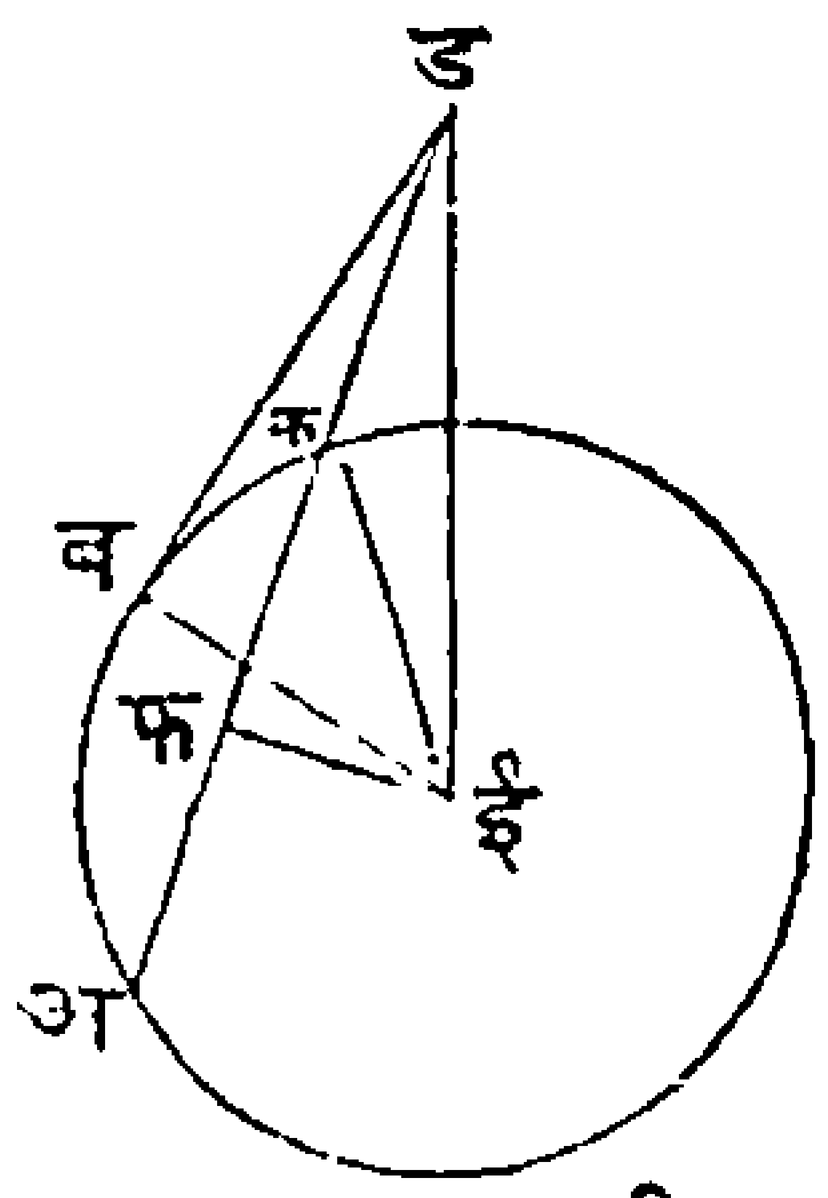
आतां मध्यांतून जाणारी **ईफ** रेघ मध्यांतून न जाणाऱ्या **अक** ज्येवर लंब आहे, ह्यास्तव ती **अक**स दुभागते; (३.३)

म्हणून **अफ, फक** बराबर आहे.

आणि **अक**चे **फ** बिंदूंत दोन समान भाग करून, ती **ड** बिंदूपर्यंत वाढविली आहे;

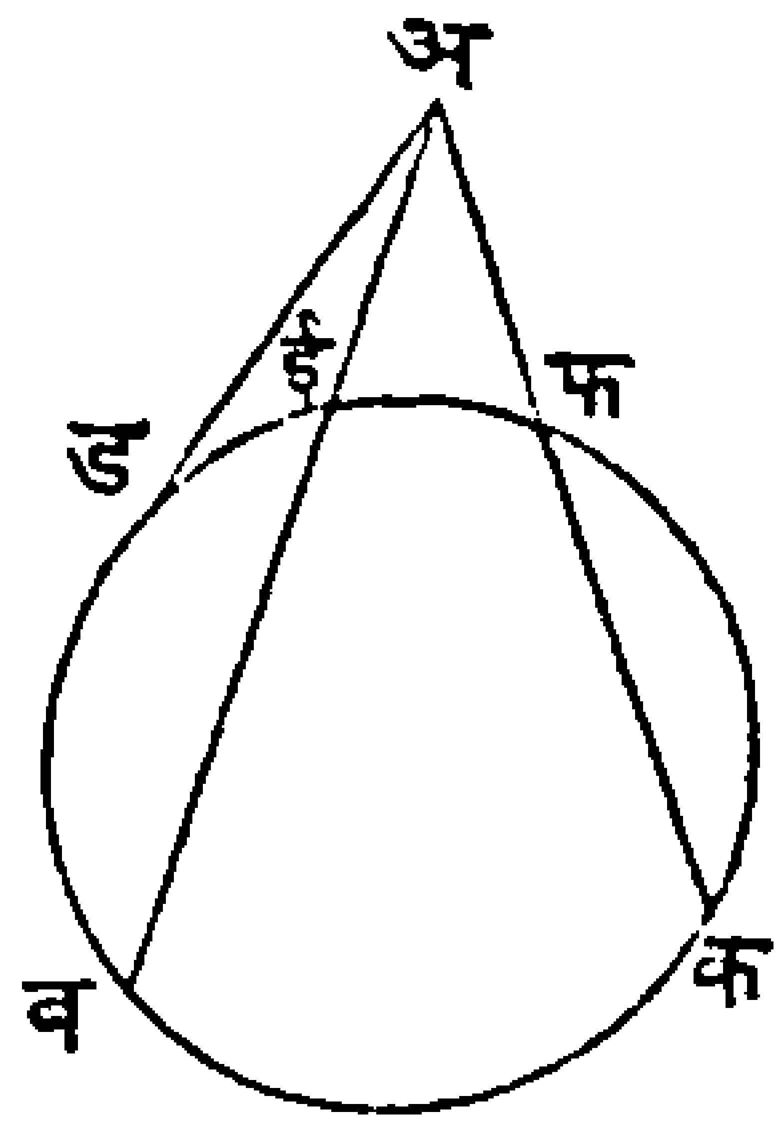
ह्यास्तव **अड**, **डक** काटकोनचौकोन आणि **फक**वरील चौरस मिळून, **फड**वरील चौरसाबराबर आहेत. (२.६)

ह्या प्रत्येकांत **फई**वरील चौरस मिळविला;
तेव्हां **अड**, **डक** काटकोनचौकोन आणि **कफ** व **फई** ह्यांवरील चौरस ह्यांची बेरीज ही, **डफ** व **फई** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे. (प्र. प्र. २)



परंतु **कफई** कोन काटकोन आहे, (रचना)
म्हणून **कफ** आणि **फई** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज, **कई**वरील चौरसाबराबर आहे;
आणि असेंच **डफ** आणि **फई** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **डई** वरील चौरसाबराबर आहे. (१.४७)
म्हणून **अड**, **डक** काटकोनचौकोन आणि **कई**वरील चौरस ह्यांची बेरीज **डई**वरील चौरसाबराबर आहे. (प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १)
परंतु **कई**, **बई** बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)
म्हणून त्यांवरील चौरसें समान आहेत; (१. इ)
म्हणून **अड**, **डक** काटकोनचौकोन आणि **बई**वरील चौरस मिळून, **डई**वरील चौरसाबराबर आहेत. (प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १)
परंतु **ईबड** कोन काटकोन आहे; (३.१८)
म्हणून **डई**वरील चौरस, **डब** आणि **बई** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहे; (१.४७)
म्हणून **अड**, **डक** काटकोनचौकोन आणि **बई**वरील चौरस मिळून, **डब** आणि **बई** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबराबर आहेत. (प्र. प्र. १)

ह्या दोहोंतून साधारण **बई**वरील चौरस काढून टाकिला;
तेव्हां शेष **अड**, **डक** काटकोनचौकोन, शेष **डब**वरील चौरसाबराबर आहे. (प्र. प्र. ३)
त्याकरितां जर वर्तुळाबाहेरील इत्यादि.



उपसि. जर वर्तुळाबाहेरील एका (अ) बिंदूपासून त्यास छेदणाऱ्या दोन (अब आणि अक) रेघा काढल्या; तर पहिली सर्व रेघ (अब) आणि तिचा वर्तुळाबाहेरील (अई) भाग ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन हा, दुसरी सर्व रेघ (अक) आणि तिचा वर्तुळाबाहेरील भाग (अफ) ह्यांनीं झालेल्या काटकोनचौकोनाबरोबर असतो. कारण प्रत्येक काटकोनचौकोन (अड) स्पर्शरेघेवरील चौरसाबरोबर आहे.

प्रश्न.

१. (३.३६) च्या सिद्धतेच्या दुसऱ्या भागाच्या आकृतीमध्यें ई मध्यबिंदूपासून अडवर लंब काढिला आहे. तो न काढितां, अई सांधा; अईक समद्विभुजत्रिकोणाला २. प्रश्न २३ लावून, अड, डक काटकोनचौकोन व कईवरील चौरस ह्यांची बेरीज डईवरील चौरसाबरोबर आहे, हें थोडक्यांत सिद्ध करून दाखवा; आणि ह्या योगानें ह्या भागाच्या सिद्धतेमध्यें बराच संक्षेप होतो, असें प्रत्ययास आणून द्या.

२. "जर चौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन बाजू वाढविल्या असतां मिळतील, आणि वाढविलेल्या भागासहित प्रत्येक बाजू व तिचा वाढविलेला भाग ह्यांचे काटकोनचौकोन समान असतील; तर त्या चौकोनाभोंवतीं वर्तुल काढितां येतें." हा ३.३६ च्या उपसिद्धांताचा व्यत्यास सिद्ध करून दाखवा.

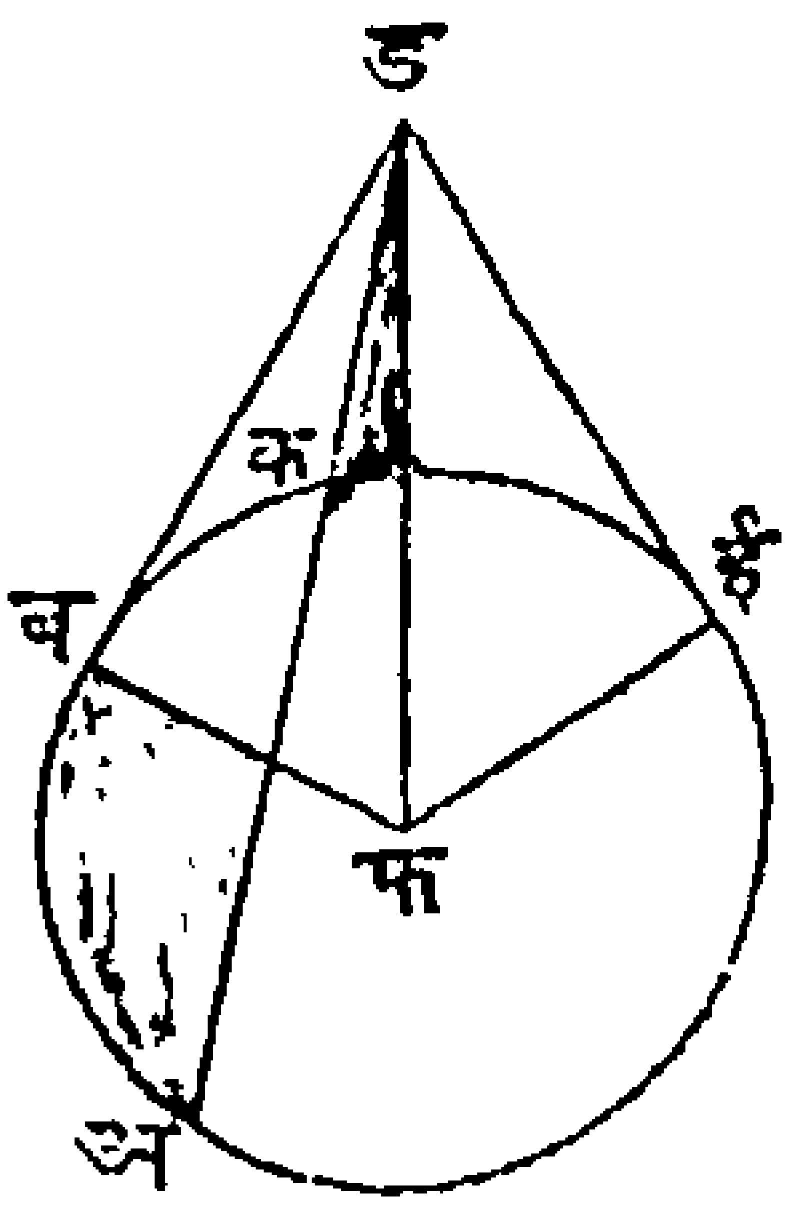
३. (३.३६) च्या ग्रंथांतल्या सिद्धतेला लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा.

सिद्धांत ३७. प्रमेय.

जर वर्तुळाबाहेरील एका बिंदूपासून त्या वर्तुळास छेदणारी एक व मिळणारी एक अशा काढिलेल्या दोन रेघांपैकीं सर्व छेदणारी रेघ आणि तिचा वर्तुळाबाहेरील भाग ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन

हा, मिळणाऱ्या रेघेवरील चौरसाबरावर असला, तर ती मिळणारी रेघ त्या वर्तुळास स्पर्शरेषा होते.

अबक वर्तुळाबाहेरील एका **ड** बिंदूपासून **डकअ** आणि **डब** ह्या दोन रेघा काढिल्या आहेत; त्यांतील **डकअ** ही वर्तुळास छेदिते, आणि **डब** मिळते; आणि **अड**, **डक** काटकोनचौकोन **डब** वरील चौरसाबरावर आहे; तर **डब** ही वर्तुळास स्पर्शरेषा होईल.



अबक वर्तुळास **ड** बिंदूपासून **डई** स्पर्शरेषा काढ; (३.१७)
वर्तुळाचा **फ** मध्य काढ; (३.१)
आणि **फब**, **फड**, **फई** सांध. (गृ.कृ. १)
आतां **अबक** वर्तुळास **डई** स्पर्श करिते आणि **डकअ** छेदिते; ह्यास्तव **अड**, **डक** काटकोनचौकोन, **डई**वरील चौरसाबरावर आहे. (३.३६)
परंतु **अड**, **डक** काटकोनचौकोन, **डब**रेघेवरील चौरसाबरावर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **डई** वरील चौरस **डब** वरील चौरसाबरावर आहे; (प्र. प्र. १)
म्हणून **डई** रेघ **डब** रेघेबरावर आहे. (१. ४६ उप. २)
आतां **ईफ**, **बफ** बरावर आहे; (१. व्याख्या १५.)
म्हणून **डईफ** त्रिकोणाच्या **डई**, **ईफ** ह्या दोन बाजू **डबफ** त्रिकोणाच्या **डब**, **बफ** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बरावर आहेत, आणि **डफ** पाया ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून **डईफ** कोन **डबफ** कोनाबरावर आहे. (१.८)
परंतु **डईफ** हा काटकोन आहे; (३.१८)
म्हणून **डबफ** ही काटकोन आहे. (प्र. प्र. ११ उप.)
आणि **बफ** वाढविली असतां, तो व्यास होतो; व त्याच्या **ब** टोंकापासून त्यावर **बड** हा लंब काढलेला आहे;
म्हणून **डब** ही, **अबक** वर्तुळास स्पर्शरेषा आहे. (३.१६ उप.)
ह्याकरितां, वर्तुळाबाहेरील एका बिंदूपासून इत्यादि.

प्रश्न.

१. (३.३७) च्या आकृतींत "डब्र रेषा स्पर्श करणारी नसेल, तर ती वाढविली असतां छेदील असें मानून, ती वाढविणें" इत्यादिक प्रकारें तो सिद्धांत क्रमविरुद्ध रीतीनें सिद्ध करून दाखवा.

३.३५, ३.३६, व ३.३७ ह्यांवर

प्रश्न.

१. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन वर्तुलांच्या छेदनबिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेंतील कोणत्याही बिंदूंतून दोन वर्तुलांच्या दोन ज्या काढिल्या, आणि प्रत्येकीचे त्या बिंदूंत दोन दोन खंड झाले; तर (१) एकीच्या दोन खंडांचा काटकोनचौकोन दुसरीच्या दोन खंडांच्या काटकोनचौकोनाबरावर असतो; आणि (२) त्या दोन्ही ज्यांच्या टोंकांतून ज्याचा परिघ जाईल, असें वर्तुल काढितां येतें.

२. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांच्या छेदनबिंदूंस सांधणारी रेषा वाढवून तिच्या वाढविलेल्या भागांतील एका बिंदूपासून दोन वर्तुलांस दोन छेदक रेषा काढिल्या, तर एक छेदकरेषा व तिचा वर्तुलाबाहेरील भाग ह्यांचा काटकोनचौकोन हा, दुसरी छेदकरेषा व तिचा वर्तुलाबाहेरील भाग ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबरावर होईल.

३. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन वर्तुलांस साधारण अशी एक स्पर्शरेषा काढिली आहे; तर त्यांचे छेदनबिंदु सांधणारी रेषा ह्या स्पर्शरेषेला मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, ती त्या रेषेच्या स्पर्शबिंदूंमधील भागास दुभागिते.

४. "**अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **बक** ह्या बाजूंवर अनुक्रमें **कई**, **अड** हे लंब काढिले आहेत; तर **बक**, **बड** काटकोनचौकोन **बअ**, **बई** काटकोनचौकोनाबरावर आहे" ही गोष्ट, **अकड** त्रिकोणाभोंवतीं वर्तुल काढून ३.३६ उप. ह्याच्या साह्यानें थोडक्यांत सिद्ध करून दाखवा.

५. एका वर्तुलाच्या परस्परांस वर्तुलांत छेदणाऱ्या दोन ज्यांपैकीं

एकीचे दोन खंड १० व ९ फूट लांबीचे आहेत व दुसरीचा एक खंड ७॥ फूट लांबीचा आहे; तर दुसरीची लांबी किती ?

६. एका वर्तुलाची १२ फूट लंबीची ज्या, तिनें कापिलेल्या एका कंसाच्या मध्यापासून ४ फूट अंतरावर आहे; तर त्या वर्तुलाची त्रिज्या किती लांबीची असेल.

७. दहा फूट त्रिज्येच्या एका वर्तुलाच्या बाहेरील एक बिंदु व मध्यबिंदु ह्यांचें अंतर २२ फूट आहे; तर त्या बिंदूपासून त्या वर्तुलास स्पर्शरेषा काढिली असतां तिची लांबी किती भरेल ?

८. "वर्तुलाच्या बाहेरील कोणताही बिंदु व मध्यबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेचा वर्तुलाबाहेरचा भाग, हें, तो बाहेरील बिंदु व तें वर्तुल ह्यांच्या मधील अंतर म्हणावें" अशी वर्तुलाबाहेरील बिंदु व तें वर्तुल ह्यांच्या मधील अंतराची व्याख्या समजा; आणि ८००० मैल व्यासाच्या एका वर्तुलापासून अ फूट अंतरावर असणाऱ्या बिंदूपासून त्या वर्तुलांस काढिलेल्या स्पर्शरेषेची लांबी मैलांच्या रूपानें (अदमासें) काढण्याची एखादी सोपी रीति तयार करा.

९. एका वर्तुलापासून १५ फूट अंतरावरच्या बिंदूपासून त्या वर्तुलास स्पर्शरेषा काढिली, ती २० फूट भरली; तर तो बिंदु आणि वर्तुळमध्य ह्यांच्यामधील अंतर किती ?

१०. एका बिंदूपासून ९ फूट अंतरावरील वर्तुळास त्याच बिंदूपासून स्पर्शरेषा काढिली, ती २४ फूट भरली; तर ती स्पर्शरेषा वर्तुलमध्यापासून किती अंतरावर असेल ?

११. एका वर्तुलाच्या बाहेरील एका बिंदूपासून त्याला एक छेदक रेषा काढिली; ती ५२ फूट लांबीची आहे; तिचें मध्यांतर १५ फूट आहे; व तिचा वर्तुलाबाहेरील भाग १२ फूट आहे. तर त्या वर्तुलाची त्रिज्या आणि वर्तुलापासून बाहेरील बिंदूचें अंतर, हीं काढा.

१२. वर्तुलांत परस्परांस छेदणाऱ्या दोन ज्यांपैकीं एकीचा एक खंड दुसरीच्या एका खंडाबरावर असल्यास, त्या ज्याही समान असतात, असें सिद्ध करा.

१३. एक अमर्याद रेषा व तिच्या एकाच अंगास दोन बिंदु हीं दिलीं आहेत; तर त्या दोन बिंदूंतून जाणारें व त्या रेषेला स्पर्श करणारें असें वर्तुल काढा.

१४. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन वर्तुलांचे मध्यांतून जाणाऱ्या रेषेचा जो भाग त्या दोन वर्तुलांच्या परिघांमध्यें सांपडतो, तो जर त्यांचे छेदनबिंदु सांधणाऱ्या रेषेनें दुभागिला जाईल; तर तीं वर्तुळें समान असतात.

१५. जीं वर्तुळें दिलेल्या दोन बिंदूंतून जातात, व दिलेल्या एका वर्तुळास छेदितात, त्यांपैकीं प्रत्येकाचे दोन दोन छेदनबिंदु सांधणाऱ्या रेषा वाढविल्या असतां जर मिळाल्या, तर सर्व एकाच बिंदूंत मिळतात; नाहीं तर सर्वच परस्परांशीं समांतर होतात.

चवथें पुस्तक.

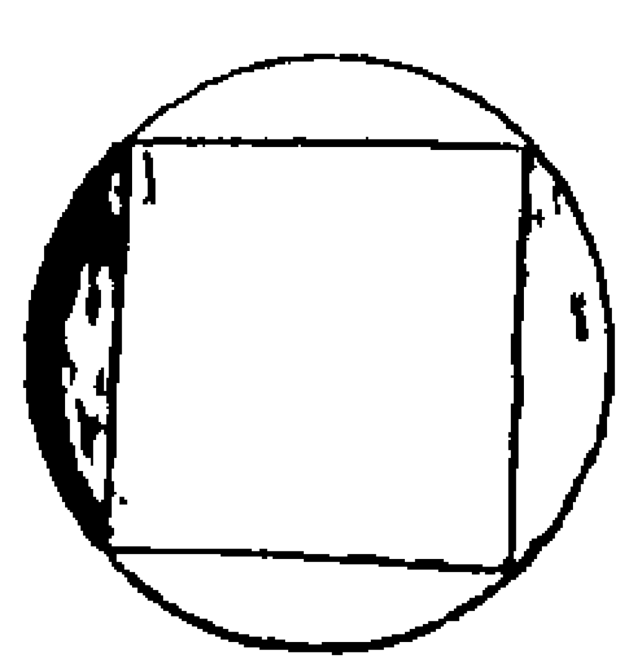
व्याख्या.

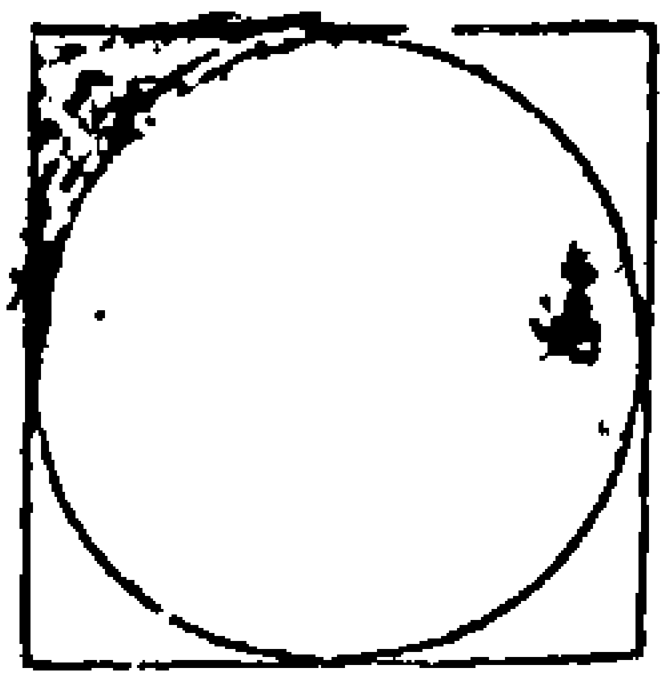
१. जर दोन सरलरेषाकृतींपैकीं प्रत्येकीचे सर्व कोन दुसरीच्या कोनांशीं अनुक्रमें समान असले, तर त्यांपैकीं कोणत्याही एकीला **दुसरीशीं समकोणाकृति** म्हणावें; किंवा त्या दोहींना **मिथः-समकोणाकृति** म्हणावें.

२. ज्या (एकाच) सरलरेषाकृतीच्या सर्व बाजू परस्परांशीं समान असतात व सर्व कोनही परस्परांशीं समान असतात, तिला **नियमित सरलरेषाकृति** म्हणावें.

३. ज्या सरलरेषाकृतींचे सर्व कोणबिंदु दिलेल्या वर्तुलाच्या परिघांत असतात, तिला त्या **वर्तुलांत काढिलेली सरलरेषाकृति** म्हणावें.

४. ज्या सरलरेषाकृतीच्या सर्व बाजू दिलेल्या वर्तुळास स्पर्श करितात, तिला त्या **वर्तुळाभोंवतीं काढिलेली सरलरेषाकृति** म्हणावें.





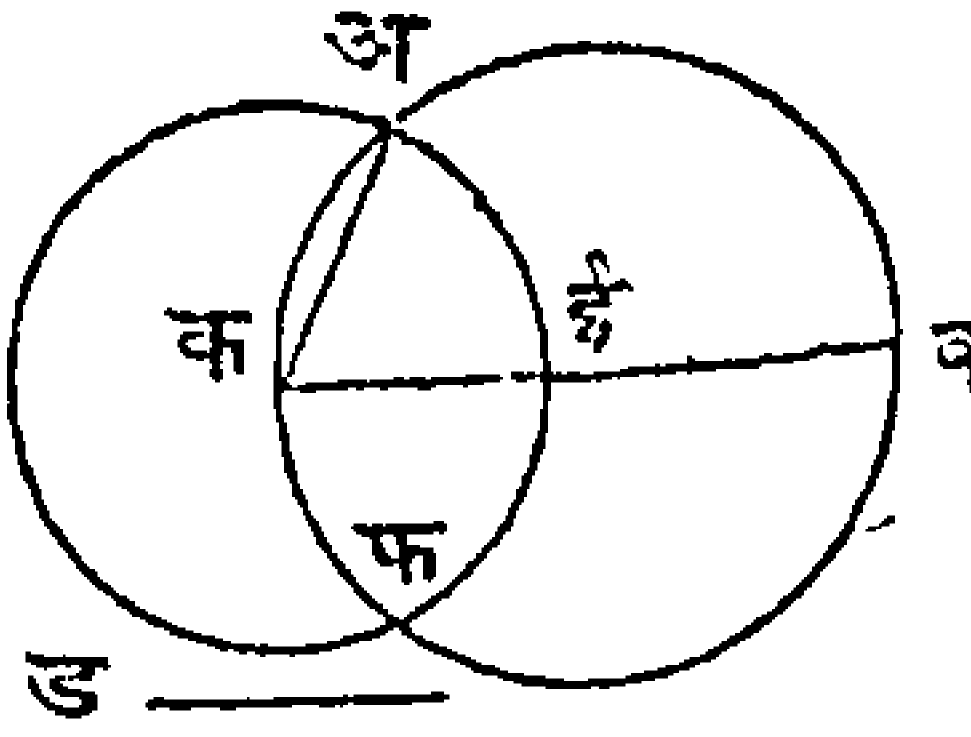
५. ज्या वर्तुळास दिलेल्या सरलरेषाकृतीची प्रत्येक बाजू स्पर्श करिते, तें दिलेल्या **सरलरेषाकृतीमध्यें काढिलेलें वर्तुल** म्हणावें.

६. ज्या वर्तुळाचा परिघ दिलेल्या सरळरेषाकृतीच्या प्रत्येक कोणबिंदूतून जातो, तें दिलेल्या **सरलरेषाकृतीभोंवतीं काढिलेलें वर्तुळ** म्हणावें.

सिद्धांत १. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत, त्याच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणाऱ्या दिलेल्या रेघेएवढी ज्या काढावयाचें.

अबक हें दिलेलें वर्तुळ आहे, आणि त्याच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणारी **ड** ही एक दिलेली रेघ आहे; आणि **अबक** वर्तुळांत **ड** एवढी ज्या काढावयाची आहे.



अबक वर्तुळाचा मध्यबिंदु काढून तो व परिघांतील **क** हा एक बिंदु सांध; आणि ती रेघ वाढवून **कब** व्यास तयार कर. (३.१ व गृ. कृ. १ व २)

(१) आतां जर **बक** रेघ **ड** रेघेबरोबर आहे, तर जें करावयाचें तें झालें; कारण, **अबक** वर्तुळांत **ड** एवढी ज्या काढिली आहे.

(२) परंतु जर **बक** रेघ **ड** बरोबर नाहीं, तर ती **ड**पेक्षां मोठी असली पाहिजे. (प्रतिज्ञा)

कई रेघ **ड** बरोबर कर; **क** मध्य धरून **कई** त्रिज्येनें **अईफ** वर्तुळ काढ; व **अक** सांध. (१.३ व गृ. कृ. ३ व १)

म्हणजे **कअ** ही इच्छिलेली ज्या होईल.

कारण; **अईफ** वर्तुळाचा **क** मध्य आहे,

म्हणून **कअ**, **कई** बरोबर आहे; (१. व्याख्या १५)

परंतु **कई**, **ड** बराबर आहे. (रचना)

म्हणून कअ, ड बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, अबक वर्तुळांत त्याच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणाऱ्या ड रेषेएवढी कअ ज्या काढिली आहे.

प्रश्न.

१. (४.१) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

२. (४.१) ह्यामध्यें जर दिलेली रेषा दिलेल्या वर्तुलाच्या व्यासापेक्षां लहान आहे, असें सांगितलें असेल, तर त्याच्या रचनेमध्यें "व्यास काढणें व त्याचा दिलेल्या रेषेएवढा तुकडा पाडणें" ह्या गोष्टी न केल्या तरी चालेल, असें दाखवा; आणि ह्या गोष्टी न करितां जी रचना करावयाची, तिचें सामान्यस्वरूप सांगा.

३. "दिलेल्या वर्तुलांत, त्याच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणाऱ्या दिलेल्या रेषेएवढी ज्या, त्याच्या परिघांतील दिलेल्या बिंदूपासून काढावयाची" हें कृत्य व ४.१ ह्यांतील भेद सांगून, हें करण्याची रीति सांगा. अशा ज्या पराकाष्ठा किती निघतील?

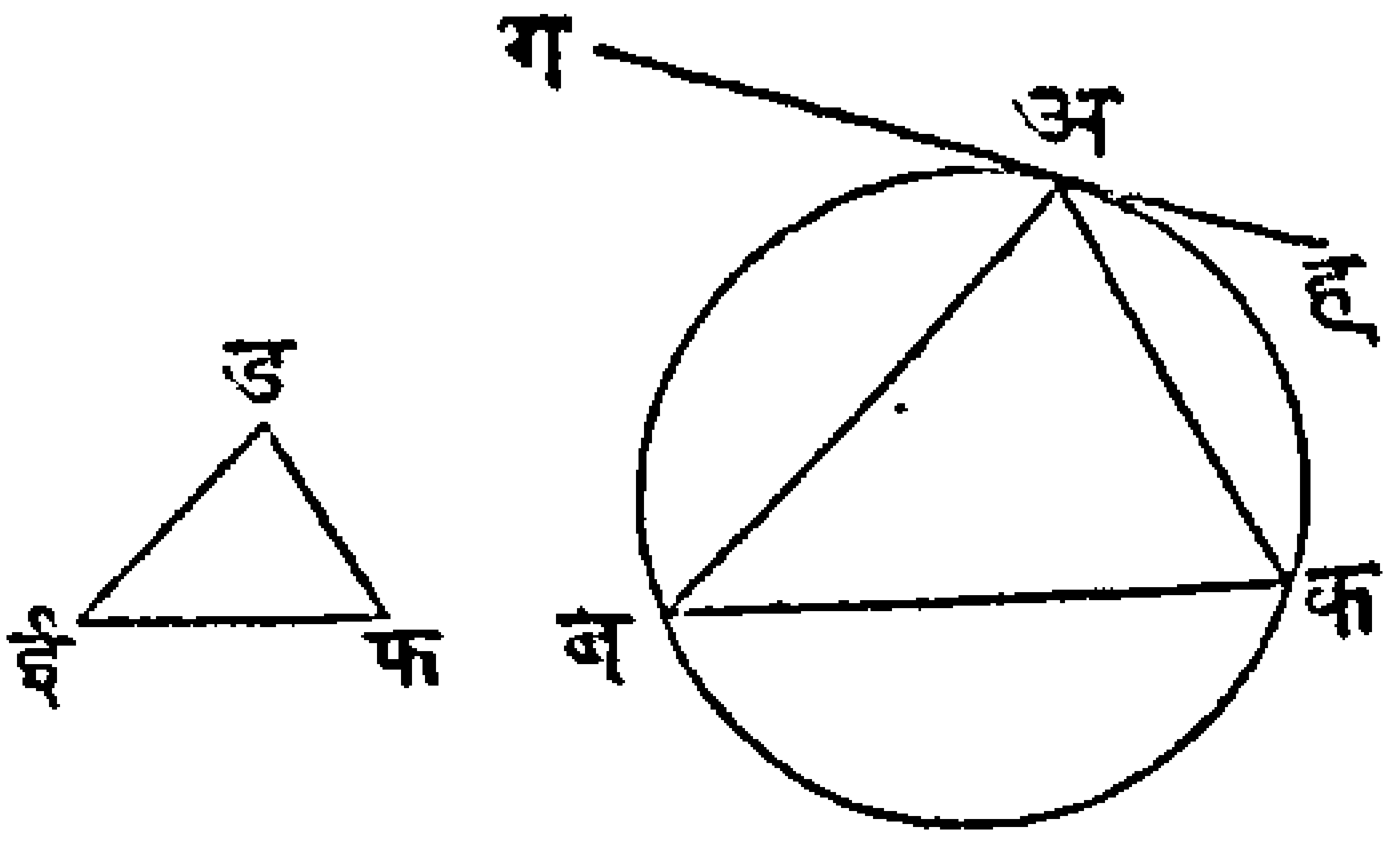
४. "दिलेल्या वर्तुलाच्या दिलेल्या कंसाएवढा त्याच वर्तुलाच्या परिघाचा तुकडा, परिघांतील दिलेल्या बिंदूपासून पाडावयाचा" ह्या कृत्याची रीति ४.१ च्या आधारानें तयार करा.

५. एकाच वर्तुळाच्या अनेक कंसांच्या बेरजेबरोबर असणारा अथवा दोन असमान कंसांच्या वजाबाकीबरोबर असणारा त्याच वर्तुलाचा कंस कापण्याची रीति सांगा.

सिद्धांत २. कृत्य.

दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोण असा एक त्रिकोण दिलेल्या वर्तुळांत काढावयाचें.

अबक दिलेलें वर्तुळ आहे, आणि डइफ दिलेला त्रिकोण आहे; आणि डइफ त्रिकोणाशीं समकोण असा एक त्रिकोण अबक वर्तुळांत काढावयाचा आहे.



अबक वर्तुळास **अ** बिंदूशीं स्पर्श करणारी **गअह** रेघ काढ. (३.१७.)

अह रेघेशीं **अ** बिंदूजवळ **हअक** कोन **डईफ** कोनाबराबर कर; **अग** रेघेशीं **अ** बिंदूजवळ **गअब** कोन **डफई** कोनाबराबर कर; (१.२३)

आणि **बक** सांध. (गृ.कृ.१)

म्हणजे **अबक** हा इच्छिलेला त्रिकोण होईल.

कारण; **गअह** रेघ **अबक** वर्तुळास स्पर्श करिते, आणि **अ** स्पर्शबिंदूपासून **अक** ज्या काढली आहे, (रचना)

म्हणून **हअक** कोन व्युत्क्रमखंडांतील **अबक** कोनाबराबर आहे. (३. ३२)

परंतु **हअक** कोन **डईफ** कोनाबराबर आहे; (रचना)

म्हणून **अबक** कोन **डईफ** कोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याच कारणास्तव **अकब** कोन **डफई** कोनाबराबर आहे.

म्हणून तिसरा **बअक** कोन तिसऱ्या **ईडफ** कोनाबराबर आहे. (१. ३२ उप. २)

ह्याकरितां, **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाशीं समकोण आहे. आणि तो **अबक** वर्तुळांत काढिला आहे. (४. व्या. ३)

प्रश्न.

१. (४.२) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

२. (४.२) ह्याच्या आकृतीमध्यें **अग** रेघेशीं **अ** बिंदूजवळ **डफई** कोनाएवढा कोन करणारी **अब** रेघा **अक**शीं मिळणार नाहीं व **कअह** कोनांत ही पडणार नाहीं, असें सिद्ध करून दाखवा.

३. "दिलेल्या वर्तुळांत असा एक त्रिकोण काढावयाचा कीं, तो दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोण होईल व त्याच्या अमुक कोना एवढ्या

कोनाचा कोणबिंदु त्या वर्तुळाच्या परिघांतील दिलेल्या बिंदूशीं मिळेल." हें कृत्य करण्यास ४.२ ह्याच्या रीतीमध्यें कोणती विशेष गोष्ट सांगितली पाहिजे ?

४. "दिलेल्या वर्तुलांत समभुजत्रिकोण काढावयाचा" हें कृत्य थोडक्यांत करून दाखवा.

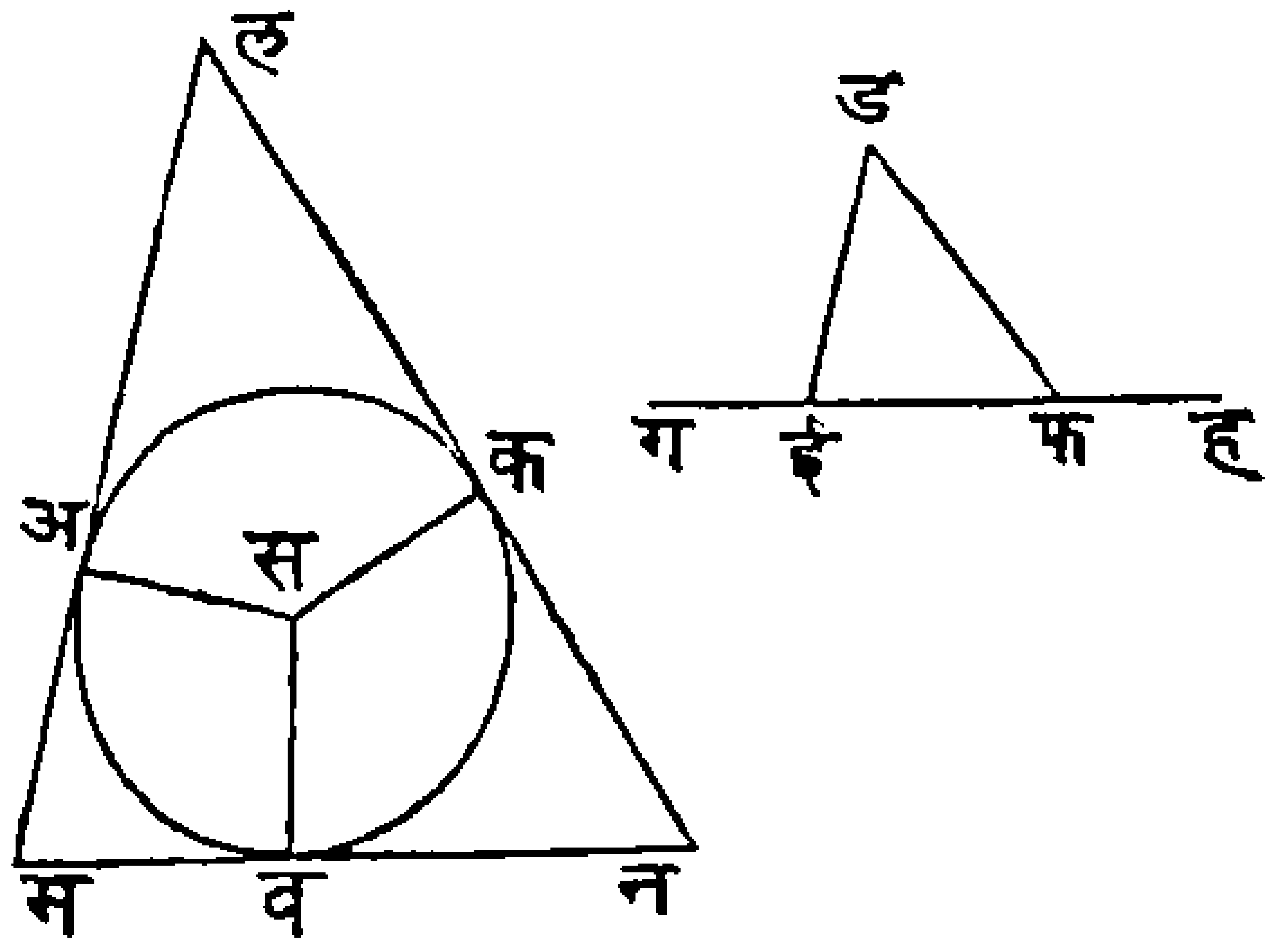
५. वर्तुलांत काढिलेल्या समभुजत्रिकोणाचा प्रत्येक कोन त्याच्या कोणबिंदूपासून काढिलेल्या त्रिज्येनें दुभागिला जातो.

६. वर्तुलांत काढिलेल्या त्रिकोणाचा एखादा कोन जर त्याच्या त्रिज्येनें दुभागिला जाईल, तर तो कोन करणाऱ्या त्या त्रिकोणाच्या बाजू समान असतात.

सिद्धांत ३. कृत्य.

दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोण असा एक त्रिकोण दिलेल्या वर्तुलाभोंवतीं काढावयाचें.

अबक हें दिलेलें वर्तुळ आहे, आणि **डईफ** हा दिलेला त्रिकोण आहे; आणि **डईफ** त्रिकोणाशीं समकोण असा एक त्रिकोण **अबक** वर्तुलाभोंवतीं काढावयाचा आहे.



ईफ बाजू दोहों अंगांस **ग** आणि **ह** बिंदूपर्यंत वाढीव; (गृ.कृ.२)
अबक वर्तुळाचा **स** मध्य काढ, व **स** पासून परिघापर्यंत **सब** रेघ काढ;
(३.१ व गृ.कृ.१)
सब रेघेशीं **स** बिंदूजवळ **बसअ** कोन **डईग** कोनाबराबर कर, व **बसक** कोन **डफह** कोनाबराबर कर; (१.२३)
आणि **अबक** वर्तुळास **अ, ब, क** ह्या बिंदूंशीं स्पर्श करणाऱ्या **लअम, मबन, नकल** रेघा काढ. (३.१७)
म्हणजे **लमन** हा इच्छिलेला त्रिकोण होईल.

कारण; **लम**, **मन** ह्या रेघा **अबक** वर्तुळास **अ**, **द** बिंदूशीं स्पर्श करितात, (रचना)

आणि **स** मध्यापासून स्पर्शबिंदूपर्यंत **सअ**, **सब** ह्या रेघा काढिल्या आहेत;

म्हणून **सअम**, **सबम** हे कोन प्रत्येकीं काटकोन आहेत. (३. १८)

आतां **अमबस** चौकोनाचे चार कोन मिळून, चार काटकोनांबरावर आहेत; (१. ३२, उप. १)

आणि त्यांतून **सअम** आणि **सबम** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोन आहे;

म्हणून दुसरे **असब** आणि **अमब** हे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनांबरावर आहेत. (प्र. प्र. ३)

परंतु **डईग** आणि **डईफ** हे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनांबरावर आहेत; (१. १३)

म्हणून **असब** आणि **अमब** ह्या दोन कोनांची बेरीज, **डईग** आणि **डईफ** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरावर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि ह्यांतील **असब** कोन **डईग** कोनाबरावर आहे; (रचना)

म्हणून शेष **अमब** कोन, शेष **डईफ** कोनाबरावर आहे. (प्र.प्र.३)

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं, **लनम** कोन **डफई** कोनाबरावर आहे;

म्हणून तिसरा **मलन** कोन तिसऱ्या **ईडफ** कोनाबरावर आहे. (१.३२, उप. २)

ह्याकरितां, **लमन** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाशीं समकोण आहे, आणि तो **अबक** वर्तुळाभोंवतीं काढिला आहे. (४. व्या. ४)

प्रश्न.

१. (४.३) ह्या कृत्याची सामान्यरीति सांगा.

२. (४.३) ह्याच्या आकृतीमध्यें (१) **सब** त्रिज्येशीं **स** बिंदूजवळ **डईग**, **डफह** ह्या कोनांएवढाले कोन करणाऱ्या **सअ**, **सक** ह्या

रेषा एकाच सरलरेषेंत येणार नाहींत; (२) त्यांच्या मधील अंतर्वक्रकोण **बस**कडील अंगास होणार नाहीं; (३) **डईफ** त्रिकोणाची **ड** बिंदूंत मिळणारी एखादी बाजू वाढविली असतां जो बाहेरचा कोन होईल, त्या बरोबर **असक** कोन होईल; (४) **अ, क** बिंदूंशीं काढिलेल्या स्पर्शरेषा **असक** ह्या अंतर्वक्रकोणाच्या अंगासच वाढविल्या असतां मिळतील. इतक्या गोष्टी सिद्ध करा.

३. " समद्विभुजत्रिकोणाच्या समान बाजूंपैकीं प्रत्येकीवर तिच्या पायांतील टोंकापासून लंब काढिला, तर ते दोन लंब, पायाच्या ज्या अंगास तो त्रिकोण आहे, त्याच्या विरुद्ध अंगास वाढविले असतां मिळतात." हा मागच्या प्रश्नांतील (४) ह्या भागाचा उपसिद्धांत आहे, असें दाखवा.

४. वर्तुलांत काढिलेल्या समभुजत्रिकोणाच्या सर्व कोणबिंदूंतून त्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढून, त्या मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या असतां, त्या वर्तुलाभोंवतीं काढिलेला समभुजत्रिकोण तयार होतो, असें दाखवा.

५. वर्तुलाभोंवतीं काढिलेला समभुजत्रिकोण, त्याच वर्तुलांत काढिलेल्या समभुजत्रिकोणाच्या चौपटीबरावर असतो.

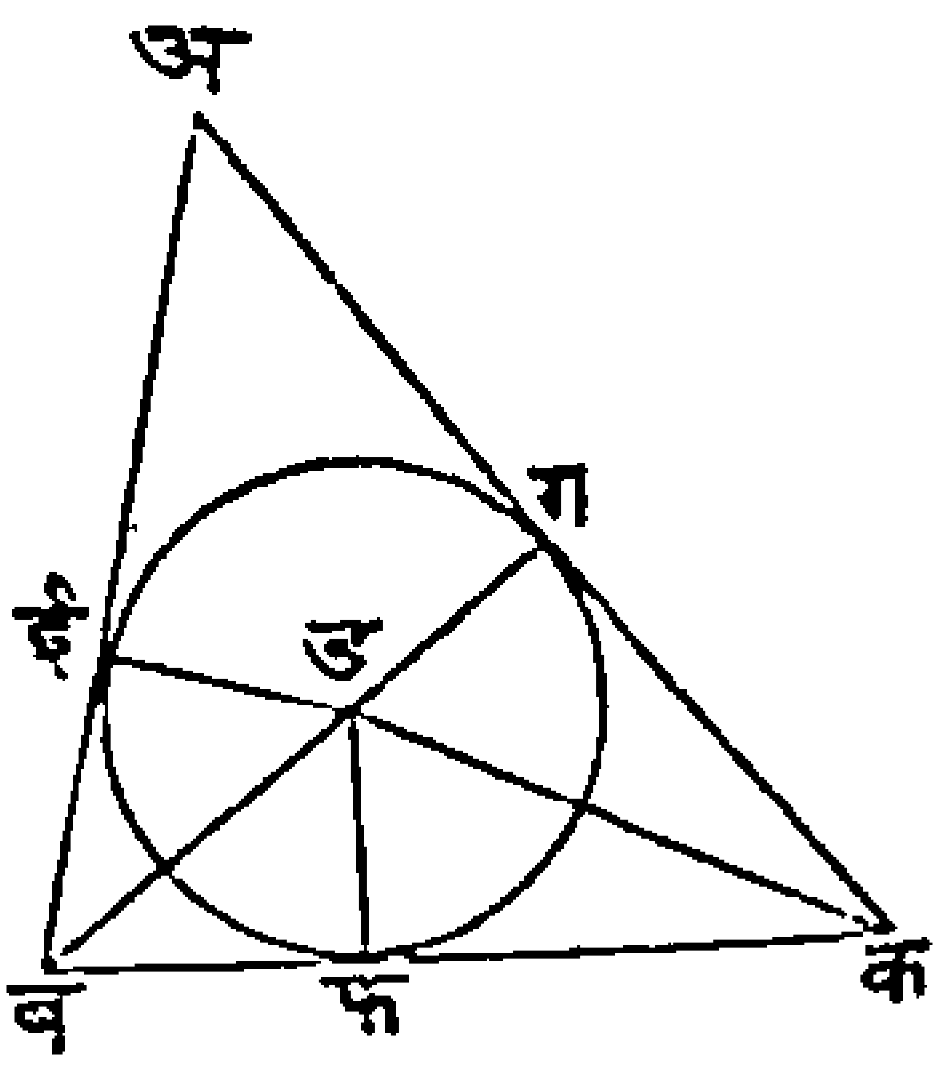
६. (४.३) च्या आकृतीमध्यें **अस, बस, कस** ह्यांपैकीं कोणतीही एक त्रिज्या पुनः परिघास मिळे तोंपर्यंत वाढवून, त्यांच्या मेलनबिंदूपासून वर्तुलास स्पर्शरेषा काढिली, आणि ती **नमल** त्रिकोणाच्या दोन बाजूंस मिळे तोंपर्यंत वाढविली; तर जो नवीन त्रिकोण होतो, तोही दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोण होतो, असें दाखवा.

७. वर्तुलांत काढिलेल्या समभुजत्रिकोणाची प्रत्येक बाजू वर्तुलाभोंवतीं काढिलेल्या समभुजत्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजूच्या अर्धाबरावर असते.

सिद्धांत ४. कृत्य.

दिलेल्या त्रिकोणांत वर्तुळ काढावयाचें.

अबक हा एक दिलेला त्रिकोण आहे; आणि त्यांत वर्तुल काढावयाचें आहे.



ब, क हे कोन दुभाग; (१.९)
(दुभागणाऱ्या रेषा एकमेकींस मिळतील)
(१.१७ व प्र. प्र. १२)
त्या दुभागणाऱ्या रेषा **ड** बिंदूंत मिळाल्या असें मान, व **ड** पासून **डफ** हा **बक** वर लंब काढ. (१.१२)

म्हणजे **ड** हा मध्यबिंदु व **डफ** त्रिज्या कल्पून वर्तुल काढिलें असतां, तें इच्छिलेलें वर्तुल होईल.

कारण; **ड** पासून **अब, अक** ह्यांवर अनुक्रमें **डई, डग** हे लंब काढ. (१.१२)
आतां **ईबड** कोन **फबड** कोनाबरोबर आहे, (रचना)
आणि **बईड** काटकोन **बफड** काटकोनाबरोबर आहे; (प्र. प्र. ११)
म्हणजे **ईबड** आणि **फबड** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत; आणि समान कोनांच्या एका जोडासमोरील **बड** बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे; म्हणून **डई** बाजू **डफ** बाजूबरोबर आहे. (१.२६)

ह्याच कारणास्तव **डग, डफ** बरोबर आहे;
म्हणून **डई, डग** बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
म्हणून **डई, डफ, डग** ह्या तिन्ही रेषा परस्पर बराबर आहेत.
म्हणून **ड** मध्याबिंदु व **डफ** त्रिज्या कल्पून काढिलेलें वर्तुल ह्या तिन्ही रेषांच्या टोंकांतून जाईल.

आतां **डई, डफ, डग** ह्या त्रिज्यांवर त्यांच्या टोंकांतून अनुक्रमें **अब, बक, अक** हे लंब निघाले आहेत; (रचना)
म्हणून **अब, बक, अक** ह्या बाजू त्या वर्तुलास स्पर्श करणाऱ्या होतील; (३.१६ उप.)
म्हणून तें वर्तुल **अबक** त्रिकोणांत काढिलेलें होईल. (४.व्या.५)

ह्याकरितां दिलेल्या **अबक** त्रिकोणांत वर्तुल काढिलें आहे.

प्रश्न.

१. (४.४) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

२. (४.४) च्या आकृतीमध्यें **अड** सांधा; आणि ती रेषा **अ** कोनास दुभागिते, असें सिद्ध करा.

३. "त्रिकोणाच्या तीनही कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा एकाच बिंदूंत मिळतात" हें प्रमेय वरील प्रश्नाच्या आधारानें सिद्ध करून दाखवा.

४. (१) त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू तिसरीच्या पलीकडे वाढविल्या असतां जे दोन बाहेरील कोन होतात, त्यांस दुभागणाऱ्या रेषा मिळतात; (२) त्यांच्या मेलनबिंदूंपासून तिन्ही बाजूंवर टाकिलेले लंब सारखे असतात; (३) तो मेलनबिंदु हा मध्य व त्या लंबांपैकीं एक त्रिज्या कल्पून वर्तुल काढिलें असतां, तें तिसऱ्या बाजूला व वाढविलेल्या बाजूंच्या वाढविलेल्या भागांनाही स्पर्श करितें. (४) तो मेलनबिंदु व तिसऱ्या बाजूसमोरच्या कोनाचा कोणबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा तिसऱ्या कोनास दुभागिते.

५. "दिलेल्या तीन अमर्यादरेषांपैकीं कोणत्याही दोन समांतर नाहींत, व त्या सर्व एकाच बिंदूंत मिळत नाहींत; तर त्या तिन्ही रेषांना स्पर्श करणारीं अशीं चार वर्तुलें काढितां येतील." असें ४.४ व मागील प्रश्नाचा (३) हा भाग, ह्यांवरून सिद्ध करून दाखवा.

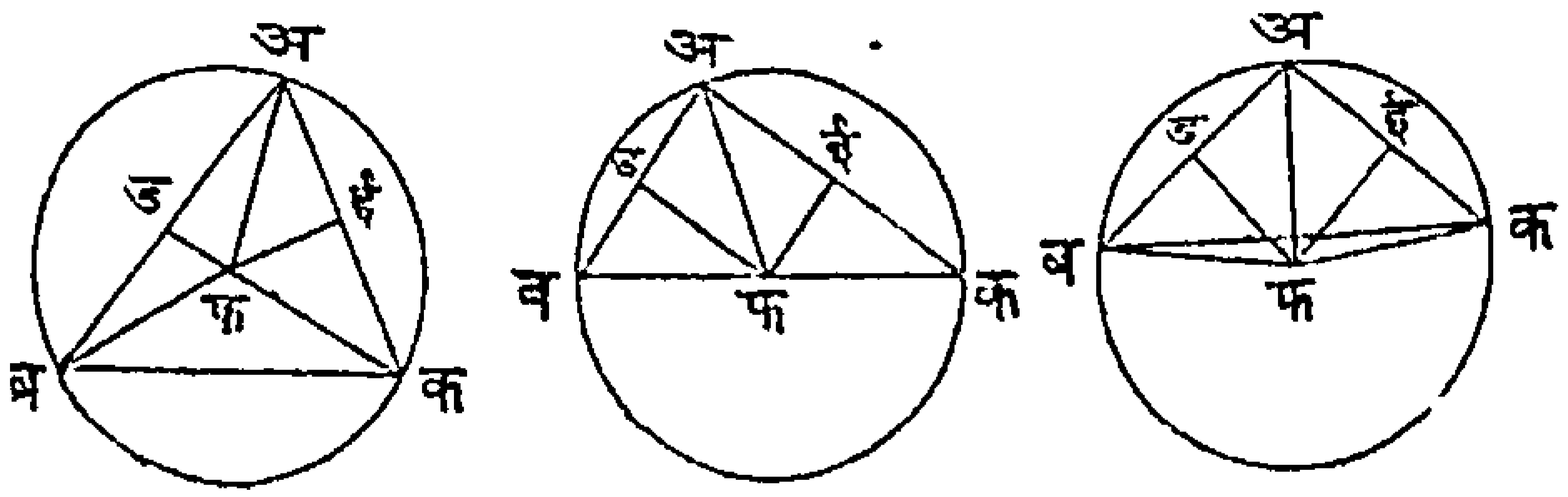
६. (१) (४.४) च्या आकृतीवरून असें सिद्ध करून दाखवा कीं, "कोणत्याही त्रिकोणाची परिमिति व त्यामध्यें काढिलेल्या वर्तुलाची त्रिज्या ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या अर्धाबरोबर तो त्रिकोण असतो;" (२) एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू अनुक्रमें ३,४,५ हात लांबीच्या आहेत; तर त्यांत काढिलेल्या वर्तुलाची त्रिज्या किती लांबीची असेल?

७. पांचव्या प्रश्नांत सांगितलेल्या चार वर्तुलांपैकीं मधलें वर्तुल व इतरांपैकीं एक ह्यांचे मध्य सांधणारी रेषा वाढविली असतां, ती राहिलेल्या दोन वर्तुलांचे मध्य सांधणाऱ्या रेषेवर लंब होते.

सिद्धांत ५. प्रमेय.

दिलेल्या त्रिकोणाभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक दिलेला त्रिकोण आहे; आणि त्याभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें आहे.



अब आणि **अक** ह्या बाजू अनुक्रमें ड आणि ई बिंदूंत दुभाग; आणि त्या बिंदूंतून **अब** आणि **अक** ह्यांवर अनुक्रमें **डफ** आणि **ईफ** लंब काढ. (१.१० व १.११)

हे लंब परस्परांस मिळणाऱ्या रेषांवर काढिले आहेत,

म्हणून ते परस्परांस मिळतील. (१.२९ उप. ३)

डफ आणि **ईफ**, ह्या **फ** बिंदूमध्यें मिळतात असें मान;

आणि **फअ** सांध; (गृ. कृ. १)

म्हणजे **फ** मध्यबिंदु व **फअ** त्रिज्या कल्पून वर्तुल काढिलें असतां, तें इच्छिलेलें वर्तुल होईल.

कारण; (**फ** बिंदु **बक** बाजूंत नसल्यास) **बफ**, **फक** सांध. (गृ.कृ.१)

आतां **अफड** त्रिकोणाच्या **अड**, **डफ** ह्या बाजू **बफड** त्रिकोणाच्या **बड**, **डफ** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत, (रचना)

आणि **अडफ**, **बडफ** हे कोन ही समान आहेत; (१. व्या. १०)

ह्मणून **अफ** पाया **बफ** पायाबरावर आहे. (१.४ भा. १)

ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं **फक**, **फअ** बरावर आहे,

म्हणून **फब**, **फक** बरावर आहे; (प्र. प्र. १)

म्हणून **फअ**, **फब**, **फक** ह्या तीन रेषा परस्पर बरावर आहेत.

म्हणून **फ** मध्य धरून **फभ** त्रिज्येनें वर्तुळ काढलें असतां, त्याचा परिघ **अबक** त्रिकोणाच्या तिन्ही कोणबिंदूंतून जाईल.

म्हणून तें **अबक** त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेलें वर्तुल होईल. (४.व्या.६)

ह्याकरितां, दिलेल्या त्रिकोणाभोंवतीं **अबक** वर्तुळ काढलें आहे.

उपसि. हें उघड आहे कीं, (१) वर्तुळाचा मध्य जेव्हां त्रिकोणांत पडतो, तेव्हां त्याचा प्रत्येक कोन लघुकोण असतो; (कारण, तो अर्धवर्तुळाहून मोठ्या वर्तुळखंडांतला असतो); (२) जेव्हां मध्य त्रिकोणाच्या एका बाजूंत पडतो, तेव्हां त्या बाजूसमोरील कोन (अर्धवर्तुळांतला असल्यामुळें) काटकोन असतो; आणि (३) जेव्हां मध्य त्रिकोणाबाहेर पडतो, तेव्हां तो ज्या बाजूच्या पलीकडे असतो त्या बाजूसमोरील कोन (अर्धवर्तुळापेक्षां कमी वर्तुळखंडांतला असल्यामुळें) विशालकोण असतो. (३. ३१)

म्हणून, ह्यांचे व्यत्यास, (१) जर दिलेला त्रिकोण लघुकोणत्रिकोण आहे, तर वर्तुळाचा मध्य त्रिकोणांत पडतो; (२) जर तो काटकोनत्रिकोण आहे, तर वर्तुळाचा मध्य काटकोनासमोरील बाजूंत पडतो; (३) आणि जर तो विशालकोणत्रिकोण आहे, तर वर्तुळाचा मध्य त्रिकोणाबाहेर विशालकोणासमोरील बाजूच्या पलीकडे पडतो.

प्रश्न.

१. (४.५) ह्या कृत्याची सामान्य रीति सांगा.

२. (४.५) च्या आकृतींत (१) **फ** बिंदूपासून **बक**वर लंब काढिला, तर तो **बक**ला दुभागितो, असें सिद्ध करा, आणि (२) **बक**चा मध्य व **फ**बिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा **बक**वर लंब होईल, असेंही सिद्ध करा.

३. "त्रिकोणाच्या तीनही बाजूंच्या मध्यांपासून त्या त्या बाजूंवर काढिलेले लंब एकाच बिंदूंत मिळतात." हें प्रमेय वरील प्रश्नाच्या आधारानें सिद्ध करून दाखवा.

४. समभुजत्रिकोणांत काढिलेलें वर्तुल व त्याच्या भोंवतीं काढिलेलें वर्तुल ह्यांचा मध्यबिंदु एकच असतो.

५. "दिलेल्या तीन बिंदूंतून ज्याचा परिघ जाईल असें वर्तुल काढावयाचें." (१) हें कृत्य दिलेल्या बिंदूंच्या कोणत्या स्थितीमध्यें असंभव्य होईल, हें सांगा; (२) दिलेल्या बिंदूंच्या इतर स्थितींमध्यें हें कृत्य करण्याची सामान्य रीति सांगा; व (३) अशीं वर्तुलें किती संभवतात, हेंही सांगा.

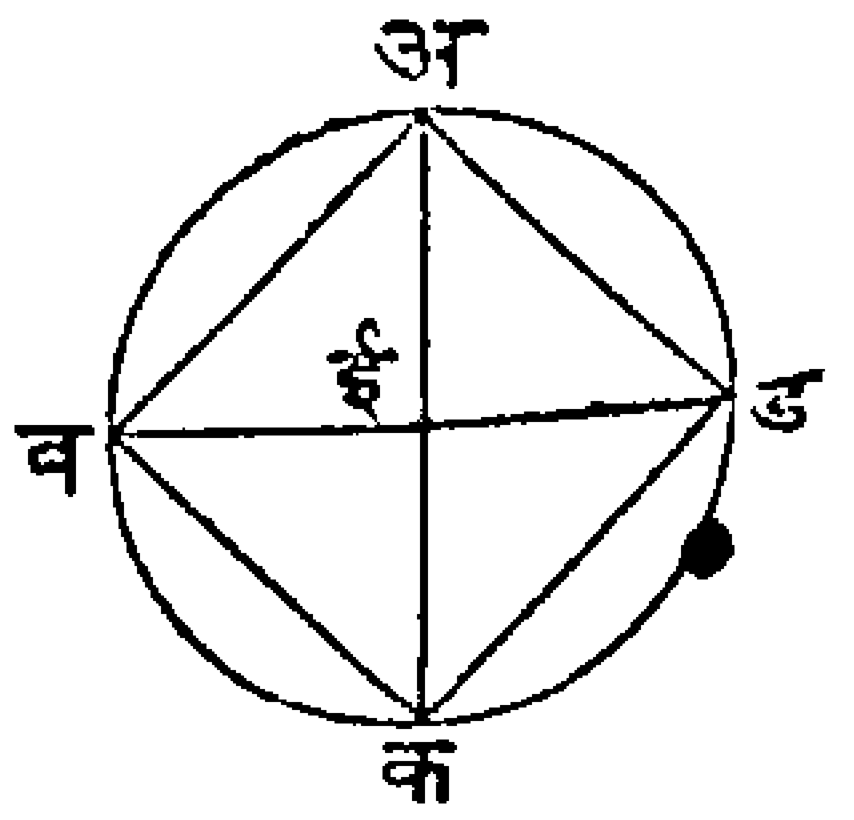
६. दिलेल्या चार बिंदूंतून ज्याचा परिघ जाईल, असें वर्तुल काढितां येण्यास त्या बिंदूंची स्थिति कशी असली पाहिजे ?

७. चौकोनाचे दोन्ही कर्ण काढिल्यानें त्यांत जे चार त्रिकोण होतात, त्यांच्या भोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलांचे मध्य अनुक्रमानें सांधिल्यानें होणारा चौकोन समांतरभुज असतो.

सिद्धांत ६. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत चौरस काढावयाचें.

अवकड एक दिलेलें वर्तुळ आहे; आणि त्यांत एक चौरस काढायाचा आहे.



ह्या वर्तुळाचे **अक, बड** हे एकमेकांवर लंब असे दोन व्यास काढ; व **अब, बक, कड, डअ** सांध. (३.१, गृ.कृ.१व२, १.११वगृ.कृ.२) म्हणजे **अबकड** आकृति इच्छिलेलें चौरस होईल.

कारण; **बई, डई** बरावर आहे, (१. व्याख्या १५)
आणि **अबई** व **अईड** ह्या दोन त्रिकोणांस **ईअ** साधारण आहे,
व **अईब, अईड** हे कोन समान आहेत; (१. व्या. १०)
म्हणून **बअ** पाया **डअ** पायाबरावर आहे. (१ ४ भा. १)

ह्याप्रमाणेंच ह्या चौकोनाच्या प्रत्येक दोन दोन बाजू समान आहेत, असें सिद्ध करितां येईल.

म्हणून **अबकड** चौकोनाच्या चारही बाजू सारख्या आहेत.
आतां **अबकड** वर्तुळाचा **बड** व्यास आहे; (रचना)
म्हणून **बअड** हें अर्धवर्तुळ आहे; (१. व्या. १९)

ह्यास्तव **वभड** कोन काटकोन आहे. (३.३१)
आणि ह्याच कारणास्तव **अवक, वकड, कडअ,** ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोन आहे.
म्हणून **अवकड** चौकोनाचे सर्व कोन काटकोन आहेत.
आणि त्याच्या सर्व बाजू सारख्या आहेत, असें वर सिद्ध केलें आहे; म्हणून तो चौरस आहे. (१. व्या. ३०)
ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुळांत **अवकड** चौरस काढिला आहे.

प्रश्न.

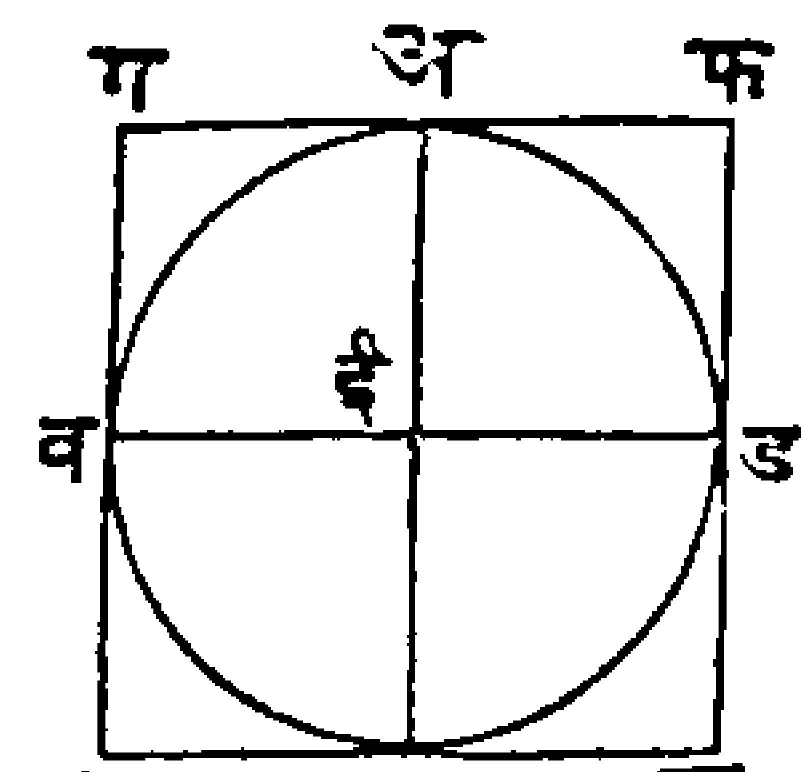
१. वर्तुलांत चौरस काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. वर्तुलांत काढिलेलें चौरस हें, त्या वर्तुलाच्या त्रिज्येवरील चौरसाच्या दुपटीबराबर असतें.

सिद्धांत ७. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळाभोंवतीं चौरस काढावयाचें.

अवकड एक दिलेलें वर्तुळ आहे; आणि त्याभोंवतीं एक चौरस काढावयाचा आहे.



ह्या वर्तुलाचे **अक, वड** हे एकमेकांवर लंब असे दोन व्यास काढ;
(३.१, ग्र. कृ. १ व २, १.११ व ग्र. कृ. २)
आणि **अ, व, क, ड,** ह्या बिंदूंतून **फग, गह, हस, सफ** ह्या त्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढ. (३.१७)
म्हणजे **गहसफ** आकृति इच्छिलेलें चौरस होईल.

कारण; **अई** रेषा स्पर्शबिंदु व मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी आहे; (रचना)
म्हणून **ईअग** कोन काटकोन आहे. (३.१८)
आणि **अईव** कोनही काटकोन आहे; (१. व्या. १०)
म्हणून **गफ** रेषा **वड**शीं समांतर आहे. (१. २८ भा. २)
त्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **हस**रेषा **वड**शीं समांतर आहे;

ह्मणून **गफ** रेषा **हस**शीं समांतर आहे. (१.३०)
त्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **गह**रेषा **अक**शीं व **फस**शीं समांतर आहे;
म्हणून **गस** हा समांतरभुजचौकोन आहे; व **गड**, **गक** हा प्रत्येकही समांतरभुजचौकोन आहे. (१. व्या. ३५)
म्हणून **गफ**, **गह** ह्या रेषा अनुक्रमें **वड**, **अक** ह्यांशीं समान आहेत. (१.३४)
आणि **बड**, **अक** ह्या समान आहेत. (१. व्या. १५ व प्र. प्र. २)
म्हणून **गफ**, **गह** ह्या रेषा समान आहेत. (प्र. प्र. १ उप. १)
आणि **ईअग**कोन काट कोन आहे असें वर ठरविलें;
म्हणून **अगब** कोन काटकोन आहे. (१. २९ भा. ३ व प्र. प्र. ३)
आतां **गस** हा समांतरभुजचौकोन आहे, त्याच्या **गफ**, **गह** ह्या जवळजवळच्या बाजू समान आहेत, आणि त्याचा **ग** कोन काटकोन आहे, असें सिद्ध झालें;
म्हणून **गस** हा चौरस आहे. (१.४६ उप. २)

ह्याकरितां दिलेल्या वर्तुलाभोंवतीं चौरस काढिला आहे.

प्रश्न.

१. (१) वर्तुलाभोंवतीं चौरस काढण्याची सामान्य रीति सांगा; व (२) त्याच्या सिद्धतेला लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा.

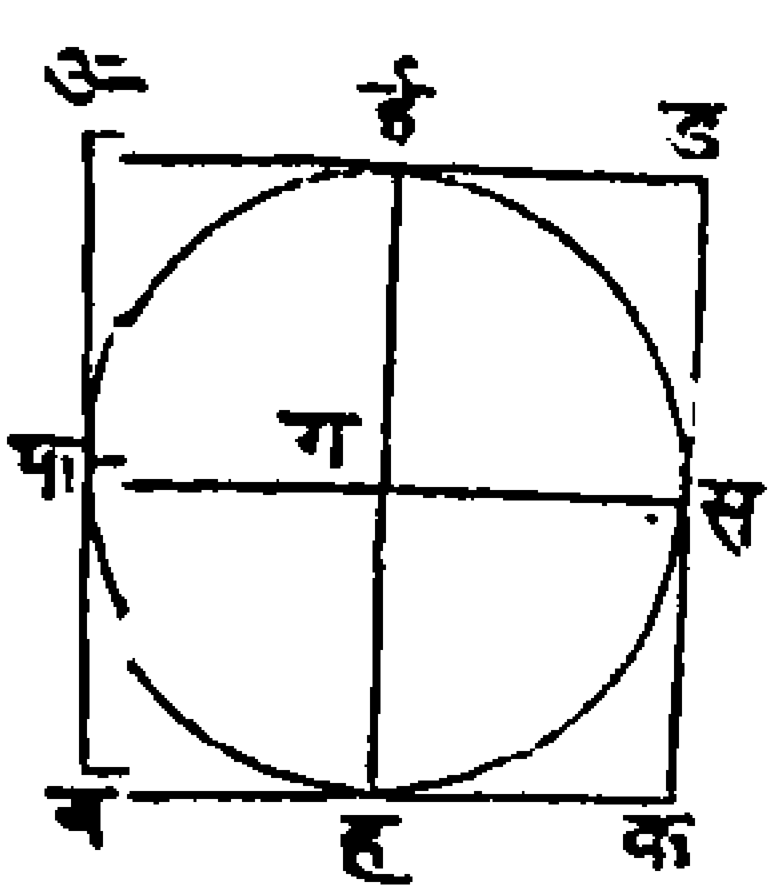
२. वर्तुलाभोंवतीं काढिलेलें चौरस, त्याच वर्तुलांत काढिलेल्या चौरसाच्या दुपटीबराबर असतें.

३. एकाच वर्तुलाच्या कोणत्याही दोन व्यासांच्या टोकांपासून त्या वर्तुलास काढिलेल्या स्पर्शरेषांनीं जो चौकोन होतो, तो समांतरभुज असतो व समभुजही असतो.

सिद्धांत ८. कृत्य.

दिलेल्या चौरसांत वर्तुळ काढावयाचें.

अवकड एक दिलेला चौरस आहे; आणि त्यामध्यें वर्तुळ काढावयाचें आहे.



अब, **अड** ह्यांतील प्रत्येक बाजू **फ**, **ई** ह्या बिंदूंत दुभाग, (१.१०)
आणि **ई** बिंदूंतून **अब**शीं किंवा **डक**शीं आणि **फ** बिंदूंतून **अड**शीं किंवा **बक**शीं, समांतर रेषा काढ. (१.३१)

ह्या रेषा परस्परांस चौरसांतच मिळतील. (१.३० उप.)
त्या **ग** बिंदूंत मिळतात, असें मान.
म्हणजे **ग** मध्य कल्पून **गई** त्रिज्येनें वर्तुल काढिलें असतां, तें इच्छिलेलें वर्तुल होईल.

कारण; **ईग**, **फग** समोरच्या बाजूंस अनुक्रमें **ह**, **स** बिंदूंत मिळत तोंपर्यंत वाढीव. (गृ. कृ. २)
आतां **अड**, **अब** ह्या रेषा समान आहेत; (१. व्या० ३०)
आणि **अई**, **अफ** हीं त्यांचीं अर्धें आहेत; (रचना)
म्हणून **अई**, **अफ** ह्याही समान आहेत. (प्र. प्र. ७)
आणि ह्या समान रेषांशीं अनुक्रमें **फग**, **गई** ह्या समान आहेत; (१.३४)
म्हणून **फग**, **गई** ह्या परस्परांशीं समान झाल्या. (प्र. प्र. १ उप. १)
बहुतेक ह्याप्रमाणेंच दाखवितां येईल कीं, **गई** ही **गस**शीं आणि **गस** ही **गह**शीं समान आहे;
म्हणून **गफ**, **गई**, **गस**, **गह** ह्या सर्व समान आहेत. (प्र. प्र. १ उप. २)
म्हणून **ग** मध्य कल्पून **गई** त्रिज्येनें काढिलेलें वर्तुल ह्या चारही रेषांच्या टोंकांतून जाईल.
आणि **ई**, **फ**, **ह**, **स** ह्या प्रत्येक बिंदूशीं झालेले कोन काटकोन आहेत; (१. व्या. ३० व १.२९)
म्हणून **अक** चौरसाच्या चारही बाजू त्या वर्तुलास स्पर्श करितील. (३.१६ उप.)
म्हणून तें त्या चौरसांत काढिलेलें वर्तुल होईल. (४. व्या. ५)
ह्याकरितां दिलेल्या चौरसांत वर्तुल काढिलें आहे.

प्रश्न.

१. चौरसांत वर्तुल काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. चौरसाचे जवळजवळचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषांचा मेलनबिंदु (अथवा कर्णांचा छेदनबिंदु) हा मध्य व त्यापासून एका बाजूवर काढिलेला लंब ही त्रिज्या कल्पून वर्तुल काढिलें असतां, तेंही त्या चौरसांत काढिलेलें वर्तुल होतें, असें सिद्ध करा.

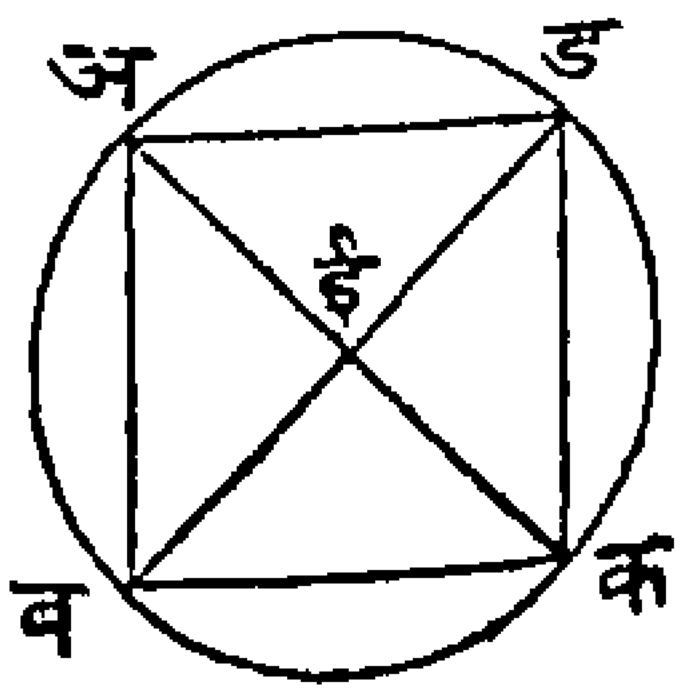
सिद्धांत ९. कृत्य.

दिलेल्या चौरसाभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें.

अबकड एक दिलेला चौरस आहे; आणि त्याभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें आहे.

अक आणि **बड** सांध, व त्या ई बिंदूंत एकमेकींस छेदितात, असें मान. (गृ.कृ.१)

म्हणजे ई बिंदु मध्य कल्पून **अई** त्रिज्येनें वर्तुल काढिलें असतां, तें इच्छिलेलें वर्तुल होईल.



कारण; **बअक** त्रिकोणाची **अब** बाजू **डअक** त्रिकोणाच्या **अड** बाजूबरोबर आहे; (१. व्या. ३०)

अक बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे;

आणि **बक** पाया **डक** पायाबरोबर आहे; (१. व्याख्या ३०)

म्हणून **बअक** कोन **डअक** कोनाबरोबर आहे; (१.८)

ह्यास्तव **बअड** कोन **अक** रेषेनें दुभागिला आहे.

ह्याप्रमाणेंच दाखवितां येईल कीं, **अक** चौरसाचे इतर कोनही कर्णांनीं दुभागिले आहेत.

आतां **डअब** कोन **अबक** कोनाबरोबर आहे, (१.व्या.३० व प्र. प्र.११)

ईअब कोन **डअब** कोनाचें अर्ध आहे;

आणि **ईबअ** कोन **अबक** कोनाचें अर्ध आहे,

ह्मणून **ईअब** कोन **ईबअ** कोनाबरोबर आहे; (प्र. प्र. ७)

ह्यास्तव **ईअ** बाजू **ईब** बाजूबरोबर आहे. (१.६)

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं, **ईब** ही **ईक**शीं आणि **ईक** ही **ईड**शीं बराबर आहे;

ह्याकरितां **ईअ**, **ईब**, **ईक**, **ईड** ह्या चार रेघा परस्पर बराबर आहेत. (प्र. प्र. १ उप. २)

ह्मणून **ई** मध्य धरून **ईअ** त्रिज्येनें वर्तुळ काढलें असतां, तें **अबकड** चौरसाच्या सर्व कोणबिंदूंतून जाईल.

म्हणून तें त्या चौरसाभोंवतीं काढिलेलें वर्तुल होईल. (४. व्या. ६)

ह्याकरितां, दिलेल्या चौरसाभोंवतीं वर्तुळ काढिलें आहे.

प्रश्न.

१. चौरसाभोंवतीं वर्तुल काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. चौरसांत काढिलेलें वर्तुल व त्याच्या भोंवतीं काढिलेलें वर्तुल हीं समकेंद्र असतात, असें सिद्ध करा.

३. चौरसाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलाच्या त्रिज्येवरील चौरस हें, चौरसांत काढिलेल्या वर्तुळाच्या त्रिज्येवरील चौरसाच्या किती पटीबराबर असतें?

४. काटकोनचौकोनाभोंवतीं वर्तुल कसें काढावें?

सिद्धांत १०. कृत्य.

ज्याचा पायाकडील प्रत्येक कोन शिरकोनाच्या दुपटीबराबर होईल, असा एक समद्विभुज त्रिकोण काढावयाचें.

(१) **अ**, **ब** हे दोन बिंदु घेऊन ते सांध; (गृ. कृ. १)

(२) **अब** रेघेचे **क** बिंदूंत असे दोन भाग कर कीं, **अब**, **बक** काटकोनचौकोन **अक**वरील चौरसाबराबर होईल; (२.११)

(३) **अ** मध्य कल्पून **अब** त्रिज्येनें **बडई** वर्तुल काढ;

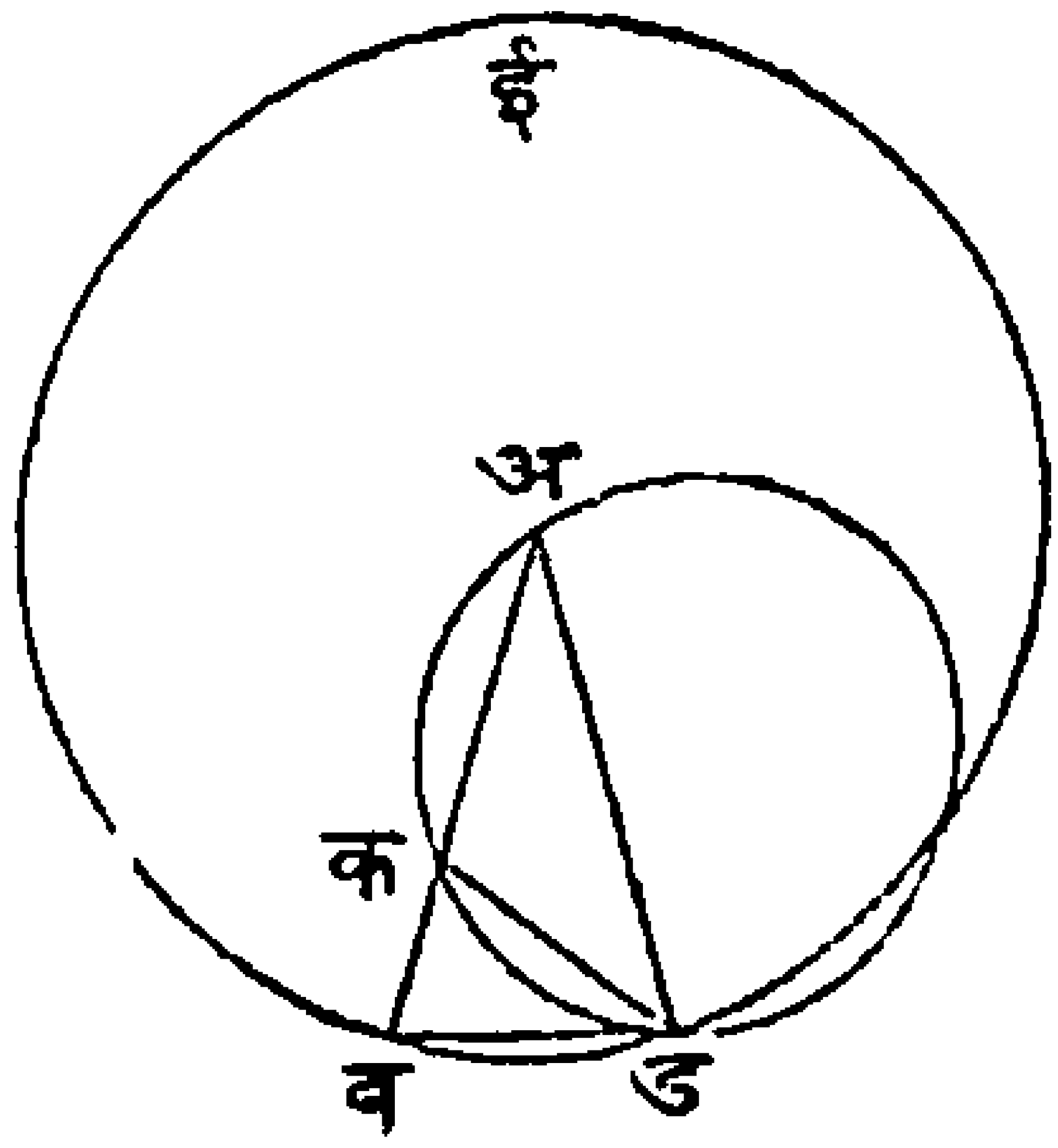
(गृ. कृ. ३)

(४) **ब** बिंदूपासून **अक** एवढी **बड** ज्या काढ; (४.१)

(५) आणि **अड** सांध. (गृ. कृ. १)

ह्या कृतीनें तयार झालेला **अबड** हा त्रिकोण इच्छिल्या प्रकारचा होईल; म्हणजे त्याच्या **अबड**, **अडब** ह्या कोनांपैकीं प्रत्येक

कोन तिसऱ्या **अ** कोनाच्या दुपटीबरोबर होईल.



कारण; **डक** सांध; आणि **अकड** त्रिकोणाभोंवतीं **अकड** वर्तुळ काढ. (गृ. कृ. १ व ४.५)

आतां **अब**, **बक** काटकोनचौकोन **अक** वरील चौरसाबरोबर आहे; (रचना)

आणि **अक**, **बड** बराबर आहे; (रचना)

म्हणून **अब**, **बक** काटकोनचौकोन, **बड**वरील चौरसाबरोबर आहे. (१.इ व प्र. प्र. १)

अकड वर्तुळाबाहेरील **ब** बिंदूपासून **बकअ** व **बड** ह्या दोन रेघा परिघापर्यंत काढिल्या आहेत, त्यांपैकीं एक वर्तुळास छेदिते, दुसरी त्यास मिळते, व सर्व छेदक रेघा आणि तिचा वर्तुळाबाहेरील विभाग ह्यांनीं झालेला **अब**, **बक** काटकोनचौकोन, वर्तुळास मिळणाऱ्या **बड** रेघेवरील चौरसाबरोबर आहे;

म्हणून **बड** रेघ **अकड** वर्तुळास स्पर्श करिते. (३.३७)

बड रेघ **अकड** वर्तुळास स्पर्श करिते, आणि **ड** स्पर्शबिंदूपासून **डक** ज्या काढिली आहे;

म्हणून **बडक** कोन व्युत्क्रमखंडांतील **डअक** कोनाबरोबर आहे. (३.३२)

ह्यांतील प्रत्येकांत **कडअ** कोन मिळविला;

तेव्हां सगळा **बडअ** कोन हा, **कडअ** आणि **डअक** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु **अकड** त्रिकोणाचा **बकड** हा बाहेरील कोन, **कडअ** आणि **डअक** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे, (१.३२)

म्हणून **बडअ** कोन **बकड** कोनाबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

परंतु **अड**, **अब** ह्या बाजू समान आहेत; (१ व्या. १५)

म्हणून **बडअ** कोन **डबअ** कोनाबरावर आहे; (१.५)
म्हणून **डबअ** (म्हणजे **डबक**) कोन **बकड** कोनाबरावर आहे; (प्र. प्र. १)
ह्यास्तव **डब** बाजू **डक** बाजूबरोबर आहे. (१ ६)
परंतु **डब**, **कअ** बराबर आहे; (रचना)
म्हणून **कअ**, **कड** बराबर आहे, (प्र. प्र. १)
आणि ह्यास्तव **कअड** कोन **कडअ** कोनाबरावर आहे. (१.५)
म्हणून **कअड** आणि **कडअ** ह्या दोन कोनांची बेरीज **कअड** कोनाच्या दुपटीबरावर आहे.
परंतु **बकड** कोन **कअड** आणि **कडअ** ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरावर आहे; (१.३२)
म्हणून **बकड** कोन, **कअड** कोनाच्या दुपटीबरावर आहे. (प्र. प्र. १)
आणि **बकड** कोन, **बडअ** आणि **डबअ** ह्या कोनांपैकीं प्रत्येकाबरावर आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून **बडअ** आणि **डबअ** हे प्रत्येकीं **बअड** कोनाच्या दुपटीबरावर आहेत. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, ज्या समद्विभुज त्रिकोणाचा पायाकडील प्रत्येक कोन शिरकोनाच्या दुपटीबरावर आहे, असा **अबड** त्रिकोण काढिला आहे.

प्रश्न.

१. (४.१०) ह्या कृत्याची सामान्य रीति लिहा.

२. (४.१०) ह्याच्या सिद्धतेचे जे खालीं भाग लिहिले आहेत, त्या प्रत्येकास लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा, नंतर साऱ्या सिद्धतेस लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा. (४.१०ची आकृति पहा)

(१) **क**, **ड** हे बिंदु सांधून **अ**, **क**, **ड** बिंदूंतून जाणारें वर्तुळ काढावें.

(२) **बड** रेषा **अकड** वर्तुलास स्पर्श करिते, असें ठरवावें.

(३) **अडब**, **बकड** हे कोन समान ठरवावे.

(४) **बड**, **कड** ह्या बाजू समान ठरवाव्या.

(५) **अडब**, **अबड** हा प्रत्येक कोन **बअड** कोनाच्या दुपटीबराबर ठरवावा.

३. (१) ४.१० ह्यामध्यें काढिलेल्या त्रिकोणाचा शिरकोन हा, काटकोनाच्या दोन पंचमांशांबरावर असतो, व (२) पायाकडील प्रत्येक कोन काटकोनाच्या चार पंचमांशांबराबर असतो, असें दाखवा.

४. काटकोनाचे पांच समान भाग करण्याची रीति ४.१० च्या आधारानें तयार करून दाखवा.

५. "काटकोनाच्या तृतीयांशाएवढ्या कोनांतून पंचमांशाएवढा कोन काढून टाकिला असतां जो कोन राहतो, त्याचें अर्ध हें काटकोनाच्या पंधराव्या हिश्शाबरोबर होतें;" असें दाखवा.

६. एथपर्यंत झालेल्या सिद्धांतांच्या योगानें, काटकोनाचे दोन, तीन, पांच, दोन ह्या संख्येच्या कोणत्याही (पूर्णसंख्यांक) घाताइतके, त्या घाताच्या तिपटी इतके, त्या घाताच्या पांचपटी इतके, व त्या घाताच्या तिपटीच्या पांचपटी इतके, समान भाग करितां येतात, असें दाखवा.

७. (४.१०) च्या आकृतींत **बडक** हाही इच्छिल्या प्रकारचाच त्रिकोण आहे, असें दाखवा.

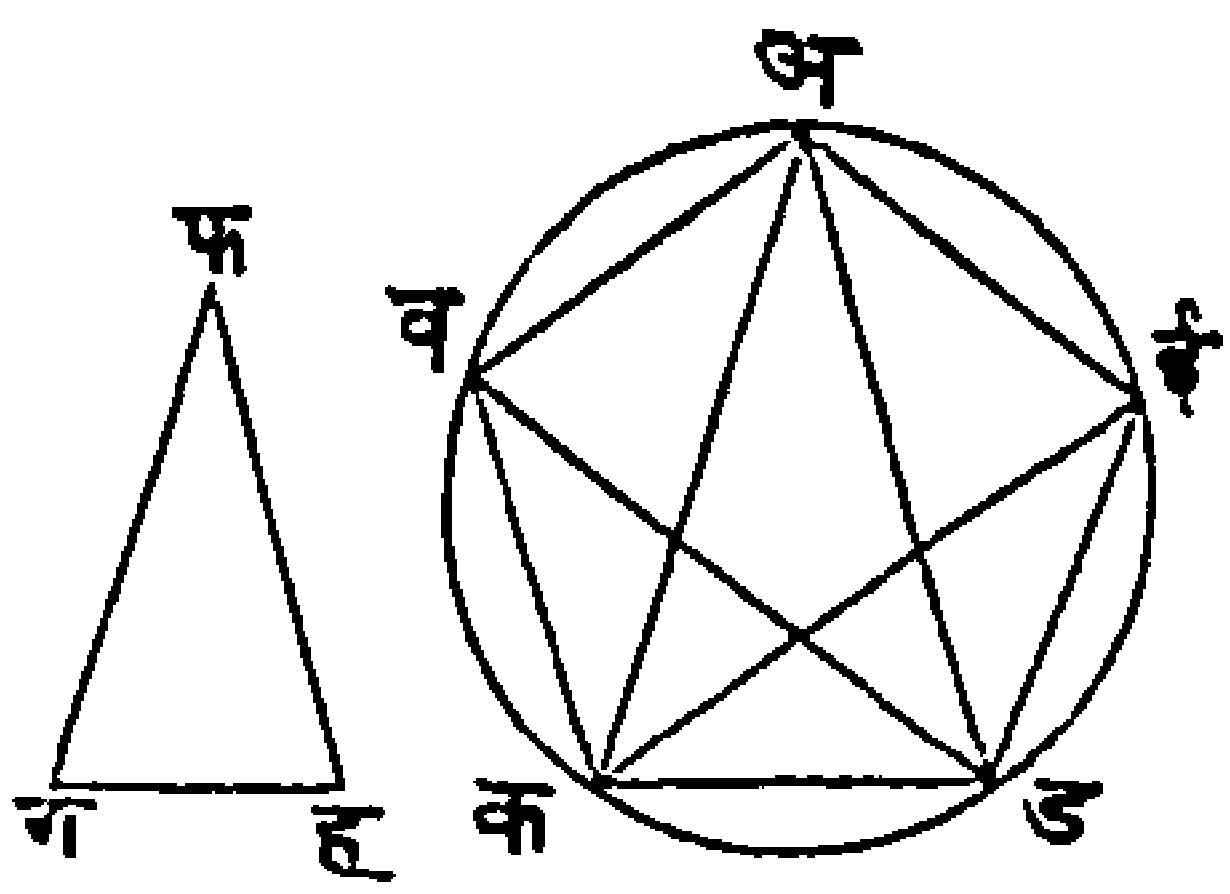
८. (१) ४.१० च्या आकृतींत दुसऱ्या वर्तुलानें पहिल्यास छेदिलेंच पाहिजे, (२) त्यांचा **ड** खेरीज दुसरा छेदनबिंदु **ई** आहे, असें मानून **अई**, **डई** सांधिल्या असतां, **अडई** हा त्रिकोणही ४.१० ह्यांत इच्छिल्या प्रकारचाच होतो; आणि (३) तो **अबड** त्रिकोणाशीं एकरूप होतो, असें सिद्ध करा.

९. (४.१०) च्या आकृतींत **अकड** त्रिकोणाचा **अकड** कोन इतर कोनांपैकीं प्रत्येकाच्या तिपटीबराबर आहे, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत ११. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत नियमित पंचकोण काढावयाचें.

अबकडई दिलेलें वर्तुळ आहे; आणि त्यांत नियमित पंचकोण काढावयाचा आहे.



फगह हा असा एक समद्विभुज त्रिकोण काढ कीं, त्याचे पायाकडील **ग** आणि **ह** कोन प्रत्येकीं **फ** कोनाची दुप्पट होईल; (४.१०)
आणि **अबकडई** वर्तुळांत **अकड** त्रिकोण **फगह** त्रिकोणाशीं समकोण काढ, असा कीं, त्याचा **कअड** कोन **फ** कोनाबराबर होईल, आणि **अडक, अकड** ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन **ग** अथवा **ह** कोनाबराबर होईल; (४.२)
अकड आणि **अडक** हे कोन अनुक्रमें **कई** आणि **डब** रेघांनीं दुभाग; (१.९)
आणि **अब, बक, अई, ईड** सांध. (ए. कृ. १)
म्हणजे **अबकडई** हा इच्छिलेला नियमित पंचकोण होईल.

कारण; (१) **अकड** आणि **अडक** हे कोन प्रत्येकीं **कअड** कोनाच्या दुपटीबराबर आहेत; (रचना)
आणि **कई, डब** ह्या रेघांनीं ते दुभागिले आहेत; (रचना)
म्हणून **अडब, बडक, कअड, डकई, ईकअ** हे पांच कोन परस्पर बराबर आहेत.

म्हणून **अब, बक, कड, डई, ईअ** हे पांच कंस परस्पर बराबर आहेत; (३.२६ उप.)
ह्मणून **अब, बक, कड, डई, ईअ** ह्या पांच रेघा परस्पर बराबर आहेत. (३.२९ उप.)
आणि ह्यास्तव **अबकडई** पंचकोण समभुज आहे.

(२) आतां **अब** कंस **डई** कंसाबराबर आहे.
ह्या प्रत्येकांत **बकड** कंस मिळविला;
तेव्हां सगळा **अबकड** कंस, सगळ्या **बकडई** कंसाबराबर झाला. (प्र. प्र. २)

अईड कोन **अबकड** कंसावर आहे,

आणि **बभई** कोन **बकडई** कंसावर आहे;
म्हणून **अईड** कोन **बभई** कोनाबरोबर आहे. (३.२७ उप.)
ह्याप्रमाणेंच ह्या आकृतीचे कोणतेही जवळजवळचे दोन कोन समान आहेत, असें सिद्ध करितां येईल;
म्हणून **अबकडई** पंचकोण समकोण आहे. (प्र. प्र. १ उप. २)
आणि तो समभुज आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून तो पंचकोण नियमित आहे. (४. व्या. २)
आणि तो **अबकडई** वर्तुलांत काढिला आहे. (४. व्या. ३)

ह्याकरितां दिलेल्या वर्तुलांत नियमित पंचकोण काढिला आहे.

उपसि. १. वर्तुलांत काढिलेली कोणतीही सरलरेषाकृति जर समभुज असली, तर ती समकोणही असते; आणि अर्थात नियमित असते.

प्रश्न.

१. (१) वर्तुलांत नियमित पंचकोण काढण्याची सामान्य रीति सांगा; व (२) त्याच्या सिद्धतेला लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा.

२. "वर्तुलांत काढिलेली कोणतीही समभुजाकृति समकोणही असते," हें ठरविण्याची सामान्य रीति सांगा.

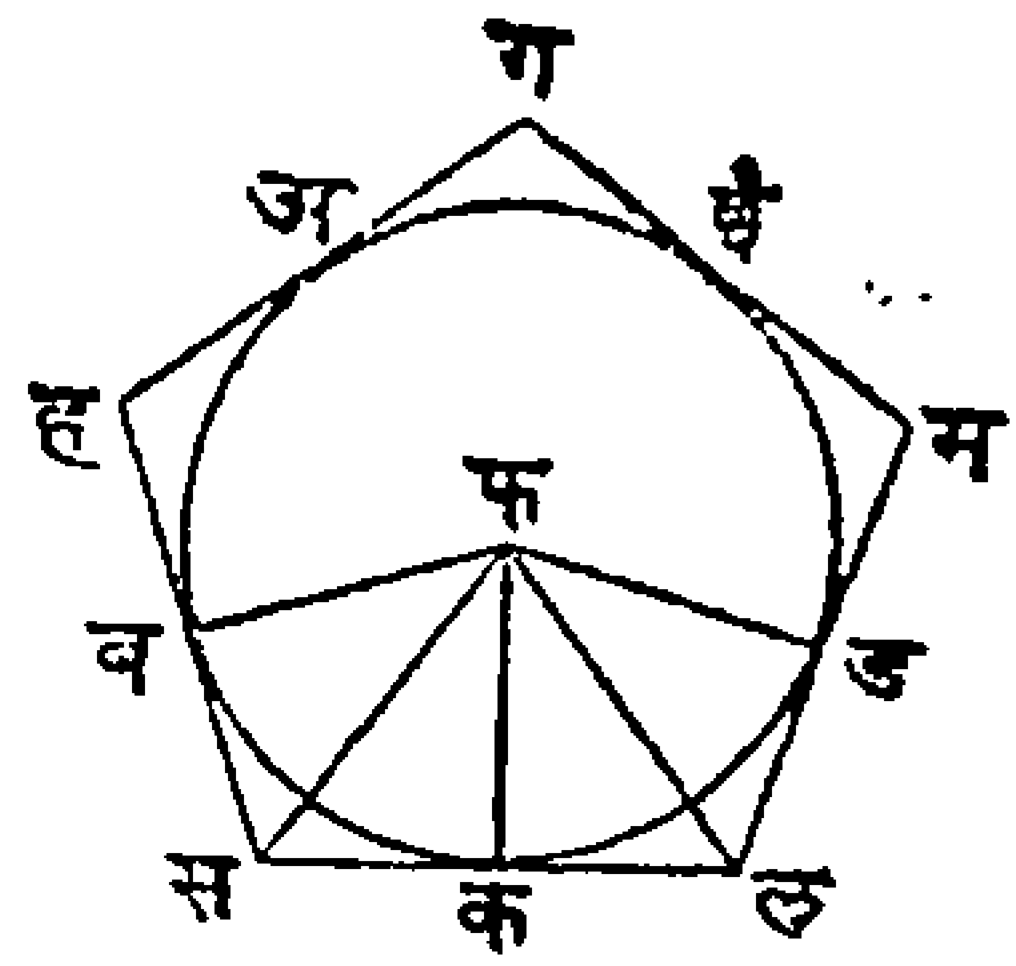
३. नियमित पंचकोणाच्या प्रत्येक कोणबिंदूपासून इतर (त्याच्या दोहों आंगचे दोन टाकून बाकीच्या) दोन कोणबिंदूंपर्यंत रेषा काढिल्या असतां, त्यांचा जो नवीन एक पंचकोण होतो, तोही नियमित पंचकोणच असतो.

४. (४.११) च्या आकृतींत **अक**, **बई** ह्यांचा छेदनबिंदु **फ** मानिला असतां, **अब**, **बफ** ह्यांची बेरीज **अक**बरावर होते, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत १२. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळाभोंवतीं नियमित पंचकोण काढावयाचें.

अबकडई दिलेलें वर्तुळ आहे; आणि त्यांत नियमित पंचकोण काढावयाचा आहे.



मागील सिद्धांताप्रमाणें वर्तुळांत काढिलेल्या नियमित पंचकोणाचे कोणबिंदु **अ**, **ब**, **क**, **ड**, **ई** आहेत, (म्हणजे **अब**, **बक**, **कड**, **डई**, **ईअ** हे कंस परस्पर बरोबर आहेत) असें समज;

आणि **अ**, **ब**, **क**, **ड**, **ई** ह्या बिंदूंतून वर्तुळास स्पर्श करणाऱ्या, **गह**, **हस**, **सल**, **लम**, **मग** रेघा काढ.

(३.१७)

ह्मणजे **गहसलम** हा इच्छिलेला नियमित पंचकोण होईल.

कारण; (१) वर्तुळाचा **फ** मध्य काढ, आणि **फब**, **फस**, **फक**, **फल**, **फड** सांध. (३.१, गृ. कृ. १)

आतां **अबकडई** वर्तुळास **सल** रेघ **क** बिंदूशीं स्पर्श करिते, आणि मध्यापासून **फक** रेघ काढिली आहे;

ह्मणून **फक** रेघ **सल** रेघेवर लंब आहे; (३.१८)

ह्यास्तव **क** बिंदूशीं झालेला प्रत्येक कोन काटकोन आहे. (१.व्या.१०)

ह्याच कारणास्तव **ब** आणि **ड** बिंदूंशीं झालेले कोन काटकोन आहेत.

आतां **फकस** कोन काटकोन आहे, ह्यास्तव **फस**वरील चौरस, **फक** आणि **कस** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर आहे.

(१.४७)

ह्याच कारणास्तव **फस**वरील चौरस, **फब** आणि **बस** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर आहे.

म्हणून **फक** आणि **कस** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज, **फब** आणि **बस** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्यांपैकीं **फक**वरील चौरस **फब**वरील चौरसाबरोबर आहे;

(१. व्या. १५ व १. इ.)

म्हणून शेष **कस**वरील चौरस, शेष **बस**वरील चौरसाबरोबर आहे;

(प्र. प्र. ३)

ह्यास्तव **कस** रेघ **बस** रेघेबरोबर आहे. (१. इ. उप. २)

आतां **बफस** त्रिकोणाच्या **बफ**, **फस** ह्या बाजू, **कफस** ह्या त्रिकोणाच्या **कफ**, **फस** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बरावर आहेत;
आणि **बस** पाया **कस** पायाबरावर आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून **बफस** कोन **कफस** कोनाबरावर आहे, आणि **बसफ** कोन **कसफ** कोनाबरावर आहे. (१.८)

म्हणून **कफस** कोन हें **बफक** कोनाचें अर्ध आहे,
आणि **कसफ** कोन हें **बसक** कोनाचें अर्ध आहे.

ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **कफड** कोनाचें **कफल** कोन हें अर्ध आहे, आणि **कलड** कोनाचें **कलफ** कोन हें अर्ध आहे.

आतां **बक** कंस **कड** कंसाबरावर आहे, (रचना)
ह्यास्तव **बफक** कोन **कफड** कोनाबरावर आहे. (३. २७ उप.)
आणि **बफक** कोनाचें **कफस** कोन हें अर्ध आहे, व **कफड** कोनाचें **कफल** कोन हें अर्ध आहे;
म्हणून **कफस** कोन **कफल** कोनाबरावर आहे. (प्र. प्र. ७)
आणि **फकस** कोन **फकल** कोनाबरावर आहे. (१. व्या. १०)
म्हणून **फकस** आणि **फकल** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं अनुक्रमें बरावर आहेत,
आणि बरावरीच्या कोनांच्या मधील **फक** बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून **कस** रेघ **कल** रेघेबरावर आहे, आणि **फसक** कोन **फलक** कोनाबरावर आहे. (१. २६ भा. १)
आणि **कस**, **कल** बरावर आहे; ह्यास्तव **लस**ही **कस**ची दुप्पट आहे.
ह्याप्रमाणेंच **हस**ही **बस**ची दुप्पट आहे, असें दाखवितां येईल.
आणि **बस**, **कस** बरावर आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून **हस**, **लस** बरावर आहे. (प्र. प्र. ६)

ह्या रीतीनेंच असें दाखवितां येईल कीं, ह्या पंचकोणाच्या कोणत्याही जवळजवळच्या दोन बाजू परस्पर आहेत.
म्हणून **गहसलम** पंचकोण समभुज आहे. (प्र. प्र. १ उप. २)

(२) आणि तो समकोणही आहे.

कारण; **फसक** कोन **फलक** कोनाबरावर आहे;

व **हसल** कोन **फसक** कोनाची दुप्पट आहे, आणि **सलम** कोन **फलक** कोनाची दुप्पट आहे, असें वर दाखविलें आहे;

म्हणून **हसल** कोन **सलम** कोनाबराबर आहे. (प्र. प्र. ६)

ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं, ह्याचे कोणतेही जवळजवळचे दोन कोन परस्पर समान आहेत;

म्हणून **गहसलम** पंचकोण समकोण आहे. (प्र. प्र. १ उप.२)

आणि तो समभुज आहे, असें वर दाखविलें आहे;

म्हणून तो पंचकोण नियमित आहे. (४. व्या. २)

आणि तो **अबकडई** वर्तुलांत काढिला आहे. (४. व्या. ४)

ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुळाभोंवतीं नियमित पंचकोण काढिला आहे.

प्रश्न.

१. (१) वर्तुलाभोंवतीं नियमित पंचकोण काढण्याची सामान्य रीति सांगा; (२) त्याच्या सिद्धतेला लागणारे आधार अनुक्रमानें सांगा; व (३) **फबस, फकस** ह्या त्रिकोणांचे अवयव समान ठरविण्यास १. **अ** ह्याची योजना केली, तर सिद्धतेंत बराच संक्षेप होतो, असें दाखवा.

२. (४.१२) च्या सिद्धतेमध्यें इष्ट पंचकोणाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू समान आहेत, व जवळजवळचे दोन कोन समान आहेत, असें सिद्ध करण्याकरितां रचना कोणती करावी लागते?

३. (४.१२) च्या आकृतीमध्यें **गह, गम** ह्या समान आहेत, व **ग** कोन **ह** कोनाशीं समान आहे, असें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवा.

४. (१) जितक्या भुजांची नियमित सरलरेषाकृति वर्तुळांत काढितां येते, तितक्याच भुजांची नियमित सरलरेषाकृति वर्तुलाभोंवतीं काढण्याची सामान्य रीति ४.१२ ह्यावरून कोणती दिसते? (२) ती समभुज आहे असें ठरविण्यास आणि समकोण आहे असें ठरविण्यास जी रचना करावी लागते ती, व पुढें जे आधार योजावे लागतात ते, अनुक्रमानें सांगा.

सिद्धांत १२. कृत्य.

दिलेल्या नियमित पंचकोणांत वर्तुळ काढावयाचें.

अबकडई दिलेला नियमित पंचकोण आहे; आणि त्यांत वर्तुळ काढावयाचें आहे.

बकड आणि कडई हे दोन कोन कफ आणि डफ रेघांनीं दुभाग; (१.९)

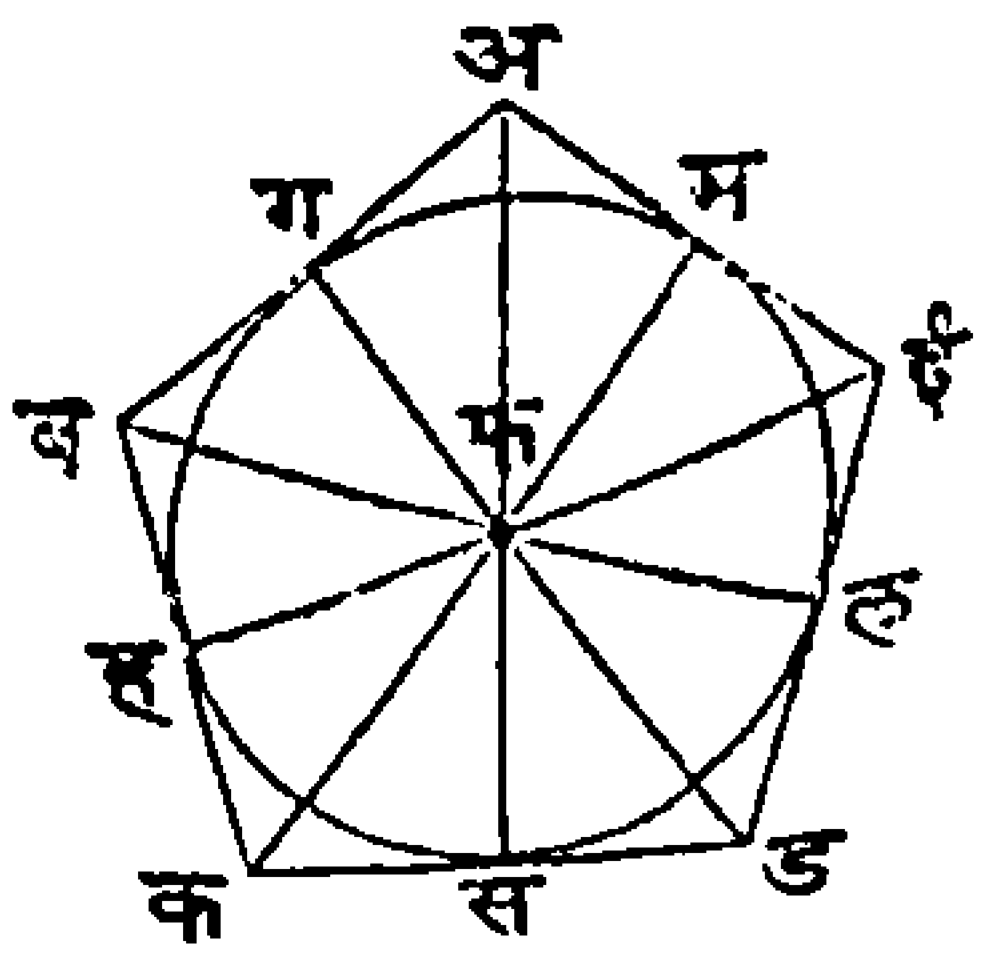
(त्या दुभागणाऱ्या रेघा परस्परांस मिळतात व त्या आकृतीच्या आंतच मिळतात, असें सिद्ध करितां येतें.)

ह्या दुभागणाऱ्या रेघा फ बिंदूंत एकमेकींस मिळतात, असें मान; आणि फ बिंदूपासून कडवर फस लंब काढ. (१. १२)

म्हणजे फ मध्यबिंदु कल्पून फस त्रिज्येनें वर्तुल काढिलें असतां, तें इच्छिलेलें वर्तुल होईल.

कारण; फब, फअ, फई रेघा सांध. (गृ. कृ. १)

आतां बकफ त्रिकोणाच्या बक, कफ ह्या बाजू डकफ त्रिकोणाच्या डक, कफ ह्या बाजूशीं अनुक्रमें समान आहेत,(प्रतिज्ञा)
आणि बकफ, डकफ हे कोन समान आहेत; (रचना)
म्हणून कबफ कोन कडफ कोनाबराबर आहे. (१.४ भा. २)
म्हणून कबफ कोनाची दुप्पट कडफ कोनाच्या दुपटीबराबर आहे; (प्र. प्र. ६)



कडफ कोनाची दुप्पट कडई कोनाबराबर आहे; (रचना)
कडई कोन, कबअ कोनाबराबर आहे; (प्रतिज्ञा व ४. व्या. २)
म्हणून कबफ कोनाची दुप्पट कबअ कोनाबराबर आहे. (प्र.प्र.१३प.२)
म्हणून कबअ कोन बफ रेघेनें दुभागिला गेला आहे.

ह्याप्रमाणेंच अ, ई हे कोनही अनुक्रमें अफ, ईफ रेघांनीं दुभागिले गेले आहेत, असें सिद्ध करितां येईल.

फ बिंदूपासून **अब**, **बक**, **डई**, **ईअ** ह्या रेषांवर अनुक्रमें **फग**, **फह**, **फल**, **फम** हे लंब काढ. (१.१२)

आतां **फकह** कोन **फकस** कोनाबराबर आहे, (रचना)

आणि **फहक** कोन **फसक** कोनाबराबर आहे; (प्र. प्र. ११)

म्हणून **फहक** आणि **फसक** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;

आणि **फक** बाजू दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;

म्हणून **फह** लंब **फस** लंबाबराबर आहे. (१.२६ भा. २)

ह्याच रीतीनें सिद्ध करितां येईल कीं, ह्या पांच लंबांपैकीं कोणतेही जवळजवळचे दोन लंब समान आहेत.

म्हणून हे पांचही लंब परस्परांशीं समान आहेत. (प्र.प्र.१३प.२)

म्हणून **फ** मध्यबिंदु कल्पून **फस** त्रिज्येनें काढिलेल्या वर्तुलाचा परिघ इतर सर्व लंबांच्याही टोंकांतून जाईल.

आतां **ग**, **ह**, **स**, **ल**, **म** बिंदूंशीं झालेले कोन काटकोन आहेत;
(रचना)

म्हणून **अब**, **बक**, **कड**, **डई**, **ईअ** ह्या पांच रेषांतून प्रत्येक त्या वर्तुळाची स्पर्शरेषा होईल; (३.१६उप.)

म्हणून तें **अबकडई** पंचकोणाकृतींत काढिलेलें वर्तुल होईल.
(४. व्या. ५)

ह्याकरितां, दिलेल्या नियमित पंचकोणांत वर्तुळ काढिलें आहे.

उपसिद्धांत–(१) कोणत्याही नियमित सरलरेषाकृतीचे जवळजवळचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषांच्या मेलनबिंदूपासून त्या आकृतीच्या इतर कोणबिंदूंपर्यंत रेषा काढिल्या असतां, ते इतर कोनही दुभागिले जातात; आणि (२) त्या आकृतीच्या सर्व बाजू त्या मेलनबिंदूपासून सारख्या अंतरांवर असतात.

प्रश्न.

१. नियमित पंचकोणामध्यें वर्तुल काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. (१) "कोणत्याही नियमित सरलरेषाकृतीचे जवळजवळचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषा मिळतात;" व (२) "त्या रेषा त्या नियमित आकृतीच्या आंतच मिळतात;" असें सिद्ध करा.

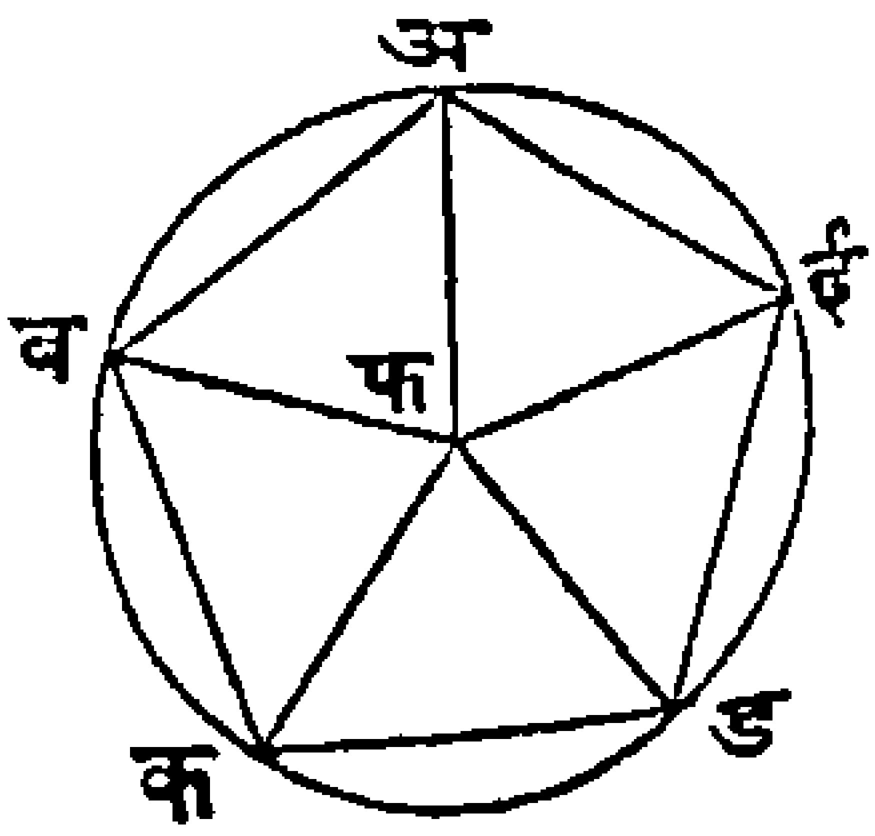
३. (४.१३) ह्या कृत्याची सामान्य रीति कोणत्याही नियमित सरलरेषाकृतीमध्यें वर्तुल काढण्यास उपयोगी पडेल, असें दाखवा.

सिद्धांत १४. कृत्य.

दिलेल्या नियमित पंचकोणाभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें.

अबकडई हा दिलेला नियमितपंचकोण आहे; आणि त्याभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें आहे.

बकड आणि **कडई** कोन **कफ** आणि **डफ** रेषांनीं दुभाग; आणि त्या दुभागणाऱ्या रेषा **फ** बिंदूंत मिळत तोंपर्यंत वाढीव. (१.९)



ह्मणजे **फ** मध्य कल्पून **फक** त्रिज्येनें वर्तुल काढिलें असतां. तें इच्छिलेलें वर्तुळ होईल.

कारण; **फब**, **फअ**, **फई** सांध. (गृ.कृ.१)

आतां **फकड** आणि **फडक** हे दोन कोन अनुक्रमें **बकड** आणि **कडई** ह्या कोनांचीं अर्धें आहेत; (रचना)

व **बकड**, **कडई** हे कोन समान आहेत; (प्रतिज्ञा)

म्हणून **फकड**, **फडक** हे कोन समान आहेत; (प्र. प्र. ७)

म्हणून **फक**, **फड** ह्या रेषा समान आहेत; (१.६)

असेंच (४.१३ उप. ह्याच्या आधारानें) सिद्ध करितां येईल कीं, **फक**, **फब** इत्यादिक पांच रेषांपैकीं कोणत्याही जवळजवळच्या दोन रेषा समान आहेत.

ह्मणून त्या सर्व रेषा समान आहेत. (प्र. प्र. १ उप. २)

म्हणून **फ** मध्य कल्पून **फक** त्रिज्येनें काढिलेलें वर्तुल दिलेल्या पंचकोणाच्या प्रत्येक कोणबिंदूंतून जाईल;

म्हणून तें त्या आकृतीभोंवतीं काढिलेलें वर्तुल होईल. (४.व्या. ६)

ह्याकरितां दिलेल्या नियमित पंचकोणाभोंवतीं वर्तुल काढिलें आहे.

उपसि.—कोणत्याही नियमित सरलरेषाकृतीचे सर्व कोणबिंदु हे, त्या आकृतीचे जवळजवळचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषांच्या मेळनबिंदूपासून सारख्या अंतरांवर असतात.

प्रश्न.

१. (१) नियमित पंचकोणाभोंवतीं वर्तुल काढण्याची सामान्य रीति सांगा; आणि (२) तीच रीति कोणत्याही नियमित सरलरेषाकृतीभोंवतीं वर्तुल काढण्यास उपयोगीं पडते, असें दाखवा.

२. नियमित सरलरेषाकृतीमध्यें काढिलेलें वर्तुल व तिच्या भोंवतीं काढिलेलें वर्तुल हीं समकेंद्र असतात, असें सिद्ध करा.

सिद्धांत १५. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत नियमित षट्कोण काढावयाचें.

अबकडईफ दिलेलें वर्तुळ आहे; आणि त्यांत एक नियमित षट्कोण काढावयाचा आहे.

अबकडईफ वर्तुळाचा **ग** मध्य व **अगड** व्यास काढ;
(३. १आणि गृ. कृ. १ व २)

ड मध्य धरून **डग** अंतरानें **ईगकह** वर्तुळ काढ; (गृ. कृ. ३)

ईग, कग सांध, आणि त्यांस **ब** आणि **फ** बिंदूंपर्यंत वाढीव;
(गृ. कृ.१ व२)

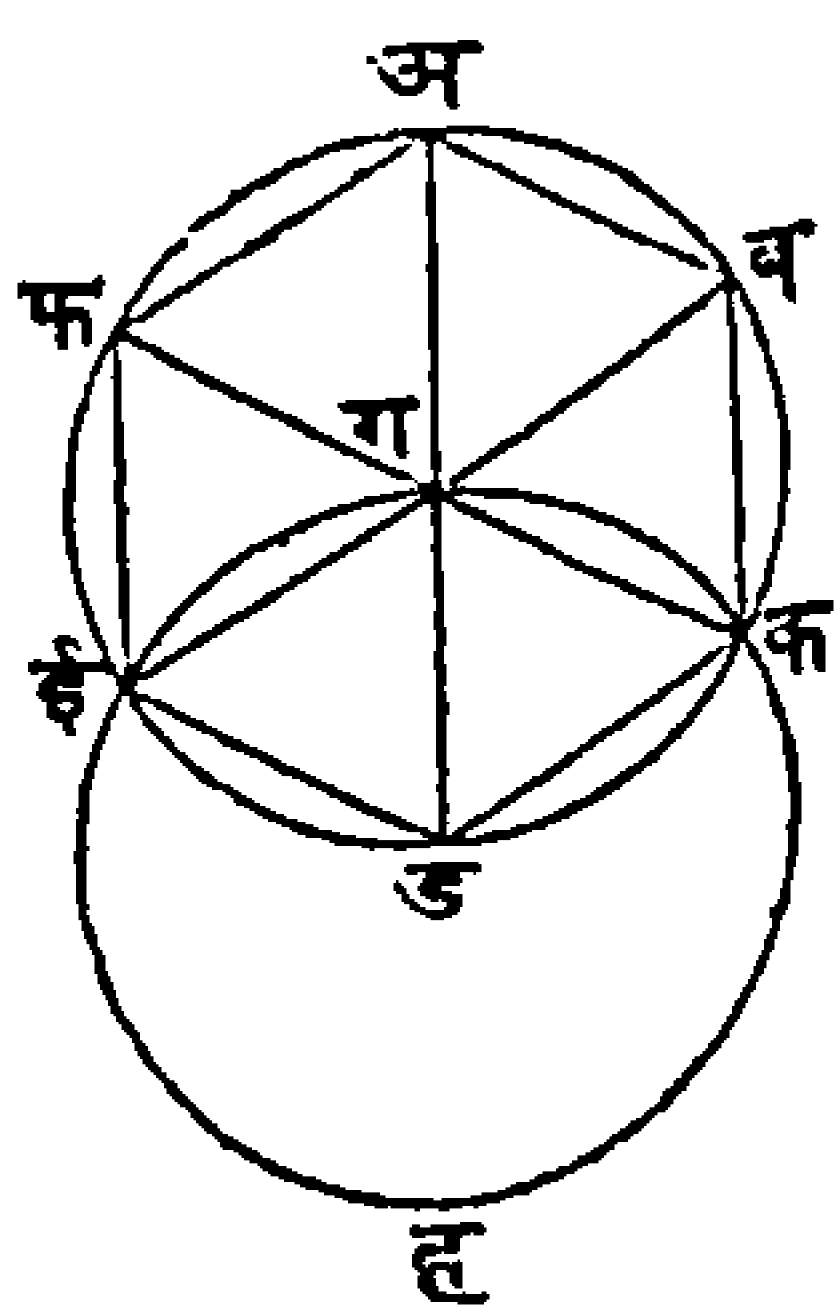
आणि **अब, बक, कड, डई, ईफ, फअ** सांध. (गृ. कृ. १)

म्हणजे **अबकडईफ** हा इच्छिलेला षट्कोण होईल.

कारण; **अबकडईफ** वर्तुळाचा **ग** मध्य आहे; म्हणून **गई, गड** बराबर आहे; (१. व्या. १५)

आणि **ईगकह** वर्तुळाचा **ड** मध्य आहे, म्हणून **डई, डग** बराबर आहे; (१.व्या. १५)

ह्यास्तव **गई**, **डई** बराबर आहे, (प्र. प्र. १)
म्हणून **ईगड** त्रिकोण समभुज आहे; (१. व्या. २४)
म्हणून त्याचे तीन कोन परस्पर बराबर आहेत. (१.५ उप.)
म्हणून त्याचा **ईगड** कोन हा, त्याच्या तीन कोनांच्या बेरजेचा तिसरा हिस्सा आहे.
ह्यास्तव **ईगड** कोन दोन काटकोनांच्या तिसऱ्या हिश्शाबराबर आहे. (१.३२ व).



ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं, **डगक** कोनही दोन काटकोनांच्या तिसऱ्या हिश्शाबराबर आहे.

आणि **गक** रेघ **ईव** रेघेशीं जे दोन **ईगक** आणि **कगब** कोन करिते, ते मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत, (१.१३)
म्हणून शेष **कगब** कोनही दोन काटकोनांच्या तिसऱ्या हिश्याबराबर आहे; म्हणून **ईगड, डगक, कगब** हे तीन कोन परस्पर बराबर आहेत. ( )
म्हणून ह्यांसमोरील **बगअ, अगफ, फगई** कोनही ह्यांबराबर असून, परस्पर बराबर आहेत. (१. १५ व प्र. प्र. १ उप. १)
म्हणजे **ईगड, डगक, कगब, बगअ, अगफ, फगई** हे सहा कोन परस्पर बराबर आहेत.
म्हणून **अब, बक, कड, डई, ईफ, फअ** हे सहा कंस परस्पर बराबर आहेत. (३. २६ उप.)
म्हणून **अब, बक** इत्यादिक सहा रेघा परस्पर बराबर आहेत, आणि त्यांनीं झालेला षट्कोण समभुज आहे. (३.२९ उप.)
म्हणून तो नियमितही आहे. (४. ११. उप.)

ह्यास्तव दिलेल्या वर्तुलांत नियमित षट्कोण काढिला आहे.

उपसि. वर्तुलांत काढिलेल्या नियमित षट्कोणाची प्रत्येक बाजू त्या वर्तुलाच्या त्रिज्येबराबर असते.

(वर्तुलाभोंवतीं नियमित षट्कोण काढणें, आणि नियमित षट्कोणांत व त्याच्या भोंवतीं वर्तुल काढणें, हीं कृत्यें नियमित पंचकोणाच्या त्या त्या कृत्यांप्रमाणेंच करावयाचीं.)

प्रश्न.

१. वर्तुलांत नियमित षट्कोण काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

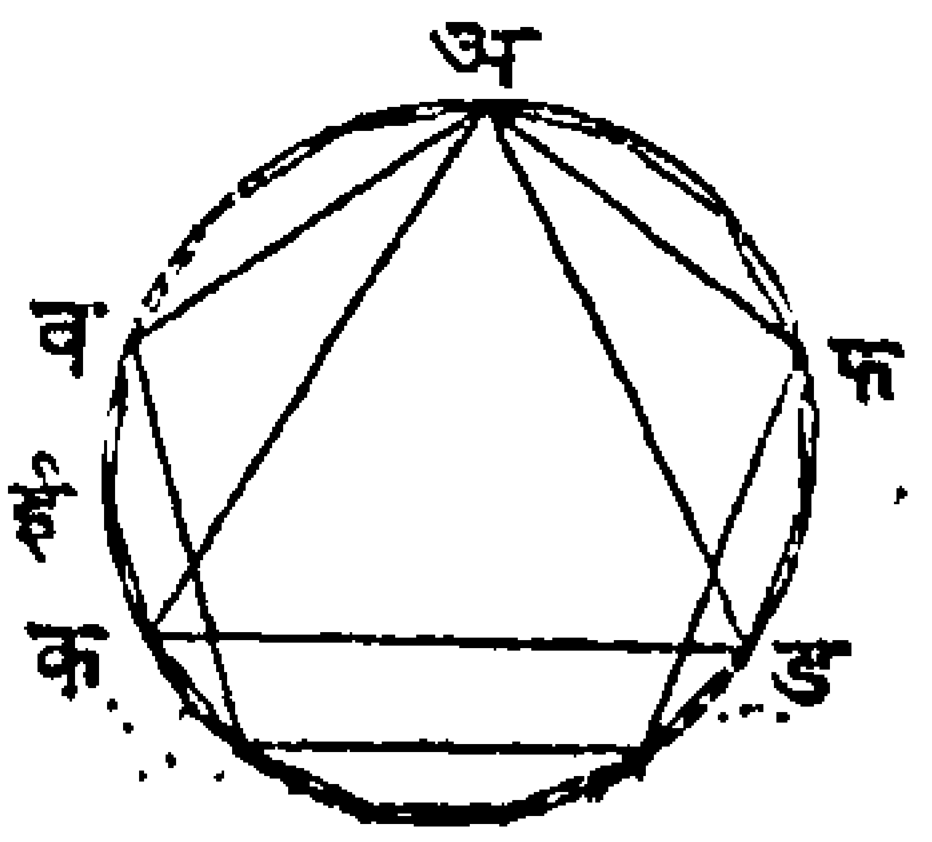
२. (१) वर्तुलांत काढिलेल्या नियमित षट्कोणाची परिमिति त्याच्या व्यासाच्या किती पटीबरावर असते? (२) वर्तुलाभोंवतीं काढिलेल्या नियमित षट्कोणाची परिमिति व्यासाच्या किती पटीबरावर असते?

३. वर्तुलांत काढिलेला नियमित षट्कोण हा, त्याच वर्तुलांत काढिलेल्या समभुजत्रिकोणाच्या दुपटीबरावर असतो.

सिद्धांत १६. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत नियमित पंचदशकोण काढावयाचें.

अबकड दिलेलें वर्तुळ आहे; आणि त्यांत नियमित पंचदशकोण काढावयाचा आहे.



असें समज कीं, ४.२ प्रमाणें ह्या वर्तुळांत काढिलेल्या समभुज त्रिकोणाची एक बाजू **अक** आहे;

आणि ४.११ प्रमाणें त्याच वर्तुळांत काढिलेल्या नियमित पंचकोणाची एक बाजू **अब** आहे,

आतां **अबकडफ** ह्या सर्व परिघाचे पंधरा समान भाग करावयाचे आहेत, आणि **अबक** कंस सर्व परिघाचा तिसरा हिस्सा आहे; ह्मणून त्यांत पंधरा समान भागांपैकीं पांच आहेत. तसाच **अब** कंस सर्व परिघाचा पांचवा हिस्सा आहे, ह्मणून त्यांत पंधरा समान भागांपैकीं तीन आहेत; म्हणून **अक, अब** ह्या दोन कंसांची वजाबाकी जो **बक** कंस, त्यांत पंधरा समान भागांपैकीं दोनच आहेत.

आतां जर **बक** कंस ३.३० प्रमाणें ई बिंदूंत दुभागिला,
तर **बई**, **ईक** ह्या कंसांपैकीं प्रत्येक कंस **अबकडफ** ह्या सर्व परिघाचा पंधरावा हिस्सा होईल.

ह्याकरितां **बई**, **ईक** सांधून, जर ४.१ प्रमाणें त्यांच्याशीं समान अशा ज्या सर्व वर्तुळांत एकीपुढें एक काढिल्या, तर पंचदशकोण तयार होईल; तो ४.११ उप. प्रमाणें नियमित ठरेल; आणि ४.व्या. २ प्रमाणें तो दिलेल्या वर्तुलांत काढिलेला आहे, असेंही ठरेल.

(पंचकोणाप्रमाणेंच, वर्तुळांत पंचदशकोण काढिल्यानें परिघांत जे त्याचे कोणबिंदु येतात, त्यांपासून वर्तुळास स्पर्श करणाऱ्या रेघा काढिल्या, तर त्याभोंवतीं नियमित पंचदशकोण निघेल; आणि पंचकोणाप्रमाणेंच, दिलेल्या नियमित पंचदशकोणांत आणि पंचदशकोणाभोंवतीं वर्तुळ काढतां येईल.)

प्रश्न.

१. वर्तुलांत नियमित पंचदशकोण काढण्याची सामान्य रीति सांगा.

२. वर्तुलांत काढिलेल्या नियमित पंचदशकोणाकृतीचा कोणताही एक कोणबिंदु, त्याच्या पासून (तो सोडून) चवथा कोणबिंदु, व त्याच्या पासून (तो सोडून) सातवा कोणबिंदु, हे अनुक्रमानें सांधिले असतां जो त्रिकोण तयार होतो, त्याचा प्रत्येक कोन काटकोनाच्या कितव्या कितव्या हिश्शाबरोबर असेल ?

चवथ्या पुस्तकावर प्रश्न.

१. चवथ्या पुस्तकाचा विषय सांगा.

२. (१) सरलरेषाकृतीच्या तीन मुख्य भेदांपैकीं कोणत्या भेदांतील सर्व सरलरेषाकृतींशीं समकोण अशा सरलरेषाकृति वर्तुळांत काढितां येतात ? (२) कोणत्याही चौकोनाशीं अथवा कोणत्याही बहुकोणाशीं समकोण असा चौकोन किंवा बहुकोण वर्तुळांत काढितां येतो काय ? (३) कोणत्या प्रकारच्या चौकोनांशीं व कोणत्या प्रकारच्या बहुकोणांशीं समकोण अशा आकृति वर्तुळांत निश्चयानें काढितां येतात ?

३. (१) सरलरेषाकृतीच्या तीन मुख्य भेदांपैकीं कोणत्या भेदांतील सर्व सरलरेषाकृतींमध्यें वर्तुल काढितां येतें? (२) कोणत्याही चौकोनांत व कोणत्याही बहुकोणांत वर्तुल काढितां येतें काय? (३) कोणत्या प्रकारच्या चौकोनांत व कोणत्या प्रकारच्या बहुकोणांत निश्चयानें वर्तुळ काढितां येतें?

४. वर्तुलाभोंवतीं सरलरेषाकृति काढणें व सरलरेषाकृतीभोंवतीं वर्तुल काढणें, ह्या कृत्यांच्या संबंधानें वरील दोन प्रश्नांचीं उत्तरें सांगा.

५. चौरस, नियमित पंचकोण, नियमित षट्कोण व नियमित पंचदशकोण ह्या आकृति वर्तुलांत काढण्याकरितां निरनिराळ्या चार रीति ग्रंथांत सांगितल्या आहेत; त्या सर्वांच्या ठिकाणीं खालीं लिहिलेली सामान्य रीति योजिल्यानेंही इष्टप्राप्ति होते, असें दाखवा.

" ज्या जातीची नियमित आकृति वर्तुलांत काढावयाची असेल, तिच्या भुजसंख्येइतके काटकोनाचे समान भाग (करितां येतील तर) करावे; त्या प्रत्येक भागाच्या चौपटी एवढाले (ह्मणजे अर्थात् चार काटकोनांच्या भुजसंख्येइतक्या समान भागांपैकीं प्रत्येका एवढाले) कोन दिलेल्या वर्तुलाच्या त्रिज्याशीं मध्यबिंदूजवळ, एकापुढें एक असे, मध्यबिंदूच्या सर्वांगांस करावे; आणि ह्या कोन करणाऱ्या रेषा परिघास मिळत तोंपर्यंत वाढवून त्यांचे सर्व जवळजवळचे मेलनबिंदु सांधावे. " सांधणाऱ्या रेषांनीं जी सरलरेषाकृति होते, ती इष्टाकृति होय.

६. वर्तुलांत नियमित आकृति काढण्याची जी रीति मागच्या प्रश्नांत सांगितली, ती व ४.१० प्रश्न ६ ह्यांवरून किती किती भुजांच्या नियमित आकृति वर्तुळांत काढितां येतील, असें दिसतें?

७. जर एका नियमित आकृतीच्या ओळीनें घेतलेल्या तीन कोणबिंदूंतून एखाद्या वर्तुळाचा परिघ जात असेल, तर त्या आकृतीच्या सर्व कोणबिंदूंतून त्याचा परिघ जातो.

८. जर एका नियमित आकृतीच्या ओळीनें घेतलेल्या तीन

बाजू एखाद्या वर्तुलास स्पर्श करीत असतील, तर त्या आकृतीच्या सर्व बाजू त्या वर्तुलास स्पर्श करितात ?

९. **अबक** त्रिकोणांत काढिलेलें वर्तुल **अब, अक** ह्यांस अनुक्रमें **ड, ई** बिंदूंत स्पर्श करितें; वर्तुळाचा **फ** हा मध्य बिंदु आहे; **अफ** रेषा परिघास **ग** बिंदूंत छेदिते; आणि **गड, गई, डई** ह्या रेषा काढिल्या आहेत. तर (१) **गडई, गईड** हे कोन समान आहेत; (२) **गई** रेषा **अईड** कोनास दुभागिते; आणि (३) **ग** बिंदु **अडई** त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलाचा मध्य आहे, असें सिद्ध करा.

१०. मागच्या प्रश्नांतला **अबक** त्रिकोण समभुज असल्यास **डई** ही त्याच वर्तुलांत काढिलेल्या समभुज त्रिकोणाची एक बाजू आहे, व **अग** ही त्रिज्येबरावर आहे, असें सिद्ध करा.

११. दिलेल्या समभुज चौकोनांत वर्तुळ काढून दाखवा.

१२. वर्तुळाभोंवतीं काढिलेल्या नियमित षट्कोणाचें क्षेत्रफळ त्याच वर्तुळांत काढिलेल्या नियमित षट्कोणाच्या क्षेत्रफळाच्या (सुमारें) किती पटीबरावर असतें ?

१३. वर्तुळांत काढिलेल्या नियमित षट्कोणाच्या कोणबिंदूंत मिळणाऱ्या त्रिज्या वाढवून त्यांचे त्यांच्या एवढालेच तुकडे पाडिले, आणि ते तुकडे जेथें पडतील, ते बिंदु ज्यांचे मध्य व ते तुकडे ज्यांच्या त्रिज्या अशीं सहा वर्तुळें काढिलीं; तर(१) तीं सारीं दिलेल्या वर्तुळास स्पर्श करितात; (२)त्यांपैकीं जवळजवळचीं दोन दोन वर्तुळें परस्परांस स्पर्श करितात. व (३) तीं सातही वर्तुळें समान असतात.

१४. दोन छेदक वर्तुळांच्या एका छेदनबिंदूंतून दोन्ही वर्तुळांस स्पर्शरेषा काढिल्या, त्या परस्परांवर लंब आहेत; व त्यांच्या मध्यबिंदूंचें अंतर त्यांपैकीं एकाच्या त्रिज्येच्या दुपटीबरावर आहे. तर त्यांच्या छेदनबिंदूंस सांधणारी रेषा दुसऱ्या वर्तुळांत काढिलेल्या नियमित षट्कोणाकृतीची बाजू आहे, असें दाखवा.

१५. **अबक** त्रिकोणाच्या **अक** बाजूंतील **ड** बिंदूंतून **बक**शीं **डइ** समांतर काढिली, ती **अब**ला **ई** बिंदूंत मिळते; **अबक, अडई** ह्या दोन्ही त्रिकोणांच्या भोंवतीं वर्तुलें काढून त्यांपैकीं एकाला **अ** बिंदूंतून स्पर्शरेषा काढिली आहे. तर ती दुसऱ्यालाही स्पर्श करिते, असें सिद्ध करा.

१६. एका त्रिकोणांत व त्याच्या भोंवतीं काढिलेलीं दोन वर्तुलें समकेंद्र आहेत; तर तो त्रिकोण समभुज आहे, असें सिद्ध करा.

१७. एका त्रिकोणांत व त्याच्या भोंवतीं काढिलेल्या वर्तुळांचे मध्य सांधणारी रेषा वाढविली असतां, त्याच्या एका कोणबिंदूंतून जाते; तर त्याच्या त्या कोणबिंदूंत मिळणाऱ्या बाजू समान आहेत, असें, सिद्ध करा.

१८. **अबकड** हा एक वर्तुलांत काढिलेला चौकोन आहे; त्याच्या **अड, बक** बाजू **ड,क** बिंदूंपलीकडे वाढविल्या असतां **ई** बिंदूंत मिळतात; तर **ईकड** त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलास **ई** बिंदूंतून काढिलेली स्पर्शरेषा **अब**शीं समांतर आहे, असें सिद्ध करा.

१९. **अब, कड** ह्या समर्याद असून समांतर रेषा आहेत, आणि त्यांचीं (एकाच अंगचीं किंवा व्युत्क्रम) टोंकें सांधणाऱ्या रेषा **ई** बिंदूंत परस्परांस छेदितात; तर **अबई, कडई** ह्या त्रिकोणांभोंवतीं काढिलेलीं वर्तुलें परस्परांस स्पर्श करितात, असें सिद्ध करा.

२०. त्रिकोणांत काढिलेल्या वर्तुलाचा मध्यबिंदु व त्याचा एक कोणबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा त्याच त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलाच्या परिघास पुनः मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर ती जेथें मिळेल, तो मेलनबिंदु हा, त्रिकोणाचे इतर दोन कोणबिंदु व आंतील वर्तुलाचा मध्य ह्या तीन बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवर असतो.

२१. दिलेल्या वर्तुलामध्यें असा एक त्रिकोण काढा कीं, त्याचे दोन कोन तिसऱ्याच्या अनुक्रमें अडीचपट व चौपट होतील.

२२. वर्तुलांत काढिलेल्या नियमित आकृतीच्या सर्व बाजूंच्या मध्यांपासून त्या त्या बाजूंवर लंब काढून ते परिघास मिळत तोंपर्यंत

वाढविले, आणि मेलनबिंदु व त्या आकृतीचे कोणबिंदु हे अनुक्रमानें सांधिले; तर जी दुप्पट भुजसंख्येची नवीन आकृति होते, ती ही त्याच वर्तुलांत काढिलेली नियमित आकृति होते.

२३. (४.१०) च्या आकृतींतल्या दोन वर्तुलांचा दुसरा छेदनबिंदु ई आहे; **अई**, **कई** सांधिल्या आहेत; आणि **अई**, **बड** रेघा **ग** बिंदूंत मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या आहेत. तर **कडगई** हा समांतरभुज चौकोन आहे, असें दाखवा.

२४. **अबक** ह्या समद्विभुजत्रिकोणाच्या **अ** ह्या शिरोबिंदूपासून पायांतील **ड** ह्या एका बिंदूपर्यंत रेघा काढून ती, त्या त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलाच्या परिघास **ई** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढविली आहे. तर **ब**, **ड**, **ई** ह्या बिंदूतून जाणाऱ्या वर्तुलास **अब** रेघा स्पर्श करिते, असें सिद्ध करा.

२५. **अबक** त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलास **क** बिंदूपासून काढिलेली स्पर्शरेघा वाढविलेल्या **अब**ला **ड** बिंदूंत मिळते; आणि **ड** मध्यबिंदु कल्पून **डक** त्रिज्येनें काढिलेल्या वर्तुलाचा परिघ **अब**ला **ई** बिंदूंत छेदितो. तर **कई** रेघा **अकब** कोनास दुभागिते, असें दाखवा.

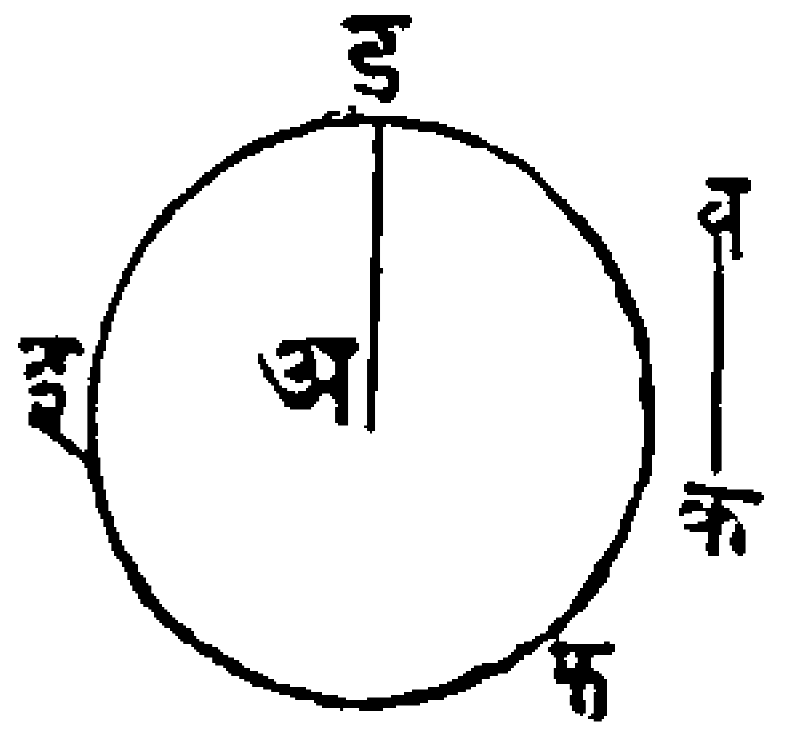
२६. (४.१०) च्या आकृतींत **कड** रेघा ही **अकड** वर्तुळांत काढिलेल्या नियमित पंचकोणाची एक बाजू आहे; आणि **बड** रेघा ही **ईबड** वर्तुळांत काढिलेल्या नियमित दशकोणाची एक बाजू आहे, असें दाखवा.

बिंदुनिधान.

(हें प्रकरण, एकाच सरळ पातळींत असणारे बिंदु, रेघा, कोन व आकृति ह्यांस लक्षून लिहिलें आहे, असें समजावें.)

१. **अ** हा एक दिलेला बिंदु आहे; **बक** ही एक दिलेली समर्याद सरलरेघा आहे; आणि **अ** बिंदूपासून **बक** एवढ्या अंतरावरचा एक बिंदु आपणास शोधून काढावयाचा आहे; असें समजा.

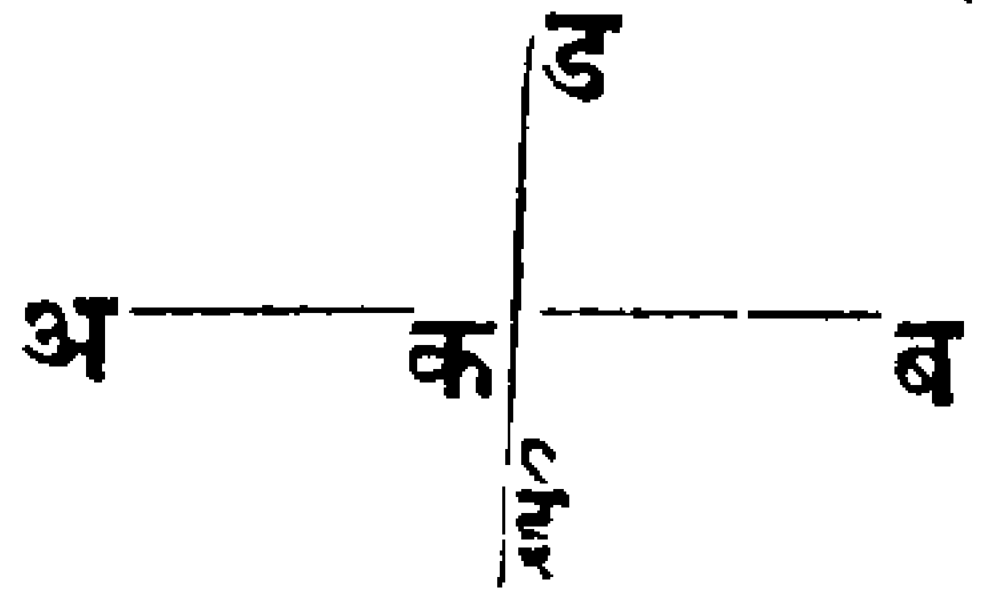
आतां **अ** हा मध्यबिंदु कल्पून **बक** एवढ्या **अड** त्रिज्येनें एक



वर्तुल काढिलें; तर (१) "जो जो बिंदु ह्या वर्तुळाच्या परिघांतला आहे, तो तो अ बिंदूपासून बक एवढ्या अंतरावरचा आहे," आणि (२) "जो जो बिंदु त्या परिघांतला नाहीं, तो तो अ पासून बक एवढ्या अंतरावरचा नाहीं," हे दोन्ही सिद्धांत खरे आहेत. ह्याकारितां डईफ वर्तुलाच्या परिघांतले जे अनंत बिंदु, ते सारे इच्छिल्या प्रकारचेच आहेत, असें ठरलें; व त्या परिघाबाहेरचा कोणताही बिंदु इच्छिल्या प्रकारचा नाहीं, असेंही ठरलें. (सारांश तो परिघ हा, इच्छिल्या प्रकारच्या बिंदूंचा ठेवाच आहे, असें म्हटलें तरी चालेल). एथें "अ हा मध्यबिंदु कल्पून बक एवढ्या त्रिज्येनें काढिलेल्या वर्तुलाचा परिघ हें, अ बिंदूपासून बक रेषेएवढ्या अंतरांवर असणाऱ्या **बिंदूंचें निधान** म्हणावें."

२. अ, ब हे दिलेले दोन बिंदु आहेत; आणि ह्यांपासून सारख्या अंतरांवरचा एक बिंदु आपणास शोधावयाचा आहे, असें समजा.

आतां जर अ, ब बिंदु सांधून सांधणाऱ्या रेषेच्या क मध्यापासून



तिजवर डई हा दोन्ही अंगांस अमर्याद असा लंब काढिला, तर (१) "जो जो बिंदु ह्या लंबांतला आहे, तो तो अ, ब ह्या बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवरचा आहे," व (२) "जो जो बिंदु ह्या लंबांतला नाहीं, तो तो त्या बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवरचा नाहीं," हे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध करितां येतात. म्हणून डई रेषेंतले जे अनंत बिंदु, ते सारे इच्छिल्या प्रकारचेच आहेत, व तिच्या बाहेरचा एकही बिंदु इच्छिल्या प्रकारचा नाहीं, असें ठरलें. एथें "अ, ब बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेच्या मध्यांतून जाणारी व तिजवर लंब असणारी अमर्याद रेषा हें, अ, ब ह्या दोन बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवरच्या **बिंदूंचें निधान** म्हणावें.'

३. ह्या दोन उदाहरणांवरून "विवक्षित प्रकारच्या **बिंदूंचें निधान**" ह्या पदाची व्याख्या अशी ठरतेः–"जी (सरल किंवा वक्र)

रेषा अशी असते कीं, तींतील प्रत्येक बिंदु विवक्षित प्रकारचा असतो व तिच्या बाहेरील कोणताही बिंदु विवक्षित प्रकारचा नसतो, त्या रेषेला विवक्षित प्रकारच्या **बिंदूंचें निधान** म्हणावें."

ह्या व्याख्येवरून व मागच्या दोन कलमांतील उदाहरणांवरून स्पष्ट आहे कीं, अमुक रेषा विवक्षित प्रकारच्या **बिंदूंचें निधान** आहे, असें ठरवावयाचें असलें, तर (१) "जो जो बिंदु त्या रेषेंतला आहे, तो तो विवक्षित प्रकारचा आहे," व (२) "जो जो बिंदु त्या रेषेंतला नाहीं, तो तो विवक्षित प्रकारचा नाहीं," असे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध केले पाहिजेत. जसें, "दिलेल्या कोनास दुभागणारी रेषा हें, त्या कोनाच्या दोन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान आहे," हें ठरवावयाचें आहे, असें समजा. तर (१) "जो जो बिंदु दिलेल्या कोनास दुभागणाऱ्या रेषेंतला आहे, तो तो त्याच्या दोन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा आहे;" आणि (२) जो जो त्या दुभागणाऱ्या रेषेंतला नाहीं, तो तो त्याच्या दोन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा नाहीं" हे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध केले पाहिजेत.

अशा दोन सामान्य सिद्धांतांपैकीं पहिल्यास "अन्वय" आणि दुसऱ्यास "व्यतिरेक" अशा संज्ञा आहेत. "अन्वयव्यतिरेकांपैकीं एक आणि त्याचा व्यत्यास हे जर खरे ठरले, तर दुसरा खरा ठरलाच असें समजावें" असा न्यायशास्त्राचा नियम आहे. म्हणून अन्वयव्यतिरेकांची जोडी, किंवा त्यांपैकीं एक आणि त्याचा व्यत्यास ह्यांची जोडी, ह्या दोन जोड्यांपैकीं ज्या जोडींतले सिद्धांत सिद्ध करणें सोईचें वाटेल, त्या जोडींतलेच सिद्ध करावे. म्हणजे इष्टसिद्धि होते.

जसें, वरील कोनाच्या उदाहरणामध्यें जे अन्वयव्यतिरेक सांगितले, त्यांपैकीं "जो जो बिंदु दिलेल्या कोनास दुभागणाऱ्या रेषेंतला आहे, तो तो त्या कोनाच्या दोन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा आहे" हा अन्वय, आणि "जो जो बिंदु दिलेल्या कोनाच्या दोन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा आहे, तो तो दिलेल्या कोनास दुभागणाऱ्या रेषेंतला आहे (म्हणजे तो बिंदु व दिलेल्या कोनाचा कोण-

बिंदु ह्यांस सांधणारी रेघा त्या कोनाला दुभागिते)" हा त्या अन्वयाचा व्यत्यास, ही सिद्धांतांची जोडी जरी सिद्ध केली, तरीही चालेल. कारण, ही जोडी खरी ठरली, तर "जो जो बिंदु दिलेल्या कोनास दुभागणाऱ्या रेघेंतला नाहीं, तो तो त्याच्या बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा नाहीं;" हा व्यतिरेकही खरा ठरलाच, असें समजले पाहिजे.

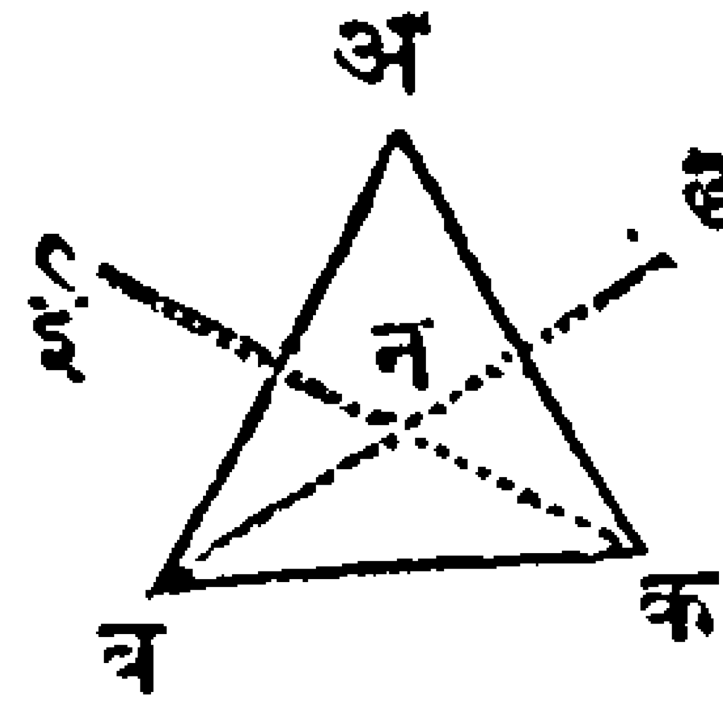
४. एक चौरस दिलें आहे, आणि त्याच्या चारही कोणबिंदूंपासून सारख्या अंतरांवरचा बिंदु शोधावयाचा आहे, असें समजा.

आतां त्या चौरसाचे कर्ण काढिले असतां, त्यांचा छेदनबिंदु हा, त्या चौरसाच्या चारही कोणबिंदूंपासून सारख्या अंतरांवर आहे, असें सिद्ध होतें; म्हणून तो एक इच्छिल्या प्रकारचा बिंदु आहे, परंतु त्या बिंदूखेरीज (तें चौरस ज्या अमर्याद सरळपातळींत आहे, तींतील) दुसरा कोणताही बिंदु इच्छिल्या प्रकारचा नाहीं, असेंही (३. १० च्या आधारें क्रमविरुद्धरीतीनें) सिद्ध होतें. म्हणून एथें इच्छिल्याप्रकारचा बिंदु चौरसाच्या सरळपातळींत एकच आहे; जींतील प्रत्येक बिंदु इच्छिल्या प्रकारचा आहे व जिच्या बाहेरील कोणताही बिंदु इच्छिल्या प्रकारचा नाहीं, अशी रेघा त्या चौरसाच्या सरळपातळींत सांपडणें संभवत नाहीं, असें ठरलें. ह्याकरितां ह्या उदाहरणांत इच्छिल्या प्रकारच्या बिंदूंचें निधान दिलेल्या चौरसाच्या पातळींत नाहीं, हें उघड आहे. सारांश "ज्या बिंदुनिधानविषयक प्रश्नांतील इच्छिल्या प्रकारचे बिंदु अनंत संभवतात, त्यांतच त्यांचें निधान सांपडणें संभवतें."

(चौरसाच्या पातळीवर त्याच्या कर्णाच्या छेदनबिंदूपासून अवकाशामध्यें जर एक लंब उभा केला, तर तो लंब हें, त्या चौरसाच्या चारही कोणबिंदूपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान आहे, असें सिद्ध होतें.)

५. भूमितीसंबंधी कित्येक प्रश्न पृथक्करणद्वारा सोडविण्यास बिंदुनिधानांची चांगली मदत होते. जसें,

(१) **अबक** त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा बिंदु शोधून काढावयाचा आहे, असें समजा.



आतां "तीन रेषांपासून सारख्या अंतरांवरचा बिंदु" ह्या पदाच्या व्याख्येवरून उघड आहे कीं, जो बिंदु ह्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवर असणार, तो **बअ**, **बक**, आणि **बक**, **कअ** ह्या दोन दोन बाजूंपासूनही सारख्या अंतरांवर असला पाहिजे; व ज्यापक्षीं ह्या दोन दोन बाजूंपासून त्या बिंदूच्या अंतरांमध्यें **बक** पासून अंतर साधारण आहे, त्यापक्षीं जो बिंदु ह्या दोन दोन बाजूंपासून सारख्या अंतरांवर असेल, तो ह्या तिन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवर असला पाहिजे, असेंही पहिल्या प्रत्यक्षप्रमाणावरून ठरतें. ह्याकरितां ह्या दोन दोन बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा बिंदु शोधिला, म्हणजे झालें.

आतां तिसऱ्या कलमांतल्या उदाहरणावरून उघड आहे कीं, **ब** कोनास दुभागणारी **बड** रेषा हें, **बअ**, **बक** ह्या दोन बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान आहे; व **क** कोनास दुभागणारी **कई** रेषा हें, **कब**, **कअ** ह्या बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान आहे. म्हणून तिन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवर असणारा बिंदु **बड**, **कई** ह्या दोन्ही रेषांमध्यें असला पाहिजे, व ह्यांच्या बाहेर नसला पाहिजे, असें ठरलें. ह्याकरितां **बड**, **कई** ह्या रेषांना साधारण असणारा बिंदु शोधून काढिला, म्हणजे झालें.

आतां ज्यापक्षीं ह्या रेषा एकमेकींस मिळतात, असें १.१७ व प्र. प्र. १२ ह्यांवरून ठरतें, आणि ज्यापक्षीं दोन सरलरेषांचा छेदनबिंदु एकच असतो, त्यापक्षीं **बड**, **कई** ह्या मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या असतां त्यांचा मेलनबिंदु **न** हाच इष्टबिंदु होईल.

ह्या पृथक्करणावरून दिलेल्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरचा बिंदु काढण्याची रीति अशी ठरते कीं, "त्या त्रिकोणाचे कोणते तरी दोन कोन दुभागून दुभागणाऱ्या रेषा मिळत तोंपर्यंत वाढवाव्या," म्हणजे त्यांचा मेलनबिंदु हा इष्टबिंदु होतो.

(२) "दिलेल्या त्रिकोणाच्या तिन्ही कोणबिंदूंपासून सारख्या

अंतरांवरचा बिंदु काढावयाचा." ह्या कृत्याचें पृथक्करण दुसऱ्या कलमांतल्या उदाहरणाच्या आधारानें बहुतेक वरील उदाहरणाप्रमाणेंच केलें असतां, ह्या कृत्याची रीति अशी ठरेल कीं, "दिलेल्या त्रिकोणाच्या कोणत्या तरी दोन बाजूंवर त्यांच्या त्यांच्या मध्यांपासून लंब काढावे, आणि ते मिळत तोंपर्यंत वाढवावे," ह्मणजे त्यांचा मेलनबिंदु हा इष्टबिंदु होतो.

६. मागील उदाहरणांतलीं बिंदुनिधानें एकवार एके ठिकाणीं जुळवितों.

(१) "दिलेला बिंदु ज्याचा मध्य आहे व दिलेल्या रेषेएवढी ज्याची त्रिज्या आहे, अशा वर्तुळाचा परिघ हें, दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेषेएवढ्या अंतरांवरच्या बिंदूचें निधान होय."

(२) "दिलेल्या दोन बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेच्या मध्यांतून जाणारी व तिजवर लंब असणारी अमर्याद रेषा हें, दिलेल्या दोन बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान होय."

(३) "दिलेल्या कोनास दुभागणारी अमर्याद रेषा हें, त्या कोनाच्या दोन्ही बाजूंपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान होय."

बिंदुनिधानांविषयीं

प्रश्न.

१. दिलेल्या अमर्याद सरलरेषेपासून, दिलेल्या समर्याद सरलरेषेएवढ्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान कोणतें? अशीं निधानें किती असतील?

२. परस्परांशीं समांतर असणाऱ्या दोन रेषांपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचें निधान कोणतें?

३. दिलेली रेषा ज्यांचा पाया होईल व पायाच्या एका टोंकांत मळणाऱ्या ज्यांच्या बाजू दिलेल्या दुसऱ्या रेषेबरावर असतील, अशा त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंचें निधान कोणतें?

४. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन अमर्याद सरलरेषांपासून सारख्या अंतरांवरच्या बिंदूंचीं निधानें किती असतात?

५. जे त्रिकोण दिलेल्या पायावर आहेत, त्याच्या एकेच अंगास आहेत, आणि दिलेल्या रेषेएवढ्या उंचीचे आहेत, त्यांच्या शिरोबिंदूंचें निधान कोणतें?

६. दिलेल्या अमर्याद रेषेच्या बाहेरील दिलेल्या बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत ज्या अनंत रेषा काढितां येतात, त्यांच्या मध्यांचें निधान कोणतें?

७. जे त्रिकोण दिलेल्या एकाच पायावर आहेत, व ज्यांचे त्या पायाच्या एकाच टोंकाजवळचे कोन दिलेल्या एका कोनाबरोबर आहेत, अशा त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंचें निधान कोणतें? अशीं निधानें किती असतील?

८. दिलेल्या दोन बिंदूंतून ज्यांचे परिघ जातात, अशा वर्तुलांच्या मध्यबिंदूंचें निधान कोणतें?

९. दिलेल्या वर्तुळाच्या परिघापासून दिलेल्या रेषेएवढ्या *अंतरावर असणाऱ्या बिंदूंचें निधान कोणतें?

१०. "दिलेल्या तीन बिंदूंतून ज्यांचे परिघ जातात, अशा वर्तुळांच्या मध्यबिंदूंचें निधान कोणतें? ह्या प्रश्नाचें उत्तर काय द्याल? कारण काय?

११. दिलेल्या वर्तुळाच्या दिलेल्या ज्येशीं समांतर असणाऱ्या ज्यांच्या मध्यांचें निधान कोणतें?

१२. दिलेल्या वर्तुळांतल्या दिलेल्या ज्येशीं समान असणाऱ्या सर्व ज्यांच्या मध्यांचें निधान कोणतें?

---

* दिलेला बिंदु वे दिलेल्या वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मधील अंतराची व्याख्या—"दिलेला बिंदु व दिलेल्या वर्तुळाचा मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा दोन्ही अंगांस अमर्याद केली असतां, तिचा जो भाग दिलेला बिंदु व दिलेल्या वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मध्यें सांपडतो, व ज्यांत वर्तुलमध्य नसतो, त्या भागाला दिलेला बिंदु व दिलेल्या वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्यामधील अंतर ह्मणतात." किंवा ३·८ प्रश्न ४ ह्यांतील व्याख्या घ्यावी.

१३. परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषांस स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांच्या मध्यबिंदूंचें निधान कोणतें ? अशीं निधानें किती संभवतात ?

१४. जे त्रिकोण दिलेल्या एकाच पायावर आहेत व ज्यांचे शिरकोन दिलेल्या एका कोनाबराबर आहेत, त्यांच्या शिरोबिंदूंचें निधान कोणतें ?

१५. दिलेल्या रेषेला दिलेल्या बिंदूंत स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांच्या मध्यबिंदूंचें निधान सांगा.

१६. जीं वर्तुळें दिलेल्या वर्तुळास स्पर्श करितात व ज्यांच्या त्रिज्या दिलेल्या रेषेबराबर आहेत, अशा वर्तुळांच्या मध्यबिंदूंचें निधान सांगा.

१७. ज्या बिंदूंपासून दिलेल्या दोन अमर्याद रेषांवर काढिलेल्या दोन दोन लंबांची वजाबाकी दिलेल्या तिसऱ्या एका रेषेबराबर होईल, अशा सर्व बिंदूंचें निधान सांगा. अशीं निधानें किती संभवतात ?

१८. जे त्रिकोण दिलेल्या एकाच पायावर आहेत व ज्यांच्या इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजा पायावरील चौरसाबराबर आहेत, अशा त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंचें निधान सांगा.

१९. एक बिंदु व एक वर्तुळ हीं दिलीं आहेत; आणि तो बिंदु व त्या वर्तुळाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा ज्याचा व्यास होईल असें एक वर्तुल काढिलें आहे. तर ह्या नवीन वर्तुळाचा परिघ हें, दिलेल्या वर्तुळाच्या दिलेल्या बिंदूंतून जाणाऱ्या सर्व ज्यांच्या मध्यांचें निधान आहे, असें सिद्ध करा.

२०. परस्परांवर लंब अशा दोन रेषा दिल्या आहेत. तर त्या दोन रेषांमध्यें ज्यांच्या काटकोन करणाऱ्या बाजू आहेत व ज्यांचे कर्ण दिलेल्या तिसऱ्या रेषेबरोबर आहेत, अशा काटकोनत्रिकोणांच्या कर्णांच्या मध्यांचें निधान सांगा.

२१. ज्यांचे परिघ दिलेल्या बिंदूंतून जातात व जीं दिलेल्या रेषेला दिलेल्या बिंदूंत स्पर्श करितात, अशा वर्तुळांच्या मध्यबिंदूंचें निधान संभवतें काय ? कां ?

२२. "एक वर्तुल, एक अमर्याद रेषा व त्या वर्तुळाच्या त्रिज्येपेक्षां कमी असणारी दुसरी एक रेषा, हीं दिलीं आहेत; तर त्या वर्तुळाच्या ज्या ज्या त्या अमर्याद रेषेशीं समांतर आहेत, व ज्यांचें मध्यांतर दुसऱ्या दिलेल्या रेषेबरोबर आहे, त्या ज्यांच्या मध्यांचें निधान काय?" ह्या प्रश्नाचें उत्तर असंभाव्य आहे, असें दाखवा.

२३. जे त्रिकोण दिलेल्या एकाच पायावर आहेत, व ज्यांच्या इतर दोन दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजा, पायावरील चौरसाच्या अर्धापेक्षां जास्त असणाऱ्या अशा एका चौरसाबरोबर आहेत, अशा त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूचें निधान सांगा.

२४. "दिलेल्या एकाच पायावर असणाऱ्या समभुज त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूचें निधान काय?" ह्या प्रश्नाचें उत्तर असंभाव्य आहे, असें दाखवा.

२५. दिलेल्या त्रिकोणाच्या पायाचा मध्य व शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा हें, पायाशीं समांतर असणाऱ्या रेषांचे जे भाग त्या त्रिकोणाच्या बाजूंमध्यें सांपडतात, त्यांच्या मध्यांचें निधान आहे, असें सिद्ध करा.

(खालीं लिहिलेल्या प्रश्नांचीं उत्तरें बिंदुनिधानांच्या मदतीनें काढून दाखवा.)

२६. दिलेल्या अमर्याद रेषेमध्यें असा एक बिंदु शोधून काढा कीं, तो तिच्या बाहेरील दिलेल्या बिंदूपासून दुसऱ्या एका समर्याद रेषेएवढ्या अंतरावर असेल. ह्यांत त्या समर्याद रेषेच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे? ह्यांतील इष्टबिंदु किती सांपडतील?

२७. दिलेल्या दोन बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवरचा असा दिलेल्या अमर्याद रेषेंतला बिंदु काढा. हें कृत्य दिलेल्या बिंदूंच्या कोणत्या स्थितींत असंभाव्य होईल?

२८. दिलेल्या अमर्याद रेषेंतला असा एक बिंदु काढा कीं, तो दिलेल्या दुसऱ्या दोन अमर्याद रेषांपासून सारख्या अंतरांवर असेल. (ह्यांत दिलेल्या रेषांच्या सर्व स्थितींना लक्षून उत्तरें द्या.)

२९. **अबक** त्रिकोणाचा **अ** हा कोन काटकोन आहे. तर **अक** बाजूमध्यें **ड** हा असा एक बिंदु काढा कीं, **बक** पासून **ड**चें अंतर **अड** बरोबर होईल.

३०. **अब, बक, कड** ह्या तीन अमर्याद रेषांपासून सारख्या अंतरांवरचा एक बिंदु शोधून काढा. असे बिंदु किती निघतील?

भूमितीच्या परिभाषेवर टिप्पण.

भूमितीमध्यें मुख्यत्वेंकरून रेषा, पातळी, अवकाश व कोन ह्या चार परिमेयांच्या धर्मांविषयीं व त्यांसंबंधी कृत्यांविषयीं विचार केला आहे.

१. **अवकाशादिकांचीं भूमितींतलीं लक्षणें:**— अवकाश, पातळी, रेषा व बिंदु ह्यांचीं लक्षणें बहुतेक भूमितिविषयक ग्रंथांमध्यें अशा अर्थाचीं केलेलीं आढळतात कीं, "ज्याला लांबी, रुंदी व जाडी हीं तीन परिमेयें मात्र असतात, त्याला अवकाश म्हणावें", "ज्याला लांबी व रुंदी हीं दोन परिमेयें मात्र असतात, त्याला पातळी म्हणावें"; "ज्याला लांबी हें एकच परिमेय असतें, त्याला रेषा ह्मणावें;" आणि "ज्याला नुसती स्थिति असते (लांबी इत्यादिक कोणत्याच प्रकारचें महत्त्व नसतें; अथवा ज्याचे विभाग करितां येत नाहींत; किंवा ज्याला परिमेयता नाहीं), त्याला बिंदु म्हणावें."

२. **अवकाशादिकांच्या लक्षणांतील विरोधाभास:**—आतां हीं लक्षणें द्रव्यघटित पदार्थांचीं आहेत असें समजावें, तर, ज्याला लांबी इत्यादिक कोणत्याही प्रकारचें महत्त्व नाहीं, अथवा अतिसूक्ष्म शस्त्रानें देखील ज्याचे विभाग करितां येणार नाहींत, असा एक देखील द्रव्यघटित पदार्थ सृष्टीमध्यें सांपडावयाचा नाहीं. परमाणूला देखील अतिसूक्ष्म तरी लांबी इत्यादिक प्रत्येक प्रकारचें महत्त्व असावयाचेंच. मग उक्तलक्षणाचा बिंदु सृष्टीमध्यें कोठून सांपडणार? ह्याप्रमाणेंच उक्तलक्षणाची रेषा, पातळी व अवकाश हीं सृष्टींत असणें संभवत नाहीं. तस्मात् बिंदु, रेषा, पातळी व अवकाश हे द्रव्य-

घटित पदार्थ नाहींत, असें सिद्ध झालें. बरें, बिंदुरेषादिक हे द्रव्यघटित पदार्थांचे धर्म म्हणावे, तर कागद, पाटी, इत्यादिकांवर काढिलेले कशाचे तरी ठिपके अशा कांहीं सूक्ष्म पण द्रव्यघटित पदार्थांना देखील भूमितींत बिंदु म्हणतात, कागद इत्यादिकांवर काढिलेल्या कशाच्या तरी ओळी, इत्यादिक ज्या पदार्थांची रुंदी व जाडी त्यांच्या लांबीच्या मानानें अगदीं कमी असते, पण जे द्रव्यघटित असतात, त्यांना देखील भूमितींत रेषा म्हणतात.

सारांश, अवकाशादिकांचीं भूमितींत जीं लक्षणें करितात त्यांवरून ते द्रव्यघटित पदार्थ नाहींत, असें दिसतें; पण अवकाशादिक शब्दांची भूमितींत योजना तर द्रव्यघटित पदार्थांनाच लक्षून करितात; असा कांहीं त्या शब्दांच्या अर्थाविषयीं सकृद्दर्शनीं मोठा विरोध भासतो. परंतु वस्तुतः ह्यांत कांहीं विरोध नाहीं, हें पुढील संक्षिप्त वर्णनावरून ध्यानांत येईल.

३. **अवकाश** अथवा **घन**.–ह्या शब्दाचा अर्थ भूमितीमध्यें समर्याद पोकळी एवढाच समजावयाचा; मग ती पोकळी द्रव्यघटित पदार्थानें व्यापिलेली (म्हणजे परमाणूंनीं भरलेली) असो किंवा नसो. जसें, ह्या पुस्तकानें व्यापिलेली पोकळी जरी कागदाच्या परमाणूंनीं भरलेली आहे, तरी तिला भूमितीमध्यें पुस्तकाचा "अवकाश" असेंच म्हणावयाचें. कां कीं पदार्थांच्या द्रव्याचा विचार भूमितींत मुळींच करावयाचा नाहीं. अवकाशालाच गणितशास्त्रांत कोठें कोठें "घन*" अशी संज्ञा देतात व कोणी ग्रंथकार "भरींव" अशी ही संज्ञा देतात.

---

* "कोणत्याही आकाराचा अवकाश," (२) "ज्याची लांबी, रुंदी व जाडी ह्या सारख्या आहेत असा अवकाश" व (३) "तीन सारख्या संख्यांचा गुणाकार" असे "घन" शब्दाचे तीन अर्थ गणितविषयक ग्रंथांत आढळतात. ह्याकरितां अमुकस्थलीं त्याचा कोणता अर्थ घ्यावयाचा, हें बहुधा संदर्भावरूनच ठरवावें लागतें.

४. **पातळी.**–पदार्थांच्या अवकाशांची मर्यादा दाखविणारीं जीं त्या पदार्थाचीं एक अथवा अनेक पृष्ठें, त्यांपैकीं प्रत्येक पृष्ठ ही भूमितींतली "पातळी" होय. जसें ह्या पुस्तकाच्या अवकाशाची मर्यादा दाखविणारीं जीं हीं सहा पृष्ठें आहेत, त्यांपैकीं प्रत्येक पृष्ठ ही पातळी होय. पातळीलाच गणितामध्यें कोठें कोठें " क्षेत्र " अशीही संज्ञा देतात.

५. **रेषा.**–पातळीची मर्यादा दाखविणारी प्रत्येक कड, तसेंच कोणत्याही दोन पदार्थांमधलें (अथवा पदार्थाच्या कोणत्याही दोन भागांमधलें) अंतर ह्या भूमितींतल्या रेषा होत.

६. **रेषापरिमेय.**—पदार्थाची लांबी, रुंदी, जाडी, उंची, खोली हें प्रत्येक परिमेय हें, पदार्थाची एखादी कड अथवा त्याच्या कोणत्यातरी दोन भागांमधील अंतर ह्यांपैकींच कशानें तरी दाखविलें जातें; ह्मणून हीं सारीं परिमेयें वस्तुतः रेषात्मकच आहेत. ह्याकरितां लांबी, रुंदी इत्यादिक प्रत्येक परिमेयाला आपण " रेषापरिमेय " अशी जातिवाचक संज्ञा देऊं.

७. लांबी, रुंदी, जाडी, उंची व खोली ह्या शब्दांच्या योजनेविषयीं व्यवहारांत चांगलासा निर्णय झालेला दिसत नाहीं. तथापि त्यांची योजना बहुधा कशी करितात, हें सांगून "अवकाशाला लांबी, रुंदी, व जाडी हीं तीनच रेषापरिमेयें असतात" इत्यादिक वाक्यांचा अर्थ थोडक्यांत दर्शवितों.

(१) पदार्थाच्या अवकाशाच्या संबंधानें लांबी इत्यादिक संज्ञा योजावयाच्या असल्या, तर त्या पदार्थाच्या आकारावरून सोईच्या वाटतील अशा, व परस्परांवर लंब असतील अशा, तीन सरळ रेषा (म्हणजे कडा अथवा अंतरें) निवडून काढितात; आणि त्यांना लांबी इत्यादिक पांच संज्ञांपैकीं कोणत्यातरी तीन संज्ञा देतात. पण उंची व खोली ह्या संज्ञा, त्या तीन रेषांपैकीं एखादी क्षितिजावर लंब असली, तर तिला मात्र (प्रसंगवशात्) देतात. मेज, पुस्तक, खांब, विहीर, खळगी व ओटा ह्यांचीं तीन तीन रेषापरिमेयें मनांत आणिल्यानें

वरचें म्हणणें ध्यानांत येईल. कोणत्याही पदार्थाच्या अवकाशामध्यें अशा तीन सरळरेषा कल्पितां येतात; म्हणून "प्रत्येक पदार्थाला तीन रेषापरिमेयें असतात." त्यांना भूमितीमध्यें लांबी, रुंदी व जाडी ह्याच संज्ञा देतात. "परस्परांवर लंब" अशा तिहींपेक्षां जास्त रेषा असणें संभवत नाहीं. म्हणून "कोणत्याही पदार्थाला तिहींपेक्षां जास्त रेषापरिमेयें असणें संभवत नाहीं."

(२) पदार्थाच्या एखाद्या पातळीच्या (म्हणजे पृष्ठाच्या अथवा क्षेत्राच्या) संबंधानें लांबी इत्यादिक संज्ञा योजावयाच्या असल्या, तर त्या पातळीच्या आकारावरून सोईवार दिसतील अशा, व परस्परांवर लंब असतील अशा, दोन सरळ रेषा निवडून काढितात; आणि त्यांपैकीं एखादी मोठी असल्यास तिला लांबी व धाकटीला रुंदी ह्मणतात. दोन्ही सारख्या असल्यास कोणत्या तरी एकीला लांबी व दुसरीला रुंदी म्हणतात. प्रत्येक सरळ पातळीमध्यें परस्परांवर लंब अशा दोन रेषा कल्पितां येतात; ह्मणून "प्रत्येक पातळीला लांबी व रुंदी हीं दोन रेषापरिमेयें असतात." "एकाच पातळीमध्यें परस्परांवर लंब अशा दोहोंपेक्षां जास्त रेषा काढितां येणें संभवत नाहीं;" ह्मणून पातळीला दोहोंपेक्षां जास्त रेषापरिमेयें असणें संभवत नाहीं.

(३) कोणत्याही एकाच रेषेविषयीं (म्हणजे पातळीच्या एकाच कडेविषयीं अथवा एकाच अंतराविषयीं) स्वतंत्रपणें विचार करावयाचा असला, तर त्या रेषेला पातळी अथवा अवकाश ह्यांच्या संबंधानें जरी लांबीखेरीज एखादी संज्ञा प्राप्त होण्याचा संभव असला, तरी तिला लांबी हीच संज्ञा देतात.

८. **महत्त्व**.–(१) पदार्थानें व्यापिलेला अवकाश, (२) त्याचीं एक किंवा अनेक क्षेत्रें (ह्मणजे पातळ्या अथवा पृष्ठें) आणि (३) त्याची लांबी, रुंदी व जाडी (ह्मणजे रेषा) ह्या प्रत्येक परिमेयाला पदार्थाचें "महत्त्व" अशी जातिवाचक संज्ञा देतात. (रा. ब. केरोपंत नाना ह्यांच्या अंकगणितांतील विविधपरिमाणांचे भेद पहा.) हाच अर्थ बिंदूच्या व्याख्येंतील "महत्त्व" ह्या शब्दाचा समजावा.

९. **स्थिति.**–विवक्षित पदार्थ (विवक्षित पातळीवर अथवा अवकाशांत) अमुक ठिकाणीं आहे, असें नेमकें सांगणें, ह्याला त्या पदार्थाची "स्थिति" सांगणें असें भूमितींत ह्मणतात. जसें "ह्या मेजाच्या पातळीवरचा हा ठिपका त्या पातळीच्या (परस्परांवर लंब असणाऱ्या) ह्या दोन कडांपैकीं प्रत्येकीच्या अमुक अमुक अंगास व प्रत्येकीपासून अमुक अमुक अंतरावर आहे" असें सांगितलें, तर त्या ठिपक्याचें मेजाच्या पातळीवरील ठिकाण नेमकें सांगितलें जाईल; ह्मणून ही त्या ठिपक्याची "स्थिति" होय. "हें पुस्तक, ह्या दोन भिंतींच्या पातळ्या व जमीन ह्या तीन (परस्परांवर लंब असणाऱ्या) पातळ्यांपैकीं प्रत्येकीच्या अमुक अमुक अंगास व प्रत्येकीपासून अमुक अमुक अंतरावर आहे" असें सांगितलें, तर ह्याचें अवकाशांतलें ठिकाण नेमकें सांगितलें जाईल; ह्मणून ही ह्या पुस्तकाची (ह्या वेळची) स्थिति होय. शहरें, गांवें इत्यादिकांची भूपृष्ठावरची स्थिति सांगण्याकरितां भूगोलामध्यें त्यांचे अक्षांश व रेखांश सांगतात. सारांश "विवक्षित पातळीवर अथवा अवकाशांत अमुक (विशेष) ठिकाणीं असणें" हा जो पदार्थाचा धर्म, त्याला भूमितींत "स्थिति" ह्मणतात. हा स्थिति शब्दाचा अर्थ त्याच्या व्यावहारिक अर्थापासून फारसा भिन्न नाहीं, हें उघड आहे.

१०. **बिंदु.**–कोणत्याही द्रव्यघटित पदार्थाला प्रत्येक प्रकारचें थोडेंतरी महत्त्व आणि स्थिति हीं असावयाचींच. परंतु ज्याचें प्रत्येक प्रकारचें महत्त्व फार सूक्ष्म दिसतें, त्याच्या केवळ स्थितीचाच जर विचार करावयाचा असला, तर त्याला महत्त्व मुळींच नाहीं (अर्थात् त्याचे भाग करितां येत नाहींत व त्यांमध्यें परिमेयता मुळींच नाहीं) असें मानून त्याला भूमितीमध्यें "बिंदु" ही संज्ञा देतात. सारांश व्यवहारांत ज्याला बिंदु अथवा परमाणु ह्मणतात, तसल्या "अतिसूक्ष्म दिसणाऱ्या पदार्थाची नुसती स्थिति" हा बिंदु शब्दाचा भूमितांतला अर्थ होय.

नुसती स्थिति असणें व महत्त्वाचा अभाव हे धर्म रेषेच्या शेवटामध्येंही आहेत, ह्मणून रेषेचीं शेवटें हीं बिंदुरूपच असतात.

११. अवकाशादिकांच्या लक्षणांतील विरोधांचा परिहार.–ह्या एकंदर वर्णनावरून ध्यानांत येईल कीं, अवकाश, पातळी, रेषा व बिंदु हे द्रव्यघटित पदार्थ नाहींत. पदार्थांच्या गुणासारख्या केवळ मनानेंच ग्राह्य अशा ह्या गोष्टी आहेत; तथापि ह्यांच्याविषयीं जेव्हां (युक्लिडच्या सिद्धांतांतल्या सारखा) गहन विचार करावयाचा असतो, तेव्हां ज्यांच्यावर ह्या बिंदुरेषादिकांचा आरोप करितां येईल, असे कोणते तरी पदार्थ सतत डोळ्यांपुढें ठेविल्याखेरीज तो गहन विचार करणें बहुधा साधत नाहीं. ह्याकरितां ज्यांचे धर्म बिंदुरेषादिकांच्या लक्षणांतील धर्मांपासून फारसे भिन्न नसतील, असे (कागदावरचे ठिपके इत्यादिक) पदार्थ निवडून काढून ते बिंदुरेषादिकांचे प्रतिनिधि मानितात; आणि त्यांच्या उक्तलक्षणांहून भिन्न असे जे धर्म त्या प्रतिनिधींमध्यें दिसून येतील, ते त्यांच्या ठायीं नाहींतच अशी कल्पना करितात. जसे ह्या ठिपक्याला भूमितींतला बिंदु म्हटलें, ह्मणजे त्याचे ठायीं स्थिति हा एकच धर्म आहे, महत्त्वादिक दुसरा कोणताही धर्म नाहीं, असें मानावयाचें. हे असले संकेत स्पष्टपणें सांगण्याकरितांच भूमितिविषयक ग्रंथांमध्यें "ज्यास (ह्मणजे ज्या पदार्थास) स्थिति मात्र आहे, महत्त्व मुळींच नाहीं (असें मानिलें असतें) त्याला बिंदु ह्मणावें." अशा अर्थाचीं बिंदुरेषादिकांचीं लक्षणें करून ठेविलेलीं असतात. तस्मात् त्या लक्षणांमध्यें विरोध मुळींच नाहीं, हें स्पष्ट झालें.

१२. सरलरेषादिकांच्या लक्षणांविषयीं शंका व तिचा परिहार.–सरळरेषा, वक्ररेषा, सरळ पातळी, वक्र पातळी, वर्तुळ, गोल इत्यादिकांच्या भूमितींतल्या लक्षणांमध्यें जो वस्तुस्थितीशीं विरोध भासतो त्याचा परिहार देखील असाच करावयाचा कीं, वर्तुळाच्या भूमितींतल्या लक्षणाशीं नेमकें जुळणारें वर्तुळ आयतें सांपडणें अथवा तयार करितां येणें, हें जरी असंभाव्य आहे; तरी भूमितींत ज्याला वर्तुळ ह्मटलें, त्यामध्यें भूमितींतल्या वर्तुळाच्या लक्षणापेक्षां जी न्यूनता दिसून येईल, ती न्यूनता त्यामध्यें नाहीं, असें मानून त्याविषयीं विचार करावयाचा, असा ग्रंथकारांचा संकेत असतो. तो

स्पष्ट करण्याकरितां वर्तुळाचें तसें लक्षण केलेलें असतें; म्हणून त्यांत कांहीं विरोध नाहीं. ह्याप्रमाणेंच सरळरेषादिकांच्या लक्षणांविषयीं समजावें. तसेंच वर्तुळादिकांच्या व्याख्यांच्या भाषेवरून, अशा प्रकारच्या आकृति सृष्टींत असतातच असा ग्रंथकर्त्याचा उद्देश भासतो; परंतु तसा नाहीं. "जर अमुक प्रकारची आकृति आहे असें मानिलें, तर तिला अमुक नांव द्यावयाचें," हा संकेत त्यानें व्याख्येंत सांगितलेला असतो, असें सर्वत्र समजावें.

१३. बिंदुरेषादिकांचे भूमितींतले अर्थ पृथगादानानें समजतात.— आतां हे ग्रंथकारांचे संकेत स्पष्टपणें सांगितले असतां विद्यार्थ्यांच्या ध्यानांत येण्यास फारशी अडचण पडेल असें वाटत नाहीं. कांकीं, व्यक्तीच्या एखाद्या विशेष धर्माविषयीं विचार करीत असतां तिच्या तदितर धर्मांकडे दुर्लक्ष करण्याचे (किंबहुना ते इतर धर्म तीमध्यें नाहींतच असें मानण्याचे) प्रसंग मनुष्याला पदापदीं येतात. ह्यामुळें मनाला ती संवय साहजिकच झालेली असते. जसें—"मुंबईबेट पुण्याचे वायव्येस सुमारें १०० मैलांवर आहे" ह्या वाक्यांत मुंबई व पुणें ह्यांच्या स्थितीखेरीज त्यांच्या महत्त्वादिक इतर धर्मांकडे लक्ष द्यावयाचें नाहीं (किंबहुना ते त्यामध्यें नाहींतच असें मानावयाचें) हें कधीं कोणाला स्पष्ट सांगावें लागत नाहीं. "हा लांकडी फूट खरा आहे किंवा खोटा आहे?" "ह्या मेजावर घालावयास तो रुमाल पुरेल किंवा ती सकलाद पुरेल?" "ह्या दोन पेट्यांपैकीं मोठी कोणती"? ह्या प्रश्नांचीं उत्तरें देतेवेळीं, फूट, मेज, रुमाल, सकलाद, पेटी ह्यांच्या कोणत्याकोणत्या धर्मांचें ग्रहण करावयाचें व कोणत्या गोष्टींकडे सर्वांशीं दुर्लक्ष करावयाचें, हें अप्रौढ मनुष्यास देखील सहज समजतें. मग कागदावरच्या ठिपक्याला नुसती स्थिति आहे, असें मानणें; ह्या रेघेला नुसती लांबी आहे; असें मानणें; ह्या फळ्याला नुसतें पृष्ठ आहे, असें मानणें; ह्यांत अवघड तें काय? व्यक्तीवरून जातीची कल्पना जी मनुष्याच्या मनांत अगदीं अप्रौढ दशेंत देखील येते, ती अशा पृथगादानेंच येते. सारांश मनुष्याच्या मनाला आपोआप प्राप्त होणारी जी ही

पृथगादानशक्ति तिची योजना ग्रंथकर्त्यांच्या संकेतांस अनुसरून केल्यानें बिंदुरेषादिकांचे भूमितींतले अर्थ हळू हळू ध्यानांत येतील.

१४. **समर्याद व अमर्यादरेषा.**—रेषा, पातळी व अवकाश ह्यांचें एथवर जें वर्णन केलें, त्यांमध्यें तीं सारीं द्रव्यघटित पदार्थांच्या संबंधाचींच परिमेयें आहेत, असें दाखविलें. त्यावरून तीं सारीं भूमितींत सर्वत्र समर्यादच मानावयाचीं, असा कदाचित् समज होईल. परंतु तसें नाहीं. त्यांचीं स्वरूपें चांगलीं ध्यानांत यावीं एवढ्याच उद्देशानें त्यांचें वर्णन पदार्थांस लक्षून केलें. भूमितीमध्यें अनेक प्रसंगीं रेषा व पातळी हीं परिमेयें अमर्यादही मानावीं लागतात; आणि त्या प्रसंगीं अर्थात् द्रव्यघटित पदार्थांशीं त्यांचा मुळींच संबंध नाहीं, असें मानावें लागतें. आतां हीं परिमेयें अमर्याद मानून त्यांविषयीं विचार करीत असतां, कागदावरच्या ओळी इत्यादिक ज्या पदार्थांवर आपण त्यांचा आरोप करितों, ते समर्यादच असावयाचे, हें उघड आहे; तथापि त्या ओळी द्रव्यघटित पदार्थ असतांही ज्याप्रमाणें (पृथगादानानें) आपण त्यांस लांबी व स्थिति ह्यांखेरीज दुसरे कोणतेच धर्म नाहींत, असें मानितों, त्याप्रमाणेंच त्यांना मर्यादा नाहींत; असेंही मानावें; म्हणजे त्यांचीं जीं शेवटें दिसतात, तीं शेवटें नाहींत, असें मानावें, म्हणजे झालें.

१५. **बिंदुरेषादिकांचे पदार्थविज्ञानांतले अर्थ.**—बिंदु, रेषा व पातळी हे शब्द पदार्थविज्ञानांतही योजितात; परंतु ते तेथें द्रव्यघटित पदार्थांचे वाचक असतात. जसें, अगदीं बारीक कण हा त्या शास्त्रांतला बिंदु होय. अगदीं बारीक व सर्वत्र सारख्या रुंदीची व सारख्या जाडीची एखादी तार ही त्यांतली रेषा होय; आणि अगदीं पातळ व सर्वत्र सारख्या जाडीचा एखादा पत्रा ही त्यांतली पातळी होय. ह्या शब्दांच्या भूमितींतल्या व पदार्थविज्ञानांतल्या अर्थांमधील हा भेद पक्का ध्यानांत असावा.

१६ **कोन**—रेषा, पातळी व अवकाश ह्या भूमितींतल्या मुख्य परिमेयांच्या विचाराला साधनीभूत असे कोन हें भूमितींतलें चवथें परिमेय होय. त्याचेंही खरें स्वरूप विद्यार्थ्यांच्या ध्यानांत आं-

भीं येत नाहीं; ह्यामुळें कोनाच्या बाजू कमी जास्ती केल्या असतां, तो कोन कमी जास्ती होतो, असें आरंभीं वाटतें; परंतु ही गैरसमजूत आहे. त्या बाजूंची जी परस्परांशीं वक्रता असते, तिला भूमितींत " कोन " अशी संज्ञा देतात. त्या बाजूंच्या लहान मोठेपणाशीं कोनाचा कांहीं संबंध नाहीं. त्यांची परस्परांशीं वक्रता कायम ठेवून त्या कितीही वाढविल्या किंवा कमी केल्या, तरी त्यांचा कोन बदलत नाहीं. कोनाच्या लहानमोठेपणाच्या संबंधानें भूमितींतला असा संकेत आहे कीं, कोणबिंदु न हालवितां जर कोनाच्या बाजू एकमेकींपासून दूर दूर नेल्या, तर कोन वाढत जातो; जवळ जवळ आणिल्या, तर कमी कमी होत जातो; आणि दूर नेतां नेतां अथवा जवळ आणितां आणितां जर त्या दोन रेषांची एकच रेषा झाली, तर भूमितींतल्या कोनाच्या व्याख्येप्रमाणें अर्थात् कोन मुळींच नाहींसा झाला, असें मानावें लागतें.

१७. **रेषाकोणाव्यतिरिक्त कोन**.–कोन ही संज्ञा दोन सरलरेषांच्या मात्र वक्रतेला देतात, असें नाहीं. एक सरळ व एक वक्र रेषा दोन वक्ररेषा, एक रेषा व एक पातळी, अथवा दोन पातळ्या, ह्या दोहों दोहोंच्या वक्रतेलाही भूमितींत कोनच म्हणतात. परंतु हे सर्व कोन सरळरेषांच्याच कोनांनीं दाखवितात; ह्मणून हे स्वतंत्र कोन न मानिले तरी चालेल. ह्यांखेरीज दोहोंपेक्षां जास्त पातळ्या एकाच बिंदूंत मिळाल्या असतां त्यांच्या योगानें त्या बिंदूजवळ जो कोपरा तयार होतो, त्यालाही भूमितींत कोनच म्हणतात.

१८. **रेषादिकांची स्थिति**.–ह्या टिपणाच्या ९ व्या कलमांत स्थिति ह्या धर्माचें जें लक्षण सांगितलें आहे, त्यावरून उघड आहे कीं, तो धर्म रेषा, पातळी, अवकाश व कोन ह्यांमध्येंही असणें संभवतें; आणि भूमितीमध्यें विवक्षा असते त्या वेळीं तो त्यांच्यामध्यें आहे, असें मानितात. जसें, युक्लिडच्या पहिल्या पुस्तकाच्या दुसऱ्या सिद्धांतांत दिलेल्या रेषेच्या स्थितीची विवक्षा आहे, म्हणजे ती ज्या ठिकाणीं काढिलेली आहे, तेथून ती हालवावयाची नाहीं, असा संकेत आहे. २२ व्या सिद्धांतांत इच्छिलेल्या त्रिकोणाच्या स्थितीची

विवक्षा नाहीं, म्हणजे तो कोठेंही काढिला तरी चालेल, असा उद्देश आहे.

१९. **भूमितींतला ध्यानांत ठेवण्याजोगा संकेत.**-**अबक** त्रिकोणाच्या तीन बाजू फुटानें मोजिल्या, त्या अनुक्रमें ५,७,८ फूट भरल्या, असें समजा. आतां ह्या तीन संख्यांच्या धर्मावरून पाहतां ह्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षां जास्त आहे, असें सिद्ध झालें. परंतु एवढ्यावरूनच, ज्यांच्या बाजू ह्या त्रिकोणाच्या बाजूंपेक्षां लहान मोठ्या आहेत, अथवा ज्यांच्या बाजू फूटाखेरीज एखाद्या रेषापरिमाणानें मोजिल्या असतां निराळ्या संख्या उत्पन्न होतात, त्या त्रिकोणांस देखील ही गोष्ट लागू आहे, असें सिद्ध होत नाहीं. म्हणून ही गोष्ट प्रत्येक त्रिकोणास लागू आहे, असें **अबक** त्रिकोणास उद्देशून केलेल्या सिद्धतेवरूनच ठरावें अशी जर इच्छा असेल, तर त्याच्या बाजू विशेष परिमाणानें मोजून उत्पन्न होणाऱ्या संख्यांच्या धर्मांच्या आधारावर ती सिद्धता करितां कामा नये, हें उघड आहे. भूमितीमध्यें अवकाश, पातळी, व रेषा ह्यांच्या संबंधानें ज्या गोष्टी सिद्ध केल्या आहेत, त्या सर्व, तीं परिमेयें कितीही मोठीं अथवा कितीही सूक्ष्म असलीं व कोणत्याही परिमाणानें मोजिलीं, तरी त्यांस लागू पडतील, अशा आहेत. इतकेंच नाहीं, तर चौरसाची बाजू व त्याचा कर्ण ह्यांच्या सारिखीं जीं परिमेयें एकाच परिमाणानें मोजितां येणें असंभाव्य आहे, त्यांना देखील ह्या गोष्टी लागू पडणाऱ्या आहेत. ह्याकरितां "अवकाश, पातळी व रेषा हीं तीन परिमेयें विशेष परिमाणांनीं मोजून उत्पन्न होणाऱ्या संख्यांच्या धर्मांचा आधार भूमितीमध्यें कोठेंच घ्यावयाचा नाहीं." हा भूमितींतला संकेत पक्का लक्षांत ठेविला पाहिजे.

भूमितींत कोनाचें जें लक्षण मानिलें आहे, त्यावरून पाहतां कोन हें परिमेय समर्यादच मानिलें पाहिजे; आणि युक्लिडच्या भूमितीमध्यें तर कोन हा दोन काटकोनांपेक्षां कमीच मानिलेला आहे. म्हणून

जेव्हां अनेक कोनांची बेरीज कोनाच्या मर्यादेपेक्षां जास्त होते, तेव्हां ती दाखवितां यावी, एवढ्याच उद्देशानें काटकोन हें कोन मोजण्याचें एक परिमाण मानिलें आहे. त्याच्या योगानें प्रसंगवशात् इतर कोन मोजितात. (त्रिकोणमिति नांवाचा जो शुद्धगणिताचा भाग आहे, त्यांमध्यें मात्र कोनाच्या मोठेपणाला मर्यादाच नाहीं, असें मानितात.)

२०. **पदार्थविज्ञानादि विषयांत भूमितीच्या उपयोगाविषयीं शंका व तिचें निरसन.**—बिंदुरेषादिकांचीं भूमितींतलीं व पदार्थविज्ञानांतलीं लक्षणें भिन्न आहेत; सरळरेषादिकांच्या भूमितींतल्या लक्षणांशीं नेमक्या जुळणाऱ्या ज्यांच्या कडा, पृष्ठें, इत्यादिक आहेत, असे पदार्थ सृष्टींत सांपडणें किंवा करितां येणें संभवत नाहीं. ह्या गोष्टी जर खऱ्या आहेत, तर ह्यांस उद्देशून सिद्ध केलेले सिद्धांत पदार्थविज्ञानादि विषयांत कसे उपयोगीं पडणार? अशी शंका घेतात. ह्या शंकेचें उत्तर असें कीं "वर्तुळमध्यापासून समान अंतरांवरच्या ज्या समान असतात" हा सिद्धांत जरी भूमितींतलीं वर्तुळें व सरळ रेषा ह्यांस उद्देशून सिद्ध केलेला आहे, आणि तसलीं वर्तुळें व सरळ रेषा सृष्टींत असणें असंभाव्य हें जरी खरें आहे, तरी सृष्टींतल्या वर्तुळादिकांमध्यें त्यांच्या भूमितींतल्या लक्षणाहून भिन्नता ज्या मानानें कमी असेल, त्या मानानें सृष्टींतल्या वर्तुळादिकांविषयीं ही त्या सिद्धांतांच्या खरेपणाचा अनुभव येईल, ह्यांत संशय नाहीं. अशाच समजुतीनें भूमितींतले (व एकंदर शुद्धगणितांतले) सिद्धांत पदार्थविज्ञानादि विषयांत आणि व्यवहारांत योजितात.

रेषा, पातळी, अवकाश, व कोन ह्यांच्या भेदोपभेदांचीं नांवें.

१. रेषा आणि पातळी ह्यांचे "सरळरेषा" आणि "वक्ररेषा," "सरळपातळी" आणि "वक्रपातळी" असे एका दृष्टीनें दोन दोन भेद मानिले आहेत; आणि "समर्याद रेषा" व "अमर्याद

रेषा, " " समर्याद पातळी " व " अमर्याद पातळी " असे दुसऱ्या दृष्टीनें दोन दोन भेद मानिले आहेत.

२. कोन ही संज्ञा ज्यांच्या वक्रतेला द्यावयाची त्यांस लक्षून कोनाचे भेद केले असतां " रेषाकोण, " " रेषापृष्ठकोण " व " पृष्ठकोण " असे मुख्य तीन भेद होतात; आणि त्या वक्रतेच्या बाह्यांतरत्वास लक्षून भेद केले असतां " अंतर्वक्रकोण " व " बहिर्वक्रकोण " असे दोन भेद होतात. (अंतर्वक्रांचा कोन असा विग्रह समजावा.)

रेषांच्या सरलत्ववक्रत्वांस लक्षून रेषाकोणाचे भेद कल्पिले असतां " सरलरेषाकोण, " " सरलवक्ररेषाकोण " व " वक्ररेषाकोण " असे तीन भेद होतात. ह्याप्रमाणेंच रेषापृष्ठकोण व पृष्ठकोण ह्यांचेही भेद होतील.

पृष्ठांच्या संख्येवरून " द्विपृष्ठ कोण " व " बहुपृष्ठकोण " (म्हणजे दोहोंपेक्षां जास्त पातळ्यांनीं झालेला कोन) असे पृष्ठकोणाचे दोन भेद मानितात. बहुपृष्ठकोणालाच " घनकोण " असेंही म्हणतात. ह्या खोलीच्या व ह्या पुस्तकाच्या आठ आठ कोपऱ्यांपैकीं प्रत्येक कोपरा तीन तीन पातळ्यांनीं झालेला आहे, म्हणून तो प्रत्येक घनकोण होय. खोलीचा प्रत्येक कोपरा हा " अंतर्वक्रघनकोण " होय; आणि पुस्तकाचा प्रत्येक कोपरा हा " बहिर्वक्रघनकोण " होय.

सरलरेषाकोनाचे " अंतर्वक्रकोण " व " बहिर्वक्रकोण " असे जे मुख्य दोन भेद मानितात, त्यांचीं लक्षणें अशीं:—

" कोन करणाऱ्या दोन रेषांपैकीं एक रेषा कोणबिंदूच्या पलीकडे वाढविली असतां, त्या बिंदूजवळ होणाऱ्या दोन कोनांपैकीं ज्यांतून ती जाते, त्याला बहिर्वक्रकोण म्हणावें; व दुसऱ्याला अंतर्वक्रकोण म्हणावें." ह्या दोहोंपैकीं अंतर्वक्रकोणाचाच काय तो ह्या ग्रंथांत विचार केलेला आहे; म्हणून इतःपर येथें "कोन" ह्या शब्दाचा अर्थ " अंतर्वक्रसरलरेषाकोण " असा समजावयाचा.

कोनाचे (ह्मणजे अंतर्वक्रसरलरेषाकोणाचे) " काटकोन " व

"तिर्यक्कोण" (म्हणजे काटकोनाहून भिन्न कोन) असे मुख्य दोन भेद कल्पिले आहेत; आणि तिर्यक्कोणाचे "विशालकोण" व "लघुकोण" असे दोन भेद कल्पिले आहेत.

३. आकृतीचे मुख्य भेद दोन. "घनाकृति" (म्हणजे एक अथवा अनेक पातळ्यांनीं सर्वांगांनीं मर्यादिलेला अवकाश) व "पृष्ठाकृति" (म्हणजे एक किंवा अनेक रेषांनीं सर्वांगांनीं मर्यादिलेली पातळी.)

घनाकृतीची मर्यादा दाखविणाऱ्या पातळ्यांच्या सरलवक्रतेच्या संबंधानें तिचे तीन भेद होतात. ते असे, "सरलपृष्ठमर्यादित घनाकृति" (उदा॰ पुस्तक, खोली इ॰), "सरलवक्रपृष्ठमर्यादित घनाकृति" (उदा॰ लिंबाची फांक, पंचपात्र इ॰), व "वक्रपृष्ठमर्यादित घनाकृति" (उदा॰ गोल, चपटी गुंज इ॰).

पातळीच्या सरलवक्रतेच्या संबंधानें पृष्ठाकृतीचे दोन भेद होतात. ते असे, "सरलपृष्ठाकृति" (उदा॰ त्रिकोण, वर्तुल, वर्तुलखंड इ॰) आणि "वक्रपृष्ठाकृति" (उदा॰ गोलाच्या पृष्ठावरील रेषांनीं झालेले गोलीय त्रिकोण इ॰).

ह्या ग्रंथामध्यें सरलपृष्ठाकृतींचाच काय तो विचार करावयाचा आहे, म्हणून इतःपर येथें "आकृति" ह्या शब्दाचा अर्थ "सरलपृष्ठाकृति" असा समजावयाचा.

आकृतीची (म्हणजे सरलपृष्ठाकृतीची) मर्यादा दाखविणाऱ्या रेषांच्या सरलत्ववक्रत्वांस लक्षून तिचे भेद केले असतां "सरलरेषाकृति," "वक्ररेषाकृति" व "सरलवक्ररेषाकृति" (अथवा मिश्राकृति) असे तीन मुख्य भेद होतात.

सरलरेषाकृतीच्या भुजसंख्येच्या संबंधानें "त्रिकोण," "चौकोन" व "बहुकोण" असे तिचे तीन भेद मानिले आहेत.

एकाच बाजूची सरलरेषाकृति असणें संभवत नाहीं, हें सरलरेषा व आकृति ह्यांच्या लक्षणांवरूनच सिद्ध आहे, व दोन सरलरेषांनीं आकृति होत नाहीं, असें प्रत्यक्षप्रमाण मानिलें आहे; म्हणून सरलरेषाकृतीला निदान तीन बाजू असतात, असें सिद्ध झालें.

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या समानतेला व असमानतेला लक्षून " सम-भुजत्रिकोण," " समद्विभुजत्रिकोण " व " विषमभुजत्रिकोण " असे त्याचे तीन भेद मानिले आहेत.

कांहीं ग्रंथकार समद्विभुजत्रिकोणाची व्याख्या " ज्याच्या दोन बाजू समान असतात, त्याला समद्विभुजत्रिकोण म्हणावें " अशी करितात; म्हणजे " दोनच " असें ह्मणत नाहींत. त्यांच्या मतीं बा-जूंच्या समविषमतेला लक्षून " समद्विभुज त्रिकोण " व " विषम-भुजत्रिकोण " हे त्रिकोणाचे मुख्य दोन भेद; आणि समद्विभुज-त्रिकोणाचे, " ज्याच्या दोनच बाजू समान असतात तो " आणि " ज्याच्या तिन्ही बाजू समान असतात तो " असे दोन भेद.

त्रिकोणाच्या कोनांच्या जातीस लक्षून त्याचे भेद केले असतां " काटकोन त्रिकोण," "विशालकोण त्रिकोण" व " लघुकोण त्रि-कोण " असे तीन भेद होतात. (ह्यांपेक्षां जास्त भेद संभवत ना-हींत, हें पु० १ सि. १७ ह्याच्या आधारानें सिद्ध होतें.)

चौकोनाच्या " सर्व बाजूंची समानता व सर्व अथवा कांहीं बाजूं-ची असमानता " ह्यांपैकीं एक, आणि " सर्व कोन काटकोन असणें व सर्व अथवा कांहीं कोन तिर्यक्कोण असणें " ह्यांपैकीं एक, अशा दोन धर्मांस एकदम लक्षून "चौरस," "काटकोनचौकोन," "समभु-ज चौकोन" व " विषमभुज चौकोन " असे चौकोनाचे चार भेद मानिले आहेत.

चौकोनांच्या बाजूंच्या समांतरतेला लक्षून त्याचे भेद कल्पिले अ-सतां " समांतरभुज चौकोन," " समांतरद्विभुज चौकोन " (म्हणजे ज्याच्या दोनच बाजू समांतर आहेत असा चौकोन) व "असमांतर-भुज चौकोन " असे तीन भेद होतात.

युक्लिडच्या गणितविषयक ग्रंथांतील पहिल्या सहा पुस्तकांमध्यें एकाच सरलपातळींतील रेषा व आकृति ह्यांविषयींच विचार के-लेला आहे, आणि ह्या ग्रंथांत त्यांपैकीं चारच पुस्तकांतील विषय सांगितला आहे; म्हणून त्या ग्रंथांत भिन्न पातळ्यांतील रेषा व आ-कृति ह्यांचा विचार करावयाचें कारण पडणार नाहीं.

टिपणांतील संक्षेप.

ग्रंथाच्या आरंभीं सांगितलेल्या संक्षेपांखेरीज टिपणांमध्यें जे संक्षेप योजिले आहेत; त्यांचे अर्थ उदाहरणांनीं स्पष्ट करून दाखवितों.

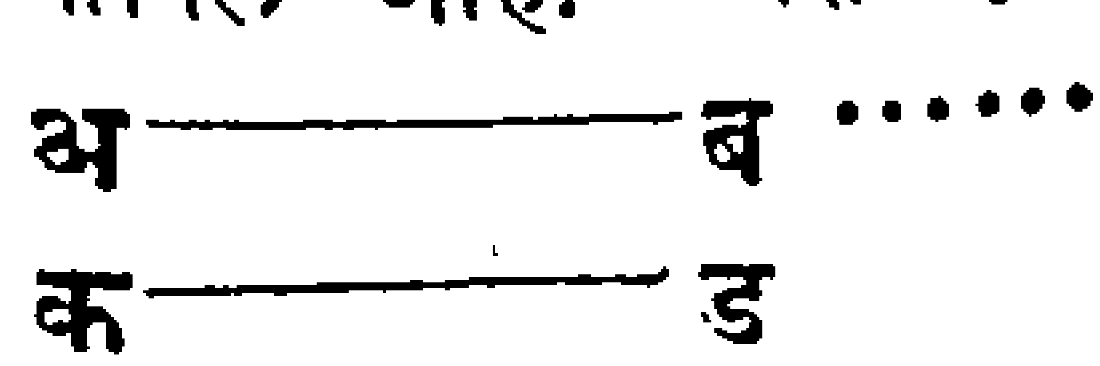
∵ ह्याचा अर्थ	"ज्यापक्षीं."
∴ ह्याचा अर्थ	"म्हणून" अथवा "त्यापक्षीं."
जातिप्र.	"जातिप्रतिज्ञा."
व्यक्तिप्र.	"व्यक्तिप्रतिज्ञा."
क्र. री.	"क्रमिक रीतीनें."
क्र. वि. री.	"क्रमविरुद्ध रीतीनें."
त्रि.	"त्रिकोण."
समां. भु. चौ.	"समांतरभुजचौकोन."
प. १	"पक्षांतील (म्हणजे प्रतिज्ञेंत दिलेल्या गोष्टींतील) पहिली गोष्ट."
सा.	"साध्य (म्हणजे जी गोष्ट सिद्ध करावयाची ती अथवा जो कृति करावयाची ती.)"
अ+ब ह्याचा अर्थ...	"अ परिमेयामध्यें ब परिमेय मिळवून आलेली बेरीज."
२ अ	"अ परिमेयाची दुप्पट."
अ−ब	"अ परिमेयांतून ब परिमेय वजा करून राहिलेली बाकी."
२ (अ+ब)	"अ आणि ब ह्या परिमेयांच्या बेरजेची दुप्पट."
अ=ब	"अ आणि ब हीं परिमेयें समान आहेत."

अ>ब	... ...	"अ हें परिमेय ब ह्या परिमेयापेक्षां मोठें आहे."
अ<ब	... ...	"अ परिमेयापेक्षां ब परिमेय मोठें आहे."
२ (अब)	... ...	"अब ह्या रेषेची दुप्पट."
अब, कड का. ह्याचा अर्थ	...	"अब आणि कड ह्या रेषांचा काटकोनचौकोन."
२ (अब, कड का.)	... ...	"अब, कड ह्या रेषांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट."
अब व. चौ.	... ...	"अब रेषेवरील चौरस."
२ (अब व. चौ.)	... ...	"अब रेषेवरील चौरसाची दुप्पट."

गृहीतकृत्यांवर टिप्पण.

१. **पहिलें गृहीतकृत्य.**—दोन बिंदु दिले असले, व त्यांपैकीं एकापासून दुसऱ्यापर्यंत सरलरेषा काढणें, ही कृति करावयाची असली, तर ती करितां येते, असें ह्यांत मानिलें आहे.

२. **दुसरें गृहीतकृत्य.**—ह्यांतील "पाहिजे तितकी लांब करितां येते" ह्या शब्दावरून असा भास होतो कीं, "समर्याद रेषा वाढवून ती सारी किंवा तिचा वाढविलेला भाग विवक्षित लांबीचा किंवा दुसऱ्या विवक्षित रेषेएवढा करितां येतो," असें ह्यांत मानिलें आहे; परंतु असें अगदीं समजावयाचें नाहीं. "जी रेषा समर्याद आहे असें दिलें असेल, ती अमर्याद करावयाची असल्यास करितां येते" एवढेंच काय तें ह्या गृहीतकृत्यांत मानिलें आहे. जसें अब रेषा समर्याद दिली आहे, आणि ती ब बिंदूच्या पलीकडे त्याच दिशेंत अमर्याद वाढलेली आहे, असें मानण्याची जर गरज आहे, तर ती अमर्याद मानितां येते" एवढेंच काय तें ह्या गृहीतकृत्याच्या आधारानें घ्यावया-



चें. ती **ब** बिंदूपलीकडे वाढवून ती सारी किंवा तिचा वाढविलेला भाग **कड** ह्या दुसऱ्या समर्याद रेषेएवढा करावयाचा असल्यास करितां येतो, असें ह्यांत मानिलें नाहीं.

३. **तिसरें गृहीतकृत्य.**-- ह्याचा अर्थ असा समजावयाचा कीं, दिलेल्या समर्याद रेषेचें एक टोंक ज्याचा मध्य होईल, व ती सारी रेषा ज्याची त्रिज्या होईल, असें वर्तुल काढावयाचें असल्यास, तें काढितां येतें, असें मानिलें आहे. परंतु दिलेल्या रेषेच्या टोंकांखेरीज एखादा बिंदु मध्य कल्पून तेवढ्या त्रिज्येनें वर्तुल काढावयाचें असल्यास, तें काढितां येतें, असें ह्यांत मानिलें नाहीं, हें "त्यापासूनच" ह्या शब्दावरून स्पष्ट आहे.

४. ह्या तीन गृहीतकृत्यांवरून युक्लिडचा उद्देश असा दिसतो कीं, "दोन बिंदु सांधणें" व "समर्यादरेषा अमर्याद करणें" ह्या दोन कृत्यांकरितां आणखी, व "वर्तुल काढणें" ह्या कृत्याकरितां कर्कट (म्हणजे कंपास) अशीं दोनच साधनें भूमितींतलीं कृत्यें करावयास घ्यावयाचीं. परंतु "रेषेची लांबी मोजणें," "विवक्षित बिंदूपासून विवक्षित रेषेएवढी रेषा काढणें," व "एका ठिकाणच्या दोन बिंदूंमधील अंतराएवढें अंतर दुसऱ्या ठिकाणीं दाखविणें" हीं जीं कृत्यें आखणी व कर्कट ह्यांच्या योगानें आपण व्यवहारांत करितों, तीं ह्यांच्या योगानें करितां येतात, असें युक्लिड ह्यानें मानिलें नाहीं.

५. ह्या तीन गृहीतकृत्यांखेरीज कोणतेंही कृत्य करितां येतें असें आधारावांचून मानावयाचें नाहीं, असा युक्लिडचा संकेत दिसतो. आतां (पहिल्या पुस्तकाच्या ५ व्या, ९ व्या व १२ व्या सिद्धांतांत सांगितल्याप्रमाणें) "अमुक रेषेंत किंवा पातळींत अमुक ठिकाणीं बिंदु घे" असें वारंवार सांगावें लागतें; आणि "ह्या कृत्याला आधार कोणता?" असें शिकणारे आरंभीं विचारितात. आतां वस्तुतः ह्या कृत्यास आधाराची आवश्यकता नाहीं, हें बिंदूच्या लक्षणावरून उघड आहे; तथापि हें कृत्य करितां येतें, असें मानावयास सांगणें हें आरंभीं विद्यार्थ्यांच्या समजुतीला फार सोईचें वाटतें. म्हणून "को-

णत्याही रेषेंत, पातळींत किंवा अवकाशांत बिंदु घेतां येतो" हें नवीन एक गृहीतकृत्य मानून आपण ह्याला "अगृहीत कृत्य" अशी संज्ञा देऊं.

६. वर सांगितलेल्या गृहीतकृत्यांखेरीज, एक रेषा, कोन व आकृति हीं उचलून अनुक्रमें दुसरी रेषा, कोन व आकृति ह्यांशीं विशेष रीतीनें जोडणें. हीं कृत्येंही करितां येतात, असें मानावें लागतें. हीं तीन कृत्यें मिळून एकच गृहीतकृत्य समजून त्याला आपण "इ गृहीतकृत्य" अशी संज्ञा देऊं. "इ गृहीतकृत्य" खालीं लिहिल्याप्रमाणें म्हणावें:-

(१) दोन रेषांपैकीं एकीचें एक टोंक दुसरीच्या एका टोंकाशीं मिळून त्या रेषांची दिशा एक होईल, अशा रीतीनें एक रेषा दुसरीवर ठेवितां येते.

(२) दोन कोनांपैकीं एकाचा कोणबिंदु दुसऱ्याच्या कोणबिंदूशीं मिळून त्यांच्या एकेका बाजूंची दिशा एक होईल, अशा रीतीनें एक कोन दुसऱ्या कोनावर ठेवितां येतो.

(३) दोन आकृतींपैकीं एकीचा एक बिंदु दुसऱ्या आकृतीच्या एका बिंदूशीं मिळून त्यांच्या त्या बिंदूपासून निघालेल्या एकेका रेषांची दिशा एक होईल, अशा रीतीनें एक आकृति दुसऱ्या आकृतीवर ठेवितां येते.

प्रत्यक्षप्रमाणांविषयीं टिप्पण.

(१) प्रत्यक्षप्रमाणांमध्यें "पदार्थ," "समान व असमान पदार्थ," "बेरीज," "वजाबाकी," "पट" आणि "हिस्सा" हे शब्द वारंवार योजावे लागतात; म्हणून त्यांचे शुद्धगणितांतले अर्थ एकवार स्पष्ट करितों.

पदार्थ.-ह्या शब्दाचा अर्थ शुद्ध गणितांत "संख्या, अवकाश, पातळी, रेषा, कोन, वजन, किंमत, काल, प्रेरणा इत्यादिक कोणतेंही परिमेय" असा समजावयाचा. एकंदरींत साऱ्या शुद्ध गणितामध्यें जो सिद्धांत पदार्थाला उद्देशून सांगितलेला दिसेल, तो पदा-

र्थांच्या संबंधाच्या (संख्या, अवकाश, क्षेत्र, लांबी, वजन, किंमत इ०) कोणत्या तरी परिमेयालाच उद्देशून सांगितलेला असला पाहिजे; पदार्थांच्या द्रव्याला उद्देशून सांगितलेला असणार नाहीं; कारण पदार्थांच्या द्रव्याशीं शुद्धगणिताचा कांहीं संबंध नाहीं. म्हणून एखादें पदार्थविषयक प्रत्यक्षप्रमाण जेथें योजावयाचें असेल, तेथें तें कोणत्या परिमेयाला उद्देशून योजावयाचें, हें स्पष्टपणें दाखवावें. जसें "हीं दोन पुस्तकें ह्या तिसऱ्या एकाच पुस्तकाशीं प्रत्येकीं समान आहेत, म्हणून पहिल्या प्र. प्रमाणावरून हीं परस्पर समान आहेत" हें म्हणणें अगदीं संदिग्ध झालें. हा सिद्धांत पुस्तकांच्या किंमती, लांब्या इत्यादिकांपैकीं कोणत्या परिमेयाला उद्देशून म्हटला आहे, हें स्पष्टपणें दाखविलें पाहिजे.

सारांश पदार्थ शब्दाचा ह्या ग्रंथांतला अर्थ "कोणतेंही परिमेय" असा ठरला; म्हणून ८ वें, १० वें, ११ वें, व १२ वें हीं खेरीज करून बाकीचीं सर्व प्रत्यक्षप्रमाणें कोणत्याही परिमेयाला लागू आहेत, असें समजावें.

समान व असमान पदार्थ (अथवा **परिमेयें**).–दोन सजातीय परिमेयें एकाच परिमाणानें मोजिलीं असतां जर एकच संख्या उत्पन्न होईल, तर तीं "समान परिमेयें" म्हणावीं; आणि भिन्न संख्या उत्पन्न होतील, तर तीं "असमान परिमेयें" ह्मणावीं; व त्यांपैकीं ज्यापासून मोठी संख्या उत्पन्न होईल, तें दुसऱ्यापेक्षां मोठें ह्मणावें. जसें. एक त्रिकोण व एक चौकोन हीं सजातीय परिमेयें चौरसफूट इत्यादिक एकाच क्षेत्रपरिमाणानें मोजिलीं असतां, जर त्या दोहींपासून त्या परिमाणांची एकच संख्या उत्पन्न होईल, तर तीं समान म्हणावीं.

समान व असमान हे शब्द दोहोंपेक्षां जास्त परिमेयांस उद्देशून योजिले असतां, त्यांपैकीं प्रत्येक परिमेय इतरांपैकीं प्रत्येकाशीं समान अथवा असमान समजावयाचें, असा उद्देश असतो. जसें, "**अ**, **ब**, **क** ह्या तीन रेषा समान आहेत" ह्या वाक्याचा अर्थ "**अ** आणि **ब**, **ब** आणि **क** व **अ** आणि **क** ह्या प्रत्येक दोन दोन रेषा

सामन आहेत, " असा समजावा; आणि " ह्या तीन रेषा असमान आहेत " ह्याचा अर्थ " ह्यांपैकीं प्रत्येक दोन दोन रेषा परस्परांशीं असमान आहेत " असा समजावा. " **अ, ब, क, ड** ह्या रेषा समान आहेत " ह्याचा अर्थ, " **अ** आणि **ब**, **अ** आणि **क**, **अ** आणि **ड**, **ब** आणि **क**, **ब** आणि **ड** व **क** आणि **ड** ह्या दोन दोन समान आहेत " असा समजावा. एकंदरींत " दोहोंपेक्षां जास्त पदार्थांची समानता " ह्याचा अर्थ पदार्थसंख्या व तीपेक्षां एकानें कमी असणारी संख्या ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धा इतक्या जोड्यांची समानता " असा असतो. ह्मणून चार पदार्थ परस्पर समान आहेत, असें जेव्हां सिद्ध करावयाचें असेल, तेव्हां (४×३÷२ म्हणजे) सहा जोड्यांची समानता ठरविली पाहिजे. पांच पदार्थांची परस्परांशीं समानता ठरवावयाची असल्यास, (५×४÷२ म्हणजे) दहा जोड्यांची समानता ठरविली पाहिजे. दोहोंपेक्षां जास्त पदार्थांची समानता ठरविण्याची सामान्य रीति १.४६ ह्यावरील प्रश्नांच्या सूचनेंत पहावी.

बेरीज.–एकाच जातीचीं अनेक परिमेयें अथवा त्यांच्या बरोबरीचीं परिमेयें एकत्र केलीं असतां जर त्याच जातीचें एक परिमेय तयार होईल, तर त्याला त्या परिमेयांची बेरीज ह्मणावें. जसें, विवक्षित दोन रेषा अथवा त्यांपैकीं एकीच्या किंवा दोहींच्या बरोबरीच्या रेषा एकत्र केल्या असतां जर एक रेषा तयार झाली, तर तिला त्या रेषांची बेरीज म्हणावें.

उपसिद्धांत –अनेक सजातीय परिमेयें कोणत्याही अनुक्रमानें एकत्र केलीं तरी बेरीज एकच येते.

वजाबाकी (अथवा **बाकी**).–दोन असमान परिमेयांपैकीं मोठ्याचा लहान परिमेयाएवढा भाग निराळा दर्शविला असतां जो मोठ्याचा भाग रहतो, त्याला त्या दोन परिमेयांची वजाबाकी (अथवा बाकी) म्हणावें.

उपसि. १.–दोन असमान परिमेयांची वजाबाकी व त्यांपैकीं लहान परिमेय ह्यांची बेरीज मोठ्या परिमेयाबरोबर असते.

उपसि. २.–मोठें परिमेय व बाकी ह्यांची वजाबाकी लहान परिमेयाबरोबर असते.

उपसि. ३– जर एका परिमेयामध्यें दुसरें मिळवून आलेल्या बेरजेंतून तें दुसरेंच परिमेय वजा केलें (अथवा आधीं वजा करून मग मिळविलें), तर तें पहिलेंच परिमेय उत्पन्न होतें.

पट-- अनेक सारख्या परिमेयांच्या बेरजेला त्यांपैकीं प्रत्येकाची, त्या परिमेयांच्या संख्येइतकी पट म्हणतात. जसें, दोन सारख्या रेषांची बेरीज ही त्यांपैकीं प्रत्येकीची दुप्पट होय. इ०

हिस्सा-- विवक्षित परिमेयाचे कांहीं समान भाग कल्पिले असतां, त्यांपैकीं प्रत्येकाला त्या परिमेयाचा, भागसंख्येइतका हिस्सा म्हणतात.

उपसि.– एका परिमेयाच्या कांहीं पटीबरोबर दुसरें परिमेय असल्यास, दुसऱ्याच्या तितक्याच हिश्शाबरोबर पहिलें असतें; आणि पहिल्याच्या कोणत्यातरी हिश्शाबरोबर दुसरें असल्यास, दुसऱ्याच्या तितक्याच पटीबरोबर पहिलें असतें.

(२) युक्लिडच्या ग्रंथामध्यें बारा प्रत्यक्षप्रमाणांखेरीज कांहीं प्रमेयें सिद्धतेवांचून स्वीकारिलेलीं दिसतात, त्यांपैकीं ज्यांना प्रत्यक्षप्रमाणें मानावयाचें योजिलें आहे, त्यांस अनुक्रमें अ, इ, उ, हीं नांवें देऊन तीं ग्रंथांत लिहिलीं आहेत. ह्यांखेरीज तिसऱ्या पुस्तकाच्या विसाव्या सिद्धांतामध्यें दोन प्रमेयें सिद्ध केल्यावांचून स्वीकारिलेलीं आहेत, तीं वस्तुतः युक्लिडच्या पांचव्या पुस्तकाच्या पहिल्या व पांचव्या सिद्धांतांचे विशेष प्रकार आहेत; म्हणून त्यांस प्रत्यक्षप्रमाणें म्हणणें योग्य नाहीं. तथापि सध्यां आपण तीं प्रत्यक्षप्रमाणेंच समजून त्यांना ए, ओ ह्या संज्ञा देऊं. तीं प्र. प्रमाणें अशीं:–

ए–" दोन पदार्थांच्या दुपटींची बेरीज, त्यांच्या बेरजेच्या दुपटीबरोबर असते."

ओ–' दोन असमान पदार्थांच्या दुपटींची वजाबाकी, त्यांच्या वजाबाकीच्या दुपटीबरोबर असते.'

(३) अ प्र. प्रमाणाच्या उपसिद्धांताची सिद्धता:-
(व्यक्तिप्र.) अ = ब आणि ब $<$ क हें दिलें आहे; तर अ $<$ क हें सिद्ध करावयाचें.

(सिद्धता.) कारण; जर अ=क असें मानिलें, तर ब=क होईल (प्र. प्र. १). पण हा पक्षविरोध*. म्हणून अ=क नाहीं.

आतां जर **अ $>$ क** असें मानिलें, तर **क $<$ अ** आणि **अ=ब** (पक्ष); ∴ **क $<$ ब** होईल (प्र.प्र.अ). पण हा पक्षविरोध. ∴ **अ $>$ क** नाहीं. ∴ इष्टसिद्धि.

(४) प्र. प्र. २ व ३--"समान पदार्थांमध्यें एकच पदार्थ व एकाच पदार्थामध्यें समान पदार्थ अनुक्रमें मिळविले किंवा वजा केले असतां, येणाऱ्या बेरजा व बाक्या समान असतात." ह्या प्रमेयांचाही अनुक्रमें दुसऱ्या व तिसऱ्या प्र. प्रमाणांमध्येंच समावेश होतो, असें मानितात.

प्र. प्र. २ ह्याचा उपसि.--समान पदार्थांच्या दुपटी समान असतात. (हा सिद्धांत दुसऱ्या प्र. प्रमाणाच्या योगानें सहज सिद्ध होतो; परंतु ह्याचा समावेश सहाव्या प्रत्यक्षप्रमाणांत होतो, असें मानितात.)

("समान पदार्थांच्या कोणत्याही एकाच संख्येइतक्या पटी समान असतात." हा सिद्धांतही दुसऱ्या प्रत्यक्षप्रमाणाची योजना अनेकवार केल्यानें सिद्ध होतो.)

(५) प्र. प्र. ४ व ५--ह्या दोन्ही प्र. प्रमाणांमध्यें "समान पदार्थ" ह्यांच्या ठिकाणीं "एकच पदार्थ" हे शब्द घातल्यानें जीं प्रमेयें होतात, त्यांचाही त्या त्या प्रत्यक्षप्रमाणांमध्येंच समावेश होतो, असें मानितात.

---

* पक्ष म्हणजे प्रतिज्ञेमध्यें दिलेल्या एक किंवा अनेक गोष्टी; त्यांपैकीं एखादीशीं विरोध आला असें दाखवायाचें असलें, म्हणजे त्याला "पक्षविरोध" अशी संज्ञा ह्या टिपणांत सर्वत्र दिली आहे. मुख्य ग्रंथांत बहुधा पक्ष ह्याचे ठिकाणीं प्रतिज्ञा हाच शब्द लिहिला आहे.

(६) प्र. प्र. ४–ह्याचे खालीं लिहिलेले उपसिद्धांत भूमितीमध्यें जागजागीं योजावे लागतात; म्हणून ते पाठ करावे.

उपसि. १–– जर चार पदार्थांपैकीं पहिल्यापेक्षां दुसरा मोठा आणि तिसऱ्यापेक्षां चौथा मोठा असेल, तर मोठ्यांची बेरीज धाकट्यांच्या बेरजेपेक्षां मोठी असते.

(व्यक्तिप्र.) जर अ<ब आणि क<ड; तर अ+क<ब+ड होईल. (सिद्धता) कारण; ∵ अ+क<ब+क (प्र. प्र. ४);आणि ∵ ब+क<ब+ड (प्र. प्र. ४); ∴ अ+क<ब+ड (प्र. प्र. ३.) ही इष्टसिद्धि.

उपसि. २–असमान पदार्थांच्या दुपटींपैकीं मोठ्याची दुप्पट मोठी असते. (हें मागच्या उपसिद्धांतावरून सहज सिद्ध होतें.)

(" असमान पदार्थांच्या एकाच संख्येइतक्या पटींपैकीं मोठ्याची पट मोठी असते " हेंही पहिल्या उपसिद्धांताची योजना अनेकवार केल्यानें सिद्ध होतें.)

उपसि. ३–समान अथवा एकाच पदार्थांतून असमान पदार्थ वजा केले असतां ज्या बाक्या राहतात, त्यांपैकीं मोठा वजा करून राहिलेली बाकी, धाकटा वजा करून राहिलेल्या बाकीपेक्षां लहान असते.

(व्यक्तिप्र.) जर अ=ब आणि क<ड आहे; आणि अ, ब ह्यांतून अनुक्रमें क, ड वजा करून बाक्या अनुक्रमें ई, फ ह्या राहिल्या आहेत. तर ई>फ होईल.

(सिद्धता.) कारण; ई=फ असें मानिलें, तर अ<ब होईल (प्र प्र. ४ व वजाबाकीच्या व्याख्येचा उपसि. १). पण हा पक्षविरोध. ∴ ई=फ नाहीं.

आतां जर ई<फ असें मानिलें, तर अ<ब होईल (प्र. प्र. ४ उप. १ व वजा. व्या. उप. १). पण हा पक्षविरोध. ∴ ई<फ नाहीं. ∴ ई>फ ही इष्टसिद्धि.

उपसि. ४–समान पदार्थांचीं अर्धे समान असतात.

उपसि. ५–असमान पदार्थांच्या अर्धांपैकीं मोठ्याचें अर्ध मोठें असतें.

(हे दोन उपसिद्धांत, प्र. प्र. २ उपसि. व प्र. प्र. ४ उपसि. २ ह्यांच्या आधारानें क्र. वि. रीतीनें थोडक्यांत सिद्ध होतात. परंतु ह्यांपैकीं "समान पदार्थांचीं अर्धं समान असतात" ह्याचा समावेश सातव्या प्र. प्रमाणामध्येंच होतो, असें मानितात.)

("समान पदार्थांचे एकाच संख्येइतके हिस्से केले, तर एकीचा प्रत्येक हिस्सा दुसरीच्या प्रत्येक हिश्शाबरोबर असतो" व "असमान पदार्थांचे एकाच संख्येइतके हिस्से केले, तर मोठ्याचा प्रत्येक हिस्सा धाकट्याच्या प्रत्येक हिश्शापेक्षां मोठा असतो" हे सिद्धांतही वरील सिद्धांतांच्या आधारानें क्र वि. रीतीनें सिद्ध करितां येतात.)

उपसि ६—दोन असमान पदार्थांमध्यें दोन समान (अथवा एकच) पदार्थ मिळविल्यानें ज्या बेरजा येतात, त्यांची वजाबाकी मूळच्या असमान पदार्थांच्या वजाबाकीबराबर असते.

(व्यक्तिप्र.) **अ**<**ब**; **क**=**ड**; **अ**, **ब** ह्यांची वजाबाकी **न** आहे; आणि **अ**+**क**, **ब** **ड** ह्या बेरजांची वजाबाकी **म** आहे; इतकें दिलें आहे. तर **न**=**म** हें सिद्ध करावयाचें.

(सिद्धता) ∵ **अ**<**ब** आणि **न** ही त्यांची वजाबाकी आहे (प्रतिज्ञा); ∴ **ब**=**अ**+**न** (वजाबाकीची व्याख्या उप. १).
∴ **ब**+**ड**=**अ**+**क**+**न** (प्र. प्र. २).

तसेंच ∵ **अ**+**क**<**ब**+**ड** (प्र. प्र. ४), आणि **म** ही त्यांची वजाबाकी आहे (प्रतिज्ञा); ∴ **ब**+**ड**=**अ**+**क**+**म** (वजाबाकीची व्याख्या, उप. १). ∴ **अ**+**क**+**न**=**अ**+**क**+**म** (प्र. प्र. १).
∴ **न**=**म** (प्र. प्र. ३) ही इष्टसिद्धि.

(७) प्र. प्र. ५. हें प्रमेय सिद्धतेवांचून स्वीकारणें अवश्य नाहीं; कां कीं हें, दुसरें व चवथें ह्या प्र. प्रमाणांच्या आधारानें थोडक्यांत सिद्ध करितां येतें. तें असें:—

(व्यक्तिप्र.) **अ**<**ब**; **क**=**ड**; आणि **अ**, **ब** ह्यांमध्यें अनुक्रमें **क**, **ड** वजा करून अनुक्रमें **ई**, **फ** ह्या बाक्या राहतात, इतकें दिलें आहे. तर **ई**<**फ** हें सिद्ध करावयाचें.

(सिद्धता) जर ई=फ असें मानिलें, तर अ=ब होईल (प्र.प्र.२ व वजा. व्या. उप. १). पण हा पक्षविरोध.∴. ई=फ नाहीं.

आतां जर ई>फ असें मानिलें, तर अ>ब होईल (प्र.प्र. ४ व वजाबाकी. व्या. उप. १). पण हा पक्षविरोध. ∴. ई>फ नाहीं. ∴. ई<फ ही इष्टसिद्धि.

(८) प्र. प्र. ५ ह्याचा उपसिद्धांत-दोन असमान पदार्थांतून समान पदार्थ वजा केले असतां ज्या बाक्या राहतात, त्यांची वजाबाकी मूळच्या असमान पदार्थांच्या वजाबाकीबरोबर असते.

(व्यत्तिप्र.) अ<ब; क=ड; अ आ ण ब ह्यांची वजाबाकी न आहे; व अ-क, ब-ड ह्या बाक्यांचो वजाबाकी म आहे; इतकें दिलें आहे. तर न=म हें सिद्ध करावयाचें.

(सिद्धता.) ∵ अ-क<ब ड (प्र. प्र. ५), आणि अ-क, ब-ड ह्यांत अनुक्रमें क, ड हे समान पदार्थ मिळविल्यानें अ, ब ह्या बेरजा येतात (वजा. व्या. उप. १). ∴. अ, ब ह्या बेरजांची वजाबाकी ही अ-क, ब-ड ह्या मूळच्या असमान पदार्थांच्या वजाबाकीबरोबर आहे (प्र. प्र.४ उप.६). म्हणजे न=म ही इष्टसिद्धि.

(९) प्र. प्र. ८- ह्याचे वस्तुतः तीन भाग आहेत. त्यांचीं वास्तविक स्वरूपें ध्यानांत येण्याकरितां आधीं हें प्रत्यक्षप्रमाण स्वीकारण्याचा उद्देश काय असावा हें थोडक्यांत दर्शवितों, आणि मग त्या भागांचीं सविस्तर स्वरूपें सांगतों.

दोन परिमेयांची समानता किंवा असमानता ठरविण्याच्या मुख्य रीति दोन दिसतात. (१) त्या परिमेयांची एकमेकांशीं प्रत्यक्ष तुलना करितां यईल तर करणें, ही एक (अतिसुलभ व मनुष्याची सहज खातरी करणारी) रीति; आणि (२) जर त्यांची प्रत्यक्ष तुलना करणें संभवत नसेल, किंवा आयासाचें असेल, तर तीं तिसऱ्या एकाच परिमाणानें मोजून उत्पन्न होणाऱ्या संख्यांची तुलना करणें, ही दुसरी रीति. परंतु (पूर्वीं सांगितलेंच आहे कीं,) रेषादिक परिमेयें विशेष परिमाणांनीं मोजून उत्पन्न होणाऱ्या संख्यांच्या धर्मांचा आधार कोठेंच घ्यावयाचा नाहीं, असा भूमितींतल

मुख्य संकेत आहे; म्हणून रेषादिकांची समानता ठरविण्याला दुसरी रीति अग्राह्य होय. ह्याकरितां पहिलीच रीति योजितात; म्हणजे दोन रेषा, दोन कोन व दोन आकृति परस्परांशीं एका विशेष रीतीनें जोडितां येतात असें मानून त्यांची प्रत्यक्ष तुलना करणें, हीच त्यांची समानता व असमानता ठरविण्याची मुख्य रीति भूमितींत मानितात. ह्या रीतीनें त्यांचो समानता व असमानता ठरविण्याला जे आधार मानावयाचे, ते ह्या प्र. प्रमाणांत सांगितले आहेत.

आठव्या प्रत्यक्षप्रमाणाचे तीन भाग येणेंप्रमाणें:--

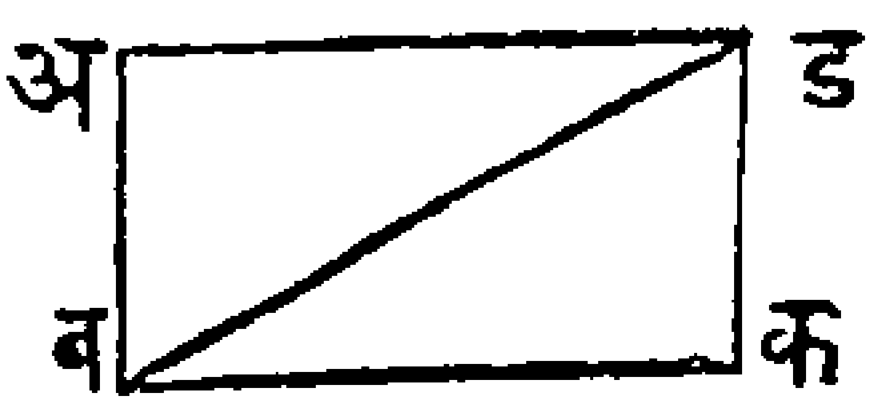
१. ज्या दोन समर्याद रेषा एकमेकींशीं सर्वांशीं मिळतात असें दाखवितां येतें, त्या समान असतात (म्हणजे त्या कोणत्याही एकाच परिमाणानें मोजिल्या असतां एकच संख्या उत्पन्न होते).

२. जे दोन कोन एकमेकांशीं सर्वांशीं मिळतात (म्हणजे त्यांचे कोणबिंदु मिळून जाऊन त्यांच्या बाजूंच्या दिशाही मिळून जातात) असें दाखवितां येतें, ते कोन समान असतात (म्हणजे ते एकाच परिमाणानें मोजिले असतां एकच संख्या उत्पन्न होते.)

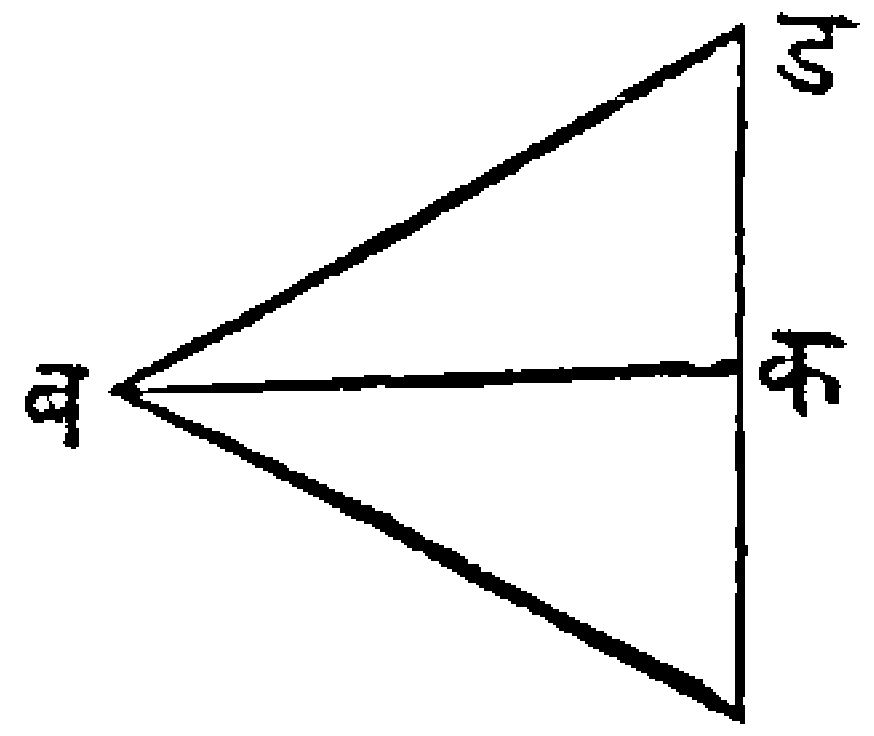
३. ज्या आकृति सर्वांशीं मिळतात (म्हणजे ज्यांच्या बाजू बाजूंशीं व कोन कोनांशीं मिळून जातात) असें दाखवितां येतें, त्या समान असतात (म्हणजे त्या एकाच परिमाणानें मोजिल्या असतां एकच संख्या उत्पन्न होते.)

आठव्या प्र. प्रमाणाच्या पहिल्या व दुसऱ्या भागांचे व्यत्यास भूमितीमध्यें जागजागीं योजावे लागतात, आणि ते नवव्या प्र. प्रमाणाच्या योगानें सिद्ध होतात; म्हणून ते ९ व्या प्र. प्रमाणाचे उपसिद्धांत मानून पुढें लिहिले आहेत.

आठव्या प्र. प्रमाणाच्या तिसऱ्या भागाचा व्यत्यास खरा नाहीं; म्हणजे "ज्या आकृति समान असतात, त्या सर्वांशीं मिळवितां येतात" असा नियम नाहीं. कारण, त्रिकोण व चौकोन हे समान आहेत असें भूमितींत अनेक प्रसंगीं सिद्ध केलें जातें; परंतु ते सर्वांशीं मिळणें संभवत नाहीं. उदाहरणार्थ, (१) हा काटकोनचौकोना-



(१)



(२)

कृति कागद बड कर्णावर कातरून त्याचे दोन त्रिकोण केले, आणि त्यांच्या अड, बक ह्या बाजू सर्वांशीं मिळून जाऊन डक, अब ह्या बाजू एकाच सरळरेषेंत व एकीपुढें एक येतील, अशा रीतीनें ते त्रिकोण जोडिले; तर (२) हा त्रिकोण बनतो. आतां (१) व (२) ह्या दोन्ही आकृति त्रिकोणांच्या एकाच जोडीनें झालेल्या आहेत; म्हणून त्या समान आहेत. पण त्या सर्वांशीं मिळणें संभवत नाहीं, हें उघड आहे.

(१०) प्र. प्र. ९ उपसि० १–जर (प.१) दोन सरळरेषांपैकीं एकीचें एक टोंक दुसरीच्या एका टोंकाशीं मिळून त्यांची दिशा एक होईल अशा रीतीनें एक रेषा दुसरीवर ठेविली, आणि (प.२) जर त्या दोन रेषा समान असल्या; तर (सा.) त्यांचीं राहिलेलीं टोंकें एकमेकांशीं मिळतात (म्हणजे त्या रेषा सर्वांशीं मिळून जातात.)

उपसि. २–जर (प. १) दोन कोनांपैकीं एकाचा कोणबिंदु दुसऱ्याच्या कोणबिंदूशीं मिळून त्यांच्या एकेक बाजूंची दिशा एक होईल अशा रीतीनें एक कोन दुसऱ्या कोनावर ठेविला, आणि जर (प. २) ते कोन समान असले, तर (सा.) त्यांच्या राहिलेल्या बाजूंची दिशा एक होते (म्हणजे ते कोन सर्वांशीं मिळतात.)

(हे दोन्ही सिद्धांत प्र. प्र. ९ व ४ थ्या व्याख्येचा उपसिद्धांत ह्यांच्या आधारानें क्र. वि. रीतीनें सिद्ध करावे.)

(११.) प्र. प्र. १०–उपसि.१–जर दोन सरळ रेषा एका बिंदूंत मिळाल्या असल्या आणि त्यांच्यामध्यें कोन झालेला असला, तर त्या कोणत्याही अंगास कितीही वाढविल्या तरी पुनः मिळत नाहींत.

उपसि. २–जर दोन समर्याद सरळ रेषांपैकीं एकीचीं दोन टोंकें दुसरीच्या दोन टोंकांशीं मिळालीं असलीं, तर त्या रेषा सर्वांशीं मिळतात.

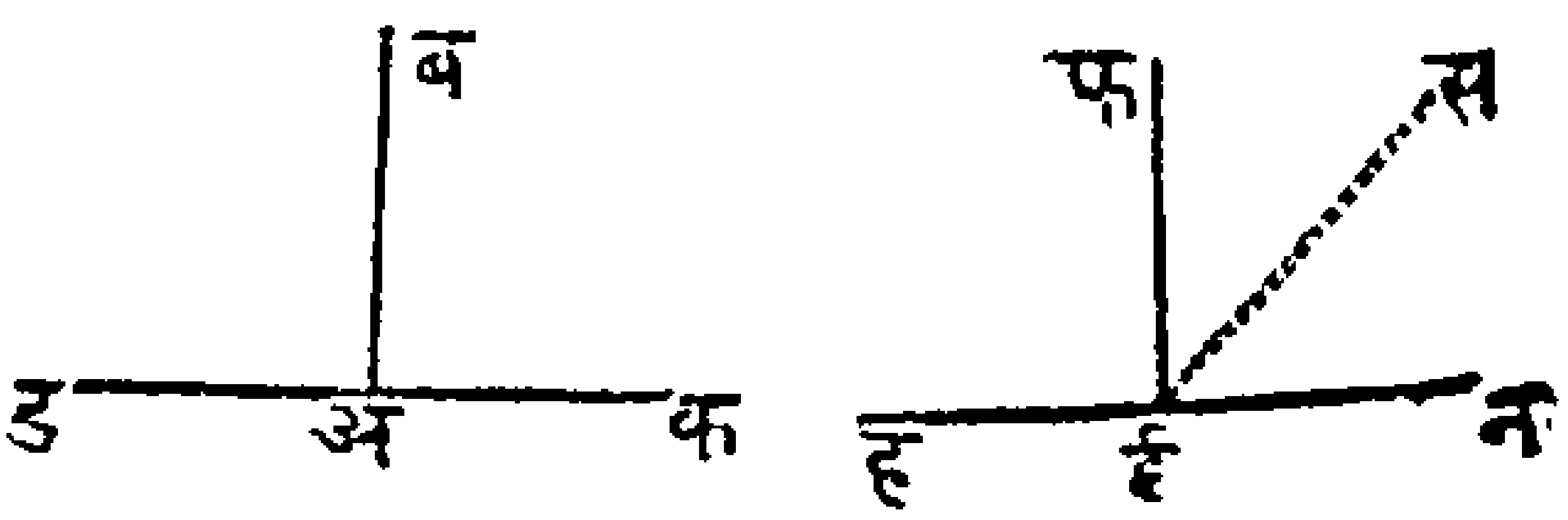
उपसि. ३–कोणत्याही सरळ रेषेची स्थिति समजण्यास तीमधील कोणते तरी दोन बिंदु समजले, म्हणजे झालें; आणि तिची स्थिति व महत्व हीं दोन्हीं समजण्यास तिचीं दोन्हीं टोंकें समजलीं म्हणजे झालें.

(१२.) प्र. प्र. ११–" जे काटकोन संलग्न असतात, ते समान असतात " हें १० व्या व्याख्येवरून सिद्ध आहे; आणि " जे काटकोन संलग्न नसतात, ते समान असतात " एवढेंच कायतें ह्या प्रत्यक्षप्रमाणांत स्वीकारिलें आहे.

(१३.) प्र. प्र. ११–हें प्रमेय १.३ ह्याच्यापुढें आहे असें मानिलें असतां, ह्याची सिद्धताही करितां येईल; आणि मग हें प्र. प्रमाण मानणें अवश्य नाहीं. ती सिद्धता अशी:–

(जातिप्र.) " संलग्न नसणारे काटकोन समान असतात. "

(व्यक्तिप्र.) **डअक** आणि **हईन** ह्या रेषांवर अनुक्रमें **अब** आणि **इफ** हे लंब आहेत, व **डअब** आणि **हईफ** हे संलग्न नसणारे दोन काटकोन झाले आहेत; तर ते समान होतील, हें सिद्ध करावयाचें.



(सिद्धता) **अड** ह्या अमर्याद रेषेंत कोणताही **ड** बिंदु घेऊन **अक**, **ईह**, **ईन** ह्या अमर्याद रेषांचे **अक**, **ईह**, **ईन** हे तुकडे प्रत्येकीं **अड** रेषेबरोबर पाडिले. (१.३)

आतां **डअक** रेषा व तिच्या वरील लंब हीं, **हईन** रेषा व तिच्या वरील लंब ह्यांशीं अशीं जोडिलीं कीं, **ड** बिंदु **ह** बिंदूशीं मिळेल, **डक** आणि **हन** ह्यांची दिशा एक होईल, व दोन्ही लंब **हन**च्या एकाच अंगास पडतील.

तर ∵ डक=हन; (प्र. प्र. १ व प्र. प्र. २)
म्हणून त्या सर्वांशीं मिळतील; (प्र. प्र. ९ उप. १)
आणि डअ=हई; (रचना)
∴ अ बिंदु ई बिंदूवरच पडेल. (प्र.प्र.९ उप.१)

इतकें झालें असतां अब लंब ईफ लंबाशींच मिळेल.

कारण; जर न मिळेल, तर तो ईस ह्या स्थितींत पडला, असें समजा.

आतां हईफ कोन<हईस कोन, (प्र.प्र. ९)
आणि हईस कोन=सईन कोन; (प्रतिज्ञा व १. व्या. १०)
∴ हईफ कोन<सईन कोन. (प्र. प्र. अ.)
आणि सईन कोन<फईन कोन; (प्र. प्र. ९)
∴ हईफ कोन<फईन कोन. (प्र. प्र. इ.)

परंतु हा पक्षविरोध होय. ∴ अब लंब ईस ह्या स्थितींत पडणार नाहीं. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, ईफवर पडणें ह्याखेरीज त्याची दुसरी कोणतीही स्थिति संभवत नाहीं. म्हणून तो ईफवरच पडेल.

आतां डअब आणि हईफ हे दोन काटकोन सर्वांशीं मिळाले,
∴ ते समान आहेत. (प्र. प्र. ८)

(१४) प्र. प्र. १२ ह्याचा उपसिद्धांत–" जर एक सरलरेषा दुसऱ्या दोन सरलरेषांस मिळाली (किंवा तिनें त्यांस छेदिलें) आणि तिच्या एकाच आंगच्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी असली, तर त्या दोन रेषा पहिलीच्या दुसऱ्या अगास कितीही वाढविल्या तरी मिळावयाच्या नाहींत.

(कारण; त्या मिळतील असें मानिलें, तर १२ व्या प्र. प्रमाणावरून त्या दोन्ही अंगांस मिळतात असें ठरून १० व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध येईल.)

गृहीतकृत्यें व प्रत्यक्षप्रमाणें ह्यांवर प्रश्न.

१. प्रत्येक गृहीतकृत्यामध्यें काय दिलें आहे व कोणती कृति करितां येते असें मानिलें आहे, हें निरनिराळें सांगा.

२. "**अ** बिंदूपासून **ब** बिंदूपर्यंत पहिल्या गृहीतकृत्याप्रमाणें **अब** ही वक्ररेषा काढिली," असें म्हणण्यांत चूक कोणती?

३. "**अब** ही समर्याद रेषा तिच्या **ब** टोंकापलीकडे दुसऱ्या गृहीतकृत्याप्रमाणें **कड** ह्या रेषेइतकी वाढविली," असें ह्मणण्यांत चूक कोणती?

४. "**अ** बिंदु ज्याचा मध्य होईल व **बक** रेषेएवढी ज्याची त्रिज्या होईल, असें वर्तुळ तिसऱ्या गृहीतकृत्याप्रमाणें काढिलें," असें म्हणण्यांत दोष कोणता?

५. एक सरलरेषा दुसऱ्या सरलरेषेवर, एक कोन दुसऱ्या कोनावर व एक आकृति दुसऱ्या आकृतीवर उचलून ठेवण्याच्या संबंधानें ह्या ग्रंथांत काय स्वीकारिलें आहे?

६. "एका रेषेचीं दोन टोंकें दुसरीच्या दोन टोंकांशीं मिळतील अशा रीतीनें एक रेषा दुसरीवर ठेवितां येते" असें मानिलें आहे काय? "एका कोनाच्या दोन बाजू दुसऱ्या दोन बाजूंशीं मिळतील अशा रीतीनें एक कोन दुसऱ्याच्या कोनाशीं मिळवितां येतो" असें मानिलें आहे काय? "एका आकृतीच्या दोन बाजू दुसरीच्या दोन बाजूशीं मिळतील अशा रीतीनें एक आकृति दुसरीवर उचलून ठेवितां येते." असें मानलें आहे काय?

७. प्रत्येक प्रत्यक्षप्रमाणामध्यें काय काय दिलें आहे व काय मानिलें आहे, हें सांगा; व प्रत्येक प्रत्यक्षप्रमाणाचें निदान एकेक उदाहरण देऊन त्याच्या योगानें तें स्पष्ट करून दाखवा.

८. प्रत्यक्षप्रमाणांच्या मालिकेपैकीं परिमेय मात्राला उद्देशून असणारीं प्रत्यक्षप्रमाणें कोणतीं, व भूमितींतल्या परिमेयांना मात्र उद्देशून असणारीं कोणतीं आहेत?

९. पहिल्या प्रत्यक्षप्रमाणाचा पहिला उपसिद्धांत सिद्ध करावयास त्या प्रत्यक्षप्रमाणाची योजना किती वेळां करावी लागते ?

१०. पहिल्या प्रत्यक्षप्रमाणाच्या दुसऱ्या उपसिद्धांताचा पहिला भाग सिद्ध करावयास त्या प्रत्यक्षप्रमाणाची योजना किती वेळां करावी लागते ? त्या उपसिद्धांताचा दुसरा भाग सिद्ध करून दाखवा.

११. (१) कोणत्याही वर्तुलाचा व्यास हा त्याच्या कोणत्याही त्रिज्येच्या दुपटीबरावर असतो; व (२) एकाच वर्तुळाचे सर्व व्यास समान असतात. हे सिद्धांत सिद्ध करा.

१२. **अ** पेक्षां **ब** मोठा आहे, **ब** बराबर **क** आहे व **क** बराबर **ड** आहे; तर **अ** पेक्षां **ड** मोठा आहे, असें सिद्ध करा.

१३. **अ** प्रत्यक्षप्रमाणाचा उपसिद्धांत सिद्ध करून दाखवा.

१४. **अ** बराबर **ब** आहे, **ब** बराबर **क** आहे, व **क** पेक्षां **ड** मोठा आहे; तर **अ** पेक्षां **ड** मोठा आहे, असें सिद्ध करा.

१५. **अ** पेक्षां **ब** लहान आणि **ब** बराबर **क** आहे; तर **अ** पेक्षां **क** लहान आहे, असें सिद्ध करा.

१६. **अ** बराबर **ब** आहे, व **ब** पेक्षां **क** लहान आहे; तर **अ** पेक्षां **क** लहान आहे, असें सिद्ध करा.

१७. **अ** पेक्षां **ब** मोठा, **ब** पेक्षां **ड** मोठा, आणि **ड** बराबर **क** आहे; तर **अ** पेक्षां **क** मोठा आहे, असें सिद्ध करा.

१८. **अ** पेक्षां **ब** लहान व **ब** पेक्षां **क** लहान आहे; तर **अ** पेक्षां **क** लहान आहे, असें सिद्ध करा.

१९. **अ** बराबर **ब**, **ब** पेक्षां **क** लहान, व **क** पेक्षां **ड** लहान आहे; तर **अ** पेक्षां **ड** लहान आहे, असें सिद्ध करा.

२०. **अ** बराबर **ब**, **ब** बराबर **क** व **अ** पेक्षां **ड** लहान आहे; तर **क** पेक्षां **ड** लहान आहे, असें सिद्ध करा.

२१. कोणत्याही लघुकोणापेक्षां कोणताही विशालकोण मोठा असतो, असें त्यांच्या व्याख्या व प्रत्यक्षप्रमाणें ह्यांच्याच आधारानें सिद्ध करा.

२२. अ कोनाचा भाग ब कोन आहे; ब कोनाचा भाग क कोन आहे; तर क कोनापेक्षां अ कोन मोठा आहे, असें सिद्ध करा.

२३. अ, ब हे पदार्थ समान आहेत, व ब, क हे समान आहेत; तर अ, ब ह्यांची बेरीज कच्या दुपटीबराबर आहे, असें सिद्ध करा.

२४. अ आकृति ब आकृतीबराबर आहे, व क आकृति बचा भाग आहे, तर अ आकृति क पेक्षां मोठी आहे, असें सिद्ध करा.

२५. अ, ब ह्या रेषा समान आहेत; तर अ, क रेषांची बेरीज ब, क रेषांचे बेरजेबराबर आहे, हें कोणत्या प्रत्यक्षप्रमाणावरून सिद्ध होतें ?

२६. अ, ब रेषांची बेरीज क, ड रेषांच्या बेरजेबराबर आहे; ब, ई ह्या रेषा समान आहेत; आणि क, फ समान आहेत. तर अ, ई ह्यांची बेरीज ड, फ ह्यांच्या बेरजेबराबर आहे, असें सिद्ध करा.

२७. "समान पदार्थांच्या दुपटी समान असतात" ह्याचा समावेश कोणत्या प्रत्यक्षप्रमाणांत होतो असें मानितात ? हें दुसऱ्या प्रत्यक्षप्रमाणाच्याच योगानें सिद्ध करून दाखवा.

२८. अ, ब ह्या समान पदार्थांच्या पांचपटी समान आहेत, हें सिद्ध करावयास दुसऱ्या प्रत्यक्षप्रमाणाची योजना किती वेळां केली पाहिजे ? ह्यावरून समान पदार्थांच्या एकाच संख्येइतक्या पटी समान असतात, हें सिद्ध करण्याची सामान्य रीति कोणती ठरते ?

२९. अ, ब ह्या समान आकृति आहेत; आणि क ही तिसरी आकृति त्या प्रत्येकीपेक्षां मोठी आहे, तर क, अ ह्यांची वजाबाकी क, ब ह्यांच्या वजाबाकीबराबर आहे, हें कोणत्या प्रत्यक्षप्रमाणावरून सिद्ध होतें ?

३०. अ पेक्षां ब मोठा आहे; तर क, अ ह्यांच्या बेरजेपेक्षां क, ब ह्यांची बेरीज मोठी आहे, हें कोणत्या प्रत्यक्षप्रमाणावरून सिद्ध होतें ?

३१. सव्वादहा वर्षांपूर्वी अ हा ब पेक्षां वडील होता; तर हल्लीं

कोण कोणापेक्षां वडील आहे ? ह्या प्रश्नाचें उत्तर कोणत्या प्रत्यक्षप्रमाणाच्या आधारानें सांगाल ?

३२. अ कोनापेक्षां ब कोन मोठा आणि क पेक्षां ड मोठा आहे; तर अ, क ह्यांची बेरीज ब, ड ह्यांच्या बेरजेपेक्षां लहान आहे, असें सिद्ध करा.

३३. (१) अ पेक्षां ब मोठा आहे; तर अच्या दुप्पटीपेक्षां बची दुप्पट मोठी आहे, असें सिद्ध करा. (२) अच्या सातपटीपेक्षां बची सातपट मोठी आहे, असें सिद्ध करा.

३४. अ, ब ह्यांचीं दरसाल उत्पन्नें सारखीं आहेत; परंतु अ पेक्षां बचा दरसाल खर्च जास्त आहे. तर शिल्लक कोणाची जास्त रहात असेल ? ह्याचें उत्तर युक्लिडच्या प्रत्यक्षप्रमाणांवरून सिद्ध करून दाखवा.

३५. समान पदार्थांचे तृतीयांश समान असतात, असें सिद्ध करा.

३६. अ पेक्षां ब मोठा आहे; तर अच्या अर्धापेक्षां बचें अर्ध मोठें आहे, असें सिद्ध करा. दोन असमान पदार्थांच्या पंचमांशांपैकीं मोठ्याचा पंचमांश मोठा असतो, असें सिद्ध करा.

३७. दोन असमान पदार्थांमध्यें समान पदार्थ मिळविले असतां येणाऱ्या बेरजांची वजाबाकी, मूळच्या असमान पदार्थांच्या वजाबाकीबरोबर असते, असें सिद्ध करा.

३८. पांचवें प्रत्यक्षप्रमाण दुसरें व चवथें ह्यांच्या आधारानें सिद्ध करून दाखवा.

३९. दोन असमान पदार्थांतून दोन समान पदार्थ वजा केले असतां ज्या बाक्या राहतात, त्यांची वजाबाकी मूळच्या असमान पदार्थांच्या वजाबाकीबरोबर असते, हें सिद्ध करा.

४०. एक विशालकोण व एक काटकोन ह्यांची बेरीज, एक लघुकोण व एक काटकोन ह्यांच्या बेरजेपेक्षां मोठी असते, असें सिद्ध करा.

४१. अ पेक्षां ब वडील आहे; तर त्यांच्या वयांचें अंतर कधींही बदलणार नाहीं, असें प्रत्यक्षप्रमाणांच्याच आधारानें सिद्ध करा.

४२. अ, ब ह्यांच्या पगारांमध्यें २५ रुपयांचें अंतर आहे व त्यांचे दरमहा खर्च सारखे आहेत. तर त्यांच्या दरमहा शिलकांचें अंतरही २५ रुपयेच आहे, असें सिद्ध करा.

४३. "दोन समान रेषांपैकीं एकीचें एक टोंक दुसरीच्या एका टोंकाशीं मिळवून त्यांची दिशा एक केली आहे; तर त्यांची दुसरीं टोंकें मिळतील" असें म्हणण्यास आधार कोणता ?

४४. "दोन समान कोनांपैकीं एकाचा कोणबिंदु दुसऱ्याच्या कोणबिंदूशीं मिळून त्यांच्या एकेका बाजूंची दिशा एक केली आहे; तर त्यांच्या राहिलेल्या बाजू मिळतील" हें म्हणण्यास आधार कोणता ?

४५. "ज्या आकृति समान असतात, त्या सर्वांशीं मिळतात." हें प्रमेय खरें आहे काय ? ह्याला एखादा अपवाद आणून दाखवा.

४६. "एका रेषेला दुसरी रेषा मिळून दोन कोन झाले, व ते काटकोन असले; तर ते ११ व्या प्रत्यक्षप्रमाणाप्रमाणें समान असतात." असें म्हणण्यांत दोष कोणता ?

४७. नवव्या प्रत्यक्षप्रमाणाचा व्यत्यास खरा आहे काय ? उत्तर उदाहरणानें स्पष्ट करा.

४८. नीट सरलरेषेनें जाणाऱ्या एखाद्या सडकेची स्थिति नेमकी समजण्यास तीवरचें नुसतें एक ठिकाण सांगितलें असतां पुरेल काय ? निदान किती ठिकाणें सांगितलीं पाहिजेत ? तिची स्थिति व लांबी हीं दोन्ही निश्चित होण्यास तीवरचीं कोणतीं ठिकाणें समजलीं पाहिजेत ?

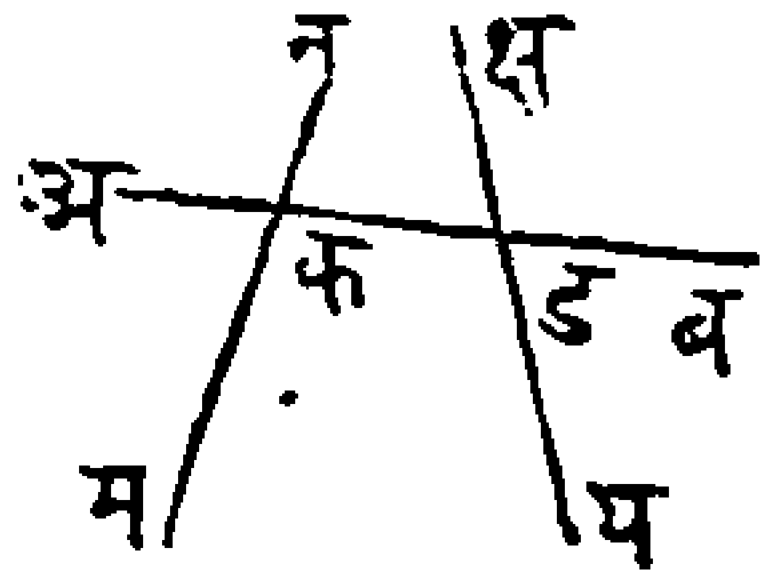
४९. अकराव्या प्रत्यक्षप्रमाणाचा व्यत्यास खरा आहे काय ? उत्तर उदाहरणानें स्पष्ट करा.

५०. अ कोन काटकोन आहे व ब कोन अ कोनाबरोबर आहे; तर ब कोनही काटकोन आहे, हें सिद्ध करा.

५१. अकरावें प्रत्यक्षप्रमाण सिद्ध करून दाखवा.

५२. (१) "अ, ब ह्या समान पदार्थांमध्यें क, ड हे पदार्थ अनुक्रमें मिळविले असतां येणाऱ्या बेरजा समान आहेत; तर क, ड

हे पदार्थ समान असतील. " (२) " **अ, ब** ह्या समान पदार्थांतून **क, ड** हे पदार्थ अनुक्रमें वजा केले असतां राहणाऱ्या बाक्या समान आहेत; तर **क, ड** हे समान असतील " हे कोणत्या कोणत्या प्रत्यक्षप्रमाणांचे व्यत्यास आहेत, हें सांगा व हे दोन्ही व्यत्यास सिद्ध करून दाखवा.



५३(१) **नम, क्षय** ह्या रेषांना **अब** रेषा **क, ड** बिंदूंत छेदिते; आणि **नकड, कडक्ष** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे. तर **नम, क्षय** ह्या रेषा कोणत्या टोंकांकडे वाढविल्या असतां मिळतील? (२) त्या **म, य** ह्या टोंकांकडे मिळतील किंवा नाहीं? (३) **म, य** टोंकांकडे मिळतील असें सिद्ध होण्यास कोणत्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे असें दिलें पाहिजे? उत्तरें प्रत्यक्षप्रमाणांच्याच आधारानें सांगा.

पहिल्या पुस्तकांतल्या सिद्धांतांवरील प्रश्नांविषयीं सूचना.

(मुख्य ग्रंथामध्यें प्रत्येक सिद्धांताच्या पुढें जे त्यावर प्रश्न लिहिले आहेत, ते स्वतः सोडविण्याविषयीं आधीं यत्न करावा, आणि शेवटीं ह्या सूचना वाचाव्या; म्हणजे त्या सिद्धांतांविषयीं बरीच समजूत होईल. सिद्धांतांविषयीं जें कांहीं कमजास्त लिहावयाचें, तें ह्या सूचनांमध्येंच लिहिलें आहे.)

१.१ प्रश्न २–१.१ ह्या कृत्याची सामान्य रीति अशी:–

दिलेल्या रेषेचें प्रत्येक टोंक मध्यबिंदु व सारी रेषा त्रिज्या कल्पून दोन वर्तुळें काढावीं, आणि त्यांच्या परिघांच्या छेदनबिंदूंपैकीं एक व दिलेल्या रेषेचीं दोन्ही टोंकें हीं सांधावीं. म्हणजे इच्छिलेल्या प्रकारचा त्रिकोण होईल.

१. १ प्रश्न३–तीन रेषांची समानता ठरण्यास त्यांपैकीं प्रत्येक दोन दोन रेषांची (म्हणजे रेषांच्या तीन जोड्यांची) समानता ठरली पाहिजे. त्यांपैकीं दोन जोड्यांची मात्र समानता ह्या वाक्यांत ठर-

विलेली आहे, आणि तेवढ्यावरूनच (म्हणजे अक, बक ह्यांची समानता न ठरवितां) तिन्ही रेषा समान आहेत, असें म्हटलें आहे. ह्याकरितां "म्हणून पहिल्या प्रत्यक्षप्रमाणाप्रमाणें अक, बक समान आहेत" ह्या वाक्याचा संक्षेप झाला.

१ २ प्रश्न ६–१. २ ह्याची सामान्य रीति–(१) दिलेला बिंदु व दिलेल्या रेषेचें (कोणतें तरी) एक टोंक हीं सांधावीं; (२) सांधणाऱ्या रेषेवर (तिच्या कोणत्या तरी अंगास) समभुज त्रिकोण काढावा; (३) दिलेल्या रेषेचें सांधिलेलें टोंक मध्य व ती सारी रेषा त्रिज्या कल्पून वर्तुळ काढावें; (४) समभुजत्रिकोणाची दिलेल्या बिंदूसमोरची बाजू ह्या वर्तुळाच्या परिघाला मिळे तोंपर्यंत (सांधणाऱ्या रेषेच्या कोणत्या तरी अंगास) वाढवावी (आयती कोठें तरी मिळाली असल्यास वाढविणें अवश्य नाहीं); (५) समभुजत्रिकोणाचा सांधणाऱ्या रेषेसमोरील कोणबिंदु हा मध्य व त्यापासून पहिल्या वर्तुळाच्या परिघापर्यंत निघालेली रेषा ही त्रिज्या कल्पून दुसरें वर्तुल काढावें; आणि (६) दिलेल्या रेषेच्या सांधिलेल्या टोंकासमोरची समभुजत्रिकोणाची बाजू दुसऱ्या वर्तुलाच्या परिघापर्यंत (पूर्वींची (४) ह्यांतली बाजू सांधणाऱ्या रेषेच्या ज्या अंगास वाढविली असेल, त्याच अंगास) वाढवावी.

ह्या कृतीनें दिलेल्या बिंदूपासून दुसऱ्या वर्तुलाच्या परिघापर्यंत जी रेषा होईल, ती इष्ट रेषा होय.

ह्या रीतीवरून उघड आहे कीं, (१) ह्यांतील सांधणाऱ्या रेषा दोन होतील. (२) ह्यांतील समभुजत्रिकोण चार होतील, आणि (४) ह्यांत सांगितल्याप्रमाणें प्रत्येक समभुजत्रिकोणाची बाजू दोन्ही अंगांस वाढविल्यामुळें (५) ह्यांतील दुसरीं वर्तुळें आठ निघतील; म्हणून ह्या रीतीनें इष्ट रेषा आठ निघणें संभवतें. परंतु दिलेला बिंदु दिलेल्या रेषेंतच असेल, अथवा ती वाढविल्यानें तीमध्यें येत असेल, तर मात्र ह्या आठ रेषांपैकीं दोन दोन रेषा मिळून जाऊन चारच होतात (ही गोष्ट १.३२ ह्यावरून सिद्ध होते).

१. ३ प्रश्न ८–१. ३ ह्याची सामान्यरीति–मोठ्या रेषेच्या एका

टोंकापासून लहान रेषेएवढी एक रेषा (१. २ ह्याप्रमाणें) काढावी; आणि तेंच टोंक मध्य व ती काढिलेली रेषा त्रिज्या कल्पून एक वर्तुल काढावें. ह्या वर्तुलाचा परीघ मोठ्या रेषेला ज्या बिंदूंत छेदील, तो बिंदु व तें टोंक ह्यांच्या मधील मोठ्या रेषेचा भाग, हा इष्टभाग होय.

(एथवर ज्या तीन कृत्यांच्या सामान्यरीति सांगितल्या, त्या केवळ मासल्याकरितां सांगितल्या. ह्या मासल्याची प्रत्येक कृत्याची सामान्यरीति तयार करण्याविषयीं अगत्य यत्न करावा. म्हणजे त्या कृत्याच्या पक्षामध्यें कांहीं फेरफार केला, तरी देखील त्याच्या इष्टप्राप्तीची एखादी युक्ति सुचते; आणि एकंदरींत त्या कृत्याविषयीं चांगली समजूत होते.)

१.४ प्रश्न २–ह्या सिद्धांताचे तीन भाग आहेत. प्रत्येक भागाचा पक्ष एकच आहे; आणि त्यांचीं साध्यें प्रतिज्ञेंत अनुक्रमें (१,) (२), (३) ह्या अंकांनीं दाखविलीं आहेत. हे निरनिराळे तीन सिद्धांत समजून त्यांच्या निरनिराळ्या सिद्धता लिहिल्या तरी चालेल; परतु सिद्धतेच्या आरंभापासून, पाये सर्वांशीं मिळतात हें जेथें सिद्ध झालें आहे, तेथपर्यंत सिद्धतेचा सारा भाग प्रत्येक भागाच्या सिद्धतेला आवश्यक आहे; म्हणून त्या सर्वांची सिद्धता एकेच ठिकाणीं लिहितात. तथापि जर त्यांपैकीं कोणत्याही एकाच भागाची सिद्धता करावयास सांगितलें, तर सिद्धतेंतील वाक्यांपैकीं जीं त्या भागाच्या सिद्धतेला आवश्यक नाहींत, तीं गाळून टाकावीं. तसें न केलें तर अप्रासंगिकता हा दोष होईल.

(ज्या ज्या सिद्धांतांचे अनेक भाग असतात, त्याचे ते भाग निरनिराळे दाखवून त्यांच्या सिद्धताही निरनिराळ्या करण्याविषयीं अवश्य यत्न करावा; म्हणजे त्या सिद्धांताविषयीं चांगली समजूत होते.)

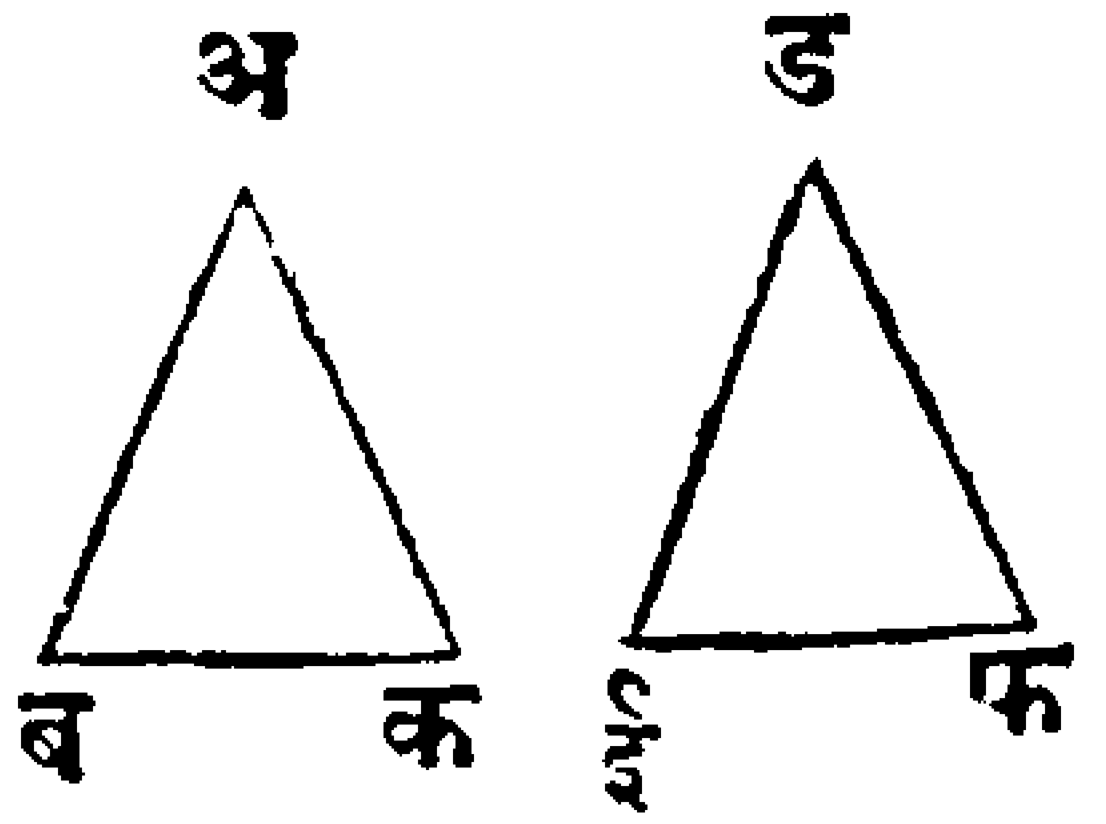
ह्या सिद्धांताचे तीनही भाग मिळून एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणाशीं एकरूप आहे, असें सिद्ध झालें.

१.४ प्रश्न ५–१.४ ह्याच्या सिद्धतेचें सामान्यस्वरूप असें;– एका त्रिकोणाच्या एका बाजूचें (पायांतलें) टोंक, त्या बाजूशीं बरो-

वर असणाऱ्या दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूच्या (पायांतल्या) टोंकाशीं मिळून त्या बाजूंची दिशा एक होईल, अशा रीतीनें एक त्रिकोण दुसऱ्यावर उचलून ठेविला, असें मानावें. (एवढेंच काय तें आधारावांचून करितां येतें असें मानिलें आहे). नंतर त्या बाजूंचीं राहिलेलीं टोंकें मिळणें, दुसऱ्या बाजूंची दिशा एक होणें आणि त्यांचीं दुसरीं टोंकें मिळणें ह्या गोष्टी घडल्याच पाहिजेत, असें (प्रतिज्ञा व प्र. प्र. ९ ह्याचे उपसिद्धांत ह्यांच्या आधारानें) सिद्ध करावें. (सारांश त्रिकोणांचे अवयव जोडण्याचा आरंभ पायाच्या एका टोंकाशीं व शेवट दुसऱ्या टोंकाशीं करावा.) ह्याप्रमाणें पायांचीं टोंकें मिळतात असें सिद्ध केलें, म्हणजे प्र. प्र. १० व प्र. प्र. ८ ह्यांच्या आधारानें इष्टसिद्धि होते.

ह्याच्या सिद्धतेमध्यें " रेषा रेषेवर पडणें " ह्याचा अर्थ " त्यांच्या दिशा एक होणें" एवढाच समजावा, "सर्वांशीं मिळणें" असा समजूं नये.

१. ४ प्रश्न ७–**अक** आणि **डई** ह्या प्रत्येकीं **अब**शीं समान आहेत (प्रतिज्ञा); म्हणून त्या परस्पर समान आहेत (प्र. प्र. १). ह्याप्रमाणेंच **अब, डफ** ह्या समान आहेत, असें सिद्ध होतें. आतां **अबक** त्रिकोणाच्या **अब, अक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील **अ** कोन हीं, **डईफ** त्रिकोणाच्या **डफ, डई** ह्या बाजू व



त्यांच्या मधील **ड** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत. ∴ **अब** आणि **डफ** ह्या समान बाजूंसमोरील **क** आणि **ई** हे कोन समान आहेत (१.४ भाग २). आणि **ब** कोन **ई** कोनाबरोबर ठरलाच आहे (१.४ भाग २); म्हणून **ब** कोन **क** कोनाबरोबर आहे (प्र प्र. १)

(ही वस्तुतः " समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडील कोन समान असतात " या सिद्धांताची एक सोपी सिद्धता झाली.)

१. ५ प्रश्न १–(१. ५) ह्याचे दोन भाग (१) व (२) ह्या अंकांनीं

दाखविले आहेत. त्यांपैकीं नुसता दुसरा भाग सिद्ध करावयाचा, तर एकंदर सिद्धतेंतलीं वरींच वाक्यें गाळिलीं पाहिजेत. ह्या गोष्टीकडे लक्ष असावें.

१. ५ प्रश्न ६– **कई** ही अमर्याद आहे आणि **बक** ही समर्याद आहे; म्हणून अमर्याद व समर्याद रेषांच्या लक्षणांवरून अमर्यादरेषा समर्याद रेषेपेक्षां मोठीच मानिली पाहिजे.

१.५ प्रश्न ७–१. ४ प्रश्न ६ ह्यांत १.५ भाग १ ह्याची जी सापी सिद्धता सांगितली, ती एक झाली तिचेंच दुसरें एक स्वरूप कोणी ग्रंथकार सांगतात. तें असें:—**अबक** त्रिकोण उचलून त्याच्याच वर पुनः असा ठेविला कीं, **अक**च्या पहिल्या स्थानीं **अब** पडेल व **अ**-**ब**च्या पहिल्या स्थानीं **अक** पडेल. मग १.४ ह्याच्या सिद्धतेंत दाखविल्याप्रमाणें प्र. प्र. ८ ह्याच्या आधारानें **ब** कोन **क** कोनाबरोबर आहे, असें सिद्ध करितां येईल.

समद्विभुजत्रिकोणाच्या शिरकोनास दुभागणारी एक रेषा मानून ती पायास मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांस उद्देशून (१. ४ भाग २) ह्याची योजना केल्यानें पांचव्याचा पहिला भाग थोडक्यांत सिद्ध होतो. परंतु कोन दुभागण्याची रीति अद्यापि ठरली नाहीं, ह्याकरितां अशी सिद्धता करणें अयोग्य, असें कित्येकांचें मत आहे.

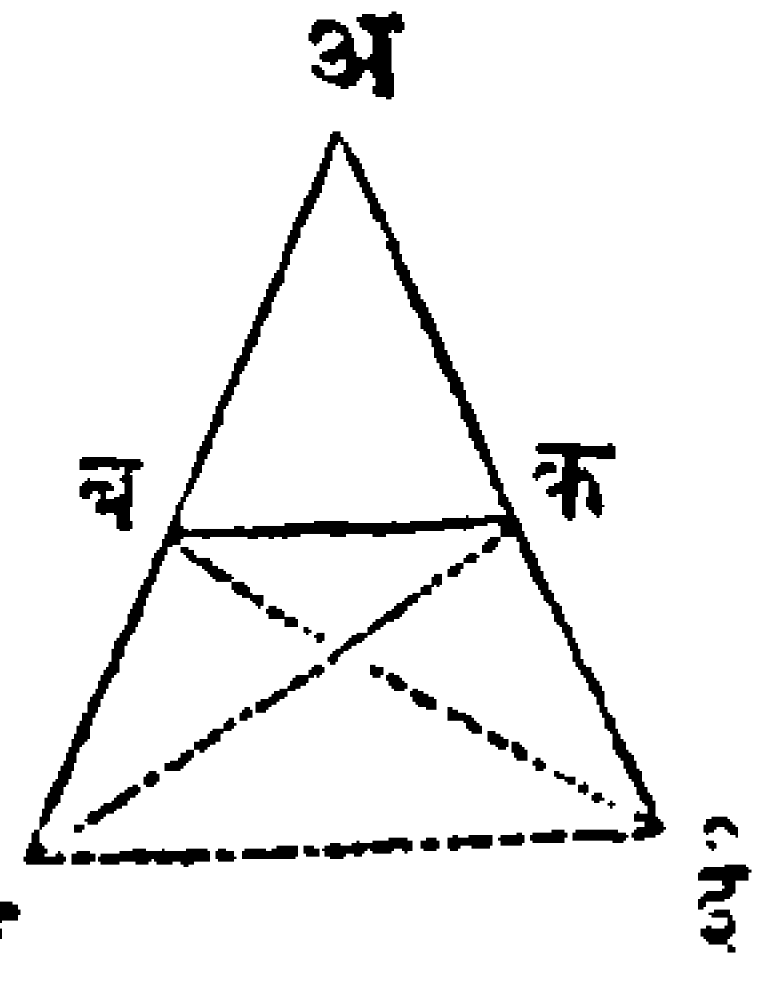
असो, वरील रीतींपैकीं कोणत्या तरी एका रीतीनें पहिल्या भागाची सिद्धता केली असतां, पुढें १. १३, व कांहीं प्रत्यक्षप्रमाणें ह्यांच्या योगानें दुसरा भागही थोडक्यांत सिद्ध करितां येईल.

१. ६ प्रश्न१– ह्याच्या सिद्धतेमध्यें जी बाजू मोठी मानिली असते, तिचा लहान बाजूएवढा तुकडा पाडावयाचा तो पक्षांतील (समान) कोनाच्या कोणबिंदूपासूनच पाडिला पाहिजे. नाहींपक्षीं (१. ४) ह्याची योजना करितां येणार नाहीं.

हा सिद्धांत १. १८ ह्याच्या पुढें आहे, असें मानिल्यास ह्याची सिद्धता फार थोडक्यांत होते; आणि तो १. १८ ह्याच्या पुढें ठेवि-

ल्यानें इतर सिद्धांतांची गैरसोयही होत नाहीं. कांकीं, २. ४ पर्यंत ह्याची योजना करण्याचा प्रसंग युक्लिडच्या ग्रंथांत नाहीं.

१. ६ प्रश्न ५- पांचव्या सिद्धांताच्या दुसऱ्या भागाचा व्यापकन्यास असा-" त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू तिसरीच्या पलीकडे वाढविल्या असतां होणारे बाहेरचे कोन जर समान असले, तर त्या दोन बाजू समान असतात. "



(व्यक्तिप्र.) कबड कोन बकई कोन आहे; तर अब=अक होईल.

(सिद्धता) अबच्या वाढविलेल्या भागांत ड बिंदु घेतला, व बड बरोबर कई करून बई, कड आणि ईड सांधिल्या.

आतां बकड आणि बकई ह्या त्रिकोणांस १. ४ लाविल्यानें बई=कड व बई कोन = बकड कोन व कडब कोन=बईक कोन असें सिद्ध होतें. ∴ डबई कोन=डकई कोन (प्र. प्र. ३).

पुनः डबई आणि डकई ह्या त्रिकोणांस १. ४ भा.२ लाविल्यानें बडई कोन=कईड कोन असें ठरतें. मग १. ६ व प्र. प्र. ३ ह्यांच्या योगानें इष्टसिद्धि होते.

अथवा हें प्रमेय पुढें १. १३, कांहीं प्रत्यक्षप्रमाणें व १. ६ ह्यांच्या योगानें फार थोडक्यांत सिद्ध होतें.

१. ६ प्रश्न ७—बग, कफ ह्यांचा छेदनबिंदु ह मानिला, तर १. ५ च्या सिद्धतेंत ठरल्याप्रमाणें हबक कोन=हकब कोन. ∴ हब =हक (१. ६) ∴ अबह आणि अकह ह्या त्रिकोणांस (१. ४ भाग २ रा) लाविल्यानें इष्टसिद्धि होते.

१. ७ प्रश्न १–१. ७ च्या पहिल्या आकृतींत कड ह्या एकाच पायावर अकड आणि बकड हे दोन समद्विभुज त्रिकोण आहेत, असें मानिल्यानें विरोध आला आहे; म्हणून प्रत्येकाचा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या बाहेर पडणार नाहीं हें सिद्ध झालें. आतां एकाचा शिरोबिंदु दुसऱ्याच्या बाजूवर पडणार नाहीं हेंही (१. ५)च्या साह्यानें सहज सिद्ध होईल. ∴ इष्टसिद्धि.

१. ७ प्रश्न २–ह्या सिद्धांताच्या पक्षामध्यें चार गोष्टी दिल्या आहेत, त्या अशा:—

(१) "दोन त्रिकोण एकाच पायावर ठेविले आहेत" (२) "पायाच्या एकाच अंगास ठेविले आहेत," (३) "पायाच्या एका टोंकांत संपणाऱ्या त्यांच्या बाजू समान आहेत," आणि (४) "पायाच्या दुसऱ्या टोंकांत संपणाऱ्या बाजू समान आहेत," हा पक्ष होय; व "ते निराळे पडणार नाहींत" (सर्वांशीं मिळून जातील) हें साध्य होय.

(१. ७ हा नवीन शिकणारांस फार कठीण जातो, व त्याचा उपयोग केवळ १. ८ च्या सिद्धतेमध्येंच झालेला दिसतो; म्हणून १. ८ हा पुढें दाखविल्याप्रमाणें १. ७ च्या मदतीवांचून सिद्ध केला असतां १. ७ हा गाळितां येईल.)

१. ८ प्रश्न १–ह्याच्या सिद्धतेंत दाखविल्याप्रमाणें, **अबक** त्रिकोणाच्या **बक** पायाचीं **ब**, **क** टोंकें **ईफ** पायाच्या **ई**, **फ** टोंकांशीं मिळतील अशा रीतीनें **अबक** त्रिकोण उचलून ठेवावा; पण **ईफ**च्या ज्या अंगास **डईफ** त्रिकोण आहे, त्यापासून भिन्न अंगास **अबक** त्रिकोण ठेवावा. नंतर त्यांचे शिरोबिंदु सांधावे. ही सांधणारी रेषा (१) पायाला छेदील, (२) पायाच्या एका टोंकांतून जाईल, किंवा (३) पायाला मुळींच मिळणार नाहीं, म्हणजे दोन्ही त्रिकोणांच्या बाहेर पडेल. (१) व (३) ह्या स्थितींत सांधणाऱ्या रेषेवर दोन समद्विभुजत्रिकोण पडतात व (२) ह्या स्थितींत एकच पडतो. मग १. ५ व प्र. प्र. २ किंवा प्र. प्र. ३ ह्यांच्या योजनेनें इष्टसिद्धि होते.

१. ८ प्रश्न २–१. ८ प्रमाणें दोन त्रिकोणांचा एकेक कोन समान ठरल्यावर १. ४ लावावा. (१. ८ ह्यांत पायासमोरील कोनांची मात्र समानता सिद्ध केली आहे; म्हणून इतःपर दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रांची समानता सिद्ध करावयाची असतां ह्याची योजना करावयाची नाहीं, १. ४ ह्याची योजना करावयाची. हें ध्यानांत असावें.)

१. ८ प्रश्न ३–लंबाबाहेरच्या एखाद्या बिंदूपासून समर्याद रेषेचीं दोन्ही टोंकें व मध्य ह्यांपर्यंत रेषा काढिल्यानें दोन त्रिकोण होतात. मग १. ८ ह्याच्या साह्यानें क्रमविरुद्ध रीतीनें इष्टसिद्धि होते.

१.९ प्रश्न २– **अ** बिंदु मध्य व **अड** त्रिज्या कल्पून वर्तुळ काढावें; तें **अक**ला **ई** बिंदूंत छेदील. नंतर **ड** आणि **ई** हे मध्य व **डई** त्रिज्या कल्पून दोन वर्तुळें काढावीं; हीं **फ** बिंदूंत परस्परांस छेदितात. नंतर **अफ** सांधावी. एवढीच काय ती रचना कोन दुभागावयास आवश्यक आहे. **डफ**, **फई** ह्या रेषा सिद्धतेकरितांच काढाव्या लागतात.

१.९ प्रश्न ५– नवव्या सिद्धांताच्या योगानें २,४,८,१६ इत्यादिक दोहोंच्या कोणत्याही पूर्णसंख्याक घाताइतके समान भाग करितां येतात.

१.१० प्रश्न २– दिलेल्या रेषेचीं दोन्ही टोंकें व वर्तुळांच्या परिघांचे छेदनबिंदु साधिल्यानें त्या सांधणाऱ्या रेषेच्या दोहों अंगांस जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांस १.८ लावावा. नंतर दिलेल्या रेषेच्या दोन भागांवर जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांना १.४ लावावा. म्हणजे इष्टसिद्धि होते.

१.१० प्रश्न ३– भूमितींतल्या कृत्याची सोपी रीति ह्याचा अर्थः— भूमितींतलें एखादें कृत्य प्रत्यक्ष करावयाचें असलें, तर तीन गृहीतकृत्यांमध्यें स्वीकारलेल्या (आंखणी व कर्कट ह्या) साधनांखेरीज कोणतेंच साधन घ्यावयाचें नाहीं, असा भूमितींतला संकेत आहे; ह्मणून कोणत्याही कृत्याच्या ज्या रीतीमध्यें "दोन बिंदु साधणें", "रेषा वाढविणें" आणि "वर्तुळ काढणें" हीं कृत्यें अगदीं कमी वेळां करावीं लागतील, ती रीति सर्वांत सोपी समजावयाची.

ह्या अर्थाप्रमाणें पाहिलें असतां पुस्तकांतल्या रीतीमध्यें समभुजत्रिकोण काढण्याकरितां दोन वर्तुळें व दोन रेषा काढाव्या लागतात. आणि ह्यांखेरीज कोन दुभागण्याकरितां रेषा व वर्तुळें काढावीं लागतातच. परंतु दुसऱ्या प्रश्नांतल्या रीतीमध्यें दोन वर्तुळें व एक रेषा एवढ्यानेंच काम होतें. म्हणून ही रीति सोपी होय.

१.१० प्रश्न ७– **अब** रेषा **क** आणि **ड** ह्या दोन बिंदूंत दुभागिली गेली असें मानिलें; तर **अक**, **अड** हीं दोन्ही तिचीं अर्धें होतील. ∴ तीं प्र. प्र. ७ वरून समान ठरतील.

अ क ड ब

आणि त्यामुळें प्र. प्र. ९ ह्याशीं विरोध येईल. ∴ रेषा अनेक बिंदूंत दुभागिली जात नाहीं.

१.११ प्रश्न ३— प्रथम ड बिंदु घेणें; क मध्य व कड त्रिज्या कल्पून वर्तुळ काढणें; त्याचा परीघ कबला ज्या ई बिंदूंत छेदील, तो व ड हे मध्य आणि डई त्रिज्या कल्पून आणखी दोन वर्तुळें काढणें; व ह्यांच्या परिघांचा छेदनबिंदु आणि कबिंदु हे सांधणें, एवढीच काय ती कृति लंबास आवश्यक आहे. फड, फई ह्या रेषा सिद्धतेकरितांच काढाव्या लागतात.

१.१२ प्रश्न ३— दिलेली रेषा समर्याद असल्यास, रचनेंत दुभागिलेल्या रेषेचा मध्य जर दिलेल्या रेषेंत येणार नाहीं, तर इष्ट लंब पुस्तकांतल्या रीतीनें काढितां येणार नाहीं. (आणि अशा स्थितींत मुळींच लंब काढितां येणार नाहीं, हें पुढें सिद्ध करितां येईल.)

१.१२ प्रश्न ५—प्रत्येक सांधणाऱ्या रेषेनें मूळच्या त्रिकोणाचे दोन दोन त्रिकोण होतात. त्रिकोणांच्या ह्या तीन जोड्यांपैकीं एकींतील एक व दुसरींतील एक अशा दोन दोन त्रिकोणांस १. ४ भा. १ लावावा. ह्मणजे इष्टसिद्धि होते.

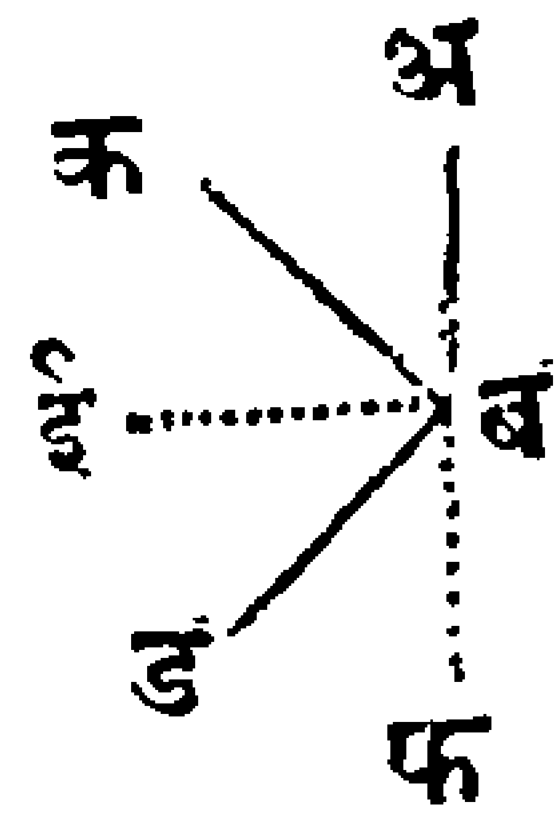
१.१३ प्रश्न १—(१) ह्याची प्रतिज्ञा " दोन सलग्नकोणांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असते " अशी म्हटली तरी चालेल.

(२) सलग्नकोण समान असतात किंवा असमान असतात, ह्मणून ह्याच्या सिद्धतेचे दोन भाग होतात, ते (१) व (२) ह्या अंकांनीं दाखविले आहेत.

(३) जर दोन काटकोनांचा कोन मानिला, तर दोन काटकोनांची व दोन सलग्नकोणांची बेरीज एकेका कोनानें दाखवितां येईल, आणि मग १.१३ च्या सिद्धतेचा दुसरा भाग हा, प्र. प्र. ड. व प्र. प्र. १ ह्यांच्या आधारानें थोडक्यांत आटपेल. परंतु दोन काटकोनांचा कोनच होत नाहीं असें भूमितींत मानिलें आहे, त्यामुळें त्या दोन बेरजा प्रत्येकीं तीन कोनांच्या बेरजेबराबर आहेत, असें दाखवून इष्टसिद्धि करणें प्राप्त झालें; आणि त्या योगानें सिद्धता वाढली.

१. १३ प्रश्न २– १. १३, प्र. प्र. १ व प्र. प्र. ४ उप. ३ ह्यांची अनुक्रमें योजना करावी.

१. १३ प्रश्न ६– एकाच सरळरेषेंत नसणाऱ्या दोन सरळरेषा एकाच बिंदूंत मिळाल्या असतां, त्यांच्या योगानें त्या बिंदूजवळ दोन कोन होतात. कोन करणाऱ्या दोन रेषांपैकीं कोणतीही एक रेषा त्यांच्या मेलनबिंदूच्या पलीकडे वाढविली असतां ती बहिर्वक्रकोणांतून जाते, हें त्याच्या व्याख्येवरून उघड आहे. म्हणून १. १३ च्या आधारानें तो दोन काटकोनांपेक्षां जास्त असतो, असें सिद्ध करितां येईल.



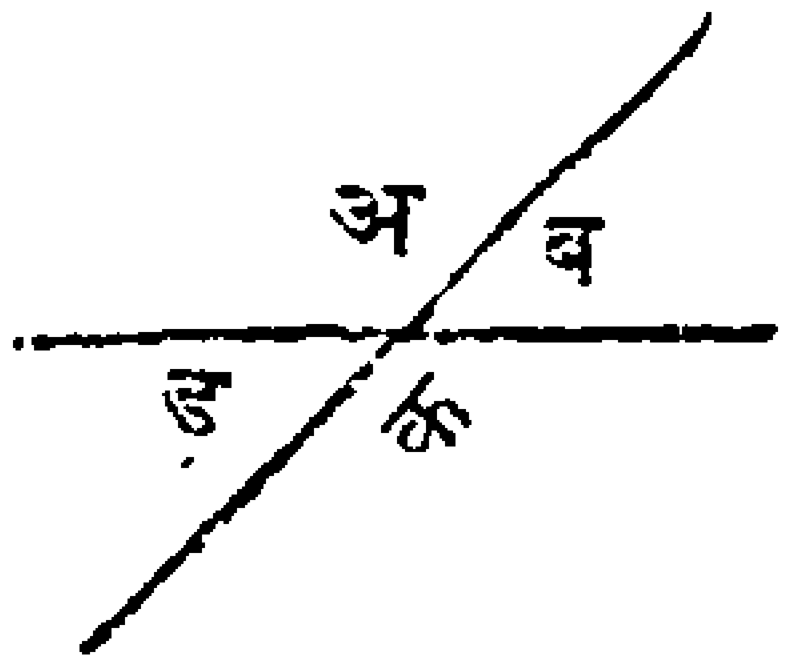
१. १४ प्रश्न २– "भिन्न अंगांकडून" हे शब्द गाळिले असतां ह्या सिद्धांताला अपवाद येतो. तो असाः–

अफ रेषेंतल्या **ब** बिंदूंतून तीवर **बई** लंब काढिला, आणि झालेले दोन्ही काटकोन **बक**, **डब** ह्या रेषांनीं दुभागिले; तर **अबक** हा अर्धा काटकोन व **अबड** हा दीड काटकोन होईल.

आतां **अब** रेषेला तिच्या **ब** ह्या एकाच टोंकांत **बक** आणि **बड** ह्या रेषा मिळाल्या आहेत; व **अब**शीं झालेल्या **अबक** आणि **अबड** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे; म्हणजे १.१४ च्या पक्षांतली "भिन्न अंगांकडून येणें" ह्या गोष्टी खेरीज सारी सामग्री येथें जुळली. परंतु **बक**, **बड** ह्या एकाच सरळरेषेंत असणें संभवत नाहीं; कां कीं, त्यांच्यामध्यें काटकोन झाला आहे, हें रचनेवरून उघड आहे.

१. १४ प्रश्न ३–"एका रेषेच्या भिन्न अंगांकडून दोन सरळरेषा येऊन तिच्या एकाच टोंकांत तिला मिळाल्या आहेत," ही गोष्ट १. १३ व १. १४ ह्या प्रत्येकाच्या पक्षांत आहे; आणि "त्या एकाच सरळरेषेंत आहेत" ही १. १३ च्या पक्षांतली गोष्ट १. १४

चें साध्य आहे; व " झालेल्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर असते " हें १. १३ चें साध्य १. १४ च्या पक्षांत दिलें आहे; ह्मणून १. १३ व १. १४ हे परस्परांचे व्यत्यास आहेत.



१. १५ प्रश्न १—पहिल्या उपसिद्धांताची सिद्धता—

(व्यक्तिप्र.) **अ+ब+क+ड** बरोबर चार काटकोन, हें सिद्ध करावयाचें.

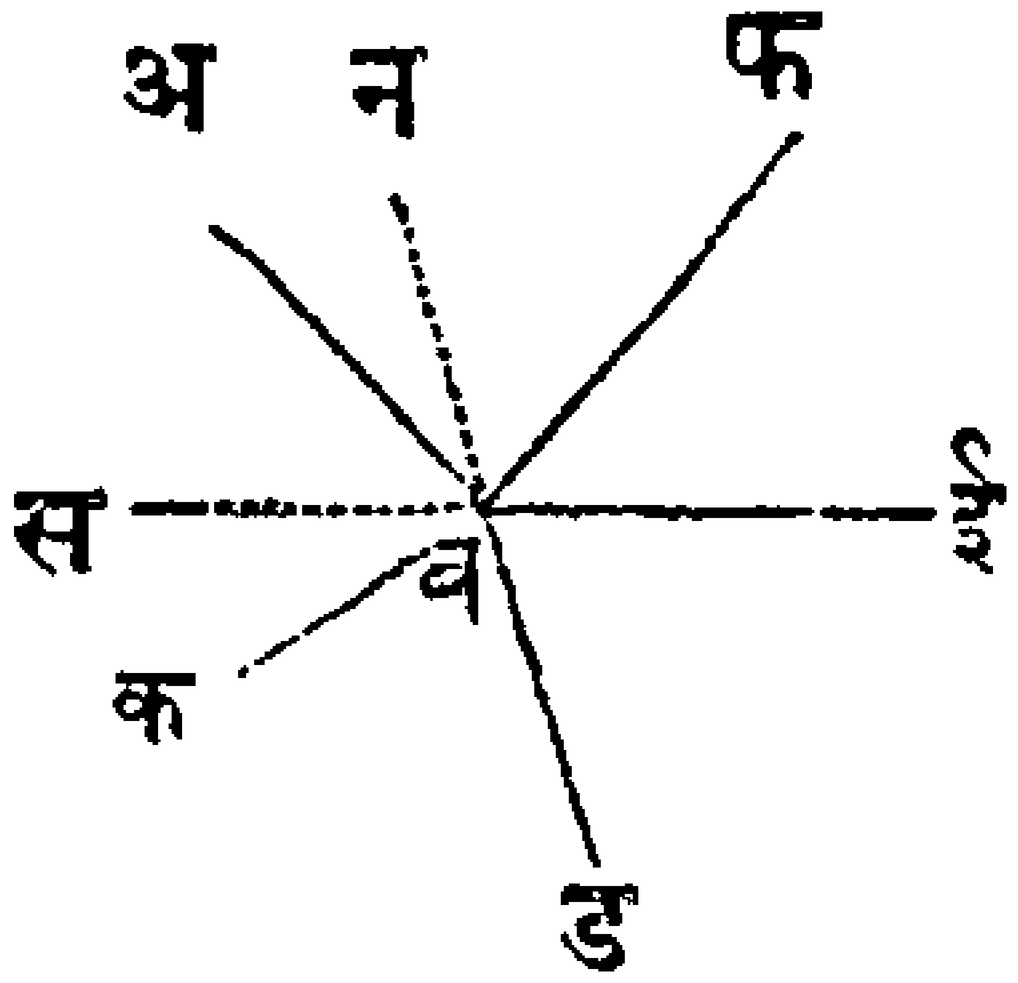
(सिद्धता.) **अ=क** आणि **ब=ड**, (१.१५)

∴ **अ+ब=क+ड**, (प्र. प्र. २), ∴ २ (**अ+ब**)=**अ+ब+क+ड** (प्र. प्र. २). परंतु **अ+ब**=२ काटकोन, (१. १३)

∴ २ (**अ+ब**)=४ काटकोन. (प्र. प्र. ६)

∴ **अ+ब+क+ड** =४ काटकोन. (प्र. प्र. १)

१. १५ च्या दुसऱ्या उपसिद्धांताची सिद्धता—



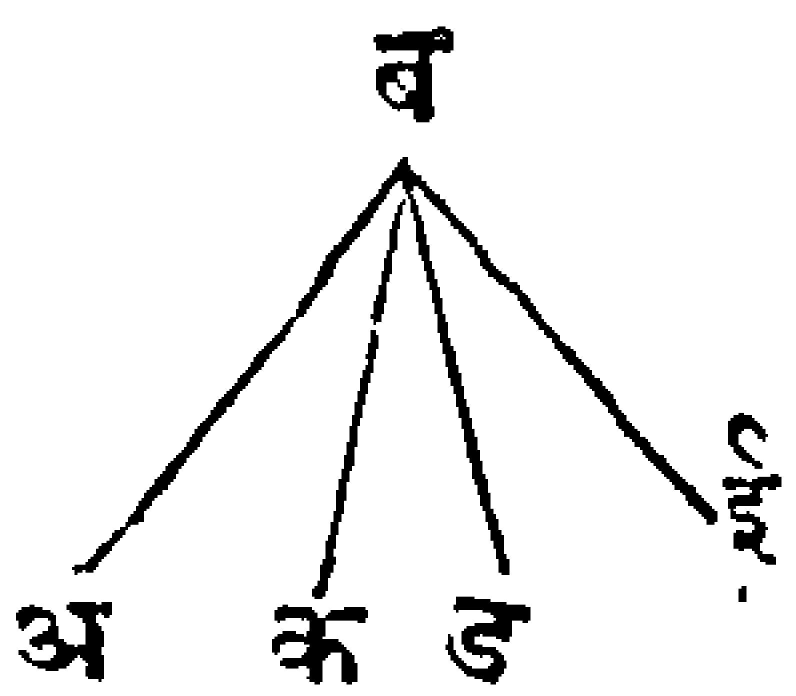
(व्यक्तिप्र.) **अब**, **कब**, **डब**, **ईब** **फब**, ह्या रेषा **ब** बिंदूंत मिळून त्यांच्या सर्वांगांस पांच कोन झाले आहेत; तर त्यांची बेरीज चार काटकोन होईल, हें सिद्ध करावयाचें.

(सिद्धता.) **ईब**, **डब** ह्या रेषा **ब** बिंदूकडे वाढविल्या. (गृ. कृ.२) आतां प्र. प्र. २ ह्याची अनेकवार योजना केली असतां असें दाखवितां येईल कीं, दिलेल्या पांच कोनांची बेरीज ही **सबन**, **नबई**, **ईबड** आणि **डबस** ह्या चार कोनांच्या बेरजेबराबर आहे;

आणि ह्या चार कोनांची बेरीज पहिल्या उपसिद्धांतावरून चार काटकोनांबरोबर आहे. म्हणून दिलेल्या पांच कोनांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्या उपसिद्धांताच्या प्रतिज्ञेंतील " आणि त्या बिंदूच्या सर्वांगांस

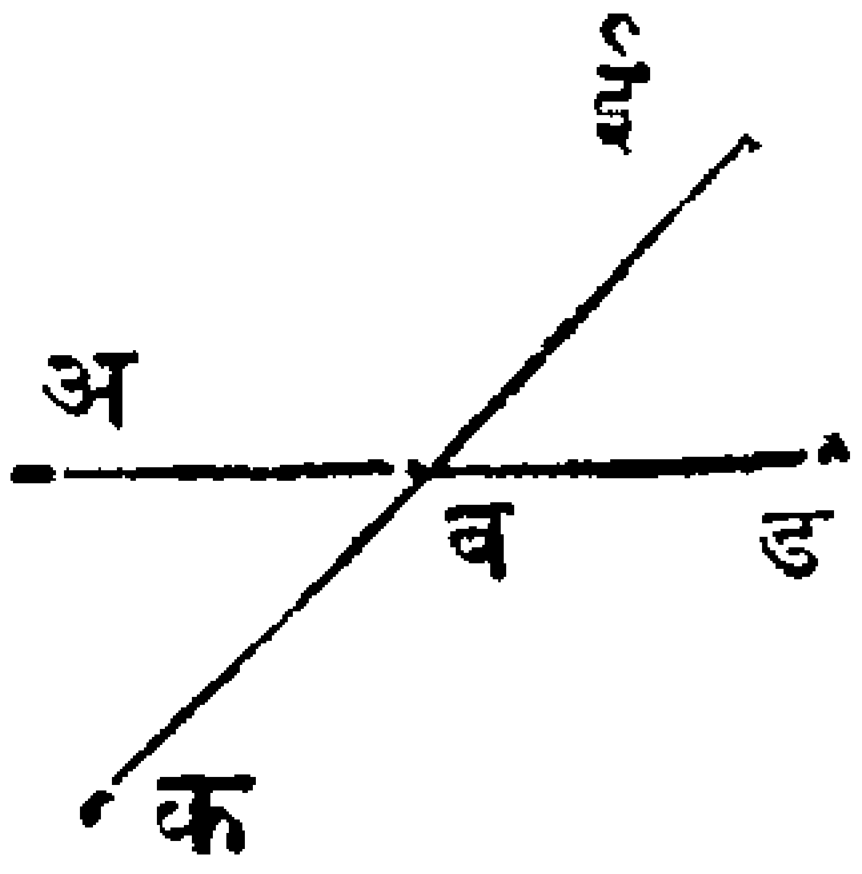
कोन झाले " हे शब्द गाळिले असतां हा सिद्धांत खोटा पडतो, हें बाजूस काढिलेल्या आकृतीवरून स्पष्ट आहे.



तसेंच "न विभागलेले" हे शब्द गाळिले असतां **अबड**, **कबई**, असले कोनही उद्दिष्ट आहेत, अशी समजूत होईल. पण सिद्धांतांतला तसा उद्देश नाहीं.

१. १५ प्रश्न २– दुभागिलेल्या कोनांखेरीज राहिलेल्या कोनांपैकीं एक दुभागून १. १३ प्रश्न ५ व १. १४ ह्यांची योजना करावी.

१. १५ प्रश्न ५– (जातिप्र.) चार रेषा एकाच बिंदूंत मिळून त्या बिंदूजवळ जर (न विभागलेले) चार कोन झाले, आणि त्यांपैकीं एक टाकून एक असे दोन दोन कोन परस्परांशीं समान असले, तर त्या चार रेषांपैकीं एक टाकून एक अशा दोन दोन रेषा एकाच सरळरेषेंत असतात.



(व्यक्तिप्र.) **अब**, **कब**, **डब**, **ईब** ह्या रेषा **ब** बिंदूंत मिळून त्याजवळ चार कोन झाले आहेत; आणि **अबक** कोन=**डबई** कोन व **अबई** कोन=**कबड** कोन आहे. तर **अब**, **डब** ह्या दोन आणि **कब**, **ईब** ह्या दोन रेषा एकेक सरळरेषेंत असतील.

(सिद्धता.) **अबक**+**अबई**=**डबई**+**कबड**, (प्रतिज्ञा व प्र.प्र.२)

∴ २ (**अबक**+**अबई**)=**अबक**+**अबई**+**डबई**+**कबड**,
(प्र. प्र.२)

∴ २ (**अबक**+**अबई**)=४ काटकोन, (१.१५उप.२ व प्र.प्र.१)

∴ **अबक**+**अबई**=२ काटकोन, (प्र. प्र.४ उप.४)

∴ **कब** आणि **ईब** ह्या एकाच सरळरेषेंत आहेत. (१.१४)

ह्याप्रमाणेंच **अब** आणि **डब** ह्याही एकाच सरळरेषेंत आहेत, असें सिद्ध करितां येईल.

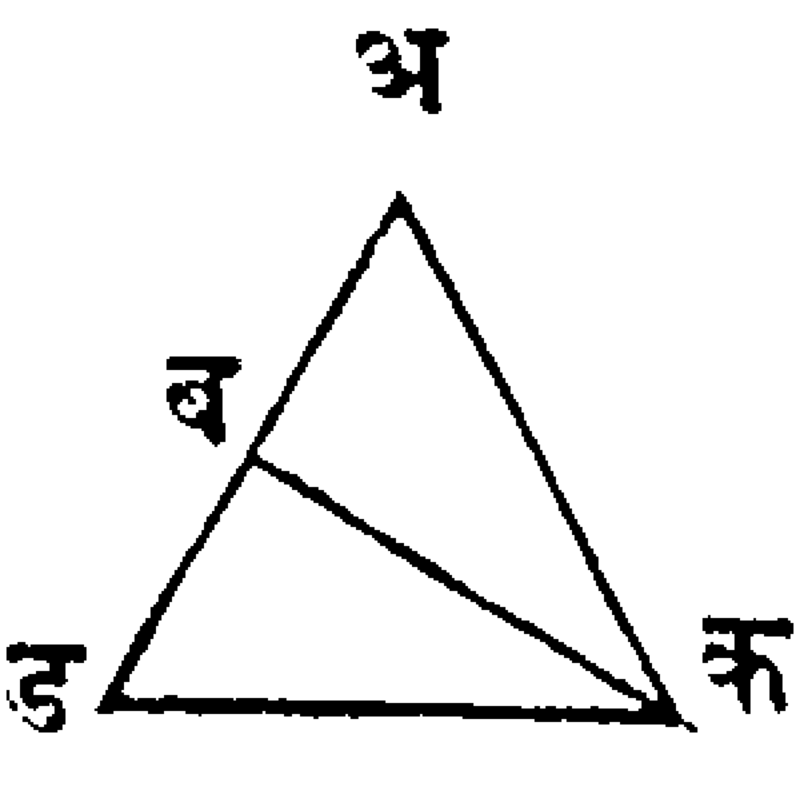
१.१६ प्रश्न १– ह्याच्या रचनेंतील लक्षांत ठेवण्याजोगी गोष्ट एवढीच आहे कीं, बाहेरील कोन व तो आंतील ज्या कोनापेक्षां मोठा आहे असें सिद्ध करावयाचें असेल, तो कोन, ह्यांच्या कोणबिंदूंमधील बाजू दुभागावी लागते.

१.१७ प्रश्न १–विवक्षित दोन कोनांमधील बाजूंतला कोणताही बिंदु व तीसमोरचा कोणबिंदु हे सांधून १.१६, प्र. प्र. ४ उप. १, १.१३ व प्र. प्र. अ ह्यांच्या योजनेनें क्रमिक सिद्धता करावी.

१.१७ प्रश्न १०–(१) "दोन रेषांस एक रेषा मिळते" व (२) "मिळणाऱ्या रेषेच्या एकाच अंगास झालेल्या दोन आंतरकोणांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी आहे" ह्या दोन गोष्टी मिळून प्र. प्र. १२ ह्याचा पक्ष आहे, आणि (३) "ह्या दोन रेषा (त्याच अंगास) मिळतील (म्हणजे त्या दोन रेषा व तिसरी मिळणारी रेषा ह्यांचा त्रिकोण बनेल)" हें प्र. प्र. १२ चें साध्य आहे; परंतु (१) आणि (३) ह्या दोन गोष्टी मिळून १.१७ चा पक्ष आहे व (२) हें त्याचें साध्य आहे. ह्यावरून प्र. प्र. १२ व १.१७ हे परस्परांचे व्यत्यास आहेत, हें उघड आहे.

१.१८ प्रश्न ३– ज्या दोन बाजूंविषयीं विचार करावयाचा त्यांच्या मेलनबिंदूपासून तुकडा पाडिला पाहिजे.

१.१८ प्रश्न ४– **अब** वाढवून **अक=अड** केली.



आतां **अकब** कोन<**अकड** कोन, (प्र.प्र.९)

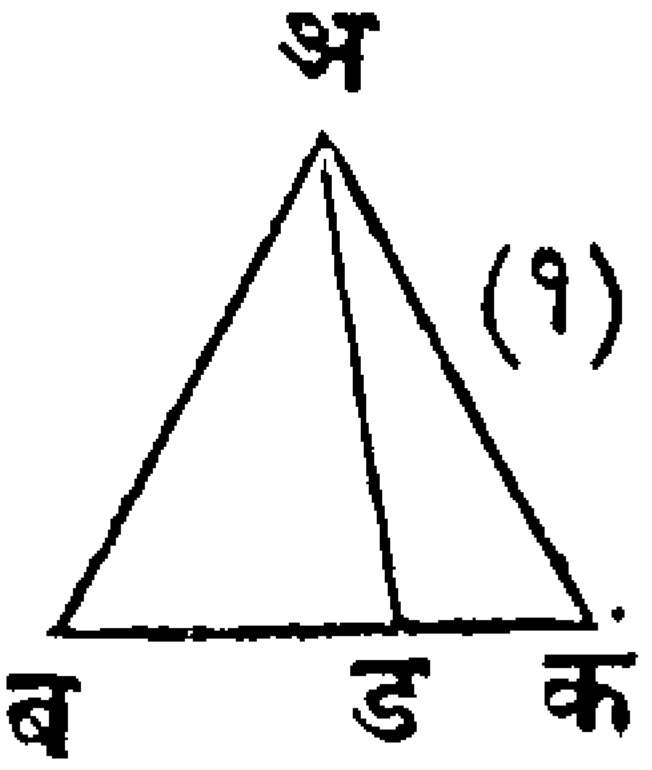
आणि **अकड=अडक**, (१.५)

आणि **अडक<अबक**. (१.१६) ∴ इष्टसिद्धि.

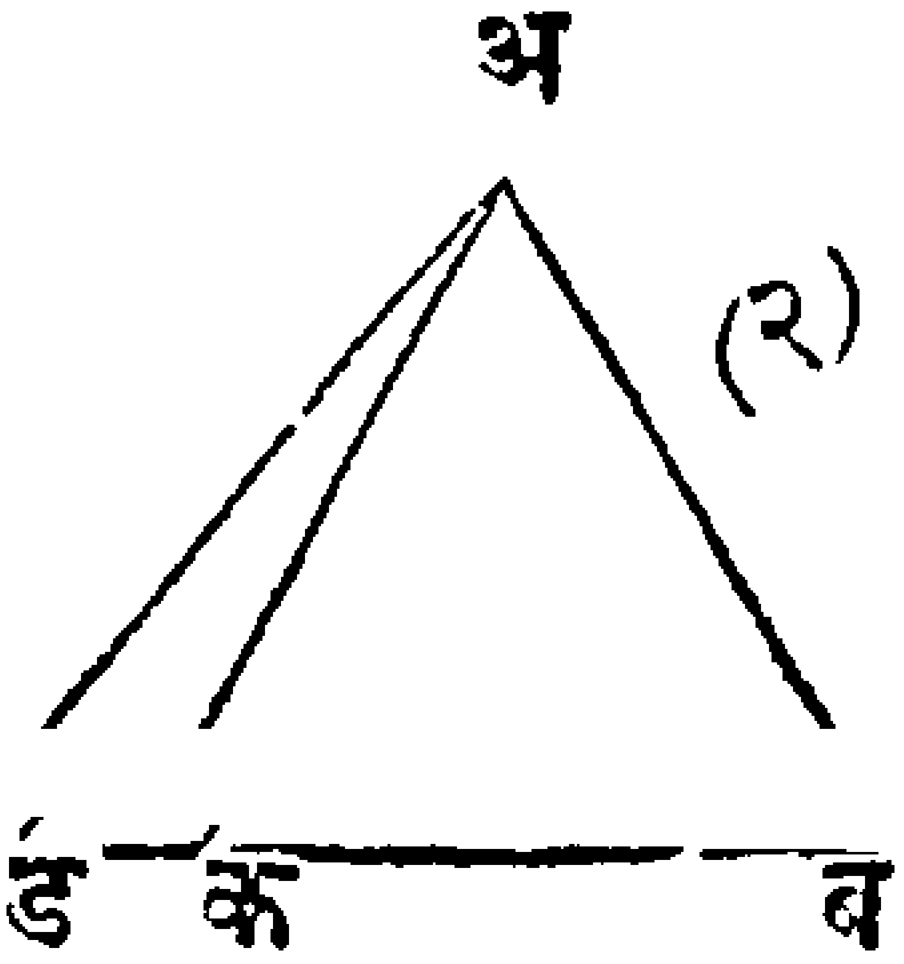
१.१९ प्रश्न १– १.१८ व १.१९ हे परस्परांचे व्यत्यास आहेत.

१.१९ प्रश्न २–१.१६, प्र. प्र. अ उप. आणि १.१९ ह्यांची

योजना अनुक्रमें करा.



१. १९ प्रश्न ५–(व्यक्तिप्र). **अबक** हा समद्विभुजत्रिकोण आहे; तर (१) ह्या आकृतींत **अड<अब** होईल.

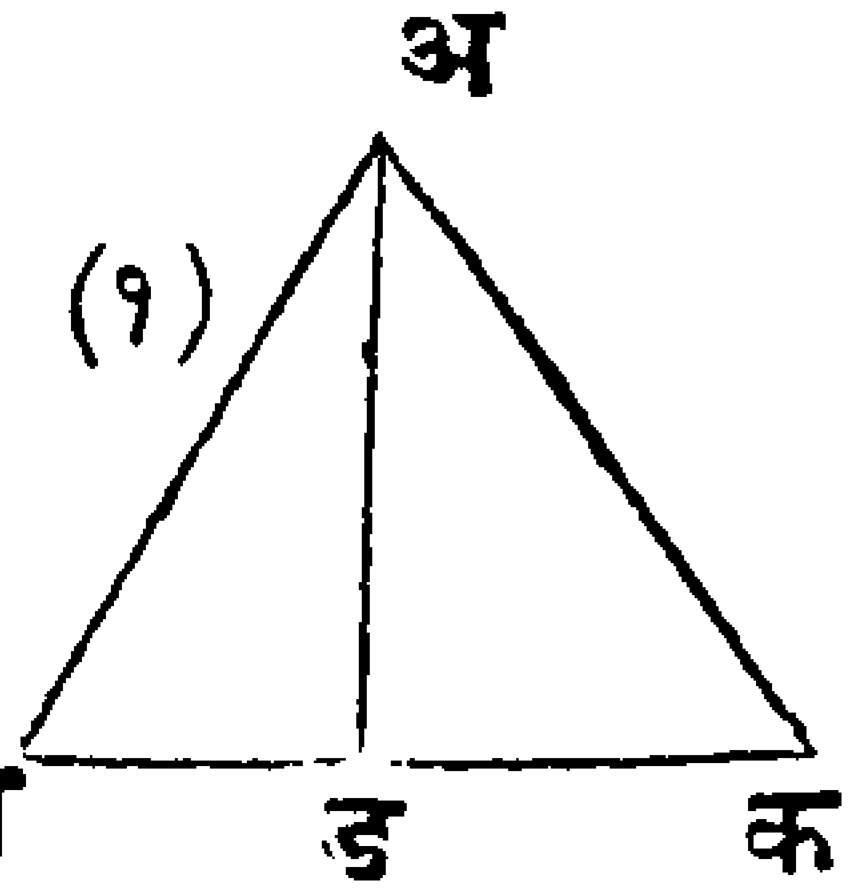


कारण **अडब** कोन>**अकब**, (१. १६)

∵ **अडब** कोन>**अबड**. (१. ५ व प्र. प्र. अ. उप.)

∴ **अड<अब**. (१. १९)

(२) ह्या आकृतींत १. १६ इ० हेच सि. अनुक्रमें योजिल्यानें **अड>अब** हें सिद्ध होतें.

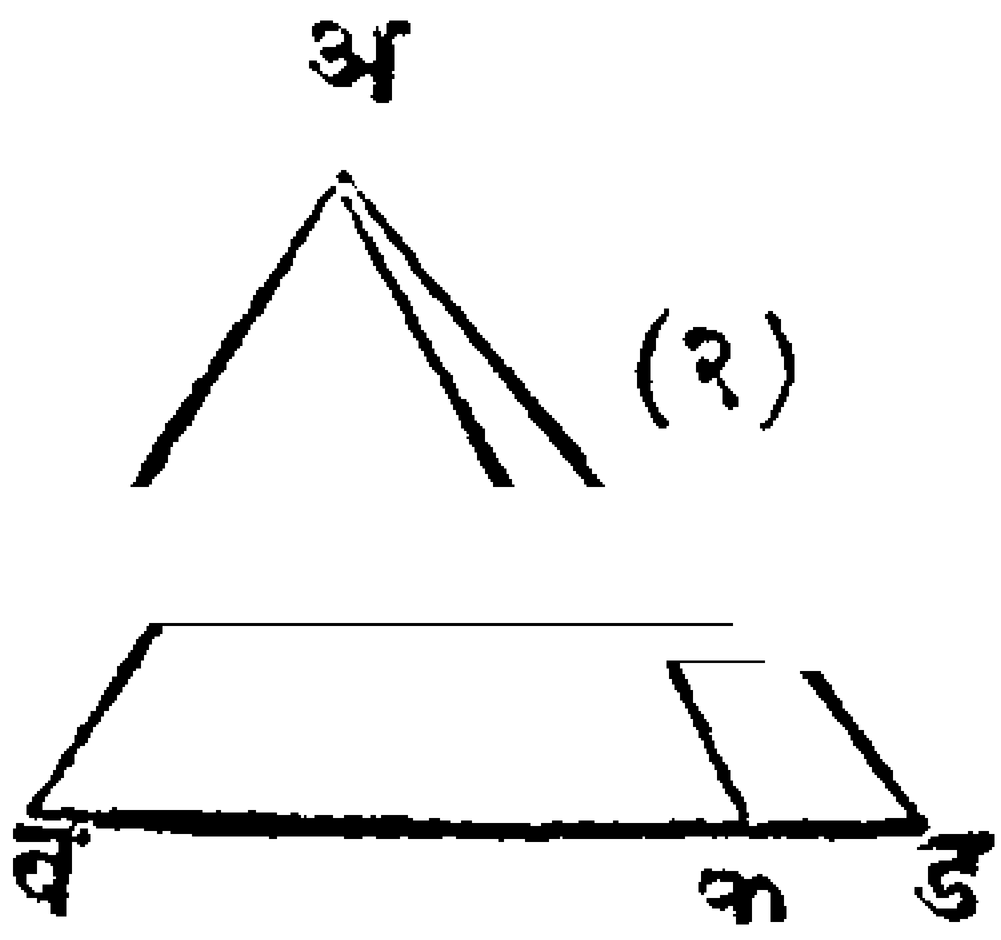


१. १९ प्रश्न ६–(व्यक्तिप्रतिज्ञा) (१) ह्या आकृतींत **अब<अक**; तर **अड<अक** हें सिद्ध करावयाचें.

∵ **अकब** कोन<**अबक** कोन, (१. १८)

आणि **अबक** कोन<**अडक** कोन, (१. १६)

∴ **अकब** कोन<**अडक** कोन. (प्र. प्र. इ.)



∴ **अड<अक** (१. १९) (इष्टसिद्धि.)

(२) ह्या आकृतींत **अब<अक**; तर **अब<अड** आणि **अक <अड** हें सिद्ध करावयाचें.

∵ **अडब** कोन<**अकब** कोन, (१.१६)

आणि **अकब** कोन<**अबक** कोन, (१.१८)

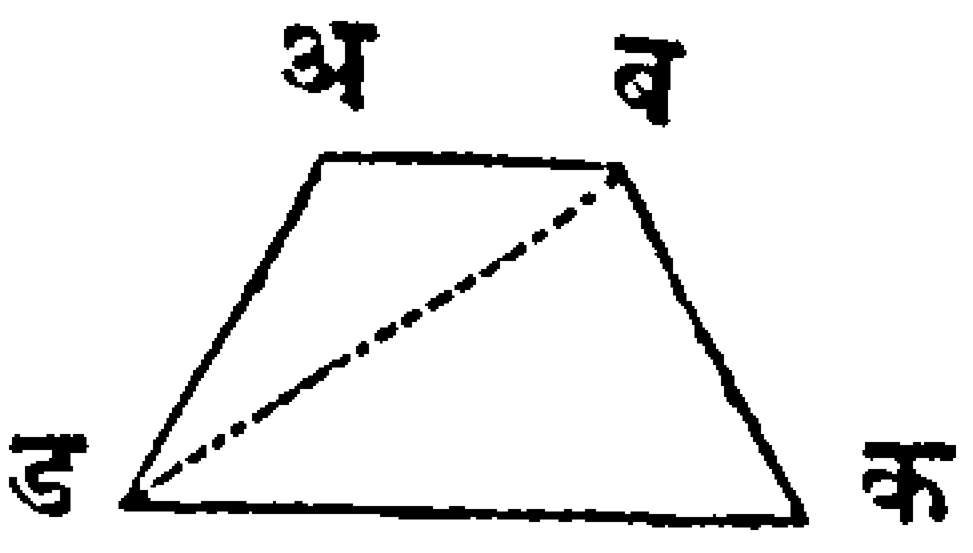
∴ **अडब** कोन<**अबक** कोन, (प्र. प्र. इ)

∴ **अब<अड**. (१.१९)

पुनः ∵ **अडब** कोन<**अबक** कोन, (वर सिद्ध केलें)
आणि **अबक** कोन<**अकड** कोन, (१.१६)
∴ **अडब** कोन<**अकड** कोन, (प्र.प्र.इ)
∴ **अक**<**अड** (१.१९). (इष्टसिद्धि)

१. २० प्रश्न ३–ज्या दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षां ज्यास्त ठरवावयाची, त्यांपैकीं एक त्यांच्या मेलनबिंदूपलीकडे वाढवून तिचा दुसरीएवढा तुकडा मेलनबिंदूपासून पाडावा; आणि त्या तुकड्याचें टोंक व तिसऱ्या बाजूचें टोंक हीं सांधावीं.

१. २० प्रश्न ४– **बड** सांधिली. आतां **अड+अब**>**बड** (१. २०)



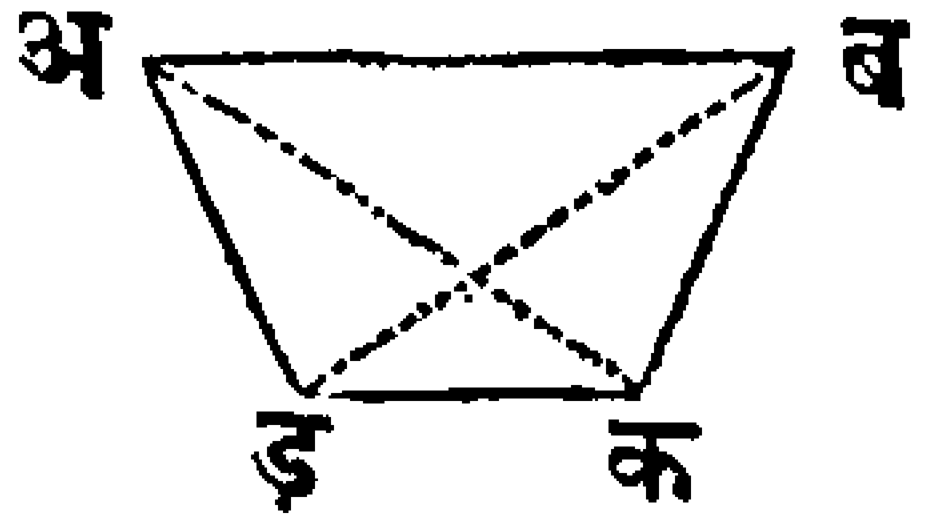
∴ **अड+अब+बक**>**बड+बक** (प्र. प्र.४), आणि **बड+बक**> **डक** (१. २०), ∴ प्र. प्र. इ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

१. २० प्रश्न ५– आकृतीच्या ज्या बाजूपेक्षां इतरांची बेरीज जास्त ठरवावयाची, तिचें एक टोंक व इतर कोणबिंदु सांधावे, आणि वरच्या प्रश्नाप्रमाणें सिद्धता करावी.

१. २० प्रश्न ६– १. १८ च्या आकृतींत **कड** ही **अक**, **अब** ह्यांची वजाबाकी आहे, ती **बक** पेक्षां कमी ठरवावयाची, असें समजा.

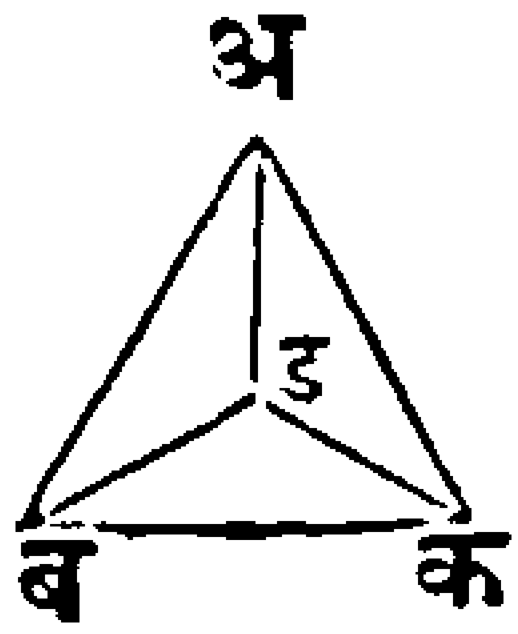
आतां **अब+बक**>**अक**; (१.२०)
∴ **बक**>**कड**. (प्र. प्र. ५) ही इष्टसिद्धि.

अथवा **अब** बाजू **ब**च्या पलीकडे वाढवून प्र. प्र. ९, १. ५ भाग २, प्र.प्र.अ, १. १९ ह्यांच्या योगानें क्रमिक सिद्धता करावी.



१. २० प्रश्न ७– **अब+बक**>**अक** आणि **अड+डक**>**अक** (१. २०;)
∴ **अब+बक+कड+अड**>२ (**अक**) (प्र. प्र. ४ उप. १). ह्याप्रमाणेंच **अब+बक+कड+अड**> २(**बड**), असें सिद्ध करितां येईल.

∴ प्र. प्र. ४ उप. १ व उप. ५ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.



१. २० प्रश्न ८– अड+बड>अब, अड+कड>अक आणि बड+कड>बक (१. २०).

∴ अड+बड+कड>$\frac{1}{2}$ (अब+अक+बक) (प्र. प्र. ४ उप. १ व ५.)

ड बिंदु त्रिकोणाच्या बाहेर असला, तरी अशीच सिद्धता करावी.

१. २० प्रश्न ९– आठव्या प्रश्नाप्रमाणेंच सिद्धता करावी.

१. २१ प्रश्न ४– १. २० प्रश्न ८ च्या आकृतींत अब+अक>डब+डक, अक+बक>डअ+डब आणि अब+बक>डअ+डक. (१.२१)

∴ अब+अक+बक>अड+बड+कड (प्र. प्र. ४ उप. १ व ५)

१. २१ प्रश्न ५–१. २१ च्या आकृतींत ई हा दिलेला बिंदु मानिला, तर अब+अक>बई+ईक, हें सिद्ध करावयाचें. हें त्याच्या सिद्धतेंत सिद्ध झालें आहे

१. २२ प्रश्न १– दोन बिंदु घ्यावे, ते सांधावे, (गृ. कृ. १) आणि ती सांधणारी रेषा एका टोंकाकडे अमर्याद करावी. (गृ. कृ. २)

१. २२ प्रश्न ३–दिलेल्या तीन रेषांपैकीं जीवर इच्छिलेला त्रिकोण काढावयाचा, तिच्या एकेक टोंकापासून दिलेल्या इतर दोन रेषांपैकीं एकेकीएवढी एकेक रेषा काढावी; तीं टोंकें मध्य व त्यांपासून काढिलेल्या रेषा त्रिज्या कल्पून दोन वर्तुलें काढावीं; नंतर त्या वर्तुलांच्या परिघांचा एक छेदनबिंदु व पहिल्या रेषेचीं दोन्हीं टोंकें सांधावीं. म्हणजे इच्छिलेला त्रिकोण तयार होईल.

१. २२ प्रश्न ४– तीं वर्तुलें परस्परांस न छेदितील, तर (१) परस्परांपासून दूर राहतील, किंवा (२) परस्परांस बाहेरून स्पर्श करितील, अथवा (३) एक दुसऱ्याचे आंत राहून त्याला स्पर्श करील, किंवा (४) एक दुसऱ्याचे आंत राहील पण स्पर्श करणार

नाहीं; अशा त्यांच्या चार स्थिति राहिल्या. ह्या चारही स्थिति संभवत नाहीं, असें "कोणत्याही दोन रेषांची बेरीज तिसरीपेक्षां जास्त आहे" ह्या (पक्षांतील) गोष्टीच्या आधारानें सिद्ध करितां येतें. तें असें:–

(१. २२ ची आकृति पहा.) (१) ही स्थिति मानिल्यास **अ+क<ब** असें ठरतें; (२) ही स्थिति मानिल्यास **अ+क=ब** असें ठरतें; (३) ही स्थिति मानिल्यास **अ=ब+क** किंवा **अ+ब=क** असें ठरतें; आणि (४) ही स्थिति मानिल्यास **अ>ब+क** असें ठरतें. हे सारे पक्षविरोध आहेत. ∴ ह्या चारही स्थिति संभवत नाहींत. ∴ तीं वर्तुळें परस्परांस छेदितीलच.

१.२२ प्रश्न ६– १.२२ ह्यांत दिलेल्या तीन रेषा समान असल्या आणि त्यांपैकींच एकीवर इष्ट त्रिकोण काढावयाचा असला, तर त्याला १.१ ह्याचेंच स्वरूप येतें.

१.२३ प्रश्न २– (१) दिलेल्या कोनाच्या दोन बाजूंत दोन बिंदु घेऊन ते सांधावे; (२) ह्या कृतीनें जो त्रिकोण होईल, त्यांतील दिलेल्या कोनाच्या दोन बाजूंपैकीं एकीएवढी दिलेल्या बिंदूपासून एक रेषा काढावी; (३) दिलेल्या कोनाच्या दुसऱ्या बाजूएवढा दिलेल्या रेषेचा दिलेल्या बिंदूपासून तुकडा पाडावा; (४) हा तुकडा जेथें पडेल, त्या बिंदूपासून दिलेल्या कोनाच्या समोरच्या बाजूएवढी (म्हणजे (१) ह्यांतील सांधणाऱ्या रेषेएवढी) रेषा काढावी; (५) नंतर (३) ह्यांतील तुकड्याचीं दोन्ही टोंकें मध्य व त्यापासून काढिलेल्या (२) व (४) ह्यांतील रेषा त्रिज्या कल्पून दोन वर्तुळें काढावीं; (६) आणि शेवटीं ह्या वर्तुळांच्या परिघांचा एक छेदनबिंदु व दिलेला बिंदु हे सांधावे. म्हणजे इच्छिलेला कोन होतो. सिद्धतेकरितां (३) ह्यांतील तुकड्याचें दुसरें टोंक व परिघांचा छेदनबिंदु हे सांधावे लागतात.

१.२३ च्या ह्या सामान्य रीतीमध्यें ध्यानांत ठेवण्याजोग्या गोष्टी ह्या कीं, (२) ह्या भागांत सांगितल्याप्रमाणें दिलेल्या बिंदूपासून जी

एक रेषा काढावयाची, ती दिलेल्या कोनाच्या दोन बाजूंपैकींच एकी-एवढी असली पाहिजे; व (३) ह्या भागांत सांगितल्याप्रमाणें जो दिलेल्या रेषेचा तुकडा पाडावयाचा तो दिलेल्याच बिंदूपासून पाडला पाहिजे व तो दिलेल्या कोनाच्या राहिलेल्याच बाजूएवढा असला पाहिजे. ह्या दोन गोष्टींकडे दुर्लक्ष झालें, तर इष्ट कोन दिलेल्या बिंदूजवळ होणार नाहीं.

१.२३ प्रश्न ३–१.२३ च्या रचनेंतील वर्तुळांच्या परिघांचे दोन्ही छेदनबिंदु व दिलेला बिंदु हे सांधिल्यानें दिलेल्या रेषेच्या दोन अंगांस दोन इष्टकोण होतील; व त्या कोन करणाऱ्या रेषा दिलेल्या बिंदूपलीकडे वाढविल्यानें आणखी दोन इष्टकोण होतील. असे पराकाष्ठा चार इष्टकोण होतील.

१.२३ प्रश्न ५– दिलेल्या रेषेशीं दिलेल्या बिंदूजवळ दिलेल्या त्रिकोणाच्या कोणत्या तरी कोनाएवढा एक कोन (१.२३) प्रमाणें करावा, आणि दिलेल्या त्रिकोणाच्या त्या कोनाच्या दोन बाजूंएवढाले नवीन कोनाच्या दोन बाजूंचे तुकडे पाडून छेदनबिंदु सांधावे. म्हणजे जो त्रिकोण होतो, तो (१. ४) वरून दिलेल्या त्रिकोणाशीं एकरूप ठरतो.

१. २४ प्रश्न २–**डई, डफ** ह्या रेषा समान असतील किंवा असमान असतील; ह्यांखेरीज त्यांची तिसरी कोणतीही अवस्था संभवत नाहीं. आतां ह्या जर समान असतील, तर "दुसरीपेक्षां मोठी नसणं" हा धर्म त्या प्रत्येक रेषेमध्यें आहे; आणि त्या जर असमान असतील, तर तो धर्म त्यांपैकीं धाकटीमध्यें आहे. म्हणून **डई** आणि **डफ** ह्यांपैकीं निदान एक तरी अशी असावयाचीच कीं, ती दुसरीपेक्षां मोठी नाहीं. (कोणत्याही दोन सजातीय पदार्थांपैकीं निदान एकामध्यें तरी "दुसऱ्यापेक्षां मोठा नसणें" हा धर्म असतोच. हें वरच्याप्रमाणेंच सिद्ध करावयाचें.)

१. २४ प्रश्न ३–(१) दिलेल्या त्रिकोणापैकीं एकाच्या पक्षोक्त (म्हणजे पक्षांत सांगितलेल्या) दोन बाजूंपैकीं कोणती तरी एक दुसरीपेक्षां मोठी नाहीं, असें मानावें. (२) जी दुसरीपेक्षां मोठी नाहीं

असें मानिलें असेल, तिच्याशीं, पक्षोक्त कोणबिंदूजवळ, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या पक्षोक्तकोणाएवढा कोन करावा (तो असा कीं, दोन्ही पक्षोक्तकोण त्या रेषेच्या एकाच अंगास असतील). (३) ह्या कोन करणाऱ्या रेषेचा दुसऱ्या पक्षोक्त बाजूएवढा तुकडा, पक्षोक्तकोण-बिंदूपासूनच पाडावा. (४) हा तुकडा जेथें पडेल, तो बिंदु व तिसऱ्या बाजूचीं दोन्ही टोकें हीं सांधावीं.

१. २४ प्रश्न ४-(१. २४ ची आकृति पहा.) **गई** रेषा (१) **ड** आणि **फ** ह्या बिंदूंच्या मधून जाईल (म्हणजे ती **डफ** रेषेला **ड** आणि **फ** ह्या बिंदूंच्या मध्येंच कोठें तरी छेदील), किंवा (२) **फ** बिंदूंतून जाईल, किंवा (३) **फ** बिंदूच्या खालून जाईल (म्हणजे **डफ** रेषा वाढविल्यानें तिला मिळेल). अशा **गई** रेषेच्या तीन स्थिति संभवतात. म्हणून वस्तुतः अशी प्रत्येक स्थिति मानून तिच्या संबंधाची सिद्धता केली पाहिजे. म्हणजे १. २४ च्या सिद्धतेचे वस्तुतः तीन भाग होतात. परंतु जर " **डई** बाजू **डफ** पेक्षां मोठी नाहीं " असें मानिलें, आणि (१.२४ प्रश्न ३ ह्यांतल्या रीतींत सांगितल्याप्रमाणें) तिच्याशींच कोन केला, तर **गई** रेषेची (१) हीच स्थिति असली पाहिजे, असें सिद्ध करितां येतें. तें असें:—

डई रेषा **डफ** पेक्षां मोठी नाहीं; ∴ **डई** ही **डफ**शीं बरोबर किंवा तिच्यापेक्षां लहान आहे. आणि **डफ=डग**, ∴ **डई** ही **डग**शीं बरोबर किंवा तिच्या पेक्षां लहान आहे (प्र. प्र. १ किंवा प्र. प्र. अ); ∴ **डफ** ह्या अमर्याद रेषेचा जो भाग **डईग** त्रिकोणामध्यें सांपडेल (म्हणजे **ड** बिंदु व त्याच्या समोरची **गई** बाजू ह्यांच्यामध्यें सांपडेल) तो भाग **डग** बाजूपेक्षां लहानच असला पाहिजे (१. १९ प्रश्न ५ व प्रश्न ६). आणि **डग=डफ**; ∴ तो **डईग** त्रिकोणांत सांपडणारा **डफ** ह्या अमर्याद रेषेचा भाग **डफ** बाजूपेक्षांही लहानच असला पाहिजे (प्र. प्र. अ). ∴ **गई** रेषा **डफ** रेषेला **ड** आणि **फ** ह्या बिंदूंच्या मध्येंच कोठें तरी छेदील. हें सिद्ध. (ही गोष्ट क्रमविरुद्ध रीतीनेंही सिद्ध करितां येते.)

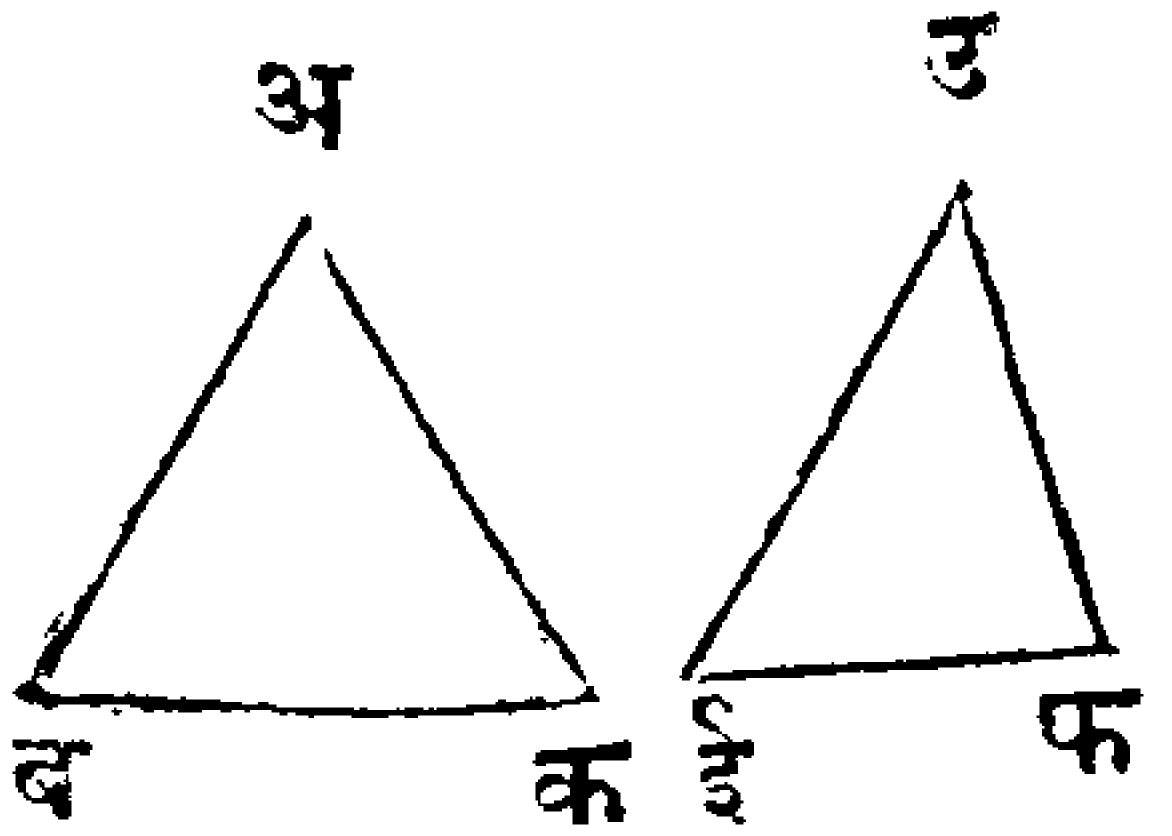
सारांश " **डई** ही **डफ** पेक्षां मोठी नाहीं " ही गोष्ट मानिली,

तर **ग**ईची (१) ही एकच स्थिति आहे असें ठरून ग्रंथांतली १.२४ ची सिद्धता पुरते; परंतु ती गोष्ट न मानिली, तर **ग**ईची अमुकच स्थिति असली पाहिजे, असें ठरवितां येत नाहीं; आणि त्यामुळें तिची प्रत्येक स्थिति मानून तिच्या संबंधाची सिद्धता केल्यावांचून १.२४ ची सिद्धता पुरी होत नाहीं. हा ग्रंथकाराच्या दृष्टीनें ती गोष्ट मानिल्याचा उपयोग आहे.

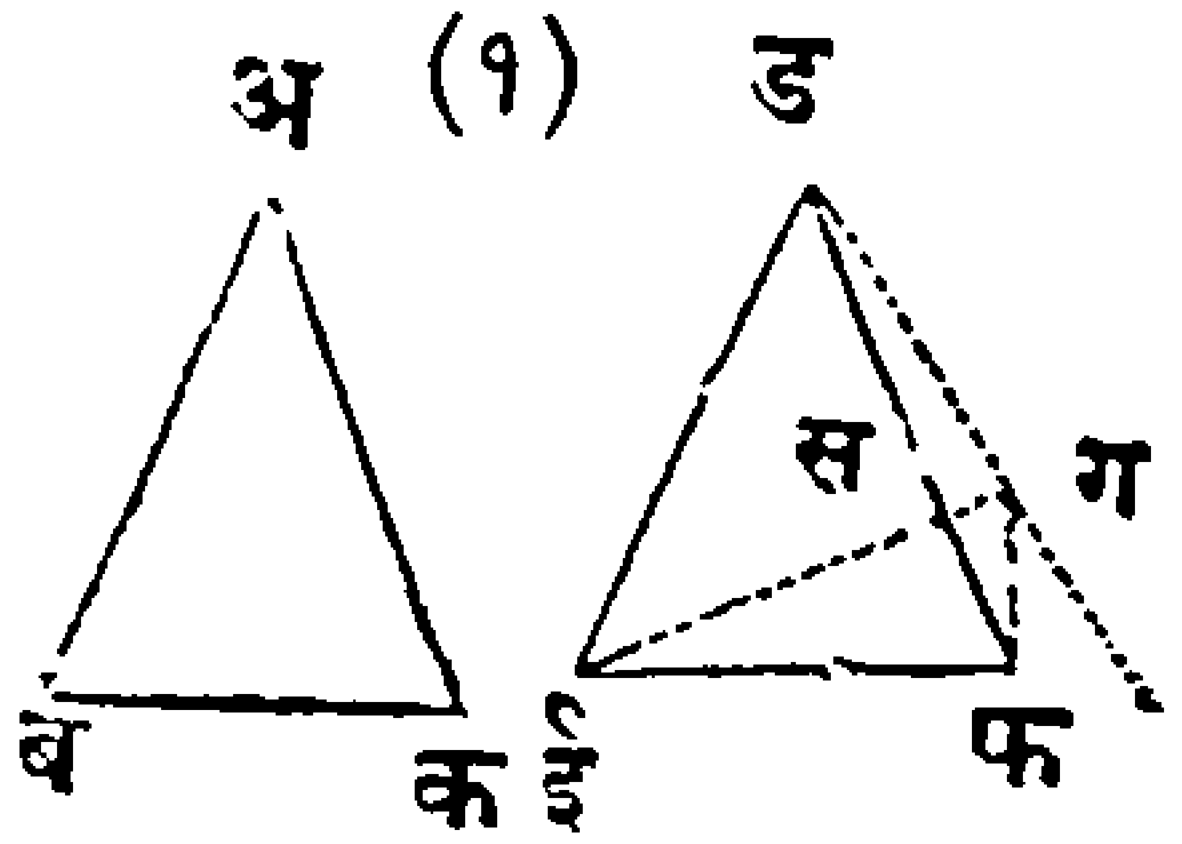
आतां हें मात्र ध्यानांत ठेविलें पाहिजे कीं, "**डई** ही **डफ** पेक्षां मोठी नाहीं" ही गोष्ट जरी मानिली, तरी **ग**ईची अमुकच स्थिति असली पाहिजे हें (वर दाखविल्याप्रमाणें) त्या गोष्टीच्या आधारानें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखविल्याखेरीज १. २४ ची ग्रंथांतली सिद्धता पुरी झाली, असें मानितां येत नाहीं. म्हणून वस्तुतः ती गोष्ट मानून १. २४ ची सिद्धता करणें हें, ती न मानितां तीन भागांनीं सिद्धता करणें, ह्यापेक्षां सोपें आहे, असें म्हणतां येत नाहीं.

१.२४ प्रश्न ५–"**अब**, **अक**, ह्या बाजूंपैकीं निदान एक अशी असली पाहिजे कीं, ती दुसरी पेक्षां मोठी नाहीं. ती मोठी नसणारी बाजू **अब** आहे असें मानून तिच्याशीं **अ** बिंदू जवळ **ईडफ** कोनाएवढा कोन करणें" इत्यादिक (१. २४ प्रश्न ३ ह्यांत सांगितल्याप्रमाणें) रचना करावी. नंतर कोन करणाऱ्या रेषेचा **अक** एवढा तुकडा जेथें पडेल, तो बिंदु **बक**च्या खालींच असला पाहिजे, असें (ती मानिलेली गोष्ट आणि १. १९ प्रश्न ५ व प्रश्न ६ ह्यांच्या आधारानें) सिद्ध करावें; बाकीची बहुतेक सिद्धता ग्रंथांत सांगितल्याप्रमाणेंच करावयाची.

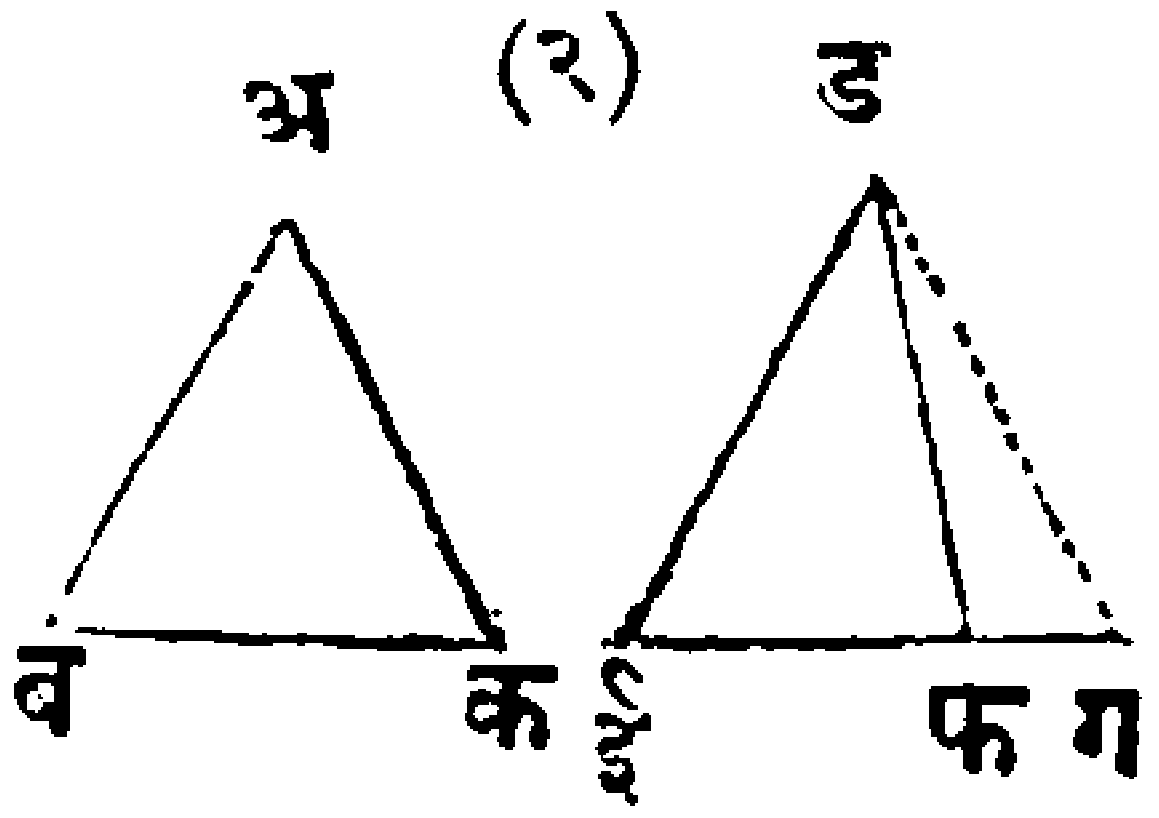
१ २४ प्रश्न ६–"**डई** ही **डफ** पेक्षां मोठी नाहीं" इत्यादिक कोणतीही गोष्ट न मानितां १.२४ ची सिद्धता खालीं लिहिल्याप्रमाणें करावी.



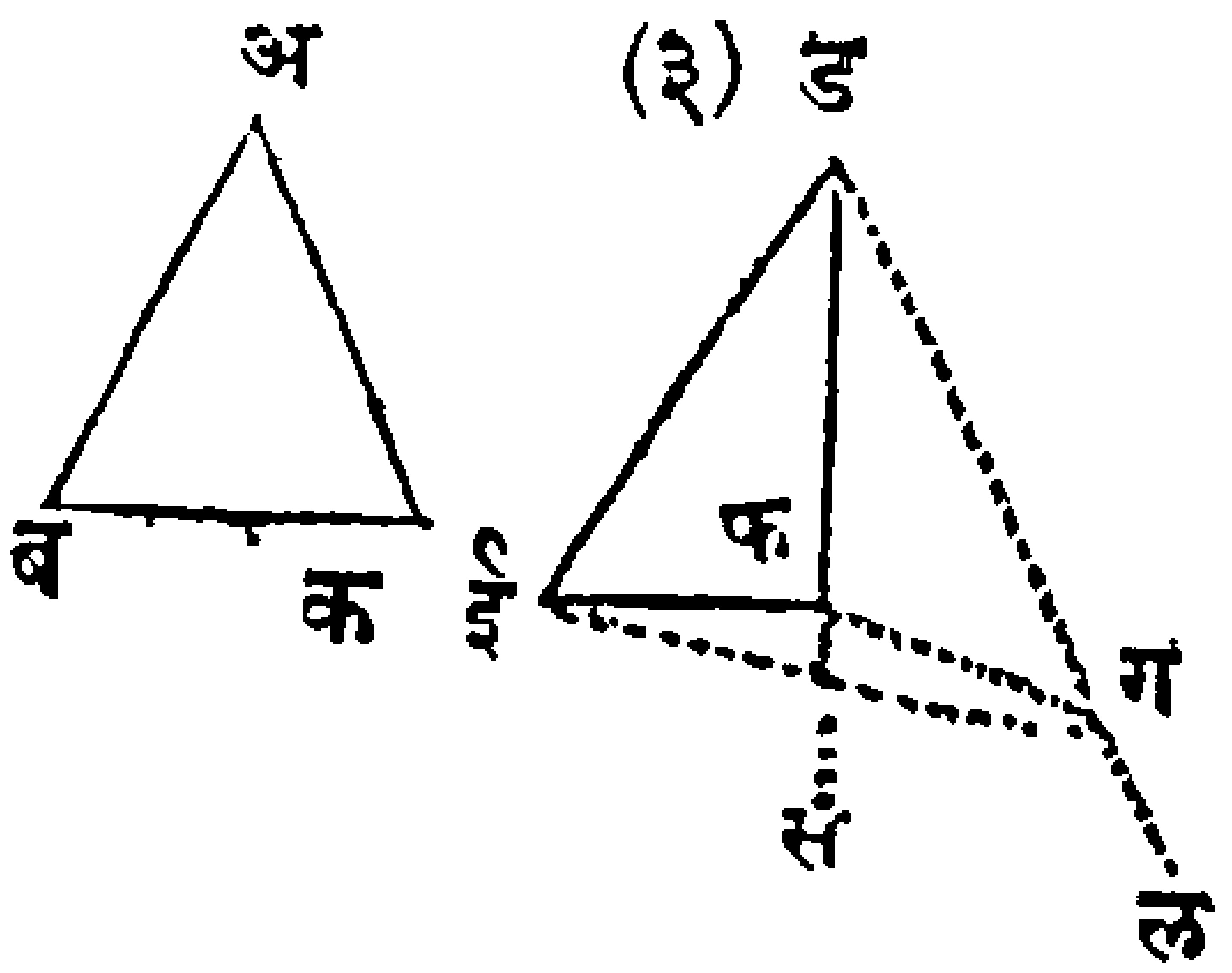
(व्यक्तिप्र.) **अब**=**डई**, **अक**=**डफ** आणि **अ** कोन>**ड** कोन; तर **बक**>**ईफ** हें सिद्ध करावयाचें.



डई रेषेशीं **ड** बिंदूजवळ **अ** कोना एवढा **ईडग** कोन करून **डफ** बरोबर **डग** केली; आणि **गई** सांधिली.



आतां **गई** रेषा (१) ड, फ ह्यांच्या मधून जाईल, (२) **फ** बिं-दूंतून जाईल, किंवा (३) **फ** बिंदू-च्या खालून जाईल (म्हणजे **डफ** वाढविली तरच तिला मिळेल).



गईच्या (१) ह्या स्थितींत ग्रंथांत सांगितल्याप्रमाणेंच सिद्धता करावी. अथवा खालीं लिहिल्याप्रमाणें करावी.

डस+गस>डग; आणि **सफ+सई>ईफ** (१.२०). ∴ **डस+सफ+गस+सई>डग+ईफ** (प्र. प्र. ४ उपसि. १), म्हणजे **डफ+गई>डग+ईफ**; आणि **डफ=डग** (रचना) ∴ **गई>ईफ** (प्र. प्र. ५). आतां **गई=बक** (१.४ भा. १), ∴ **बक>ईफ** (प्र. प्र. अ). ही इष्टसिद्धि.

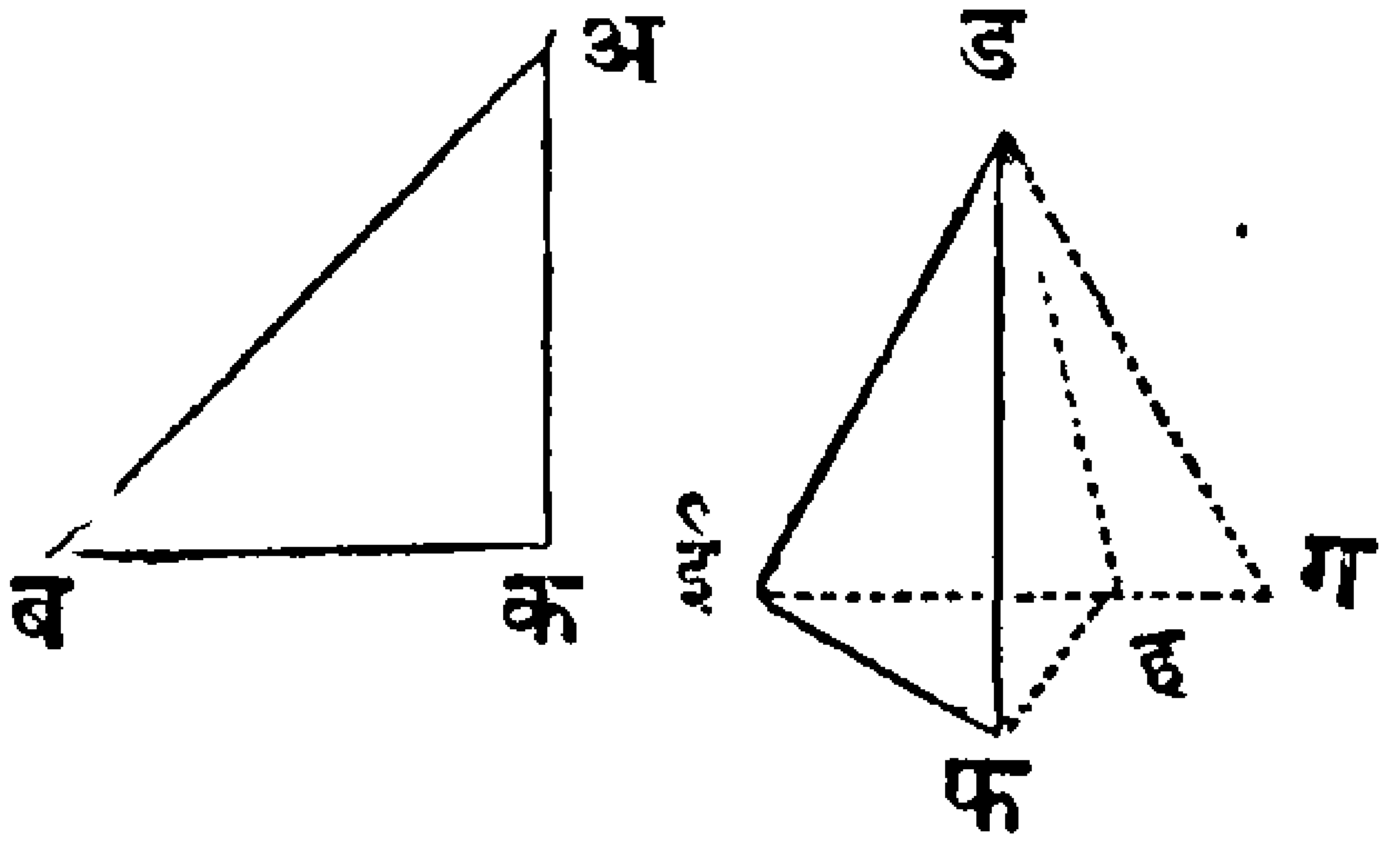
गईच्या (२) ह्या स्थितींत १.४ भा. १, प्र. प्र. ९ व प्र. प्र. अ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

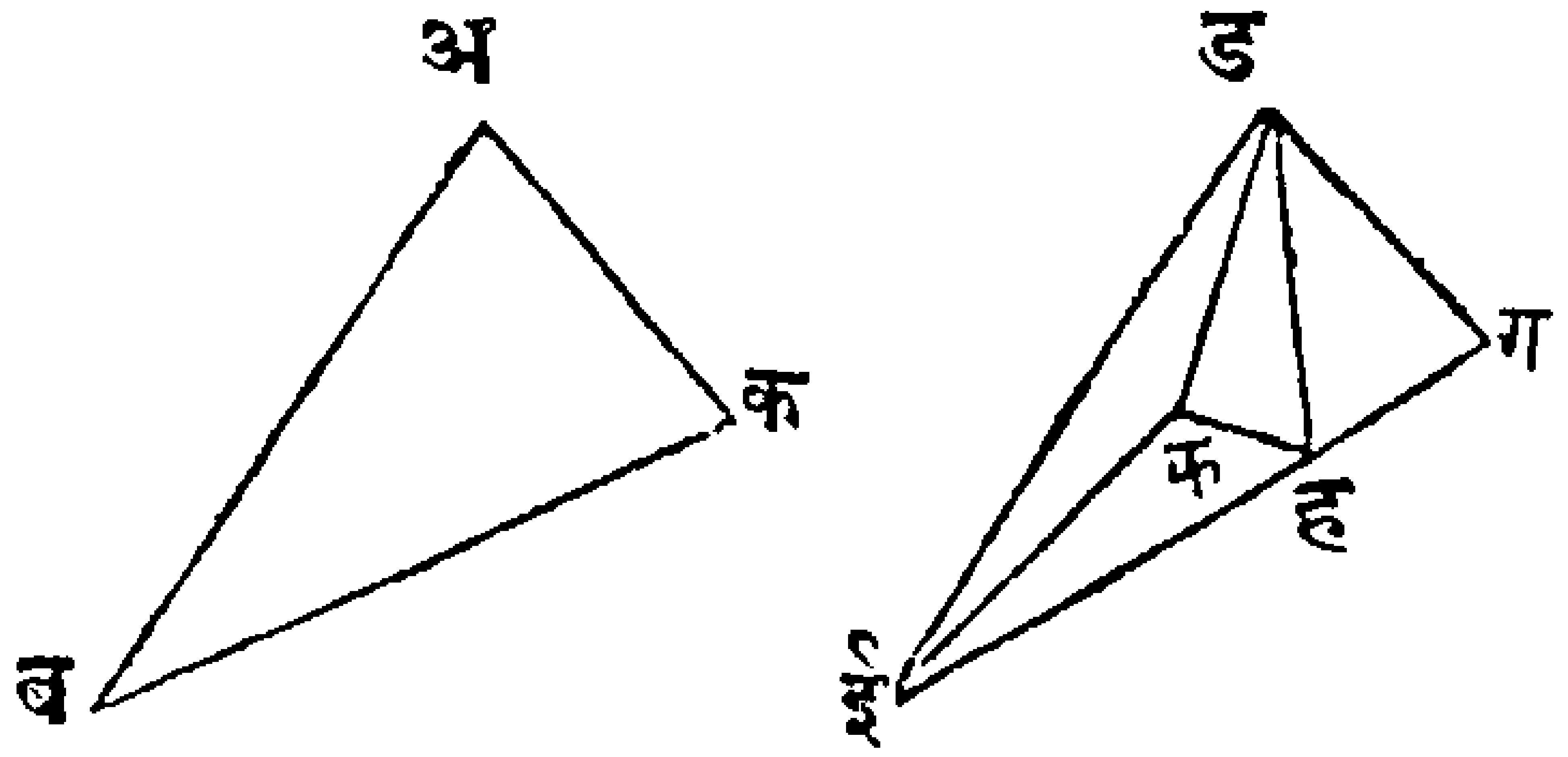
गईच्या (३) ह्या स्थितींत **सफग** कोन=**फगल** कोन (१.५ भाग २); ह्मणून **सफग** कोन>**फगई** कोन (प्र. प्र. ९ व प्र. प्र.

अ); ∴ **ईफग** कोन>**फगई** कोन (प्र. प्र. ९ व प्र. प्र. इ); ∴ **गई>ईफ** (१.१९). ∴ १.४ भा. १ व प्र. प्र. अ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

अथवा (३) ह्या स्थितींत **डग+गई>डफ+ईफ** (१.२१). आणि **डफ=डग** (रचना); म्हणून **गई>ईफ** (प्र. प्र. ५); ∴ १.४ भा. १ व प्र. प्र. अ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

अथवा **गई**च्या (१) व (३) ह्या स्थितींमध्यें **फग** मुळींच न





सांधितां **फडग** कोन दुभागणारी **डह** रेषा काढून ती **गई**ला **ह** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढवावी; आणि **हफ** सांधावी. नंतर **फडह गडह** ह्या त्रिकोणांस १.४ भाग १ लाविल्यानें **फह=गह** ठरते; ∴ **ईह+फह=ईग** (प्र. प्र. २). आणि **ईह+फह>ईफ**; ∴ **ईग>ईफ** (प्र. प्र. अ). ∴ १.४ भा. १ व प्र. प्र. **अ** ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

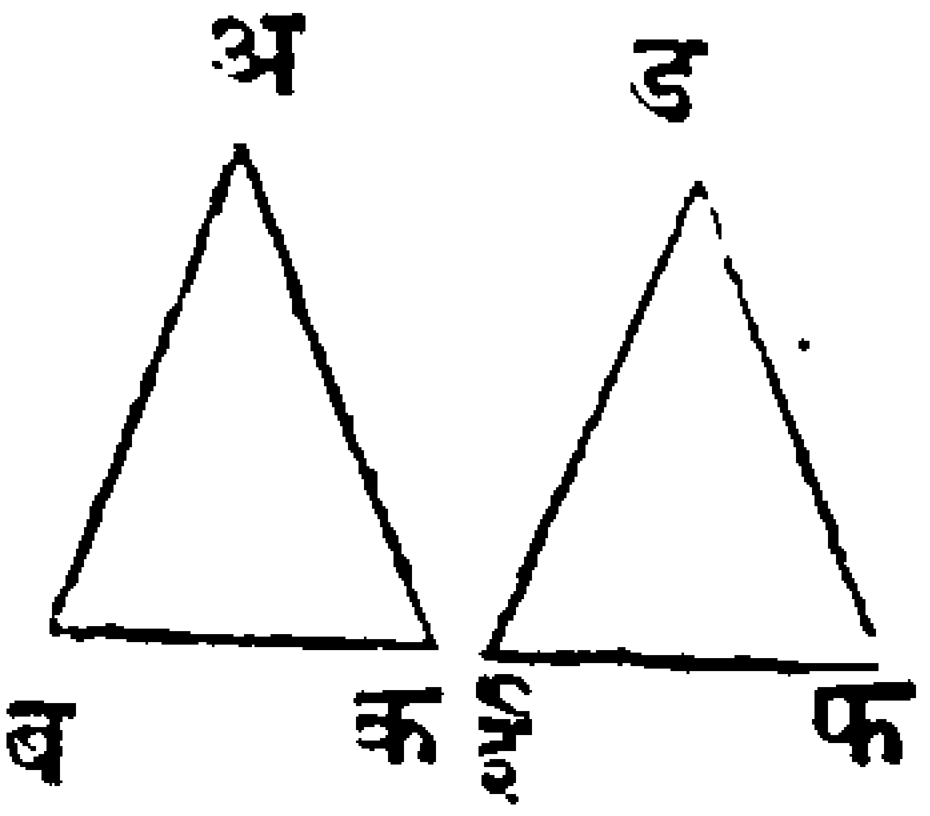
१. २५ प्रश्न २–" दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर असतील, तर त्यांच्या त्या बाजूंमधील कोनांची समानता व असमानता, आणि राहिलल्या बाजूंची समानता व असमानता ह्या परस्परांवर अवलंबून असतात " असें १.४, १.८, १.२४, व १.२५ ह्यांवरून सिद्ध झालें.

१. २६ प्रश्न. ३–मोठीचा तुकडा पाडण्याच्या संबंधानें सामान्य

नियम हा कीं, " पक्षांत ज्या बाजूची समानता दिली असेल तिच्या टोंकापासून मोठीचा तुकडा पाडिला पाहिजे; " असें न केलें, तर १.४ ची योजना करितां येणें संभवत नाहीं.

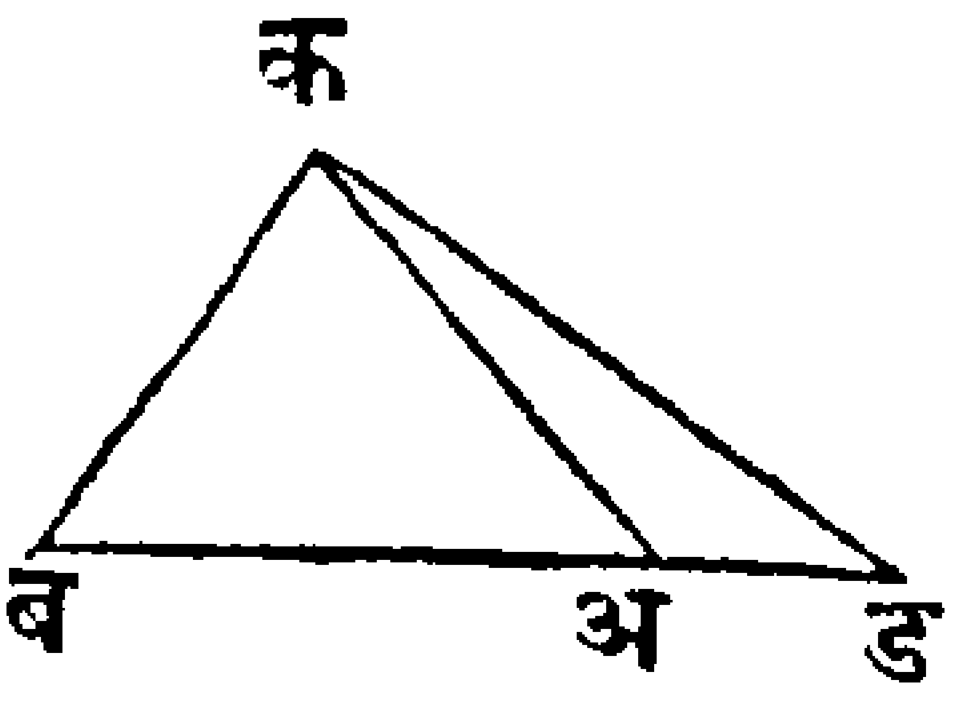
१. २६ प्रश्न ५–आरंभीं **अक, डफ,** ह्यांची समानता सिद्ध करितां येणार नाहीं; कारण कीं, त्यांच्या संबंधानें १.४ च्या योजनेची सामग्री जुळतच नाहीं.

१. २६ प्रश्न ७–१.२६ च्या पहिल्या भागाची दुसरी सिद्धता:–



अबक त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणावर असा उचलून ठेविला कीं, **ब** बिंदु **ई** बिंदूवर पडून **बक, ईफ** ह्यांची दिशा एक होईल. आतां **बक=ईफ** (प्रतिज्ञा), ∴ **क** बिंदु **फ**शीं मिळेल; आणि **ब** कोन=**ई** कोन, ∴ **बअ, ईड,** ह्यांच्या दिशा एक होतील (प्र. प्र. ९ उपसि. १ व २); ∴ **अ** बिंदु **ईड** रेषेंत पडेल. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, **अ** बिंदु **फड** रेषेंत पडेल. ∴ **अ** बिंदु **ईड, फड** ह्यांस साधारण असणाऱ्या बिंदूवर पडेल. **ईड, फड** ह्यांस साधारण असणारा बिंदु **ड** खेरीज दुसरा असणें संभवत नाहीं (प्र. प्र. १० उपसि. १); ∴ **अ** बिंदु **ड** बिंदूशींच मिळेल. ∴ प्र. प्र. ८ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

१. २६ प्रश्न ९–"जर दोन त्रिकोणांपैकीं एकाच्या दोन बाजू व त्यांपैकीं एकीसमोरचा कोन हीं, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तदनुरूप अवयवाशीं अनुक्रमें समान असतील; तर त्यांचे राहिलेले अवयव अनुक्रमें समान होतील. " हा १.२६ च्या दुसऱ्या भागाचा व्यत्यास होय.



हा सिद्धांत खरा नाहीं. कारण; **अ, ब** हे बिंदु घेऊन सांधिले (गृ. कृ. १); **अब** रेषेवर **अबक** हा समभुजत्रिकोण काढिला (१.१); आणि **बअ** रेषा वाढवून तींतील एक **ड** बिंदु व **क** बिंदु हे सांधिले (गृ. कृ.२ व१).

आतां **कडअ** आणि **कडब** ह्या दोन त्रिकोणांपैकीं पहिल्याच्या **कड, कअ** ह्या दोन बाजू व **कअ** समोरचा **ड** कोन हीं, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या **कड, कब** ह्या दोन बाजू व **कब** समोरचा **ड** कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत; हें रचनेवरून उघड आहे. म्हणजे सदर्हू सिद्धांताच्या पक्षांत दिलेल्या गोष्टी ह्या दोन त्रिकोणांस लागू आहेत. परंतु त्या सिद्धांताचें साध्य म्हणजे बाकीच्या अवयवांची समानता ह्या त्रिकोणांमध्यें संभवत नाहीं, हें उघड आहे. म्हणून हा त्या सिद्धांतास अपवाद होय. ह्याकरितां तो सिद्धांत खरा नाहीं. (अशा दोन त्रिकोणांचे समान बाजूंच्या दुसऱ्या जोडासमोरचे कोन परस्परांचे पूरक असतात, हें ध्यानांत ठेवण्याजोगें आहे.)

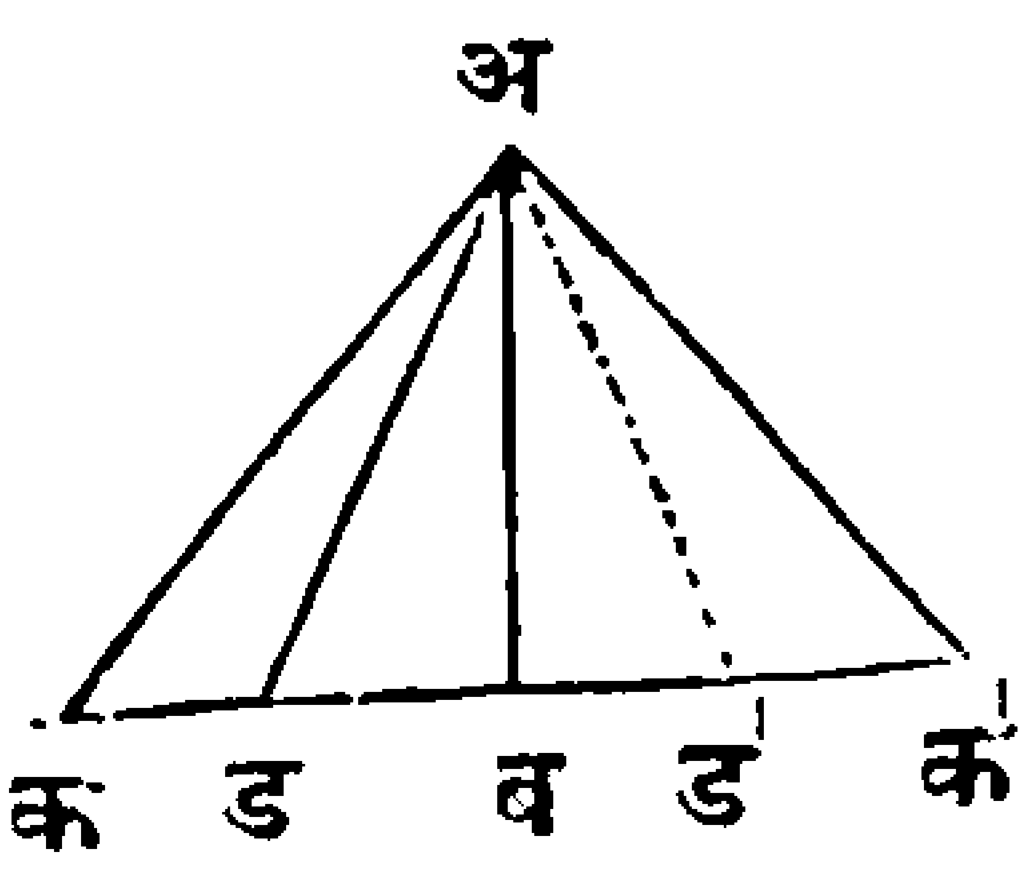
पहिल्या पुस्तकाच्या पहिल्या खंडावरील

(म्हणजे १.२६ पर्यंत सिद्धांतांवरील)

प्रश्नांविषयीं सूचना.

१. खंड १ प्रश्न ३–दिलेल्या बिंदुपासून दिलेल्या अमर्याद रेषेवर लंब काढावा. (हा लंब जर दिलेल्या दुसऱ्या रेषेशीं मिळेल, म्हणजे ती दुसरी रेषा अमर्याद रेषेवर लंबच असेल, तर इष्ट रेषा संभवत नाहीं, हें १.५ व १.१७ ह्यांवरून क्रमविरुद्ध रीतीनें ठरतें;) तो लंब दिलेल्या दुसऱ्या रेषेशीं जो कोन करील, तेवढा कोन त्या लंबाशीं दिलेल्या बिंदूजवळ, लंबाच्या दुसऱ्या अंगास करून, ती कोन करणारी रेषा अमर्याद रेषेला मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, इष्ट रेषा होईल; हें १.२६ भाग १ ह्यावरून सिद्ध होतें.

१. खंड १ प्रश्न ४–ह्याच्या (१) ह्या भागाची क्र. सि. १.१६, व्याख्या १०, प्र. प्र. अ आणि १.१९ ह्यांच्या योगानें होतें. (२) ह्यांतील दोन्ही रेषा **अक, अड** ह्याप्रमाणें लंबाच्या एकाच अंगास असतील; तरः–

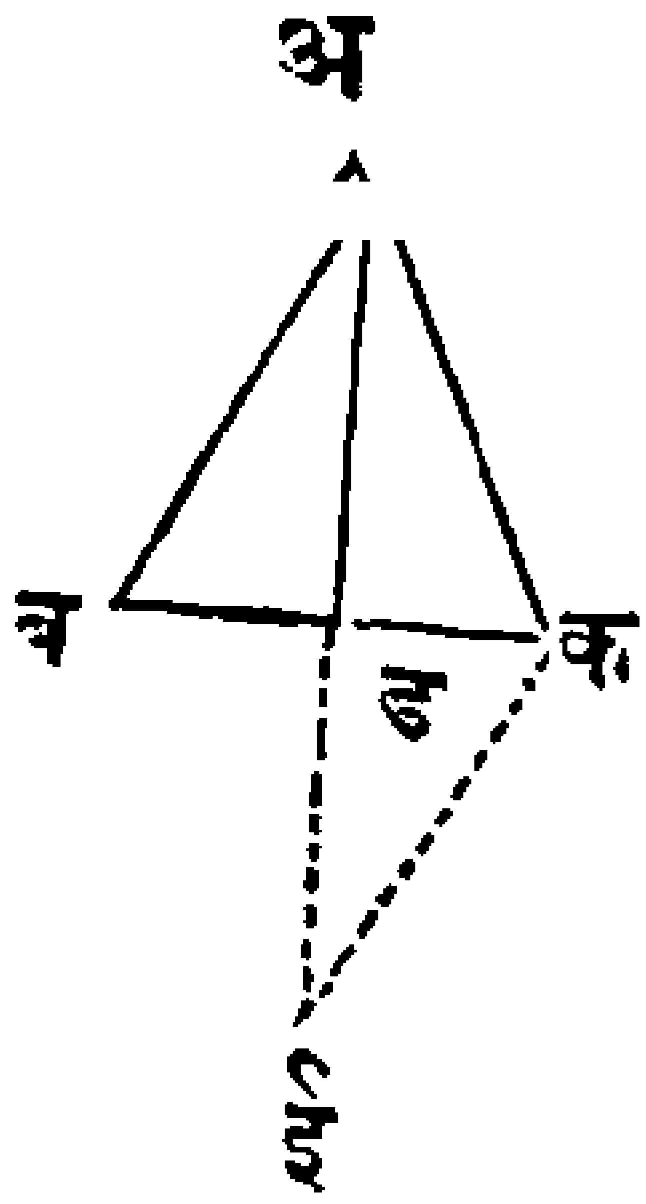


अडक कोन विशाल आहे (१.१६ व व्याख्या ११), आणि अक ड कोन लघु आहे (१.१६ व व्याख्या १२); ∴ अडक कोन> अकड कोन (प्र. प्र. ई). ∴ अक>अड (१.१९). आतां जर (२) ह्यांत दिलेल्या रेषा अक', अड ह्याप्रमाणें लंबाच्या भिन्न अंगांस असल्या, तर बअड कोनाएवढा बअड' कोन करावा; म्हणजे अड=अड' (१.२६ भाग १), आणि वर दाखविल्याप्रमाणें अक'> अड'; ∴ अक'>अड (प्र. प्र. अ उपसि.). (३) व (४) ह्या भागांची सिद्धता स्पष्ट आहे.

१. खंड १ प्रश्न ६– दिलेल्या त्रिकोणांस १.८ लाविल्यानें अओब त्रिकोणाच्या अब पायाकडील कोन समान ठरतात. ∴ १.६ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

१. खंड १ प्रश्न ७– अक कर्ण काढावा. म्हणजे अकड कोन> कअड कोन (१.१८); व अकब कोन>कअब (१.१८). ∴ क कोन>अ कोन (प्र.प्र. ४ उपसि. १)

१. खंड १ प्रश्न ८– हें प्रश्न ४ भाग (२) ह्यांत सिद्ध झाल्याप्रमाणेंच आहे.



१. खंड १ प्रश्न ९ (व्यक्तिप्र.) अड रेषा अबक त्रिकोणाच्या अ कोनास व बक बाजूस दुभागिते; तर अब=अक हें सिद्ध करावयाचें.

अड वाढवून अड=डई केली आणि कई सांधिली.

आतां अडब कोन=कडई कोन (१.१५); ∴ अडब आणि ईकड ह्या त्रिकोणांस १.४ भाग २ लाविल्यानें बअड कोन=कईड कोन; ∴ कअड कोन=कईड कोन (प्रतिज्ञा व प्र. प्र. १). ∴ १. ६, १.४ भाग १ व प्र. प्र. १ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

१. खंड १ प्रश्न १०–९ व्या प्रश्नाच्या सूचनेंत दाखविल्याप्रमाणेंच रचना करून १.४ भाग १ ह्याची योजना केल्यानें अब=ईक ठरते. मग अब+अक=ईक+अक (प्र. प्र. २); आणि इक+अक>अई (१.२०); ∴ इष्टसिद्धि.

१. खंड १ प्रश्न ११–ह्याचा (१) हा भाग १.२६ च्या दुसऱ्या भागाच्या योजनेनें क्रमिक रीतीनें सिद्ध करावा. (२) ह्या भागाची सिद्धता अशी:– कोनास दुभागणाऱ्या रेषेच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून त्या कोनाच्या बाजूंवर काढिलेले लंब सारखे मानिले, तर तो बिंदु व कोणबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा ही त्या कोनास दुभागिते, असें अ सिद्धांताच्या योजनेनें सिद्ध होतें; म्हणजे एका कोनास दुभागणाऱ्या दोन रेषा होतात. हें होणें अशक्य. ∴ इष्टसिद्धि.

१. खंड १ प्रश्न १३–दिलेल्या रेषांनीं झालेल्या चार कोनांपैकीं एखादा दुभागून दुभागणाऱ्या रेषेवर दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढावा; आणि तो दिलेल्या रेषांस मिळेल असें करावें. ही इष्ट रेषा आहे, असें १.२६ च्या पहिल्या भागावरून सिद्ध होतें; (आणि हीच रेषा दिलेल्या रेषांशीं सारखे कोन करिते, हें ही १.२६ वरून उघड आहे.)

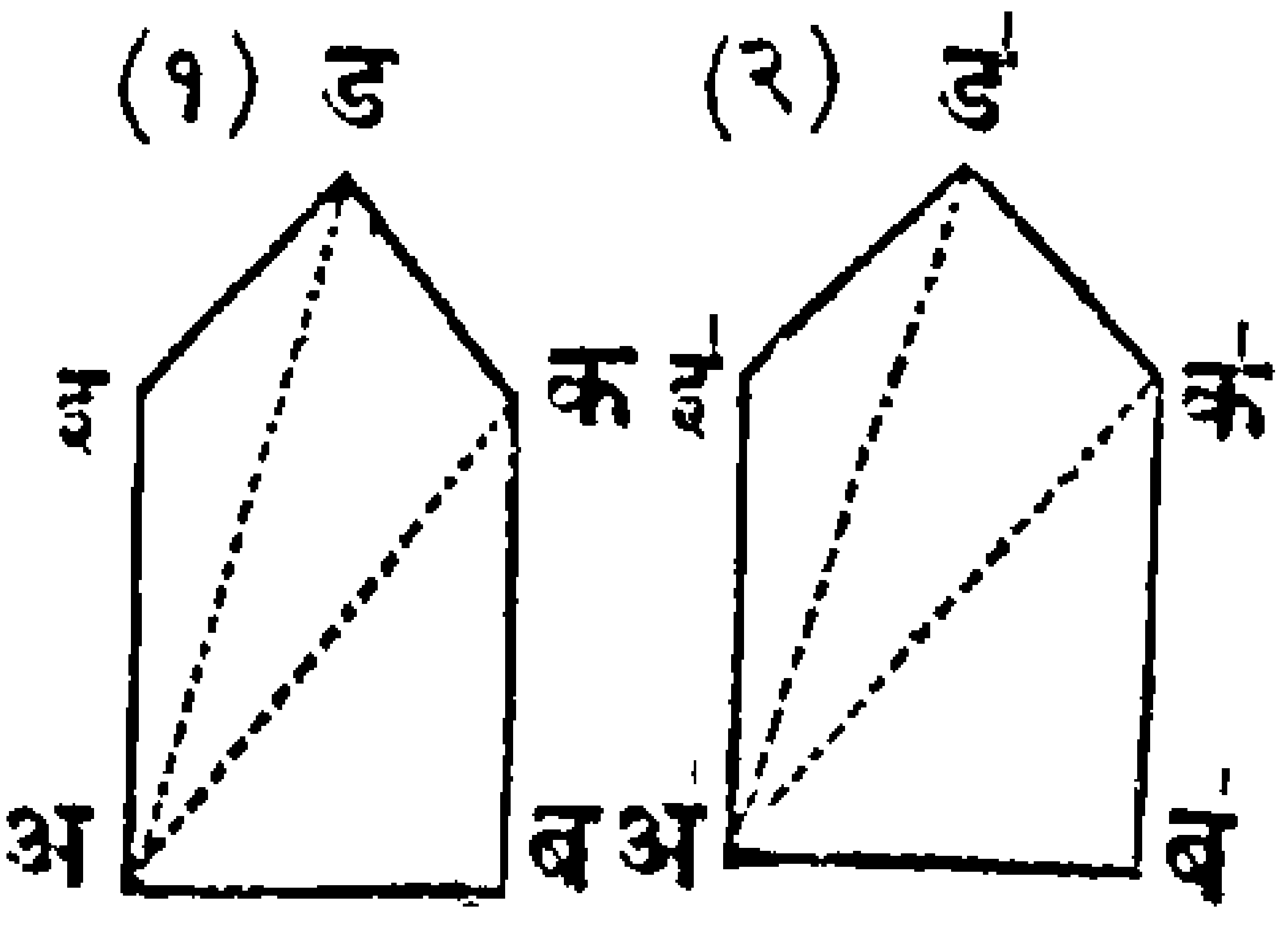
१. खंड १ प्रश्न १५–दोन त्रिकोणांची एकरूपता सिद्ध होण्यास एकाचे निदान तीन अवयव दुसऱ्याच्या तदनुरूप तीन अवयवांशीं अनुक्रमें समान आहेत, असें दिलें पाहिजे. आतां त्यांच्या कोणकोणत्या तीन तीन अवयवांची समानता दिली असतां त्यांची एकरूपता सिद्ध होते, हें १.४, १.८, १.२६ भाग १ व २ आणि १. अ ह्यांच्या पक्षांवरून स्पष्ट दिसेल.

“ एका त्रिकोणाचे कोणतेही तीन अवयव दुसऱ्याच्या तदनुरूप तीन अवयवांशीं अनुक्रमें समान असल्यास, ते त्रिकोण एकरूप असतात. ” ह्या सिद्धांताला दोन अपवाद आहेत. (१) १.२६ च्या दुसऱ्या भागाचा व्यत्यास खोटा आहे, असें १.२६ प्रश्न ९ ह्यांत दाखविलें आहे; तो एक अपवाद. (ह्या अपवादक सिद्धांताच्या पक्षांत एक गोष्ट जास्त दिल्यानें अ सिद्धांत उत्पन्न होतो, व तो खरा ठरतो). (२) “ जर दोन त्रिकोण मिथःसमकोण असतील (म्हणजे एकाचे तीन कोन दुसऱ्याच्या तीन कोनांशीं अनुक्रमें समान असतील,) तर ते एकरूप असतील ” असा नियम नाहीं. (हें १.२९ झाल्यानंतर सिद्ध करून दाखवितां येईल.) हा दुसरा अपवाद होय.

१. खंड १ प्रश्न १६–दोन बिंदु घेऊन ते सांधावे व ती रेषा अमर्याद करावी; ह्या रेषेशीं तींतील एका बिंदूजवळ दिलेल्या कोनाएवढा कोन करावा; ह्या नवीन कोनाच्या कोणबिंदूपासून त्याच्या दोन बाजूंचे दोन तुकडे दिलेल्या दोन रेषांएवढाले पाडावे; आणि हे तुकडे जेथें पडतील, ते बिंदु सांधावे.

१. खंड १ प्रश्न १७–ज्याच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन हीं, दिलेल्या त्रिकोणाच्या कोणत्या तरी दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत, असा त्रिकोण १६ व्या प्रश्नांत सांगितलेल्या कृतीनें तयार करावा. म्हणजे तो इष्ट त्रिकोण आहे, हें १.४ वरून सिद्ध होईल.

१. खंड १ प्रश्न १८–(व्यक्तिप्र.) (१) व (२) ह्या आकृतींच्या भुजसंख्या पांच पांच आहेत; (१) हिची **अब** बाजू व **अ, ब** हे कोनखेरीज करून तिचे बाकीचे अवयव, (२) हिची **अ'ब'** बाजू व **अ', ब'** हे कोन खेरीजकरून बाकीच्या अवयवांशीं अनुक्रमें समान आहेत; म्हणजे **अइ=अ'इ'**, इकोन=इ'कोन इत्यादिक. तर



अब=अ'ब', **अ**कोन=**अ'**कोन, **ब**कोन=**ब'**कोन, व (१) आकृति=(२) आकृति, हें सिद्ध करावयाचें.

(१) आकृति (२) आकृतीवर अशी ठेवावी कीं, **अ** बिंदु **अ'** बिंदूशीं मिळेल व **अइ, अ'इ'** ह्यांच्या दिशा एक होतील. मग १.४ च्या सिद्धतेप्रमाणें **ब, ब'** हे बिंदु मिळतात, असें दाखवावें. म्हणजे प्र. प्र. १० व ८ ह्यांवरून इष्टसिद्धि होते.

अथवा **अइड अ'इ'ड'** ह्या त्रिकोणांस १.४ लाविल्यानें **इडअ** कोन=**इ'ड'अ'** कोन व **अड=अ'ड'**. ∴ **अडक** कोन=**अ'ड'क'** कोन (प्रतिज्ञा व प्र. प्र. ३). ∴ **अडक, अ'ड'क'** ह्या त्रिकोणांस १.४ लावितां येईल. ह्याप्रमाणें सर्व त्रिकोण एकरूप ठरवितां येतात ∴ इष्टसिद्धि.

१. खंड १ प्रश्न १९–(व्यक्तिप्र). (१८ व्या प्रश्नाची आकृति पहा). (१) ह्या आकृतीच्या **अब, बक** ह्या बाजू व त्यांच्या मधील कोन **ब** हीं खेरीजकरून बाकीचे अवयव, (२) हिच्या **अ'ब'**, **ब'क'** ह्या बाजू व त्यांमधील कोन **ब'** हीं खेरीजकरून बाकीच्या अवयवांशीं अनुक्रमें समान आहेत; म्हणजे **अइ=अ'इ'**, इकोन=इ'कोन इ०. तर त्या आकृति एकरूप होतील. हें सिद्ध करावयाचें.

१८ व्या प्रश्नाच्या दुसऱ्या सिद्धतेंत दाखविल्याप्रमाणें **अइड, अ'इ'ड'** इत्यादिक त्रिकोण एकरूप ठरवीत गेल्यानें शेवटीं, **अबक** त्रिकोणाचे **अकब, बअक** हे कोन व **अक** बाजू हीं, **अ'ब'क'** त्रिकोणाचे **अ'क'ब', ब'अ'क'** हे कोन व **अ'क'** बाजू ह्यांशीं अनुक्रमें समान ठरतात. ∴ १.२६ भाग १ ह्यावरून इष्टसिद्धि होते.

१. खंड १ प्रश्न २०–(१८ व्या प्रश्नाची आकृति पहा) (१) ह्या आकृतीशीं एकरूप आकृति काढावयाची. तर आधीं दिलेल्या आकृतीच्या एका कोणबिंदूपासून इतर सर्व कोणबिंदूपर्यंत (**अड, अक** इ०) रेषा काढून तीमध्यें सारे त्रिकोण तयार करावे; नंतर १७ व्या प्रश्नाप्रमाणें कडेच्या (**अइड** इत्यादिक) एखाद्या त्रिकोणाशीं एकरूप असा (**अ'इ'ड'** इ०) त्रिकोण काढावा; पुनः त्याच्या (**अ'ड'**) बाजूला पहिल्या शेजारच्या (**अडक**) त्रिकोणाशीं एकरूप असा (**अ'ड'क'**) त्रिकोण जोडावा. ह्याप्रमाणें रचना करीत गेल्यानें इष्टप्राप्ति होते.

१. खंड १ प्रश्न २१–लंब काढिल्यामुळें दिलेल्या त्रिकोणांत जे नवीन दोन दोन त्रिकोण होतात, त्यांपैकीं एकेकास १.२६ भाग २ लाविल्यानें लंब समान ठरतात.

पहिल्या पुस्तकाच्या दुसऱ्या खंडावरील

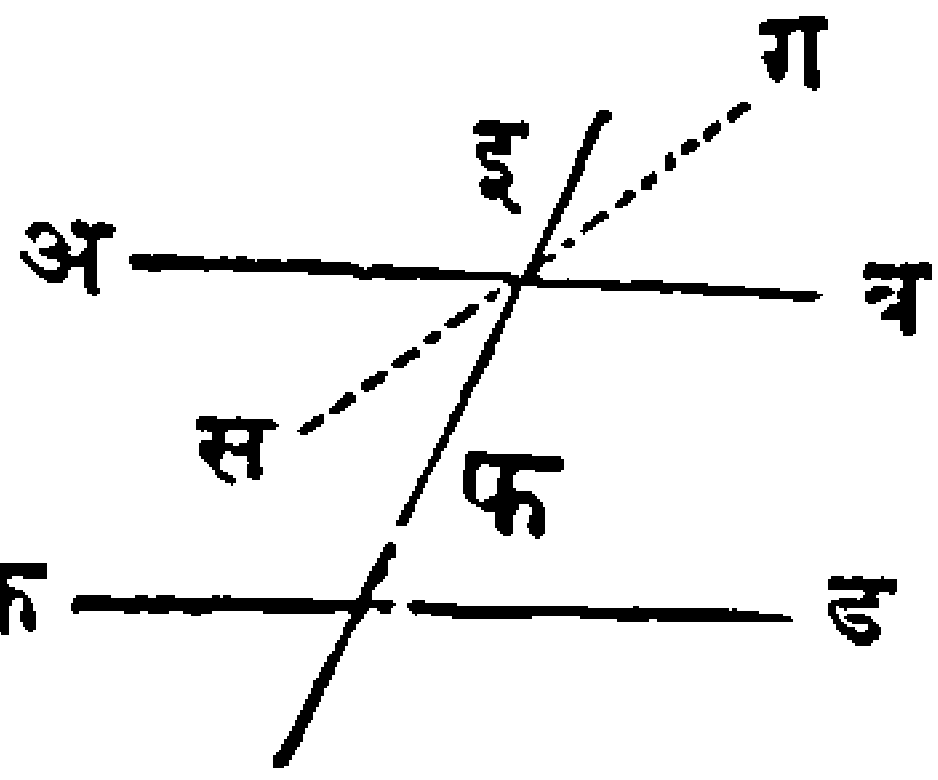
(ह्मणजे १.२७ पासून १.३१ पर्यंत पांच सिद्धांतांवरील)

प्रश्नांविषयीं सूचना.

(ह्या दुसऱ्या खंडामध्यें समांतर रेषांविषयीं मुख्यत्वें-करून विचार आहे.)

१. खंड २ प्रश्न १–युक्लिडचें १२ वें प्र. प्रमाण आरंभीं सहज

ध्यानांत येण्याजोगें नाहीं; म्हणून ह्याच्या ठिकाणीं दुसरें एखादें सोपेंसें प्रत्यक्षप्रमाण स्वीकारून त्याच्या आधारानें समांतर रेषांच्या संबधाचे सिद्धांत व युक्लिडचें १२ वें प्र. प्रमाण हीं सर्व सिद्ध करावीं; अशा हेतूनें अनेक ग्रंथकारांनीं अनेक प्र. प्रमाणें सुचविलीं आहेत. परंतु त्या सर्वांमध्यें "परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषा तिसऱ्या एकाच रेषेशीं समांतर असणें संभवत नाहीं" हें प्रमेय मात्र समजण्यास कांहींसें सोपें दिसतें. हें प्र. प्रमाण मानून ह्याच्या योगानें १.२९ च्या पहिल्या भागाची सिद्धता खालीं लिहिल्याप्रमाणें करावी:—

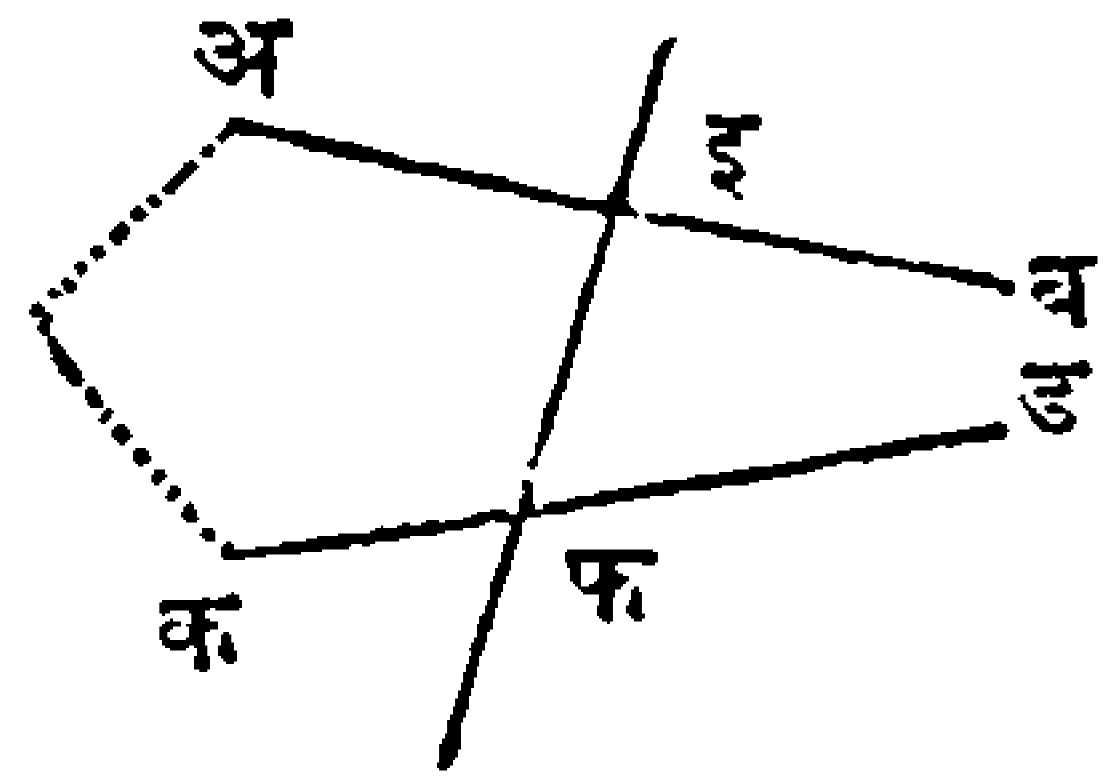


(व्यक्तिप्र.) **अब, कड** ह्या समांतर रेघांस **इफ** रेघ छेदिते; तर **अइफ, इफड** हे व्युत्क्रमकोण समान आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अइफ कोन **इफड** कोनाबरोबर नसेल, तर मोठा असेल किंवा लहान असेल. प्रथम **अइफ** कोन मोठा मानून **इफ** रेषेशीं **इ** बिंदूजवळ **इफड** ह्या कोनाएवढा **फइस** कोन केला. आतां **सग, कड** ह्या रेघांस **इफ** रेघेनें छेदिलें असून **सइफ, इफड** हे व्युत्क्रमकोण समान आहेत; म्हणून **सग, कड** ह्या रेघा समांतर आहेत (१.२७). पण **अब**ही **कड**शीं समांतर आहे (प्रतिज्ञा); म्हणून **अब, सग** ह्या परस्परांस छेदणाऱ्या रेषा एकाच **कड** रेषेशीं समांतर झाल्या. पण हा नवीन १२ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध होय. ह्मणून **अइफ** कोन **इफड** कोनापेक्षां मोठा नाहीं, ह्याप्रमाणेंच तो लहान नाहीं असें सिद्ध करितां येईल. ∴ ते व्युत्क्रमकोण समान आहेत.

ह्याप्रमाणें १.२९ चा पहिला भाग सिद्ध करणें एवढाच कायतो नवीन १२ वें प्र. प्र. स्वीकारिल्यानें युक्लिडच्या पद्धतीमध्यें फेरफार करावा लागतो.

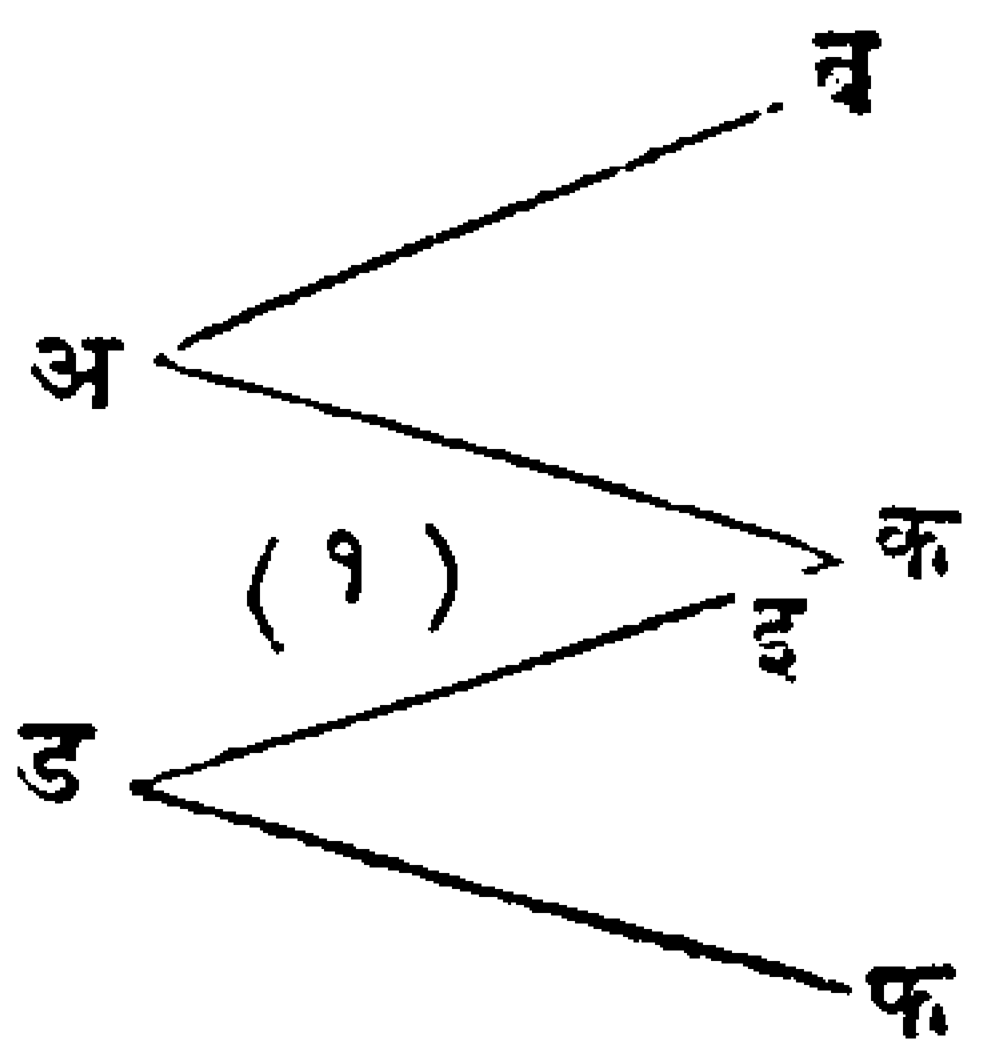
युक्लिडचें १२ वें प्र. प्रमाण खालीं लिहिल्याप्रमाणें १.२९ च्या आधारानें सिद्ध करावें.



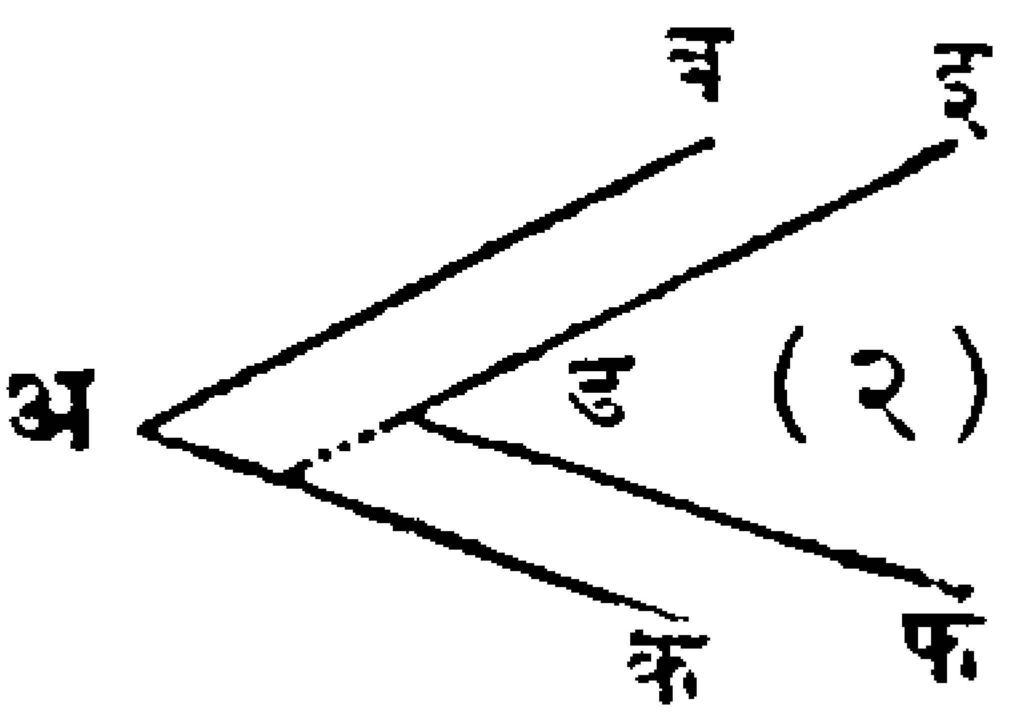
(व्यक्तिप्र.) **अब**, **कड** ह्या रेघांस **इफ** रेघ मिळते आणि **बइफ**, **इफड** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे; तर **अब**, **कड** ह्या रेघा **ब**, **ड** ह्या बिंदूंकडे वाढविल्या असतां मिळतील, हें सिद्ध करावयाचें.

ह्या रेषा **ब**, **ड** कडे न मिळतील, तर (१) समांतर असतील किंवा (२) **अ**, **क** बिंदूंकडे मिळतील. (१) समांतर मानिल्या, तर १.२९ भाग ३ प्रमाणें **बइफ**, **इफड** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोन ठरून पक्षाशीं विरोध यतो. (२) आतां त्या **अ**, **क** बिंदूंकडे मिळतील असें मानिलें, तर १.१७ प्रमाणें **अइफ**, **इफक** ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी होईल. ∴ १.१३, प्र. प्र. २, व प्र. प्र. ४ उपसि. ३ ह्यांची अनुक्रमें योजना केल्यानें **बइफ**, **इफड** ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांहून जास्त ठरून पक्षाशीं विरोध येतो. ह्मणून त्या रेषा **ब**, **ड** बिंदूंकडे वाढविल्या असतां मिळतील.

१. खंड २ प्रश्न २– (१) दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेषेशीं समांतर रेषा काढावी (१.३१); ह्या नवीन रेषेशीं दिलेल्या बिंदूजवळ दिलेल्या कोनाएवढा कोन करणारी एक रेषा काढावी (१.२३); आणि ही कोन करणारी रेषा दिलेल्या अमर्याद रेषेला मिळेतोंपर्यंत वाढवावी. ही इष्ट रेषा होईल. (२) अशा दोन रेषा निघतील. (३) १.२३ ह्यामध्यें दिलेला बिंदु दिलेल्या अमर्याद रेषेंत आहे, आणि ह्या कृत्यांत तो बिंदु रेषेच्या बाहेर आहे. एवढाच कायतो १.२३ व हें कृत्य ह्यांमध्यें भेद आहे. वस्तुतः १.२३ हा ह्या कृत्याचा विशेष प्रकार होय. (४) १.१२ हा ही प्रस्तुत कृत्याचा विशेष प्रकारच आहे.



१. खंड २ प्रश्न. ४– (व्यक्तिप्र.) **अ** कोनाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजू **ड** कोनाच्या **डइ**, **डफ** ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें समांतर आहेत; तर **अ**कोन **ड** कोनाबराबर होईल, हें सिद्ध करावयाचें.



(आकृति १) **डइ** बाजू इकडे वाढविली असतां **अक**ला मिळेल (१.३० उप). ती **क** बिंदूंत मिळाली असें मानूं. आतां **अ**कोन=**अकइ** कोन, व **अकइ** कोन=**ड**कोन (१.२९ भाग १); ∴ **अ**कोन=**ड**कोन (प्र. प्र. १).

(२) ह्या आकृतीमध्यें १.२९ भाग २, ह्याची योजना करावी.

१. खंड २ प्रश्न ६–१. २९ भाग १ व २, प्र. प्र. १ व १.६ ह्यांच्या योजनेनें क्रमिक सिद्धता करावी.

१. खंड २ प्रश्न ७–दिलेल्या रेषा समांतर होतील असें मानिलें, तर १.२९ भाग ३ प्रमाणें पक्षांतल्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोन ठरून पक्षांशीं विरोध येईल; आणि मिळणाऱ्या रेषेच्या ज्या अंगास पक्षांतले कोन आहेत, त्या अंगास दिलेल्या रेषा मिळतील, असें मानिलें, तर १.१७ प्रमाणें पक्षांशीं विरोध येईल. म्हणून इष्टसिद्धि.

१. खंड २ प्रश्न ९–"दिलेल्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी असली पाहिजे" ही अट. (१) दिलेल्या रेषेएवढी एक रेषा घेऊन तिच्याशीं, तिच्या दोन टोकांजवळ तिच्या एकाच अंगास, दिलेल्या दोन कोनांएवढाले कोन करावे. ह्या कोन करणाऱ्या रेषा प्र. प्र. १२ ह्यावरून मिळतील, आणि इष्ट त्रिकोण होईल. (२) दिलेल्या रेषेएवढी एक रेषा घ्यावी; आणि दिलेल्या कोनां-

पैकीं ज्या कोनाएवढा कोन तिच्याशीं करणें इष्ट असेल, त्या कोनाएवढा कोन तिच्याशीं तिच्या एका टोंकाजवळ करावा; आणि हा कोन करणाऱ्या रेषेशीं दिलेल्या दुसऱ्या कोनाएवढा कोन करणारी रेषा त्या नवीन रेषेच्या दुसऱ्या टोंकापासून ह्या खंडाच्या दुसऱ्या प्रश्नाप्रमाणें काढावी; म्हणजे इष्ट त्रिकोण होईल.

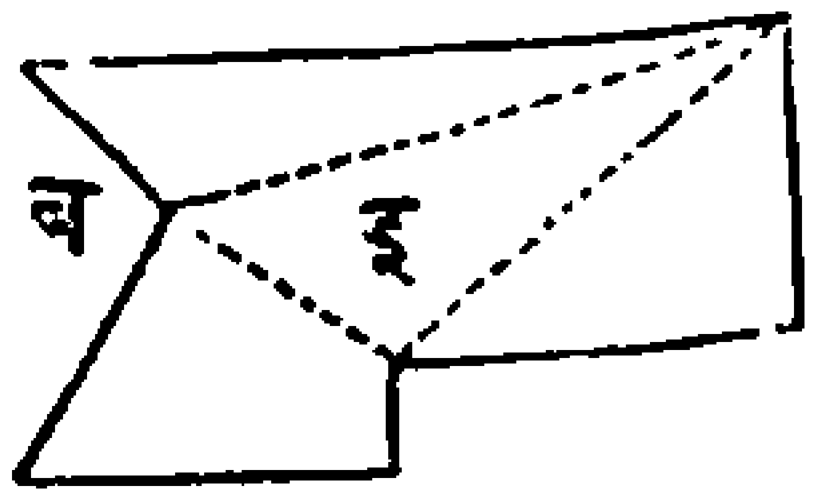
पहिल्या पुस्तकाच्या तिसऱ्या खंडावरील

(ह्मणजे १.३२ ह्या सिद्धांतावरील)

प्रश्नांविषयीं सूचना.

१. खंड ३ प्रश्न १ व २–त्रिकोणाचा जो कोन इतर दोहोंच्या बेरजेबराबर आहे असें दिलें असेल, त्याची एक बाजू कोणबिंदूपलीकडे वाढवावी; म्हणजे १.३२ भाग १, सलग्नकोणांचे धर्म व कांहीं प्र. प्रमाणें ह्यांच्या योजनेनें हे सारे सिद्धांत सिद्ध होतात.

१. खंड ३ प्रश्न ८–दिलेल्या आकृतीचे कोणबिंदु सांधून तीमध्यें नुसत्या अंतर्वक्रकोणांच्या आकृति तयार होतील, असें करावें; आणि मग १.३२ व त्याचा १ ला उपसि. आणि प्र. प्र. २ ह्यांची अवश्य असेल तितके वेळां योजना करावी.



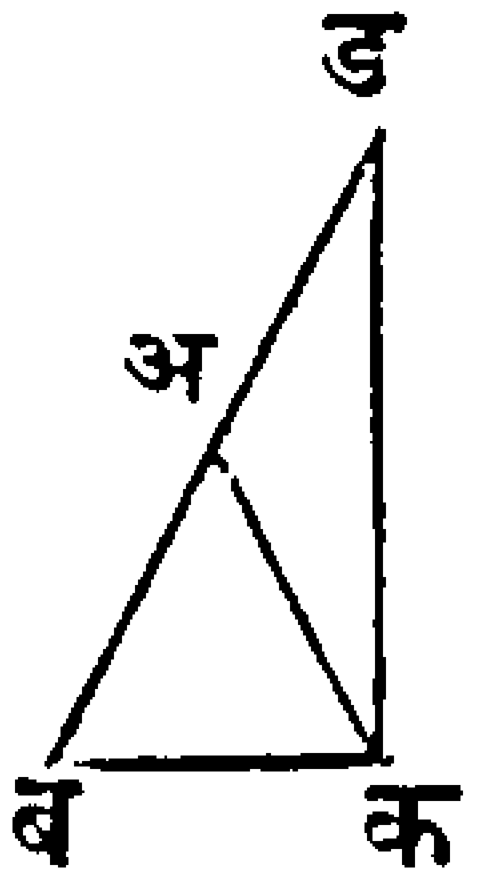
("कोनांची धनर्णता" ह्या पदाचा अर्थ ठरवून धनर्ण परिमेयांच्या बेरजेविषयीं गणितांतला संकेत जर धनर्णकोनांस लागू केला, तर बहिर्वक्रकोनांच्या आकृतींस १.३२ उप. २ हाही लागू आहे, असें दाखवितां येतें.)

१. खंड ३ प्रश्न १४– (१.१६ ची आकृति पहा), बाहेरील कोन **अ**, **ब** ह्या प्रत्येक कोनापेक्षां "मोठा" आहे एवढें मात्र १.१६ मध्यें ठरलें; पण तो "किती मोठा" आहे, हें ठरलें नाहीं. १.३२ भाग १ ह्यांत बाहेरील कोन **अ** कोनापेक्षां "**ब** कोनानें मोठा" व **ब** कोनापेक्षां "**अ** कोनानें मोठा" आहे, असें ठरलें.

तसेंच त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां "कमी" असते, इतकें मात्र १.१७ मध्यें ठरलें; आणि ती बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां "तिसऱ्या कोनानें कमी" असते, हें १.३२ भाग २ ह्यांत ठरलें. ह्मणून १.१६ व १.१७ हे सिद्धांत १. ३२ ह्यांत पूर्णता पावले, असें ह्मटलें तरी चालेल.

१. खंड ३ प्रश्न १५– (१.२१ ची आकृति पहा). **डईक** कोन=**अ** कोन+**अबई** कोन, आणि **बडक** कोन=**डईक** कोन+**ईकड** कोन (१.३२ भाग १)..∴. **बडक** कोन=**अ** कोन+ (**अबई** कोन+**ईकड** कोन) (प्र.प्र.२ व १). ∴. **बडक** कोन हा, **अ** कोनापेक्षां, नवीन काढिलेल्या रेषांनीं त्रिकोणाच्या इतर दोन बाजूंशीं केलेल्या कोनांच्या बेरजेनें मोठा आहे, असें ठरलें.

१. खंड ३ प्रश्न १६–(व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाची **अब**=**अक** बाजू आहे; **बअ** वाढवून **अब**=**अड** केली; आणि **कड** सांधिली. तर **बक**वर **कड** लंब आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



आतां **अड**=**अक** (प्रतिज्ञा व प्र.प्र. १), ∴. **अडक** कोन=**अकड** कोन; व **अबक** कोन=**अकब** कोन (१.५). ∴. **ब** कोन+**ड** कोन=**बकड** कोन (प्र. प्र. २). ∴. १.३२ उप. ५ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

१. खंड ३ प्रश्न १७––दिलेल्या रेषेचें पक्षांतलें टोंक व तींतील दुसरा एक बिंदु ह्यांच्या मधील भागावर समभुजत्रिकोण काढून १६ व्या प्रश्नांतली रचना करावी. म्हणजे इष्ट लंब होईल.

१. खंड ३ प्रश्न १८––दिलेल्या काटकोनाचा कोणबिंदु व त्याच्या एका बाजूंतील दुसरा एक बिंदु ह्यांच्यामधील रेषेवर समभुजत्रिकोण (काटकोनाच्याच अंगास) काढावा; व त्याचा जो कोन काटकोनांत पडेल, तो दुभागावा. ह्मणजे काटकोनाचे तीन समान भाग होतात.

१. खंड ३ प्रश्न १९–१.९ व मागचा प्रश्न ह्यांवरून उघड आहे

कीं, २,३, २ⁿ, ३×२, ३×२ⁿ इतके काटकोनाचे समान भाग १.३२ पर्यंत सिद्धांतांनीं करितां येतात.

१. खंड ३ प्रश्न २१—(व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाचा **अ** कोन काटकोन आहे; तर ह्याचे दोन समद्विभुज त्रिकोण करितां येतील, असें दाखवावयाचें.

अब रेषेशीं **अ** बिंदूजवळ **ब** कोनाएवढा **बअड** कोन करून ती कोन करणारी रेषा कर्णाला मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर **अबड** हा एक समद्विभुजत्रिकोण होईल: आतां **क** कोन=**कअड** कोन(१. ३२ उप. ४ व प्र.प्र. ३); ह्मणून **कअड** हा दुसरा समद्विभुजत्रिकोण होईल. ही रचना कोणत्याही काटकोनत्रिकोणांत करितां येईल; ह्मणून इष्टसिद्धि.

१. खंड ३ प्रश्न २२—ही गोष्ट प्रश्न २१ ह्यावरून उघड आहे. अथवा त्याच्याच आकृतींत **अड** वाढवून **अड**=**डई** करावी, व **बई** सांधावी. नंतर १.१५ व १.४ भा. २ ह्यांवरून **ई** कोन=**कअड** कोन ठरवून **कअब** कोन=**अबई** कोन ठरवावा; आणि १.४ भा. १ ह्याच्या योजनेनें **बक, अई** समान ठरवाव्या. म्हणजे इष्टसिद्धि होते. किंवा क्र. वि. सिद्धता अशी:—**बड, कड** ह्या समान रेषांपैकीं प्रत्येक **अड**पेक्षां जास्त मानिली, तर १.१८, व प्र.प्र. ४ उपसि. १ ह्यांवरून **अ** कोन हा, **ब** आणि **क** ह्यांच्या बेरजेपेक्षां जास्त ठरून प्र. प्र. ४ प्रमाणें तीन कोनांची बेरीज **अ**च्या दुपटीपेक्षां (ह्मणजे दोन काटकोनांपेक्षां) कमी ठरते. हा १.३२ भाग २ ह्यांशीं विरोध. ∴ **बड, कड** ही प्रत्येक **अड**पेक्षां जास्त नाहीं. ह्याप्रमाणेंच कमी नाहीं असें सिद्ध करावें. ह्मणजे इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ३ प्रश्न २३—प्रश्न २१ च्या आकृतींत **ब** कोन काटकोनाचा तृतीयांश मानिला, तर **कअड, कडअ** ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोनाच्या दोन तृतीयांशांबरोबर ठरेल (१.३२ उप. ४ व प्र. प्र. २). ∴ **अक**=**कड** (१.६). ∴ **बक**=२ (**अक**).

१. खंड ३ प्रश्न २४—तिसऱ्या बाजूवर जे दोन काटकोनत्रिकोण होतात, त्या प्रत्येकाला प्रश्न २२ लावल्यानें तिसऱ्या बाजूचा मध्य

व लंबाचें टोंक सांधणारी प्रत्येक रेषा तिसऱ्या बाजूच्या अर्धाबरोबर ठरते. ह्मणून प्र. प्र. ६ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

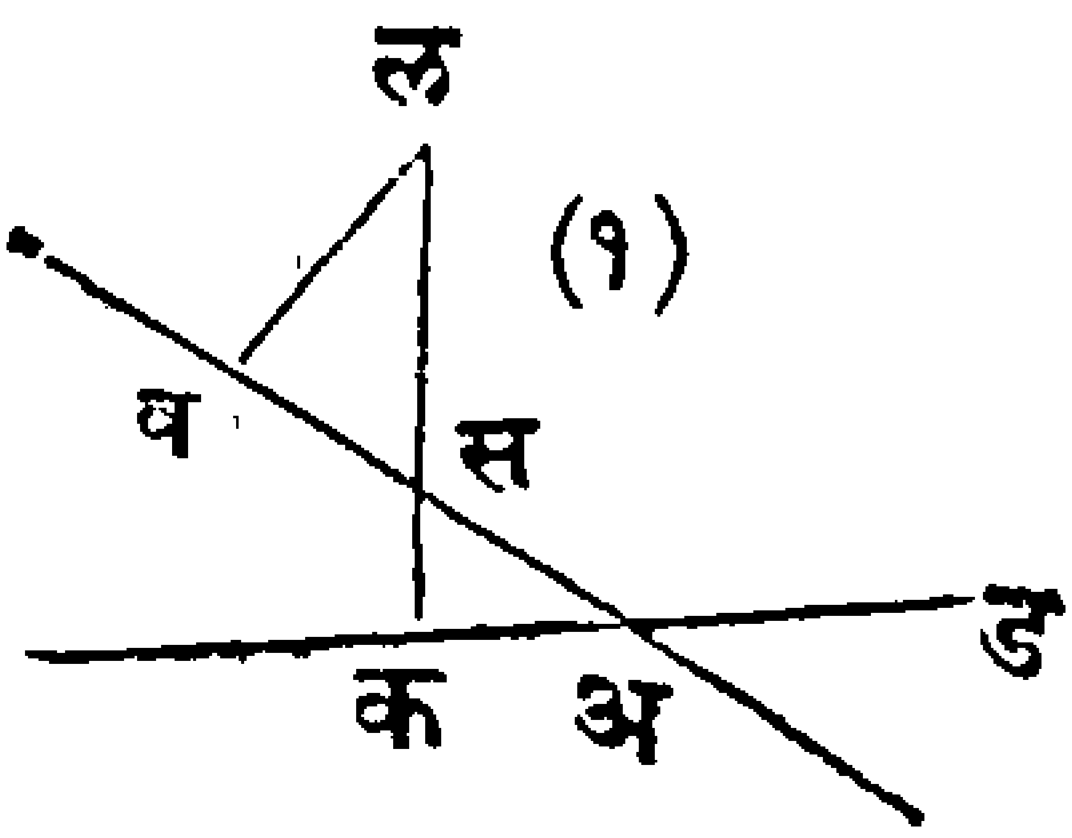
१. खंड ३ प्रश्न २५ व २६--प्रश्न २२ च्या क्र. वि. सिद्धतेप्रमाणेंच ह्यांची क्र. वि. सि. करावी.

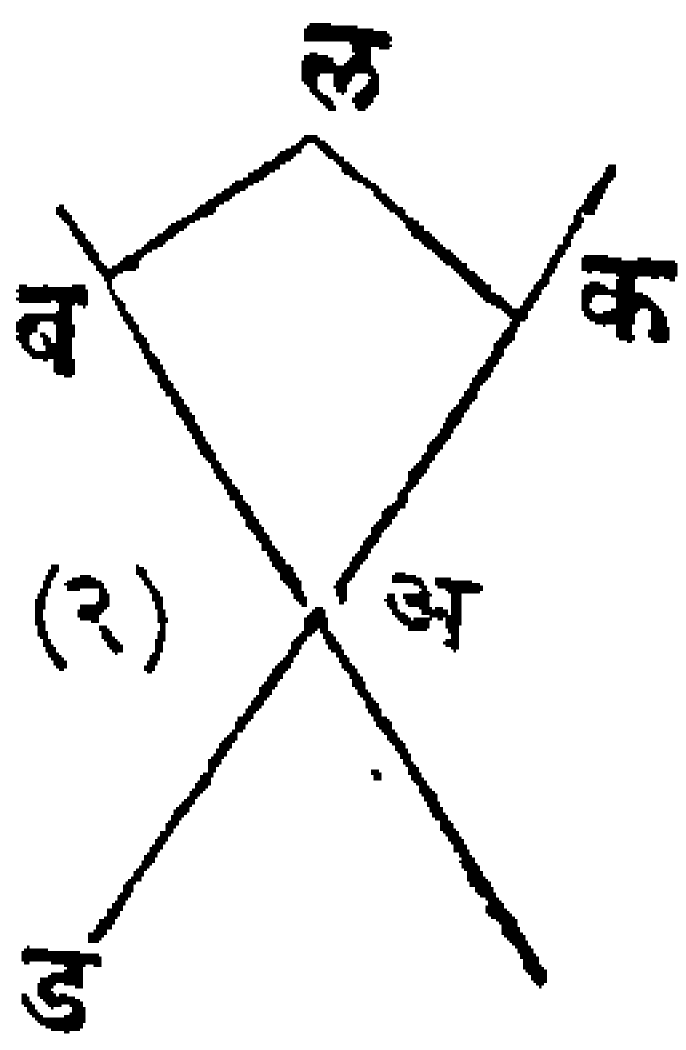
१. खंड ३ प्रश्न २७-- (१) १.५ व प्र. प्र. २ ह्यांवरून पायाकडील कोनांची बेरीज शिरकोनाबरोबर ठरते; ∴ १.३२ उपसि.५ ह्यांवरून शिरकोण काटकोन ठरतो. (२) १.१८ व प्र. प्र. ४ उपसि. १ ह्यांवरून पायाकडील कोनांच्या बेरजेपेक्षां शिरकोण जास्त ठरतो; ∴ प्रश्न १ ह्यावरून शिरकोण विशालकोण ठरतो. ह्या प्रमाणेंच (३) हा सिद्ध करावा.

१. खंड ३ प्रश्न २८-- इतर दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोन व दोन सलग्नकोनांची बेरीज ही दोन काटकोन. ∴ प्र. प्र. ११,१ व ३ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

१ खंड ३ प्रश्न २९—(व्यक्तिप्र.) **अब, कड** ह्या परस्परांस छेदणाऱ्या रेषांवर **ल** बिंदूपासून **लब, लक** हे लंब काढिले आहेत; तर **बलक** कोन **अ** बिंदूजवळच्या एका कोनाबरोबर आहे; हें सिद्ध करावयाचें.

(१) ह्या आकृतींत **ब** कोन =**क** कोन (प्र. प्र. ११); **लसब** कोन=**असक** कोन (१. १५); ∴ **ल** कोन=**कअस** कोन (१. ३२ उप. ३).





(२) ह्या आकृतींत **ल** कोन=**बअड** कोन (प्रश्न २६).

पहिल्या पुस्तकाच्या चवथ्या खंडावरील

(म्हणजे १. ३३ व १. ३४ ह्या सिद्धांतांवरील)

प्रश्नांविषयीं सूचना.

१. खंड ४ प्रश्न १—दोन्ही कर्ण काढिल्यानें जे चार त्रिकोण होतात, त्यांपैकीं समोरासमोरच्या दोन त्रिकोणांस १. ३४, १. २९ भाग १ व १. २६ भाग १ हे सिद्धांत लावावे.

१. खंड ४ प्रश्न २—समोरासमोरच्या दोन त्रिकोणांस १. १५ व १. ४ भा. २ लावून शेवटीं १. २७ लाविल्यानें समोरासमोरच्या दोन बाजू समांतर ठरतात.

१. खंड ४ प्रश्न ५—चौरस व काटकोनचौकोन ह्यांचे जवळजवळचे दोन कोन मिळून दोन काटकोन असल्यामुळें १. २८ भाग २ ह्यावरून त्यांच्या समोरासमोरच्या बाजू समांतर ठरतात. समभुजचौकोनाचा एक कर्ण काढून होणाऱ्या दोन त्रिकोणांस १. ८ लावून १. २७ च्या योजनेची सामग्री जुळवावी; म्हणजे इष्टसिद्धि होते.

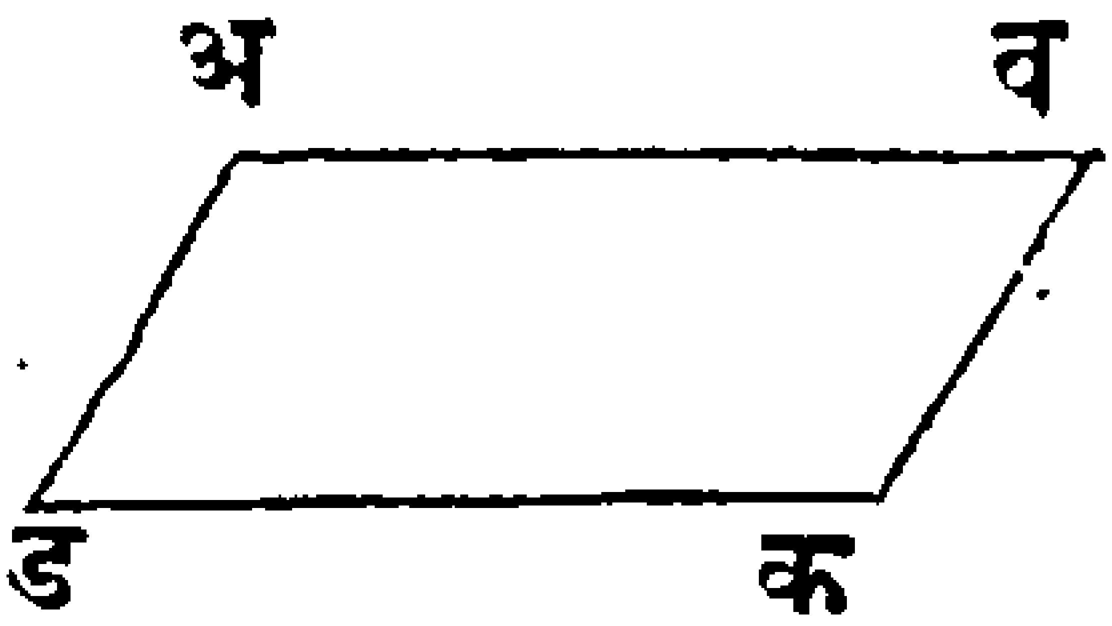
१. खंड ४ प्रश्न ६—समभुजचौकोनाचा एक कोन १२० अंशांचा असल्यास त्याच्या जवळचा कोन ६० अंशांचा होतो. ∴ प्रश्नांतला कर्ण काढिल्यानें होणारा प्रत्येक त्रिकोण समभुज ठरतो.

१. खंड ४ प्रश्न ७—काटकोनचौकोनाचे दोन्ही कर्ण काढिल्यानें त्याच्या कोणत्याही एकाच बाजूवर जे मोठाले दोन त्रिकोण होतात, त्यांस १. ४ भाग १ लावण्याची सामग्री, १. ३४ भाग १ व प्र. प्र. ११ ह्यांवरून जुळते; आणि मग १. ४ भाग १ लाविल्यानें त्याचे कर्ण समान ठरतात. काटकोनचौकोन, समभुजचौकोन व चौरस ह्यांच्या कर्णांचे बाकीचे धर्म सहज सिद्ध होतात.

१. खंड ४ प्रश्न ८—एक कर्ण काढून १. ८ व १. २७ ह्यांच्या आधारानें क्रमिक सिद्धता करावी.

१. खंड ४ प्रश्न ९—(व्यक्तिप्र.) अकोन=क कोन व ब कोन

=ड कोन; तर अक हा समांतरभुजचौकोन आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



अ+ब=क+ड (प्र. प्र. २),∴ २ (अ+ब)=अ+ब+क+ड (प्र. प्र. २); व अ+ब+क+ड=४ काटकोन (१. ३२ उपसि.१), ∴ २ (अ+ब)=४ काटकोन (प्र. प्र. १);∴ अ+ब=२ काटकोन (प्र. प्र. ४ उपसि. ४); ∴ अड, बक ह्या समांतर (१.२८ भाग २). ह्याप्रमाणेंच अब, कड ह्या समांतर ठरवाव्या.

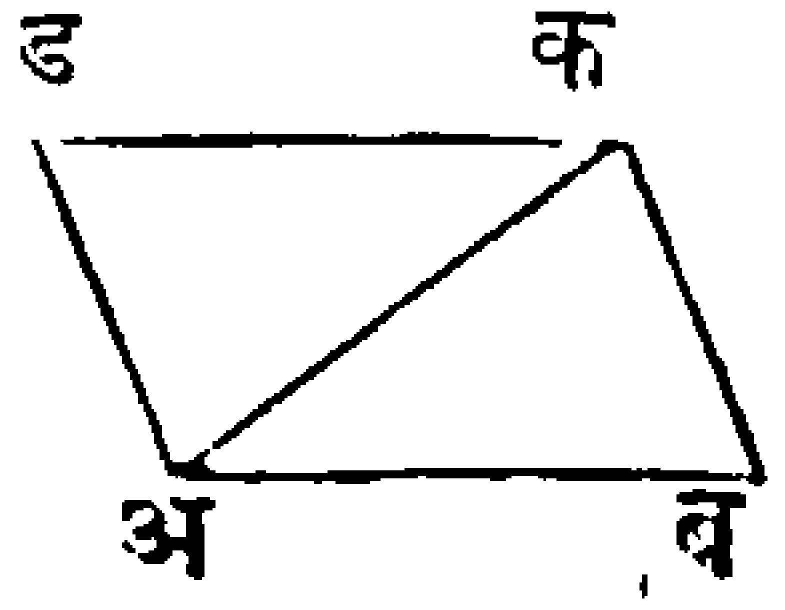
१. खंड ४ प्रश्न १०--जवळजवळच्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोन (१. २९ भाग ३); ∴ त्यांच्या अर्धांची बेरीज १ काटकोन;∴ जवळजवळच्या दोन कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा मिळाल्यानें जो त्रिकोण होतो, त्याच्या पायाकडील कोनांची बेरीज एक काटकोन ठरली. ∴ तिसरा कोन एक काटकोन आहे (१. ३२ उपसि. ५).

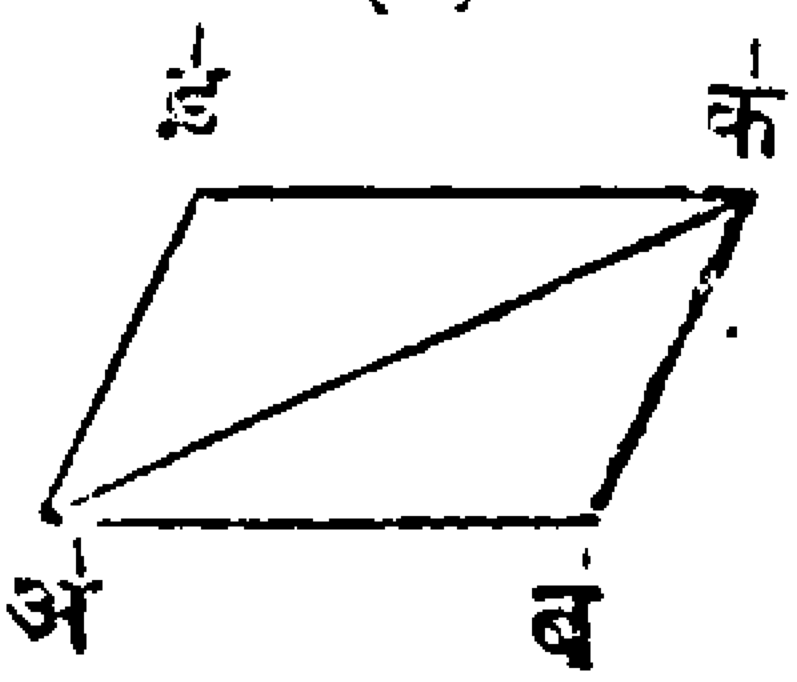
१. खंड ४ प्रश्न ११--त्यांचीं एकेका आंगचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेषा दिलेल्या रेषांवर लंब असतील, तर व्युत्क्रम टोंकें सांधणाऱ्या रेषा समान असतात, हें प्रश्न ७ (१) ह्यावरून स्पष्ट आहे; आणि एकेका आंगचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेषा दिलेल्या रेषांवर लंब नसतील, तर व्युत्क्रम टोंकें सांधणाऱ्या रेषा असमान असतात, हें क्र. वि. रीतीनें सि. करावें.

१. खंड ४ प्रश्न १४--प्रत्येकाचा एकेक कर्ण काढिल्यानें होणारे एकाचे दोन त्रिकोण दुसऱ्याच्या दोन त्रिकोणांशीं अनुक्रमें एकरूप ठरवावे.

१. खंड ४ प्रश्न १५--(१) (व्यक्तिप्र.) अब=अ'ब', अड=अ'ड', आणि डअबकोन>ड'अ'ब' कोन; तर अक<अ'क' हें सिद्ध करावयाचें.

(१) (२)





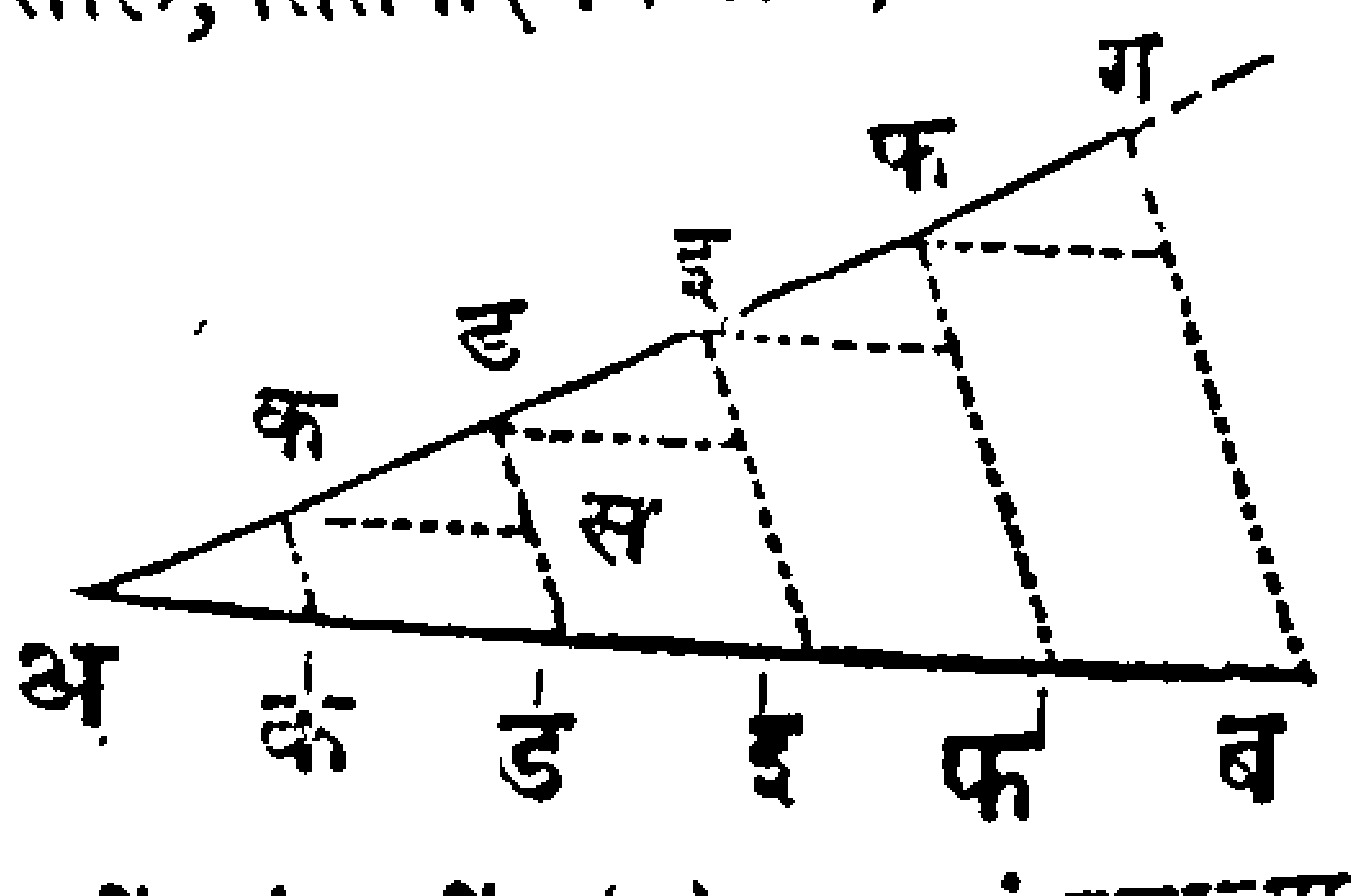
डअब कोन+**ब** कोन=**ड'अ'ब'** कोन+**ब'** कोन (१. २९ भाग ३, प्र. प्र. ११ व १); व **डअब** कोन>**ड'अ'ब'** कोन; ∴ **ब** कोन<**ब'** कोन (प्र. प्र. ४ उपसि. ३) आणि **बक=ब'क'** (प्रतिज्ञा, १.३४ भाग १ व प्र. प्र. १);∴ **अबक** आणि **अ'ब'क'** ह्या त्रिकोणांस १.२४ लाविल्यानें **अक<अ'क'** ही इष्टसिद्धि.

(२) पूर्वोक्त दोन त्रिकोणांस १.२५ लाविल्यानें **ब>ब'** ठरतो; आणि मग १.२९ भाग ३, प्र. प्र. ११, १ व प्र. प्र. ४ उपसि. ३ लाविल्यानें इष्टसिद्धि.

१. खंड ४ प्रश्न १६—हें वस्तुतः१५ व्या प्रश्नाचें रूपांतर आहे. पदार्थविज्ञानशास्त्रांत ह्या सिद्धांताचें हें स्वरूप उपयोगीं पडतें.

१. खंड ४ प्रश्न १७--क्र. वि. सि. त्या दोन्ही रेषा दुभागिल्या जातात असें मानिलें, तर दुसऱ्या प्रश्नाप्रमाणें त्रिकोणाच्या बाजू समांतर ठरतात. हा पक्षविरोध. ∴ इष्टसिद्धि.

१. खंड ४ प्रश्न २२--(१) दिलेल्या (**अब**) रेषेच्या बाहेरचा एक (**क**) बिंदु व तिचें एक (**अ**) टोंक हीं सांधून सांधणारी रेषा अमर्याद करावी; (२) (ही **अब**शीं कोन करणारी असावी.) दिलेल्या रेषेचे जितके समान भाग करावयाचे असतील, तितके (येथें पांच) त्या अमर्याद रेषेचे, पूर्वोक्त टोंकापासून, एकापुढें एक असे (**अक, कड** इत्यादिक) तुकडे पाडावे; (३) शेवटच्या (**फग**) तुकड्याचें शेवटचें (**ग**)टोंक



व दिलेल्या रेषेचें दुसरें (**ब**) टोंक हीं सांधावीं; (४) ह्या सांधणाऱ्या (**बग**) रेषेशीं समांतर अशा, प्रत्येक तुकड्याच्या (**क, ड** इत्यादिक) टोंकांतून (**कक', डड'** इत्यादिक) रेषा काढून, त्या दिलेल्या रेषेस मिळत तोंपर्यंत वाढवाव्या.

ह्या कृतीनें दिलेल्या रेषेचे जे (**अक'**, **क'ड'** इत्यादिक) भाग होतात, ते समान असतात.

कारण, **क** बिंदुंतून **क'ड'**शीं **कस** ही समांतर काढिली असतां,

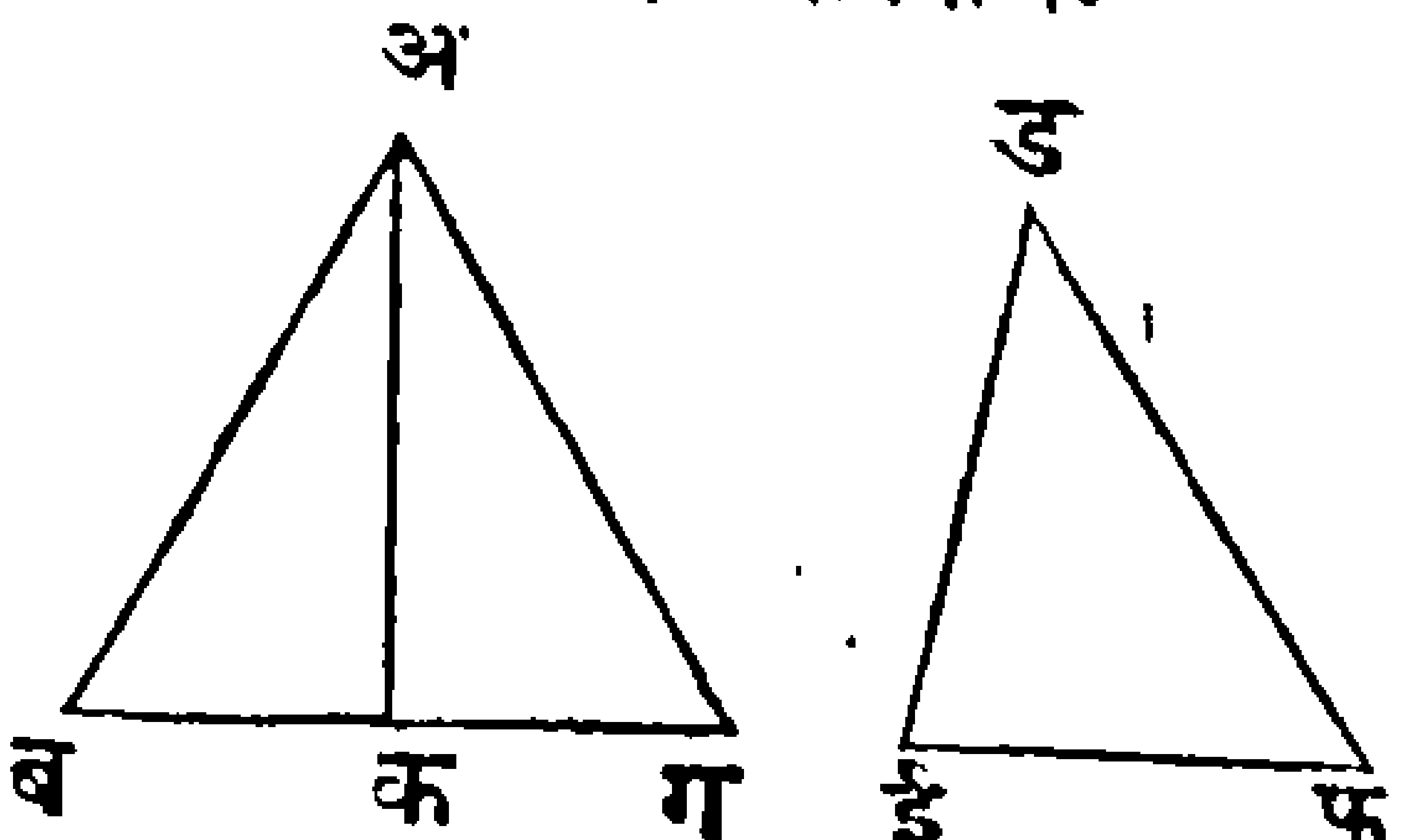
अकोन=डकस कोन व **अकक'** कोन=**कडस** कोन (१.२९ भाग २). आणि **अक=कड**; ∴ **अक'=कस** (१.२६ भाग १). ∴ **अक'=क'ड'** (१.३४ भाग १ व प्र. प्र. १). ह्याप्रमाणेंच सर्व भाग समान ठरवावे.

१.३५ प्रश्न ५–(१.३५ च्या २ व ३ ह्या आकृति पहा). **अबई** त्रिकोणाचे **बअई, बईअ** हे कोन व **अब** बाजू हीं, **कडफ** त्रिकोणाचे **कडफ, डफक** हे कोन व **कड** बाजू ह्यांशीं अनुक्रमें समान आहेत (१.२९ भाग २ व १.३४); ∴ **अबई** कोन=**डकफ** कोन (१.२६ भाग २). (अथवा हें १. खंड २ प्रश्न ४ ह्यावरून ही सिद्ध होतें.) आणि **बई=कफ** (१.३४); ∴ **अबई** त्रिकोण=**डकफ** त्रिकोण (१.४ भा. ३) ∴ प्र.प्र. ३ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

१.३६ प्रश्न ५–दिलेल्या समां. भु. चौकोनाचे जितके सारखे समां. भु. चौ. करावयाचे असतील तितकेच त्याच्या एका बाजूचे समान भाग (१. खंड ४ प्रश्न २२ प्रमाणें) करावे, आणि प्रत्येक छेदनबिंदूंतून जवळच्या एकाबाजूशीं समांतर रेषा काढून ती समोरच्या बाजूस मिळे तोंपर्यंत वाढवावी. ह्या कृतीनें होणारे समां. भु. चौकोन १.३६ वरून समान ठरतात.

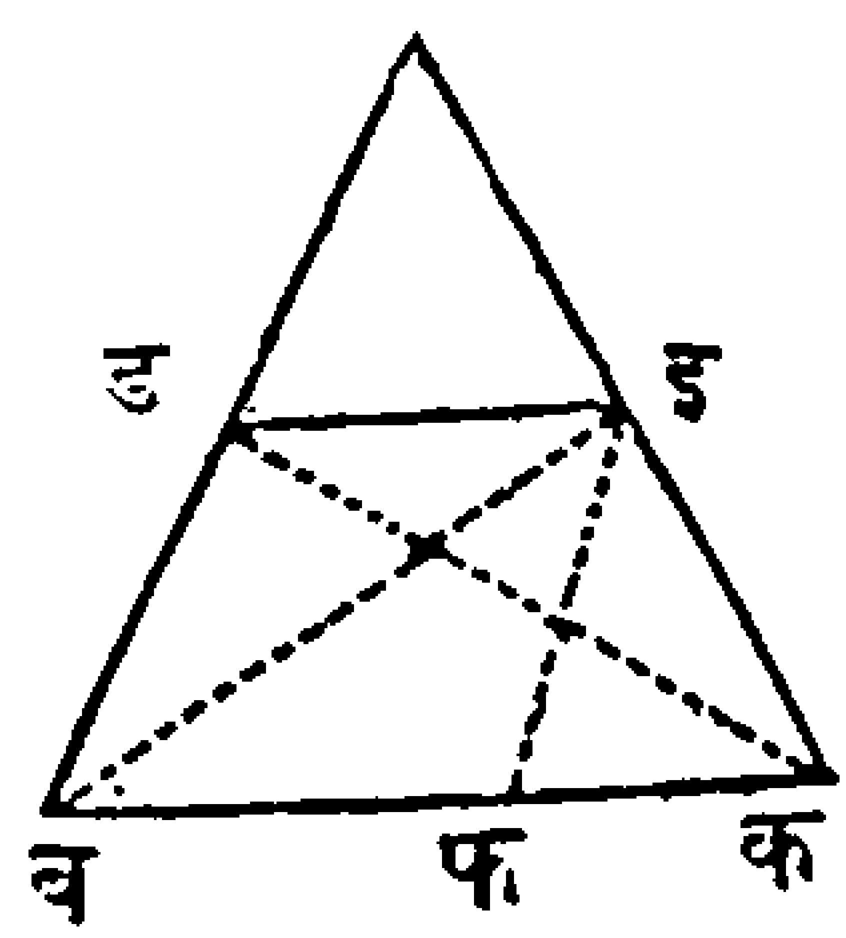
१.३८ प्रश्न ४–– (व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाच्या **अक, बक** ह्या बाजू **डईफ** त्रिकोणाच्या **डई, ईफ** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें समान आहेत; आणि त्या त्रिकोणांच्या त्या बाजूंमधील **क, ई** हे कोन परस्परांचे पूरक आहेत (म्हणजे त्यांची बेरीज दोन काटकोन आहे); तर हे त्रिकोण समान होतील, हें सिद्ध करावयाचें.

बक वाढवून **कग, ईफ** बरोबर केली, आणि **अग** सांधिली. आतां **अकब** कोन+**अकग**



कोन=२काटकोन (१.१३), व **अकब** कोन+**ई**कोन=२ काटकोन (प्रतिज्ञा), ∴ **अकग** कोन=**ई**कोन (प्र.प्र.११, १ व ३); ∴ **अकग**

त्रिकोण=**डईफ** त्रिकोण (१.४ भा. ३); आणि **अबक** त्रिकोण= **अकग** त्रिकोण (१.३८ उप.); ∴ **अबक** त्रिकोण=**डईफ** त्रिकोण (प्र. प्र. १).



१.३९ प्रश्न ४– (व्यक्तिप्रतिज्ञा) **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजूंचे मध्य सांधणारी **डइ** रेषा आहे. तर **डइ** रेषा **बक**शीं समांतर आहे, असें सिद्ध करावयाचें.

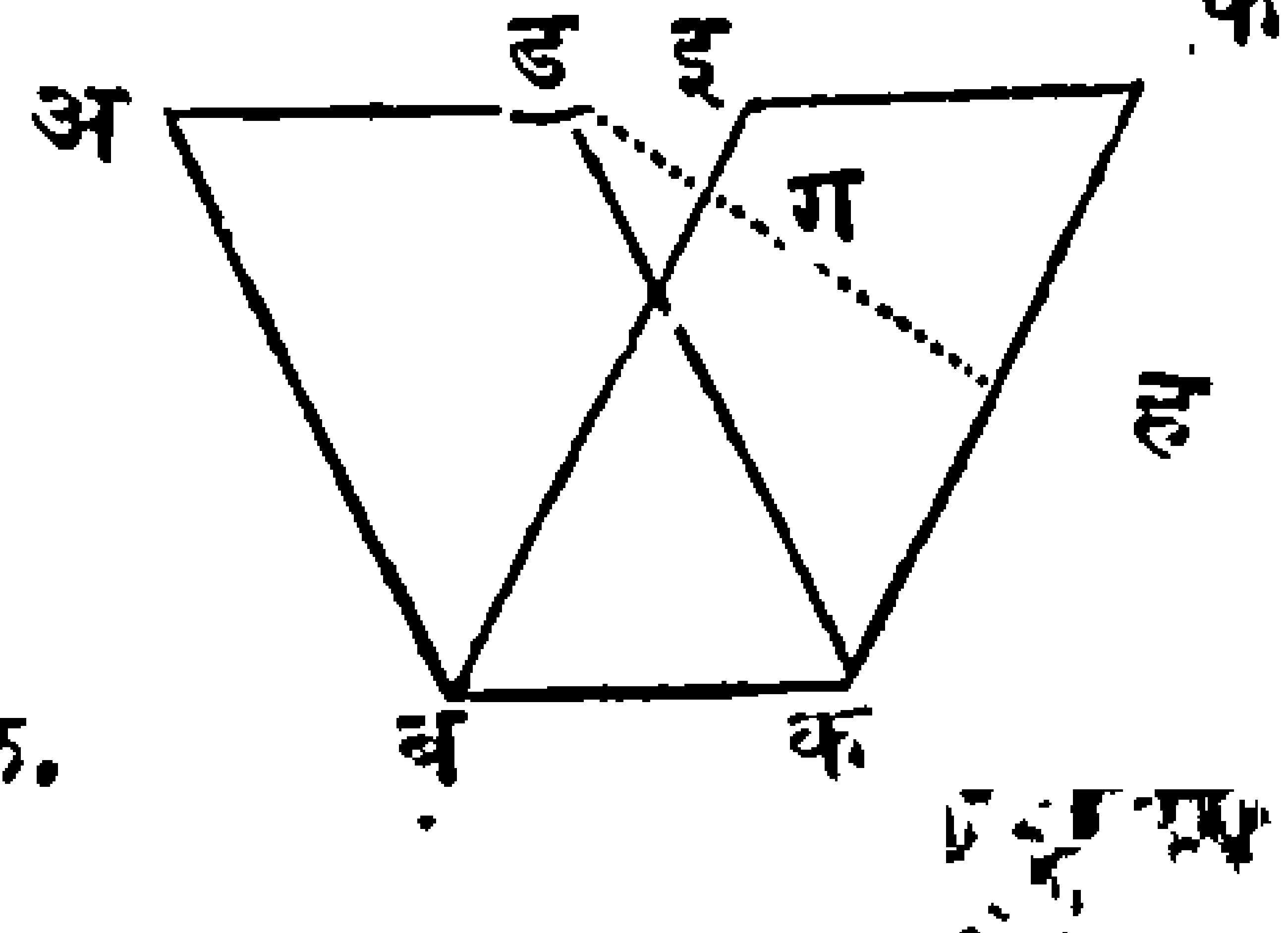
बइ, **कड** सांधिल्या. आतां **बकड** आणि **बकइ** हा प्रत्येक त्रिकोण **अबक** त्रिकोणाचें अर्ध आहे (१.३८ उप.) ∴ ते समान आहेत (प्र. प्र. ७); ∴ **डइ** ही **बक**शीं समांतर आहे (१.३९).

१.३९ प्रश्न ५– (१.३९ प्रश्न ४ ह्याची आकृति पहा). (व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजूंचे मध्य सांधणारी **डइ** रेषा आहे; तर ती **बक**च्या अर्धाबरोबर आहे, असें सिद्ध करावयाचें.

बकचा **फ** हा मध्य काढिला (१.१०) व **इफ** सांधिली. आतां **डइ**, **इफ** ह्या रेषा अनुक्रमें **बक**, **अब** ह्यांशीं समांतर आहेत (१.३९ प्रश्न ४); ∴ **डफ** हा समांतरभुजचौकोन आहे (व्याख्या ३५); ∴ **डइ**=**फब** (१.३४); म्हणजे **डइ**, **बक**च्या अर्धाबरोबर आहे.

१.३९ प्रश्न ६– क्र. वि. सि. तिसरीला दुभागीत नाहीं, असें मानून तिचा मध्य व पहिलीचा मध्य हे सांधिले असतां, सांधणारी रेषा १.३९ प्रश्न ४ ह्यावरून दुसरीशीं समांतर होते; ह्यामुळें १.३० प्रश्न ३ ह्यांशीं विरोध येतो.

१.४० प्रश्न ४–(व्यक्तिप्र.) **अक**, **बफ** हे समांतरभुजचौकोन **बक** ह्या एकाच पायावर आहेत, त्याच्या एकाच अंगास आहेत, व समान आहेत; तर **अड**, **इफ** ह्यापैकीं एक दुसरीच्या अंगास वाढविली असतां ती दुसरींतूनच जाईल.



अड वाढविली असतां **इफ**तून जर न जाईल, तर (१) तिच्या खालून जाऊन **बइ**, **कफ** ह्यास अनुक्रमें **ग**, **ह** बिंदूंत छेदील, असें मानूं. आतां **बकहग** हा समांतरभुजचौकोन आहे (व्याख्या ३५); ∴ **अक** चौकोन=**बह** चौकोन (१.३५); ∴ **बफ** चौकोन=**बह** चौकोन (प्रतिज्ञा व प्र. प्र. १). हा ९ व्या प्र. प्रमाणाशीं विरोध. ∴ **अड** ही **इफ**च्या खालून जाणार नाहीं. ह्याप्रमाणेंच (२) वरून जाणार नाहीं असें सिद्ध करितां येईल. आणि (३) ती **इफ**च्या एका टोंकांतून जाते अथवा तिला छेदिते असें मानिलें, तर एकाच बिंदूंतून **बक**शीं समांतर अशा दोन रेषा निघाल्या, असें होईल, म्हणजे १.३० प्र. ३ ह्याशीं विरोध येईल. ∴ **इफ**तून जाणें ह्या स्थितीखेरीज **अड**ची दुसरी कोणतीही स्थिति संभवत नाहीं. ∴ इष्टसिद्धि.

१. ४० प्रश्न ५–शब्दशः मागच्या प्रश्नाप्रमाणेंच सिद्ध करावा.

१. ४० प्रश्न ६–क्र. वि. सि. एकाचा पाया मोठा मानून त्याचा धाकट्या पायाएवढा तुकडा पाडिला, आणि छेदनबिंदूंतून जवळच्या बाजूशीं समांतर रेषा काढिली, तर जो नवीन समांतरभुजचौकोन त्या तुकड्यावर होतो, तो मोठ्या पायावरच्या समांतरभुजचौकानाशीं समान ठरतो (१.३६, प्रतिज्ञा व प्र. प्र. १). ∴ प्र. प्र. ९ ह्याशीं विरोध येतो.

१. ४० प्रश्न ७–बहुतेक मागच्या प्रश्नाप्रमाणेंच सिद्ध करावा.

१. ४१ प्रश्न २–**अबक**, **बकई** हे त्रिकोण समान ठरले (१. ३७), ∴ ह्यांच्या दुपटीही समान आहेत (प्र. प्र. ६). आणि पहिल्याची दुप्पट **अक** चौकोन आहे; म्हणून तो दुसऱ्याच्या दुपटीबरावर आहे. अथवा **अबक** त्रिकोण=**अकड** त्रिकोण (१.३४) व **अबक** त्रिकोण=**बकई** त्रिकोण (१.३७); ∴ **अकड** त्रिकोण=**बकई** त्रिकोण (प्र. प्र. १). ह्या दोन समान त्रिकोणांत **अबक** आणि **बकई** हे समान त्रिकोण अनुक्रमें मिळविले. तेव्हां **अबक**+**अकड**=२ (**बकई**); म्हणजे **अक** चौकोन=२(**बकई**.)

१. ४१ प्रश्न ३–१.४१ च्या सिद्धतेमध्यें १.३७ योजिला आहे,

तेथें १.३८ योजावयाचा. एवढाच कायतो हा प्रश्न व १.४१ ह्यांच्या सिद्धांतामध्यें भेद.

१. ४१ प्रश्न ४—ह्यांतला (१) हा सिद्धांत १.४१ च्या आधारानें व (२) हा सिद्धांत १.४१ प्रश्न ३ ह्याच्या आधारानें क्र. वि. रीतीनें सिद्ध करावा.

१. ४१ प्रश्न ५—१.४१ च्या आधारानें क्र. वि. रीतीनें सिद्ध करावा.

पहिल्या पुस्तकाच्या पांचव्या खंडावरील

(ह्मणजे १.३५ पासून १.४१ पर्यंत सिद्धांतांवरील)

प्रश्नांविषयीं सूचना.

१. खंड ५ प्रश्न १—१.३५ पासून १.४० पर्यंत सहा सिद्धांत व १.४० वरील प्रश्नांपैकीं ४, ५, ६, ७ हे प्रश्न, अशा दहा सिद्धांतांचा मुख्य विषय हा कीं, "दोन समांतरभुजचौकोन अथवा दोन त्रिकोण ह्यांच्या मध्यें (१) पायांची समानता, (२) समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असणें व (३) क्षेत्रांची समानता ह्या तीन धर्मांपैकीं कोणतेही दोन धर्म आहेत, असें दिलें असतां, त्या दोन दोन आकृतींमध्यें तिसरा धर्मही असतो, हें सिद्ध करावयाचें." ह्या विषयाचे मुख्य भाग तीन होतात. ते असेः—

पहिला भाग.—दोन समां. भु० चौ. अथवा दोन त्रिकोण ह्यांमध्यें (१) व (२) हे धर्म आहेत, असें दिलें असतां, (३) हा धर्म आहे, असें सिद्ध करणें.

दुसरा भाग.—ह्या दोन दोन आकृतींमध्यें (१) व (३) हे धर्म आहेत, असें दिलें असतां, (२) हा धर्म आहे, असें सिद्ध करणें. ह्या भागामध्यें, "त्या दोन दोन आकृतींचे पाये एकाच सरळ रेषेंत आहेत" व "त्या रेषेच्या एकाच अंगाला त्या आकृति आहेत" ह्या दोन गोष्टी (१) व (३) ह्या धर्मांखेरीज दिलेल्या असतील, तरच "समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असणें" हा धर्म त्यांच्यामध्यें आहे, असें सिद्ध करितां येईल.

तिसरा भाग.—ह्या दोन दोन आकृतींमध्यें (२) व (३) हे धर्म आहेत, असें दिलें असतां, (१) हा धर्म आहे, असें सिद्ध करणें.

आतां ह्या तिहींपैकीं प्रत्येक भाग दोन समांतरभुजचौकोनांस उद्देशून सिद्ध केला पाहिजे व दोन त्रिकोणांस उद्देशूनही सिद्ध केला पाहिजे. म्हणून ह्या तीन भागांचे मिळून सहा सिद्धांत होतात. त्यांपैकीं पहिल्या भागाच्या दोन सिद्धांतांत दिलेले दोन समां. भु. चौ. व दोन त्रिकोण " एकाच पायावर आहेत " असें मानून व " भिन्न पायांवर आहेत असें मानून युक्लिड ह्यानें सिद्धता केली आहे; त्यामुळें त्या दोन सिद्धांतांचे चार सिद्धांत झाले. ते १.३५, १.३६, १.३७ व १.३८ हे होत. म्हणून हे चार सिद्धांत मिळून सदहू तीन भागांपैकीं पहिला भाग झाला.

दुसऱ्या भागाच्या मुख्य दोन सिद्धांतांचेही " एकच पाया " आणि " भिन्न पाये " ह्यांच्या संबंधानें चार सिद्धांत होतात. परंतु त्यांपैकीं त्रिकोणाचे दोन सिद्धांत मात्र युक्लिड ह्यानें सिद्ध केले आहेत; ते १.३९ व १.४०. बाकी समांतरभुजचौकोनांचे दोन सिद्धांत १.४० वरील प्रश्न ४ व ५ हे होत.

तिसऱ्या भागांत पायांचीच समानता सिद्ध करावयाची आहे. म्हणून त्याच्या दोन सिद्धांतांत दिलेले समां. भु. चौ. व त्रिकोण भिन्न भिन्न पायांवरच असले पाहिजेत. ह्याकरितां ह्या भागांत समांतरभुजचौकोनांस उद्देशून एक व त्रिकोणांस उद्देशून एक असे दोनच सिद्धांत सिद्ध केले पाहिजेत. ते १.४० प्रश्न ६ व ७ हे होत.

१. खंड ५ प्रश्न २–१.४१ व त्यावरील प्रश्नांपैकीं ३, ४ (१) व (२), ५ हे प्रश्न, ह्या पांच सिद्धांतांचा मुख्य विषय हा कीं, " एक समां. भु. चौ. व एक त्रिकोण ह्या दोन आकृतींमध्यें (१) पायांची समानता, (२) समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असणें, व (३) चौकोन त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर असणें, ह्या तीन धर्मांपैकीं कोणतेही दोन धर्म आहेत, असें दिलें असतां, त्या आकृतीमध्यें तिसरा धर्मही असतो, असें सिद्ध करावयाचें.

ह्या विषयाचेही मागच्या प्रश्नांतल्या विषयाप्रमाणेंच मुख्य तीन भाग होतात. ह्यांपैकीं पहिल्या दोन भागांत दिलेल्या आकृति "एकाच पायावर आहेत" व "भिन्न पायांवर आहेत" असें मानून ते भाग सिद्ध केले असतां दोहोंचे मिळून चार सिद्धांत होतात; आणि तिसऱ्या भागांत पायांचीच समानता सिद्ध करावयाची आहे, म्हणून तो एकच सिद्धांत होतो. असें ह्या विषयाच्या तीन भागांचे मिळून पांच सिद्धांत होतात.

पहिल्या भागाच्या दोन सिद्धांतांपैकीं "एकाच" पायावरच्या आकृतींचा सिद्धांत मात्र युक्लिड ह्यानें सिद्ध केला आहे. तो १.४१ हा होय; व पहिल्या भागाचा दुसरा सिद्धांत १.४१ प्रश्न ३ हा होय. दुसऱ्या भागाचे दोन सिद्धांत १.४१ प्रश्न ४ (१) व (२) हे होत. तिसऱ्या भागाचा सिद्धांत १.४१ प्रश्न ५ हा होय.

१. खंड ५ प्रश्न ३–१. खंड ५ प्रश्न १ ह्यांतील १० सिद्धांतांचा जो विषय सांगितला, त्यांतील (२) "समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असणें" ह्या धर्माच्या ठिकाणीं "उंच्यांची समानता" हा धर्म ह्या प्रश्नाच्या विषयांत घातला आहे. एवढाच कायतो पहिला व तिसरा ह्या प्रश्नांतील विषयांचा भेद आहे. म्हणून पहिल्यांतील विषयाचे जसे तीन भाग व प्रत्येक भागाचे दोन दोन असे मुख्य सहा सिद्धांत झाले, तसे ह्यांतील विषयाचेही तीन भाग व सहा सिद्धांत होतात.

ह्या प्रश्नांतल्या सहा सिद्धांतांपैकीं त्रिकोणांचे तीन सिद्धांत आधीं सिद्ध करावे, म्हणजे त्यांच्या साह्यानें चौकोनाचे तीन सिद्धांत थोडक्यांत सिद्ध होतात. त्रिकोणाचे तीन सिद्धांत सिद्ध करण्याची सामान्य रीति अशीः–(१) दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचा पाया तितकाच वाढवून वाढविलेल्या भागावर दुसऱ्या त्रिकोणाशीं एकरूप असणारा नवीन एक त्रिकोण १. खंड १ प्रश्न १७ प्रमाणें काढावा; असा कीं, ते दोन्ही त्रिकोण पायाच्या एकाच अंगास येतील. (२) नंतर ह्या दोन एकरूप असणाऱ्या त्रिकोणांच्या उंच्या समान आहेत, असें १.२६ भाग २ ह्यांच्या आधारानें सिद्ध करावें. ह्या दोन गोष्टी

त्रिकोणांच्या तीनही सिद्धांतांच्या सिद्धतेला आवश्यक आहेत. पुढें ह्या तिहींपैकीं पहिला व तिसरा ह्या सिद्धांतांमध्यें उंच्यांची समानता दिलेली असते; म्हणून पहिला त्रिकोण व नवीन त्रिकोण ह्यांच्या उंच्या (प्र. प्र. १ प्रमाणें) समान ठरवून ते त्रिकोण समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत आहेत असें (१.३३ प्रश्न ३ प्र.) सिद्ध करावे. नंतर १.३८ उप व १.४० प्रश्न ७ ह्यांपैकीं एक आणि प्र.प्र. १ ह्यांच्या आधारानें दिलेल्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रांची व पायांची समानता सिद्ध होते. दुसऱ्या सिद्धांतांत क्षेत्रांची व पायांची समानता दिलेली असते; म्हणून पहिला त्रिकोण व नवीन त्रिकोण ह्यांचे पाये व क्षेत्रें (प्र. प्र. १ प्र.) समान ठरवून १.४० वरून ते समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत आहेत, असें ठरवावें. नंतर (१. खंड ४ प्रश्न २५. प्र.) त्यांच्या उंच्या समान ठरवून (प्र. प्र. १ प्र.) दिलेल्या त्रिकोणांच्या उंच्या समान ठरवाव्या.

चौकोनांचे तीन सिद्धांत सिद्ध करण्याकरितां दिलेल्या चौकोनांपैकीं प्रत्येकाचा एकेक कर्ण काढावा; आणि त्या योगानें झालेल्या त्रिकोणांपैकीं दोहोंच्या दोन त्रिकोणांस वर सिद्ध केलेले त्रिकोणांचे सिद्धांत लावावे. म्हणजे इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ५ प्रश्न ४–ह्यांतले तीन सिद्धांत मागील प्रश्नांतल्या त्रिकोणांच्या अथवा चौकोनांच्या तीन सिद्धांतांच्या साह्यानें थोडक्यांत सिद्ध होतात.

१. खंड ५ प्रश्न ५–दिलेल्या चौकोनाच्या एकाच बाजूवर जें मोठाले दोन त्रिकोण होतात, ते प्रतिज्ञा व प्र. प्र. ७ ह्यांवरून, समान ठरतात; ∴ १.३९ व व्याख्या ३५ ह्यांवरून इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ५ प्रश्न ७–जे दोन त्रिकोण समान आहेत, असें दिलें असेल, त्या प्रत्येकांत तिसरा एक मिळवून प्र.प्र. २ व १.३९ ह्यांच्या योजनेनें क्र. सि. करावी.

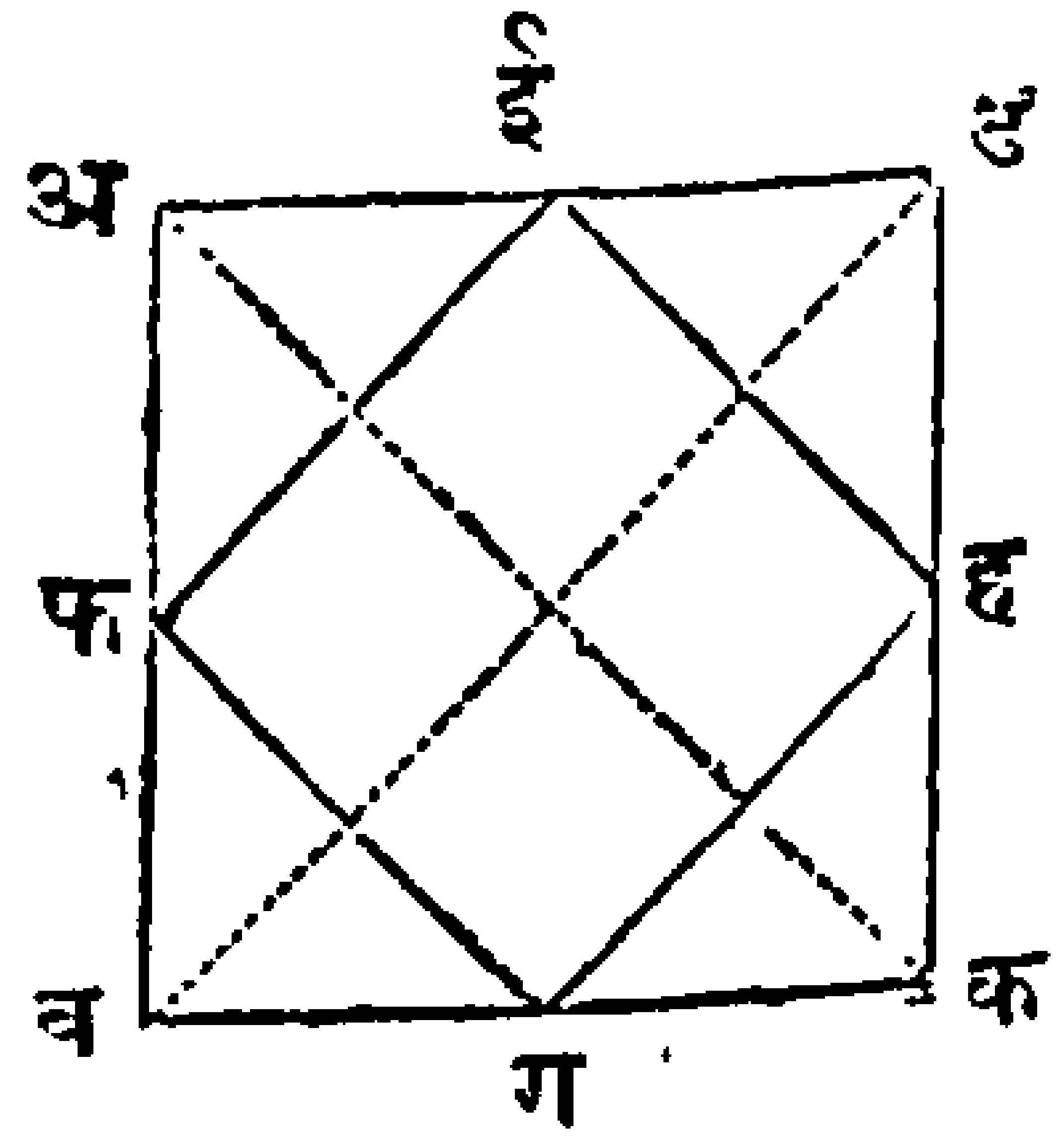
१. खंड ५ प्रश्न ९–प्रश्नांतल्या रचनेमुळें जे दोन त्रिकोण होतात, ते १.२६ व १.४ भाग ३ ह्यांवरून समान ठरवून प्र. प्र. २ योजावें; म्हणजे इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ५ प्रश्न १०–मागचा प्रश्न,१.४१, व प्र. प्र. १ योजून क्र. सि. करावी.

१. खंड ५ प्रश्न ११–दुसरा कर्ण काढून त्याच्या दोन समान भागांवरील त्रिकोणास १.३८ आणि प्र. प्र. २ व ३ ह्यांपैकीं एक लाविल्यानें इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ५ प्रश्न १२–प्रश्नांतल्या रचनेमुळें दिलेल्या त्रिकोणांत जे चार चौकोन होतात, ते समांतरभुजचौकोन आहेत, असें १.३९ प्रश्न ४ आणि व्याख्या ३५ ह्यांवरून ठरवावें. म्हणजे १.३४ भाग ३ व प्र. प्र. १ ह्यांच्या योजनेनें इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ५ प्रश्न १३–दिलेल्या चौकोनाचा प्रत्येक कर्ण काढिल्यानें जे दोन दोन त्रिकोण होतात, त्यांस १.३९ प्रश्न ४ आणि व्याख्या ३५ लाविल्यानें (१) हा भाग सिद्ध होतो; आणि १.३९ प्रश्न ५ लाविल्यानें (२) हा भाग सिद्ध होतो.



आतां (३). २ (**गई** चौकोन)= **अक** चौकोन हें सि. करावयाचें.

४ (**अफई** त्रिकोण)=**अबड** त्रिकोण, व ४ (**कगह** त्रि.)=**कबड** त्रि. (१. खंड ५ प्रश्न १२).

∴ ४ (**अफई**+**कगह**)=**अबड** +**बकड**(प्र. प्र. ए, २ व १)=**अक** चौकोन (प्र. प्र. उ व प्र. प्र. १)

ह्याप्रमाणेंच ४ (**बफग**+**डईह**)=**अक** चौकोन हें सि. होतें.

∴४(**अफई**+**कगह**+**बफग**+**डईह**)=२ (**अक** चौकोन) (प्र. प्र. ए, इत्यादिक).

∴ २ (**अफई**+**कगह**+**बफग**+**डईह**)= **अक** चौकोन(प्र. प्र. ७);

∴ २ (**अफई**+**कगह**+**बफग**+**डईह**)=**अफई**+**कगह**+**बफग**+**डईह**+**गई** चौकोन (प्र. प्र. ३ व १);

∴ चार त्रिकोणांची बेरीज=**गई** चौकोन (प्र. प्र. ३);

∴ चार त्रिकोण+**गई** चौकोन=२ (**गई** चौकोन) (प्र. प्र.२);

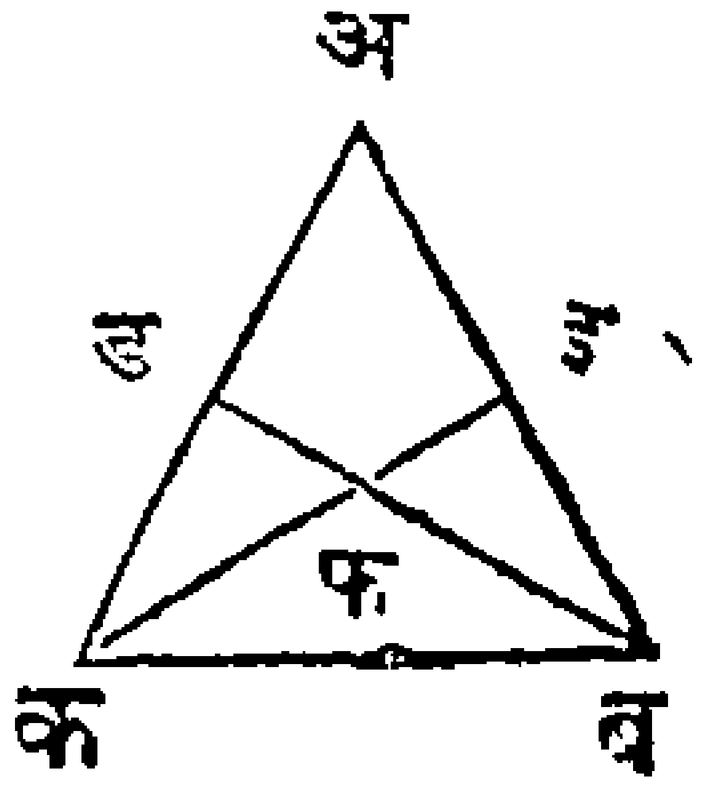
∴ **अक** चौकोन=२ (**गई** चौकोन) (प्र. प्र. ३ व १).

१. खंड ५ प्रश्न १४–मागच्या प्रश्नांतील (१) ह्यावरून तो समां. भु. चौ. आहे; “व काटकोनचौकोनाचे कर्ण समान असतात;” ह्यावरून तो समभुजचौकोन ठरेल.

१. खंड ५ प्रश्न १५–मागच्या प्रश्नावरून त्याच्या चारही बाजू सारख्या आहेत; व “चौरसाचे कर्ण परस्परांवर लंब असतात” ह्यावरून तो चौरसही ठरेल.

१. खंड ५ प्रश्न १६–तो बिंदु व समोरचा कोणबिंदु हे सांधिल्यानें मूळच्या त्रिकोणाचे जे दोन मोठाले त्रिकोण होतात, त्यांस १.३८ उप. व पुढें प्र. प्र. २ हीं लाविल्यानें इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ५ प्रश्न १८–(व्यक्तिप्र.) ड, इ हे अनुक्रमें **अब**, **अक** ह्यांचे मध्य आहेत; तर (१) **अफ** चौकोन=**वफक** त्रिकोण, व (२) **बफड** त्रि.=**कफइ** त्रि. हें सिद्ध करावयाचें.



(१) **अकड** त्रि.=**बकइ** त्रिकोण (१.३८ उप. व प्र. प्र. ७); ∴ **अफ** चौकोन=**बकफ** त्रि. (प्र. प्र. ३).

(२) **बकड** त्रि.=**बकइ** त्रि. (१.३८ उप. व प्र. प्र. ७);

∴ **बफड** त्रि.=**कफइ** त्रि. (प्र. प्र. ३).

१. खंड ५ प्रश्न १९–ज्या बिंदूंत एका बाजूचे दोन भाग केले, तो बिंदु व समोरचा कोणबिंदु हे सांधिल्यानें जे मूळच्या त्रिकोणाचे मोठाले दोन त्रिकोण होतात, त्यांस १.३९ प्रश्न ४ व ५ लाविल्यानें इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ५ प्रश्न २०–घेतलेल्या बिंदूपासून चौकोनाच्या एका बाजूशीं समांतर रेषा काढून ती समोरासमोरच्या दोन बाजूंस मिळे तोंपर्यंत वाढवावी. ह्या योगानें जे दोन समां. भु. चौकोन होतात, त्यांस १.४१ व प्र. प्र. २ हीं लावावीं ह्मणजे इष्टसिद्धि होते.

१.४२ प्रश्न ३–दिलेल्या त्रिकोणाची एक बाजू दुभागावी; तिच्या एका अर्धाशीं, त्या अर्धाच्या एका टोंकाजवळ, दिलेल्या कोनाएवढा

कोन (त्रिकोणाच्या अंगासच) करावा; अर्धाच्या दुसऱ्या टोंकांतून कोन करणाऱ्या रेषेशीं समांतर रेषा काढावी; दुभागिलेल्या बाजूच्या समोरच्या कोणबिंदूंतून त्याच बाजूशीं समांतर रेषा काढावी; आणि ही शेवटची रेषा पहिल्या दोहोंस मिळेल, असें करावें.

१.४२ प्रश्न ५– ह्यांतील (१) व (२) ह्या धर्मांनीं युक्त असा समां. भु. चौ. १.४२ प्रमाणें तयार करावा. (हा चौकोन अर्थात् दिलेल्या त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या अर्ध्या भागावर तयार होईल;) नंतर त्याच्या ज्या कोनाएवढा कोन दिलेल्या अमर्याद रेषेशीं व्हावा अशी इच्छा असेल, त्या कोनाएवढा कोन, त्या रेषेशीं, तींतील दिलेल्या बिंदूजवळ (त्या रेषेच्या इच्छिलेल्या अंगास) करावा (१.२३); पहिल्या चौकोनाच्या ज्या कोनाएवढा हा कोन झाला असेल, त्याच्या दोन बाजूंएवढाले ह्या नवीन कोनाच्या दोन बाजूंचे तुकडे (कोणबिंदूपासून) पाडावे (१.३); ह्या तुकड्यांपैकीं प्रत्येकाच्या टोंकापासून दुसऱ्या तुकड्याशीं समांतर रेषा काढावी (१.३१); आणि ह्या रेषा परस्परांस मिळतील असें करावें. ह्या रचनेनें जो चौकोन तयार होतो, तो इष्ट समां. भु. चौ. कारण ह्या दोन्ही चौकोनांचे एकेक कर्ण काढून होणाऱ्या त्रिकोणांस १.४ लाविल्यानें हे चौकोन एकरूप आहेत, असें सिद्ध होईल.

१.४४ प्रश्न. २–“ **अब** ह्या समर्याद रेषेवर समां. भु. चौ. काढावयाचा ” व “ **अब** ह्या समर्याद रेषेएवढ्या रेषेवर समां. भु. चौ. काढावयाचा.” ह्या दोन कृत्यांपैकीं पहिल्यामध्यें **अब** रेषा हीच इष्ट चौकोनाची एक बाजू झाली पाहिजे, असा उद्देश आहे; आणि दुसऱ्यामध्यें **अब** रेषेएवढी एखादी रेषा त्याची एक बाजू व्हावी असा उद्देश आहे. ह्मणजे पहिल्यांत **अब**ची स्थिति व महत्त्व हीं दोन्ही दिलीं आहेत; व दुसऱ्यांत तिची नुसती स्थिति दिली आहे.

१.४४ प्रश्न ३–१. ४२ प्रश्न ५ ह्यावरील टिप्पण पहा.

१.४४ प्रश्न ६–**हब**, न सांधितां जर **अग** सांधिली, आणि ती व **ईफ** ह्या अनुक्रमें **ग**, **फ** बिंदूंपलीकडे वाढविल्या असतां मिळतात, असें ठरवून त्या मिळत तोंपर्यंत वाढविणें इत्यादिक पुढची सारी रचना केली, तर, जो **क** त्रिकोणाबरोबर आहे व ज्याचा एक

कोन ड कोनाबरोबर आहे, असा एक समांतरभुजचौकोन गह रेषेवर तयार होईल; म्हणजे अबच्या बरोबरीची गह रेषा त्याची एक बाजू होईल. पण साक्षात् "अब रेषाच त्याची एक बाजू व्हावी" हा इष्टधर्म त्याच्यामध्यें येणार नाहीं. बाकीचे सर्व धर्म येतील.

१.४४ प्रश्न८–(१) पहिल्यानें असा एक समां. भु. चौ. तयार करावा कीं, तो दिलेल्या त्रिकोणाबरावर होईल. व त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल (१.४२). (हा चौकोन अर्थात् दिलेल्या त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या अर्ध्या भागावर तयार होईल). (२) नंतर दिलेली रेषा एका टोंकापलीकडे वाढवावी (गृ. कृ. २). (३) दुसरा असा एक समां. भु. चौ. तयार करावा कीं, तो पहिल्या चौकोनाशीं एकरूप होईल; व त्याचा दिलेल्या कोनाएवढा एक कोन दिलेल्या रेषेच्या वाढविलेल्या भागाशीं, तिच्या पहिल्या (म्हणजे ज्या टोंकापलीकडे ती वाढविली त्या) टोंकाजवळ, होईल (१.४२ प्रश्न ५). (४) दिलेल्या रेषेच्या दुसऱ्या टोंकांतून दुसऱ्या (म्हणजे (३) ह्यांतील) चौकोनाच्या एका बाजूशीं समांतर रेषा काढावी (१.३१). (५) दुसऱ्या चौकोनाची दिलेल्या रेषेसमोरची बाजू ह्या रेषेला मिळेतोंपर्यंत वाढवावी (गृ. कृ. २). (६) ह्या रचनेनें जो तिसरा समां. भु. चौ. दिलेल्या रेषेवर तयार होतो, त्याचा दिलेल्या रेषेच्या पहिल्या टोंकांतून जाणारा कर्ण काढावा. हा कर्ण दुसऱ्या चौकोनाच्या ज्या बाजूस मिळावयाचा राहिला आहे, त्या बाजूस तो मिळेल असें (१.३० उप. ह्याच्या आधारानें) सिद्ध करावें. (७) तो कर्ण व तो बाजू हीं मिळत तोंपर्यंत वाढवावीं. (८) त्यांच्या मेलनबिंदूपासून दिलेल्या रेषेशीं समांतर रेषा काढावी. (९) तिसऱ्या समांतरभुजचौकोनाच्या दोन बाजू ह्या रेषेला मिळत तोंपर्यंत वाढवाव्या. ह्या शेवटच्या कृतीनें दिलेल्या रेषेवर जो नवीन चौकोन तयार होतो, तो इष्ट समांतरभुजचौकोन होय.

ह्या सामान्य रीतींतले (२) हें कलम आवश्यक नाहीं. कारण (३) ह्यांतील दुसऱ्या चौकोनाचा दिलेल्या कोनाएवढा कोन, दि-

लेल्या रेषेच्या वाढविलेल्या भागाशीं न करितां, दिलेल्या रेषेशींच जरी केला, तरी पुढच्या रचनेंत थोडा फेरफार केल्यानें इष्टप्राप्ति होईल.

१.४४ प्रश्न ९– ह्यांतलें कृत्य व १.४४ ह्यांतील भेद १.४४ प्रश्न २ ह्यावरील टिपणांत पहा.

ह्या प्रश्नांतलें कृत्य करावयाचें, तर १.४४ प्रश्न ८ ह्यावरील टिपणांत सांगितलेल्या सामान्य रीतींतील (२) व (३) ह्या कलमांची गरज नाहीं. (१) ह्या कलमांत सांगितल्याप्रमाणें चौकोन तयार करावा; आणि त्याचा जो कोन दिलेल्या कोनाबरोबर असेल, त्याच्या एका बाजूचा दिलेल्या रेषेएवढा तुकडा, त्याच्या कोणबिंदुपासून पाडावा. ह्याच्या पुढील बहुतेक रचना ८ व्या प्रश्नांतील रीतींत सांगितल्याप्रमाणेंच करावयाची.

१.४४ प्रश्न १०–मागील प्रश्नांतल्या कृत्यामध्यें दिलेला कोन काटकोन आहे, असें मानिलें, तर त्याला ह्या प्रश्नांतल्या कृत्याचेंच स्वरूप येतें.

१.४५ प्रश्न ३– दिलेल्या सरळरेषाकृतीच्या कोणत्याही एकाच कोणबिंदूपासून त्याच्या दोहोंआंगचे दोन खेरीजकरून इतर सर्व कोणबिंदूपर्यंत रेषा काढाव्या; म्हणजे भुजसंख्येपेक्षां दोन कमी इतके त्रिकोण त्या आकृतींत तयार होतात.

१. ४५ प्रश्न ९–(१) दिलेल्या सरळरेषाकृतीच्या एका कोणबिंदूपासून (त्याच्या दोहों आंगचे दोन खेरीज करून) इतर सर्व कोणबिंदूपर्यंत रेषा काढाव्या; (म्हणजें तीमध्यें नुसते त्रिकोण पडतील). (२) असा एक समांतरभुजचौकोन काढावा कीं, तो दिलेल्या सरळरेषाकृतींत तयार झालेल्या त्रिकोणांपैकीं एका बरोबर होईल; व त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल. (हा चौकोन १.४२ प्रमाणें त्या त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या अर्धावर तयार होईल; परंतु दुसऱ्या ठिकाणीं काढणें इष्ट असल्यास १.४४ च्या रचनेंतील क. ३ प्रमाणें काढावा). (३) पहिल्या चौकोनाच्या एका बाजूवर दुसरा असा समांतरभुजचौकोन

काढावा कीं, तो दिलेल्या सरळरेषाकृतींतल्या दुसऱ्या एका त्रिकोणाबरोबर होईल, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल, आणि ह्या दोन्ही चौकोनांचे दिलेल्या कोनाबरोबर केलेले कोन पहिल्या चौकोनाच्या कोणत्या तरी एकाच बाजूच्या दोन टोंकांजवळ दोन येतील. (४) पहिल्या चौकोनाच्या ज्या बाजूवर दुसरा काढिला असेल, तिच्या समोरच्याच दुसऱ्या चौकोनाच्या बाजूवर तिसरा असा एक समांतरभुजचौकोन काढावा कीं, तो दिलेल्या सरळरेषाकृतींतल्या तिसऱ्या एका त्रिकोणाबरोबर होईल, त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल, आणि दुसरा व तिसरा ह्यांचे दिलेल्या कोनाबरोबर केलेले कोन दुसऱ्या चौकोनाच्या कोणत्या तरी एकाच बाजूच्या दोन टोंकांजवळ दोन येतील. (५) ह्याच रीतीनें दिलेल्या सरळरेषाकृतींतल्या त्रिकोणांएवढाले समांतरभुजचौकोन एकापुढें एक असे जोडावे. ह्मणजे इष्ट समां. भु. चौ. तयार होतो.

१. ४५ प्रश्न १०–१.४२, १.४४ व १.४५ ह्या प्रत्येकांत जी सरळरेषाकृति काढावयाची आहे, तिचे इष्टधर्म येणेंप्रमाणें:—

(१) "तो चौकोन असावा," (२) "तो समांतरभुज असावा," व (३) "त्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबरोबर असावा," हे तीन सदहू तीन कृत्यांपैकीं प्रत्येकांतले इष्टधर्म आहेत; (४) "तो चौकोन दिलेल्या त्रिकोणाबरोबर असावा" हा १.४२ व १.४४ ह्यांतील चौथा इष्ट धर्म व "तो दिलेल्या सरळरेषाकृतीबरोबर असावा" हा १.४५ ह्यांतील चौथा इष्टधर्म आहे; आणि (५) "दिलेली रेषा त्या चौकोनाची एक बाजू व्हावी" हा १.४४ ह्यांतील पांचवा इष्टधर्म आहे.

१.४२ ह्यांतील चार इष्ट धर्मांपैकीं (१), (२) व (३) हे रचनेवरूनच (म्हणजे प्रत्यक्षप्रमाणें व सिद्धांत ह्यांच्या आधारावांचून) सिद्ध होतात, आणि (४) हा मात्र सिद्ध करावा लागतो. १.४४ ह्यांतील पांच इष्ट धर्मांपैकीं (१), (२) व (५) हे रचनेवरूनच सिद्ध होतात, आणि (३) व (४) हे सिद्ध करावे लागतात.

१.४५ ह्यांतील चार इष्टधर्मांपैकीं (३) हा मात्र रचनेवरून सिद्ध होतो; बाकीचे सारे सिद्ध करावे लागतात.

पहिल्या पुस्तकाच्या सहाव्या खंडावरील

(म्हणजे १.४२ पासून १.४५ पर्यंत सिद्धांतांवरील)

प्रश्नांविषयीं सूचना.

१. खंड ६ प्रश्न १–दिलेल्या त्रिकोणाच्या एका कोणबिंदूतून त्याच्या समोरच्या बाजूशीं समांतर रेषा काढावी; त्याच बाजूशीं तिच्या एका टोंकाजवळ दिलेल्या कोनाएवढा कोन करावा; आणि हा कोन करणारी रेषा त्या समांतररेषेला ज्या बिंदूंत मिळेल, तो व त्या बाजूचें दुसरें टोंक हीं सांधावीं. ह्या कृतीनें त्याच बाजूवर इष्ट त्रिकोण तयार होतो.

१. खंड ६ प्रश्न ३–दिलेल्या चौकोनाच्या एका बाजूची दुप्पट तयार करावी; त्या दुपटीच्या एका टोंकाशीं दिलेल्या कोनाएवढा कोन करावा; आणि ती कोन करणारी रेषा समोरच्या बाजूला जेथें मिळेल, तो बिंदु व त्या दुपटीचें दुसरें टोंक हीं सांधावीं; म्हणजे त्याच बाजूवर इष्ट त्रिकोण होतो.

१. खंड ६ प्रश्न ७–दिलेल्या समां. भु. चौकोनाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू समान असल्यास तोच इष्टचौकोन होय; आणि असमान असल्यास, मोठीचें एक टोंक मध्य व तीच त्रिज्या कल्पून वर्तुळ काढावें; ह्याचा परीघ समोरच्या बाजूस जेथें छेदील, तो बिंदु आणि मध्यबिंदु हे सांधावे; त्या मोठ्या बाजूच्या दुसऱ्या टोंकांतून सांधणाऱ्या रेषेशीं समांतर रेषा काढून ती समोरच्या बाजूस मिळे तोंपर्यंत वाढवावी. ह्या कृतीनें मोठ्या बाजूवर जो नवा चौकोन तयार होतो, तो इष्ट चौकोन होय.

१. खंड ६ प्रश्न ९–(१) दिलेल्या सरळरेषाकृतीबरोबर १.४५ प्रमाणें एक समांतरभुजचौकोन तयार करावा, आणि त्याच्या बरोबर १. खंड ६ प्रश्न ३ प्रमाणें त्रिकोण काढावा.

(२) "कोणत्याही सरळरेषाकृतीबरोबर त्रिकोण काढावयाचा" हें कृत्य १.४५ व १.४४ ह्यांच्या साह्यावांचून करण्याची रीति अशी:—दिलेल्या सरलरेषाकृतीच्या एका कोणबिंदूच्या दोहों आंगचे दोन कोणबिंदु सांधावे; त्या (पहिल्या) कोणबिंदूंतून सांधणाऱ्या रेषेशीं समांतर रेषा काढावी; सांधणाऱ्या रेषेच्या कोणत्या तरी एका टोंकांत मिळालेली दिलेल्या आकृतीची बाजू ह्या समांतर रेषेस मिळे तोंपर्यंत वाढवावी; ती जेथें मिळेल, तो बिंदु व सांधणाऱ्या रेषेचें दुसरें टोंक हीं सांधावीं.

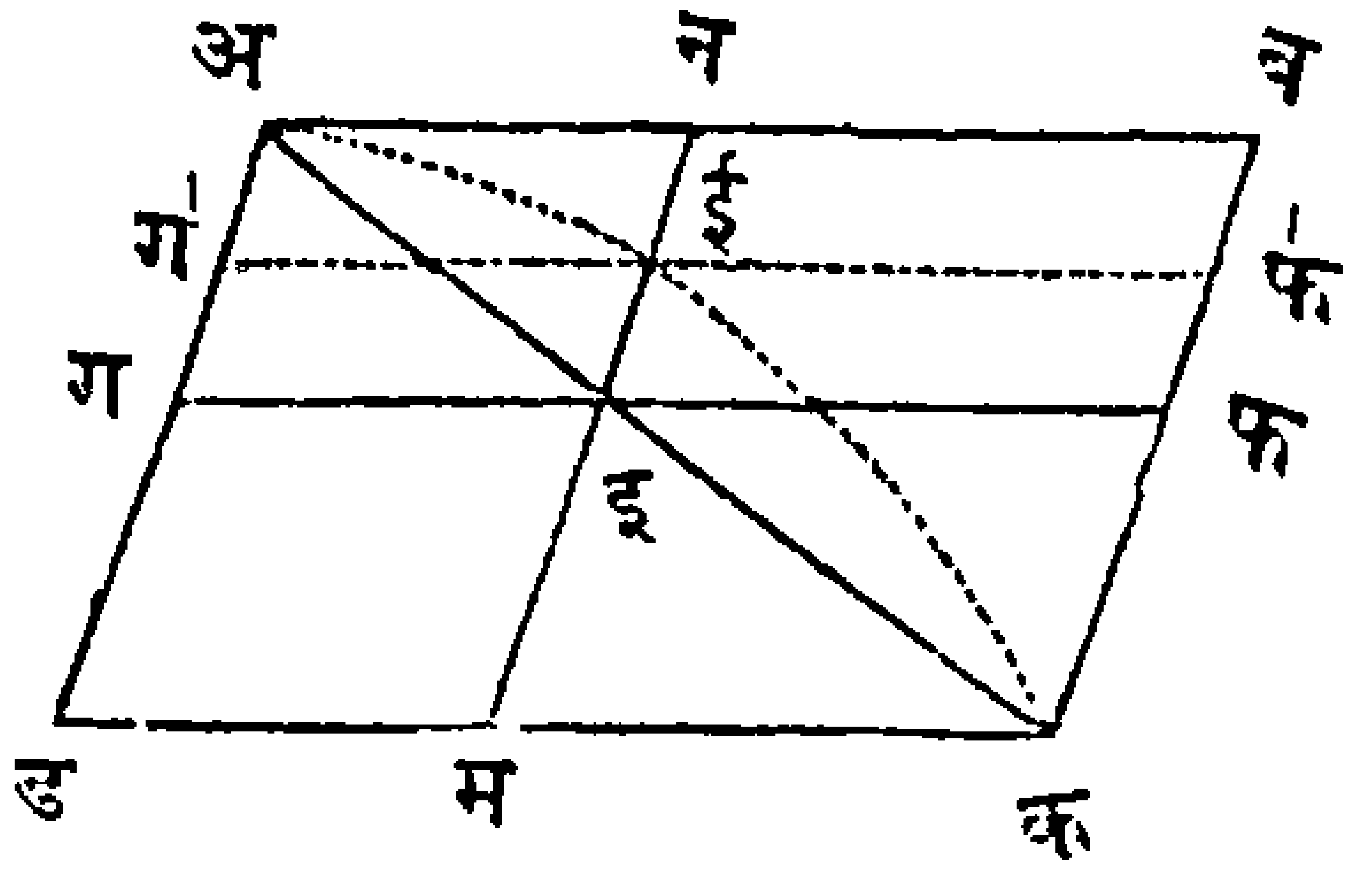
ह्या कृतीनें सांधणारी रेषा ह्या पायावर आणि समांतररेषांच्या एकाच जोडांत जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांपैकीं मूळच्या आकृतीचा त्रिकोण टाकून त्याचे ठिकाणीं नवा त्रिकोण घ्यावा; म्हणजे जी आकृति होते, ती मूळच्या आकृतीबरोबर असून तिची भुजसंख्या मूळच्या आकृतीच्या भुजसंख्येपेक्षां एकानें कमी असते.

ह्याप्रमाणेंच एकेक बाजू कमी करीत गेल्यानें इष्ट त्रिकोण तयार होतो.

१. खंड ६ प्रश्न १०–आधीं मागील प्रश्नांतल्या दुसऱ्या रीतीनें दिलेल्या सरलरेषाकृतीबरोबर त्रिकोण तयार करावा; आणि मग १.४२ प्रमाणें त्याच्या बराबर समां. भु. चौ. तयार करावा; म्हणजे १.४५ हें कृत्य १.४४ च्या साह्यावांचून होतें.

१. खंड ६ प्रश्न ११–पूरणिकेंतील पृथक्करणामध्यें ह्याची रीति सांगितली आहे.

१. खंड ६ प्रश्न १३–**अक** कर्ण **नम**, **गफ** ह्यांस **इ** बिंदूंत छेदील. न छेदील, तर तो **नम**ला **ई** बिंदूंत छेदितो असें मानूं. **ई** बिंदूंतून **अब**शीं **ग'फ'** समांतर काढिली. आतां **बई** चौकोन<**बइ** चौकोन (प्र. प्र. ९), **बइ** चौकोन=**डइ** चौकोन (प्रतिज्ञा); ∴ **बई**



चौकोन<**डइ** चौकोन (प्र. प्र. अ). आणि **डइ** चौकोन<**डइं** चौकोन (प्र. प्र. ९); ∴ **बइं** चौकोन<**डइं** चौकोन (प्र. प्र. इ). हा १.४३ ह्याशीं विरोध. ∴ **अक** कर्ण इ बिंदु खेरीज कोणत्याही बिंदूंत **नम**ला छेदणार नाहीं.

१. खंड ६ प्रश्न १४–(मागील प्रश्नाची आकृति पहा). (व्य. प्र.) **नम** रेषेनें झालेले **नड**, **नक** हे चौकोन, **गफ** रेषेनें झालेल्या **गब**, **गक** ह्यां चौकोनांशीं अनुक्रमें समान आहेत, असें सिद्ध करावयाचें.

डइ चौकोन=**बइ** चौकोन (१.४३), ∴ **नड** चौकोन=**गब** चौकोन (प्र. प्र. २). ह्याप्रमाणेंच **नक** चौकोन=**गक** चौकोन, हें सिद्ध होतें.

१. खंड ६ प्रश्न १५–(१) अनंत. (२) दिलेल्या रेषेच्या प्रत्येक अंगास दोन दोन; एकंदर चार. (३) दिलेल्या रेषेच्या प्रत्येक अंगास एकेक; एकंदर दोन.

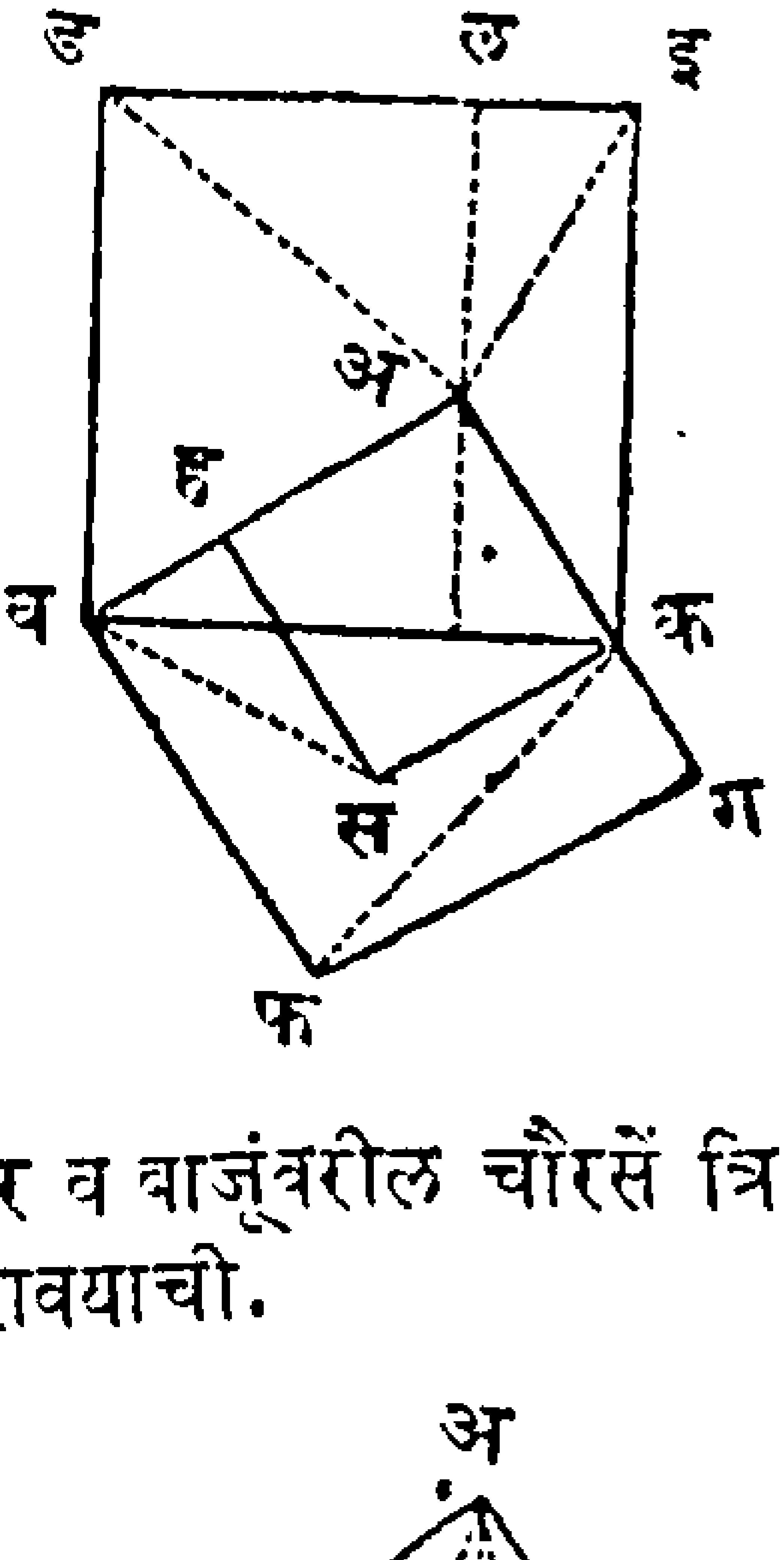
१. ४६ प्रश्न ४–दोहोंपेक्षां ज्यास्त पदार्थांची समानता जर ठरवावयाची असली, तर वस्तुतः, पदार्थसंख्या व तीपेक्षां एकानें कमी असणारी संख्या ह्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाइतक्या जोड्यांची समानता ठरविली पाहिजे. जसें चार रेषांची समानता ठरवावयाची असेल, तर रेषांच्या (४×३÷२ ह्मणजे) सहा जोड्यांची समानता ठरविली पाहिजे. पांच रेषांची समानता ठरवावयाची असेल, तर रेषांच्या (५×४÷२ह्मणजे) दहा जोड्यांची समानता ठरविली पाहिजे.

दोहोंपेक्षां जास्त पदार्थांची समानता ठरविण्याची सामान्य रीति अशी आहे कीं, त्यांपैकीं (सोईस वाटेल त्या) एकाशीं इतरांपैकीं प्रत्येक पदार्थ समान आहे, असें कोणत्या तरी रीतीनें सिद्ध करावें; म्हणजे ते इतर पदार्थ परस्परांशीं समान आहेत, असें प्र. प्र. १ ह्यावरून ठरतें; आणि मग अर्थात् ते सर्व पदार्थ परस्परांशीं समान ठरतात. अथवा पहिल्याबरोबर दुसरा, दुसऱ्याबरोबर तिसरा, अशी शेवटपर्यंत त्या पदार्थांची ओळ ठरवावी; म्हणजे प्र. प्र. १ उप. २ ह्यावरून ते सर्व समान ठरतात.

१.४७ प्रश्न २–१.४७ च्या सिद्धतेकरितां जी कृति ग्रंथांत केली आहे तिचें सामान्य स्वरूप असें:–(१) दिलेल्या काटकोनत्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंवर चौरसें (त्या त्रिकोणाच्या बाहेर) काढावीं. (२) दिलेल्या त्रिकोणाच्या काटकोनबिंदूपासून कर्णावरील चौरसाच्या (कर्णावर लंब असणाऱ्या) बाजूशीं समांतर रेघा काढून ती त्या चौरसाच्या दोन बाजूंस मिळेल असें करावें; आणि (३) दिलेल्या त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूवरील चौरसाच्या कोणबिंदूंपर्यंत रेघा काढाव्या.

१.४७ प्रश्न ३–(१) काटकोनत्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंवरील चौरसें त्रिकोणावरच काढून १.४७ ह्याची सिद्धता करावयाची.

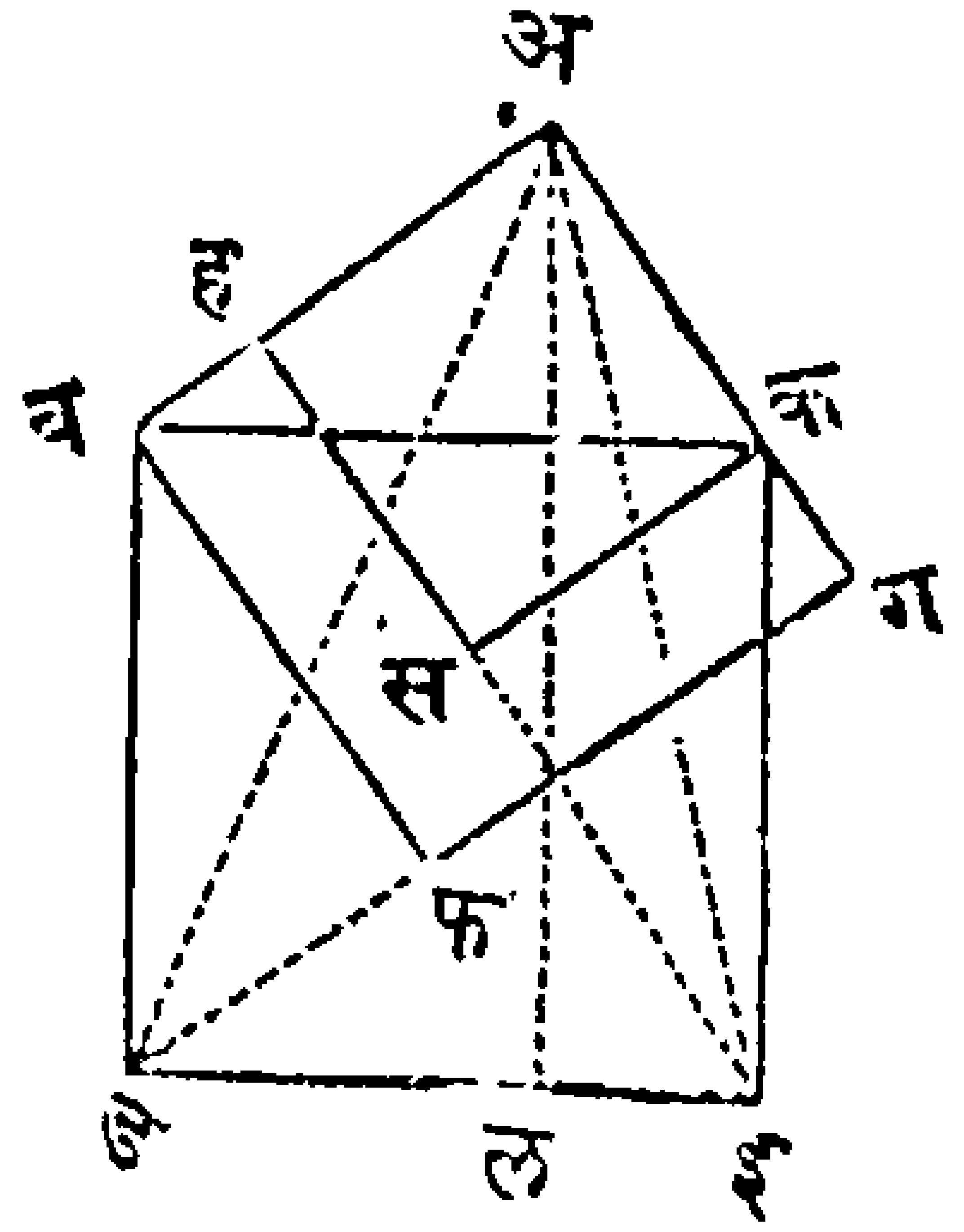
(१) ह्या आकृतींत तिन्ही चौरसें त्रिकोणावर काढणें, ह्याखेरीज बाकीची सर्व रचना शब्दशः ग्रंथांतल्या रचनेप्रमाणें करावी. नंतर **अबड** आणि **कघफ** हे त्रिकोण १.४ भाग १ प्रमाणें समान ठरवावे; म्हणजे १.४१ व प्र. प्र. ६ ह्यांवरून **बल** समां. भु. चौ. **बग** चौरसाबरावर ठरतो. ह्याप्रमाणेंच **कल** चौकोनाबरावर **कह** चौरस ठरतो. ∴ प्र. प्र. २ ह्यावरून इष्टसिद्धि.



(२) कर्णावरील चौरस त्रिकोणाबाहेर व बाजूंवरील चौरसें त्रिकोणावर काढून १.४७ ह्याची सिद्धता करावयाची.

अब, **अक**, **बक** ह्यांवर अनुक्रमें **बग**, **कह**, **बइ** हीं चौरसें काढून **अ** बिंदूतून **बड**शीं समांतर **अल** काढिली; आणि **अड**, **अइ**, **डफ**, **इस** ह्या रेघा सांधिल्या.

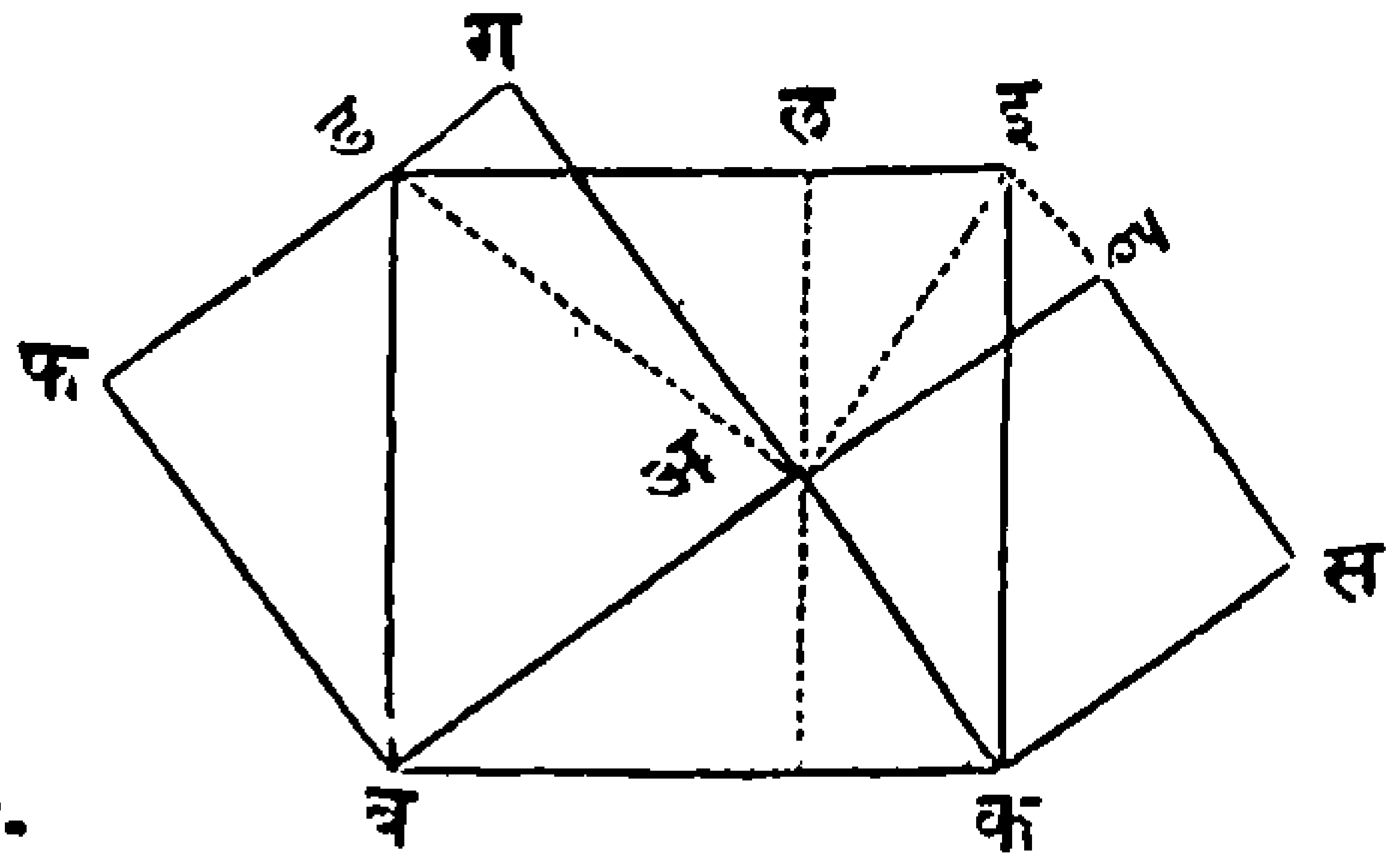
आतां **अबक**, **फबड** ह्या त्रिकोणांस १.४ भाग २ लाविल्यानें **बअक** कोन=**बफड** कोन ठरेल. ∴ **फब**-



ड कोन काटकोन आहे; आणि **बफग** कोनही काटकोन आहे; म्हणून **डफ, फग** ह्यांची **डग** ही एकच सरलरेषा आहे (१.१४). आतां **अबड** त्रिकोण व **बग** चौरस हीं **अब** ह्या एकाच पायावर आणि **अब, डग** ह्या समांतररेषांच्या एकाच जोडांत आहेत; ∴ **बग** चौरस **अबड** त्रिकोणाच्या दुपटीबरावर आहे (१.४१). **अबड** त्रिकोण व **बल** समां. भु. चौ. हीं **बड** ह्या एकाच पायावर आणि **बड, अल** ह्या समांतररेषांच्या एकाच जोडांत आहेत; म्हणून **बल** समां. भु. चौकोन **अबड** त्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर आहे (१.४१). ∴ **बग** चौरस **बल** समां. भु. चौकोनाबरोबर आहे (प्र.प्र.६). ह्याप्रमाणेंच **कह** चौरस **कल** समां. भु. चौकोनाबरोबर आहे, असें ठरतें. ∴ प्र. प्र. २ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

(३) कर्णावरील चौरस त्रिकोणावर आणि बाजूंवरील चौरसें त्रिकोणाबाहेर काढून १.४७ ह्याची सिद्धता करावयाची.

बक कर्णावर **बइ** चौरस काढून **ब** बिंदूतून **अब** वर **बफ** लंब केला, आणि **ड** बिंदूतून **अब**शीं समांतर **डफ** काढून तिला **बफ** लंब व **कअ** बाजू हीं मिळतील असें केलें. **अ** बिंदूतून **बड**शीं समांतर **अल** काढून **अड** सांधिली.

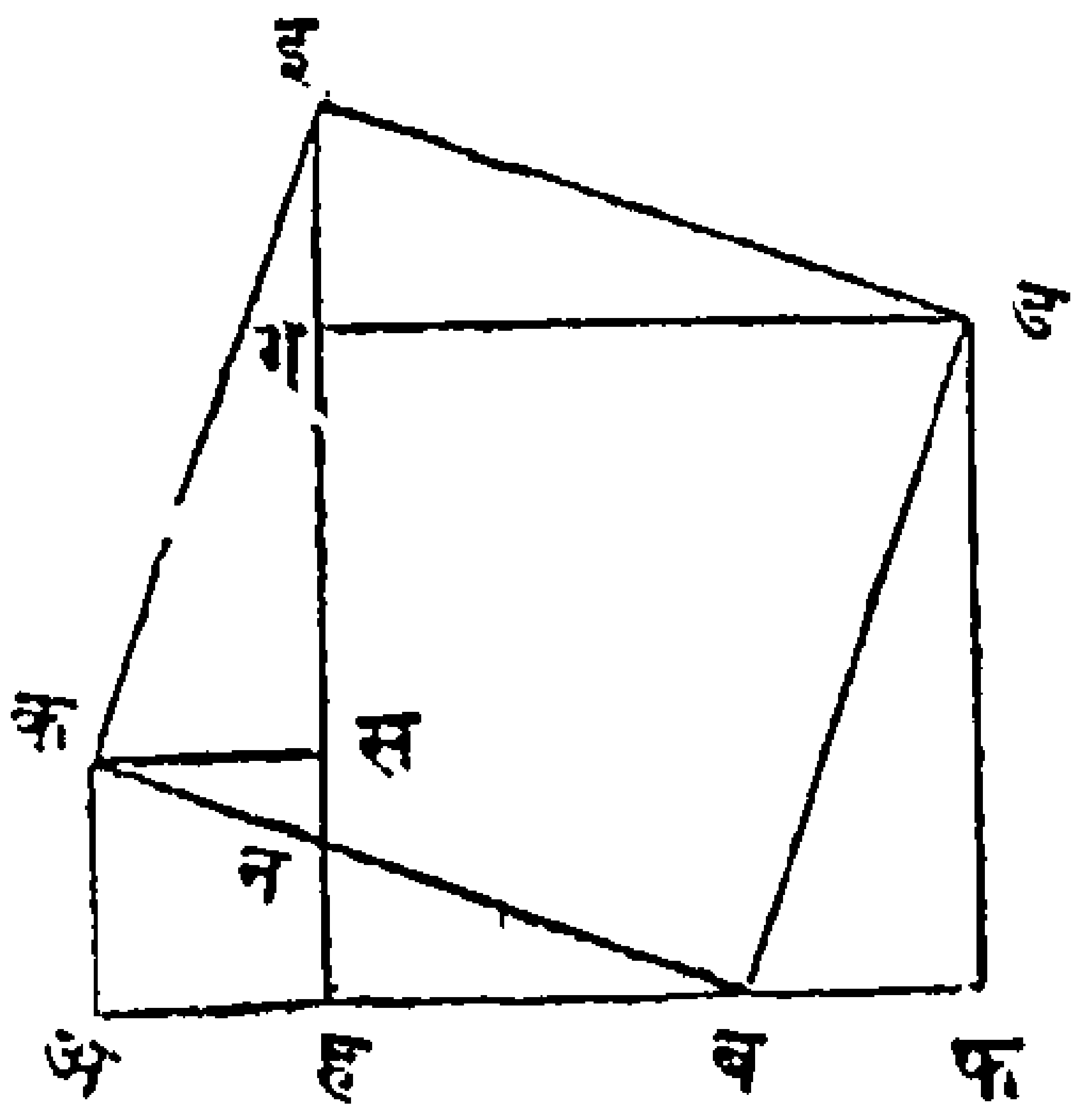


आतां **अबक** आणि **बडफ** ह्या त्रिकोणांस १.२६ भाग २ लाविल्यानें **अब=बफ** होते. ∴ **बग** हें **अब**वरील चौरस ठरतें (१.४६ उप. २). **बल** समां. भु. चौ. आणि **बग** चौरस ह्यांपैकीं प्रत्येक **अबड** त्रिकोणाच्या दुपटी बराबर आहे (१.४१), ∴ **बल** चौकोन=**बग** चौरस (प्र. प्र. ६). ह्याप्रमाणेंच **क** बिंदूतून **अक** वर **कस** लंब काढणें इत्यादिक रचना केल्यानें **कह** हें **अक** वरील चौ-

रस ठरून तें कल समांतरभुज चौकोनाबरोबर ठरतें, ∴ प्र. प्र. २ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

अथवा आधीं तिन्ही बाजूंवरील चौरसें काढावीं, आणि बाजूंवरील चौरसांच्या **फग**, **सह** ह्या बाजू (किंवा त्या वाढविल्या असतां) कर्णावरील चौरसाच्या अनुक्रमें **ड**, **इ** ह्या कोणबिंदूंतूनच गेल्या पाहिजेत, असें (१.२६ भाग १) ह्याच्या योगानें क्र. वि. रीतीनें सिद्ध करावें. पुढची सिद्धता वर लिहिल्याप्रमाणेंच करावी.

१. ४७ प्रश्न ४–(व्यक्तिप्र.) **अबक** ह्या काटकोनत्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजूंवरील चौरसांचे असे भाग करावयाचे आहेत कीं, त्यांच्या योगानें कर्णावरील चौरस नेमका व्यापिला जातो, असें दाखवितां येईल.



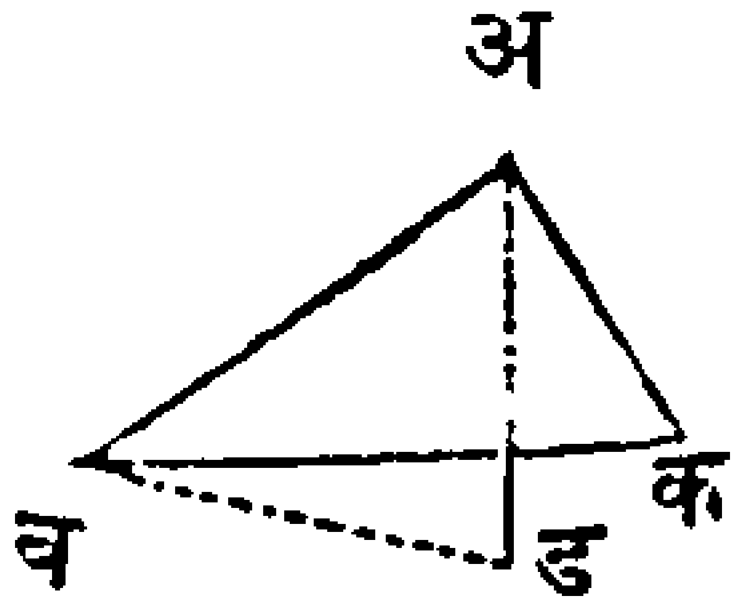
(१) **अक** वर **कह** चौरस काढिलें, (२) **हब** वाढविली, (३) **अब** बरोबर **हफ** केली, (४) **हफ**वर **फग** चौरस काढिलें, (५) **सग** वाढविली, (६) **अब** बराबर **सइ** केली, (७) आणि **कबडइ** चौकोन तयार केला.

आतां **बफड**, **डगइ**, **इसक** हा प्रत्येक त्रिकोण **अबक** त्रिकोणाशीं एकरूप आहे, असें १.४ च्या योगानें सिद्ध होतें; ∴ **बइ** चौकोनाच्या चारही बाजू समान ठरतात. आतां **अकब** कोन=**इकस** कोन (१. ४ भाग २), ∴ **अकस** कोन=**इकब** कोन (प्र. प्र. २), ∴ **इकब** कोन काटकोन आहे (व्या. ३० व प्र. प्र. ११ उप.). अशाच कांहीं आधारांवरून **बइ** चौकोनाचे सर्व कोन काटकोन ठरतात. ∴ **बइ** हें **बक** कर्णावरील चौरस आहे.

ह्यावरून बाजूंवरील चौरसांचे भाग पाडण्याची रीति अशी ठरते कीं, "**अब**, **अक** ह्या बाजूंवरील चौरसें, त्यांच्या एकेक बाजू एकाच सरलरेषेंत येतील अशा रीतीनें एकमेकांस लावून ठेवावीं; नंतर **अबक** आणि **बफड** हे त्रिकोण कापून **कसइ** आणि **डइग** ह्या त्रिकोणांशीं जोडावे. म्हणजे कर्णावरील चौरस नेमका व्यापिला जाईल, हें उघड आहे.

१. ४८ प्रश्न ३–(व्यक्तिप्र.) **अब**, **अक** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **बक** वरील चौरसाबरोबर आहे; तर **अ** कोन काटकोन आहे, असें सि. करावयाचें.

(सिद्धता) **अ** कोन काटकोन नसेल, तर विशालकोण मानूं. **अ** बिंदूपासून **अब** वर **अड** लंब करून **अक** बरोबर **अड** केली, आणि **बड** सांधिली. आतां **अबक** आणि **अबड** ह्या त्रिकोणास १.२४ लाविल्यानें **बड**<**बक**; ∴**बड** व. चौ<**बक** व. चौरस (१. इ. उप. १); ∴ **अब** व. चौ +**अड** व. चौ<**बक** व. चौ (१.४७ व प्र. प्र. अ. उप.); ∴ **अब** व. चौ+**अक** व. चौ<**बक** व. चौ (१. इ, प्र. प्र. २ व प्र. प्र. अ. उप). पण हा पक्षविरोध. ∴ **अ** हा विशालकोण नाहीं. ह्याप्रमाणेंच तो लघुकोण नाहीं, असें सि. होतें. ∴ इष्टसिद्धि.



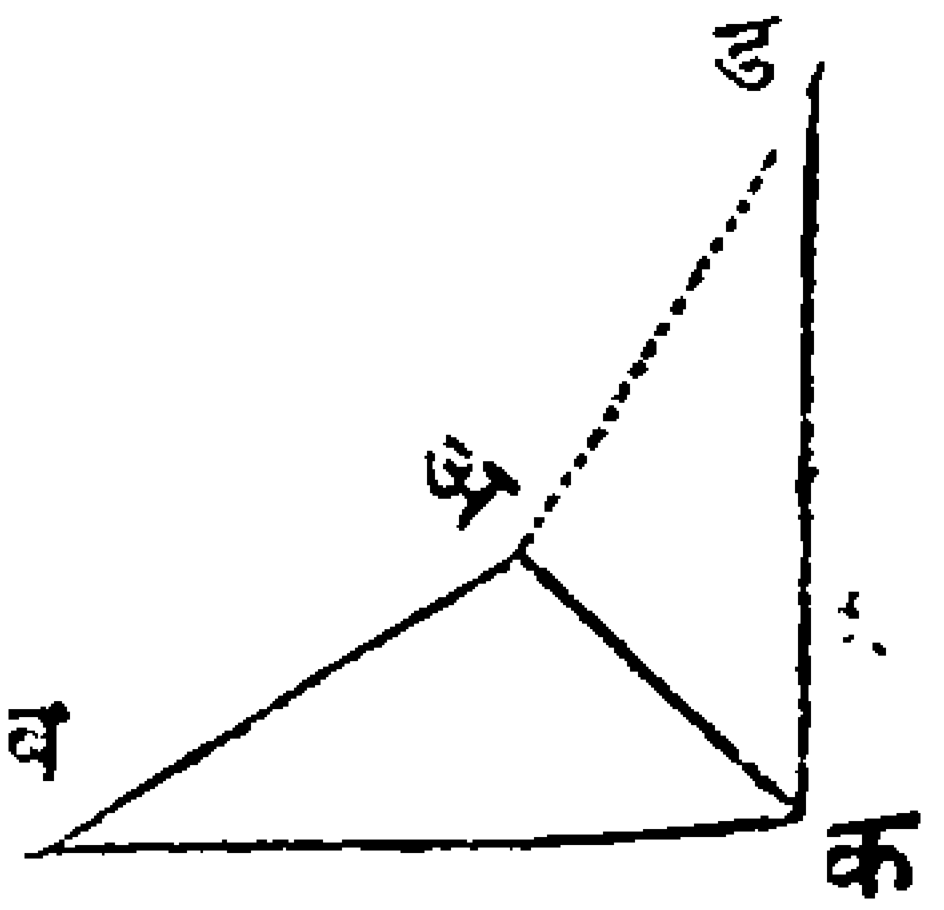
पहिल्या पुस्तकाच्या सातव्या खंडावरील

(म्हणजे १.४६, १.४७, व १.४८ ह्या सिद्धांतांवरील)

प्रश्नांविषयीं सूचना.

१. खंड ७ प्रश्न १–(व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाचा **अ** हा विशालकोण आहे; तर **अब** व. चौ+**अक** व. चौ<**बक** व. चौ हें सिद्ध करावयाचें.

अ पासून **अक** वर **अड** लंब करून **अब**=**अड** केली; आणि **कड** सांधिली.



आतां **कड<बक** (१.२४), ∴ **कड** व. चौ<**बक** व. चौ (१. ई. उप. १). ∴ १. ४७, १. इ व त्याचे उप, प्र. प्र. २ इत्यादिकांवरून इष्टसिद्धि.

१. खंड ७ प्रश्न २–१.४७ व मागचा प्रश्न ह्यांच्या आधारानें क्र. वि. रीतीनें सिद्ध करावा.

१. खंड ७ प्रश्न ३ व ४–१.४७ व मागचे दोन प्रश्न ह्यांच्या आधारानें क्र. वि. रीतीनें सिद्ध करावे.

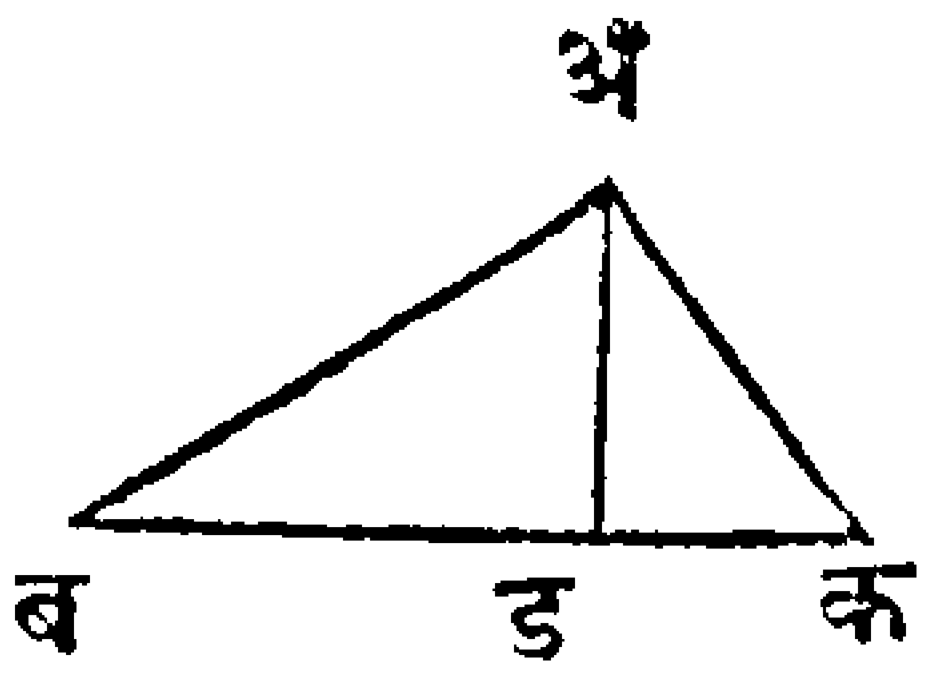
१. खंड ७ प्रश्न ६–एका रेषेवर तिच्या एका टोंकापासून लंब काढून त्याचा दुसऱ्या रेषेएवढा तुकडा पाडावा, आणि जेथें तुकडा पडेल तो बिंदु व पहिल्या रेषेचें दुसरें टोंक हीं सांधावीं. सांधणारी रेषा ही इष्ट रेषा होय. हें १.४७ ह्यावरून उघड आहे.

१. खंड ७ प्रश्न ७–प्रथमतः दिलेल्या रेषांपैकीं दोन रेषांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर जीवरील चौरस होईल, अशी रेषा (मागच्या प्रश्नाप्रमाणें) काढावी. पुनः ही नवी रेषा व दिलेल्या रेषांपैकीं तिसरी रेषा ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरावर जीवरील चौरस होईल, अशी रेषा काढावी. ह्याप्रमाणेंच सर्व रेषा संपत तोंपर्यंत कृति करावी.

१. खंड ७ प्रश्न १०–दिलेल्या धाकट्या रेषेचें एक टोंक मध्य व दिलेल्या मोठ्या रेषेएवढी त्रिज्या कल्पून एक वर्तुळ काढावें; आणि धाकट्या रेषेवर तिच्या दुसऱ्या टोंकापासून लंब काढून तो एकीकडे परिघाला मिळे तोंपर्यंत वाढवावा. तो लंबच इष्ट रेषा होय. हें १.४७ उप. १ ह्यावरून उघड आहे.

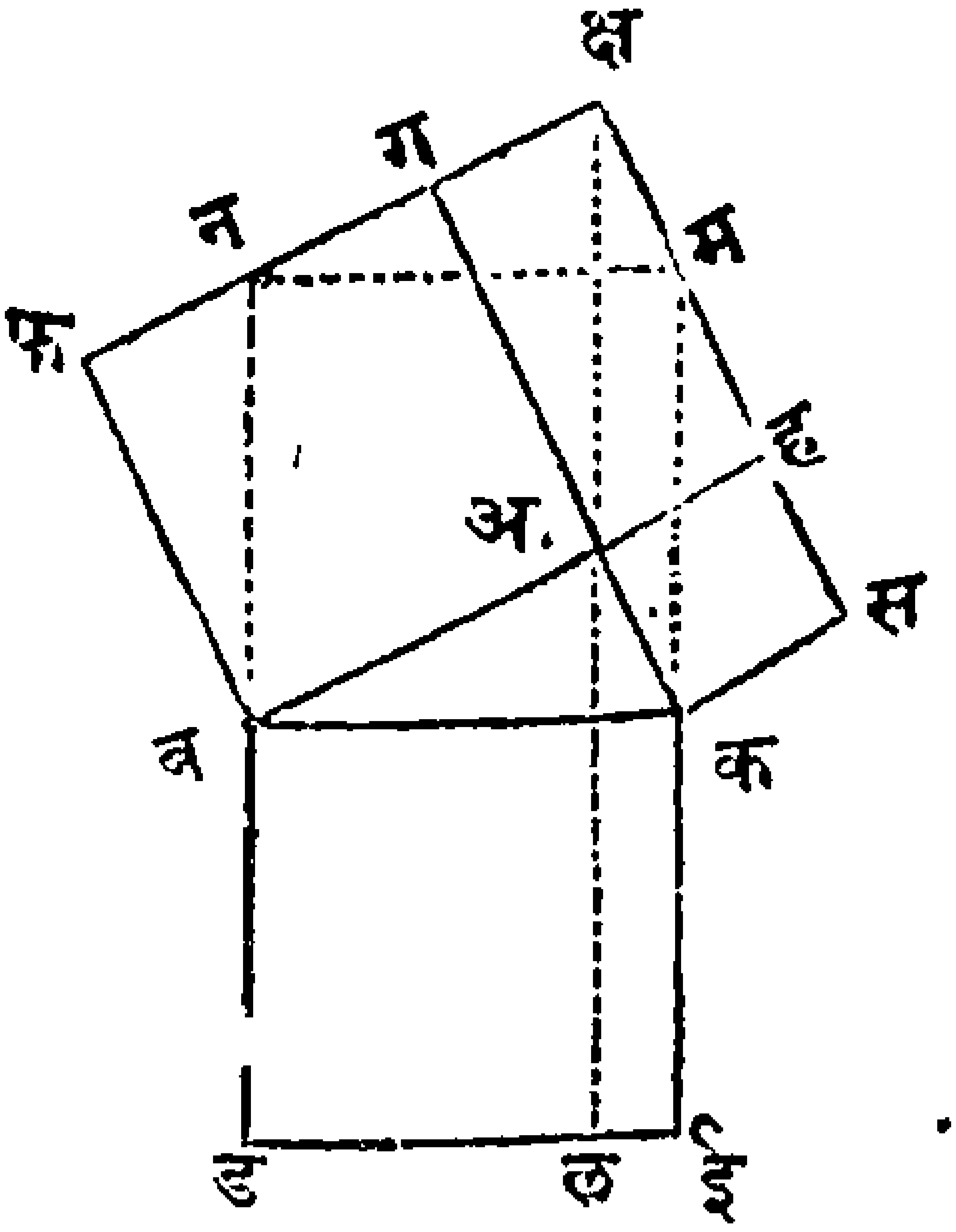
१. खंड ७ प्रश्न २३–१.४७ उप. १ ह्यावरून प्रत्येक भाग व त्याच्या जवळची त्रिकोणाची बाजू ह्यांवरील चौरसांची वजाबाकी लंबावरील चौरसाबरावर आहे; ह्मणून प्र. प्र. १ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

१. खंड ७ प्रश्न २४–(व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाच्या **अ** शि-



रोबिंदूपासून **बक** पायावर **अड** लंब काढिला आहे, आणि **बड>कड**; तर **अब अक** ह्यांवरील चौरसांची वजाबाकी, **बड, कड** ह्यांवरील चौरसांच्या वजाबाकीबरावर आहे, हें सिद्ध करावयाचें. **बड, अड** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज व **कड, अड** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज, ह्या दोन बेरजांची वजाबाकी, **बड, कड** ह्यांवरील चौरसांच्या वजाबाकीबरावर आहे (प्र. प्र. ५ उप.); आणि त्याच बेरजांची वजाबाकी **अब, अक** ह्यांवरील चौरसांच्या वजाबाकीबरावर आहे. (१.४७ व प्र. प्र. ३). ∴ प्र. प्र. १ ह्यावरून इष्टसिद्धि.

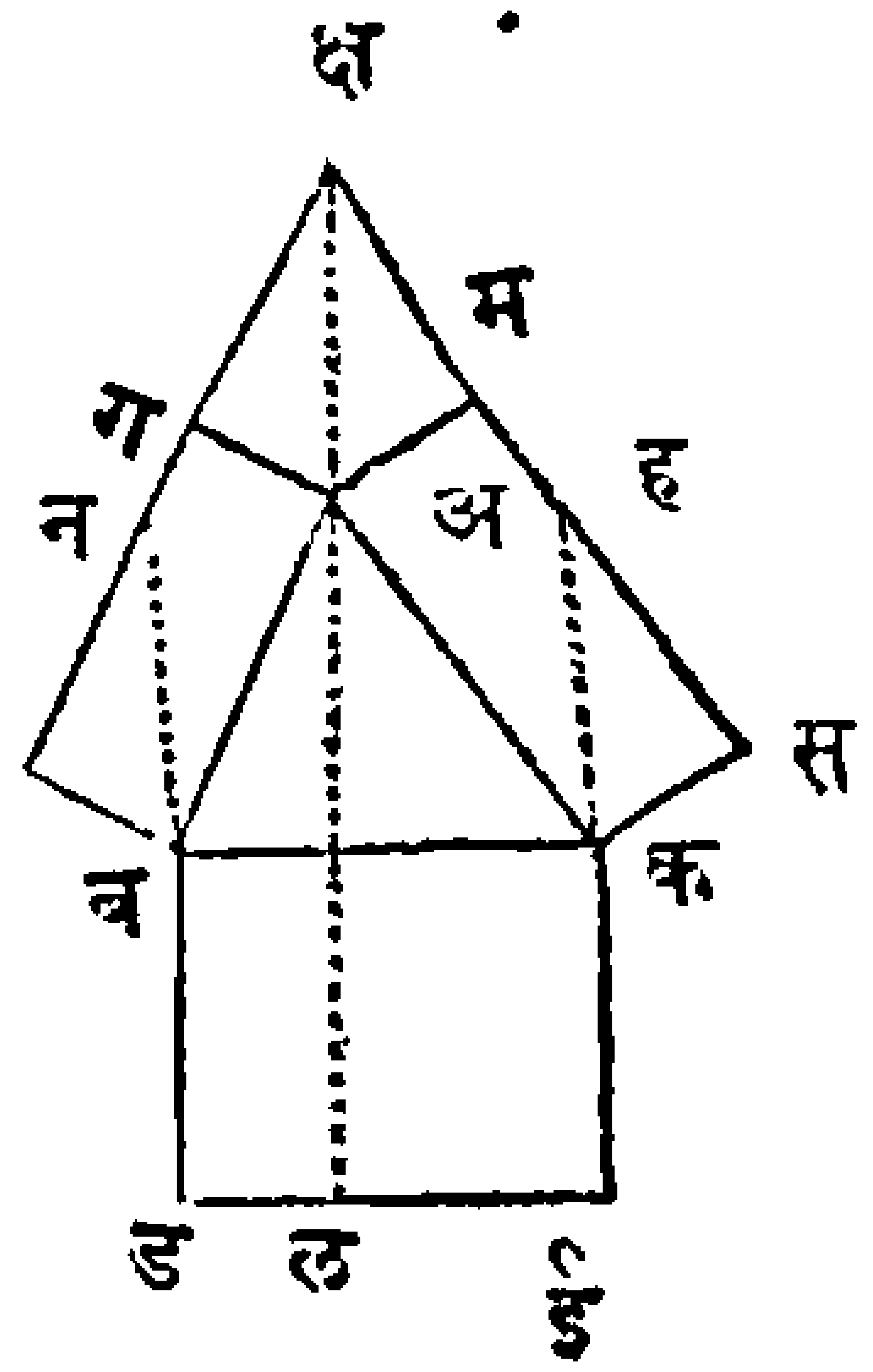
१. खंड ७ प्रश्न २५–(१) **फग, सह** मिळतील हें १.३० उपसि.



ह्यावरून ठरतें. (२) **अबक, गअक्ष** ह्या त्रिकोणांस १.४ भाग १ लाविल्यानें **अक्ष=बक** ठरते. (३) त्याच त्रिकोणांस १.४ भाग २ लाविल्यानें **गअक्ष** कोन =**अबक** कोन ठरतो; ∴ **क्षअब** कोन=**अबड** कोन (प्र. प्र. ११ व प्र. प्र. २); ∴ **क्षअ** ही **बड**शीं समांतर आहे (१. २७); ∴ **क्षअ** पुढें वाढविली असतां **बक**वर लंब होईल (१.२९ व व्या. १०).

१. खंड ७ प्रश्न २६–(मागील प्रश्नाची आकृति पहा). **अबक** कोन=**फबन** कोन (प्र. प्र. ११ व प्र. प्र. ३); ∴ **अबक** आणि **बफन** ह्या त्रिकोणांस १.२६ भाग १ लाविल्यानें **बक=बन** ठरते. ह्याप्रमाणेंच **बक=कम**; ∴ **बम** हा समांतरभुजचौकोन ठरतो (१. ३३). ∴ तो **बक**वरील चौरस ठरतो (१.४६ उप. २).

१. खंड ७ प्रश्न २९–**डब**, **इक** ह्या अनुक्रमें **फग**, **सह** ह्यांस अनुक्रमें **न**, **म** बिंदूंत मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या; आणि **क्षअ** ही **डई**ला **ल** बिंदूंत मिळे तोंपर्यंत वाढविली.



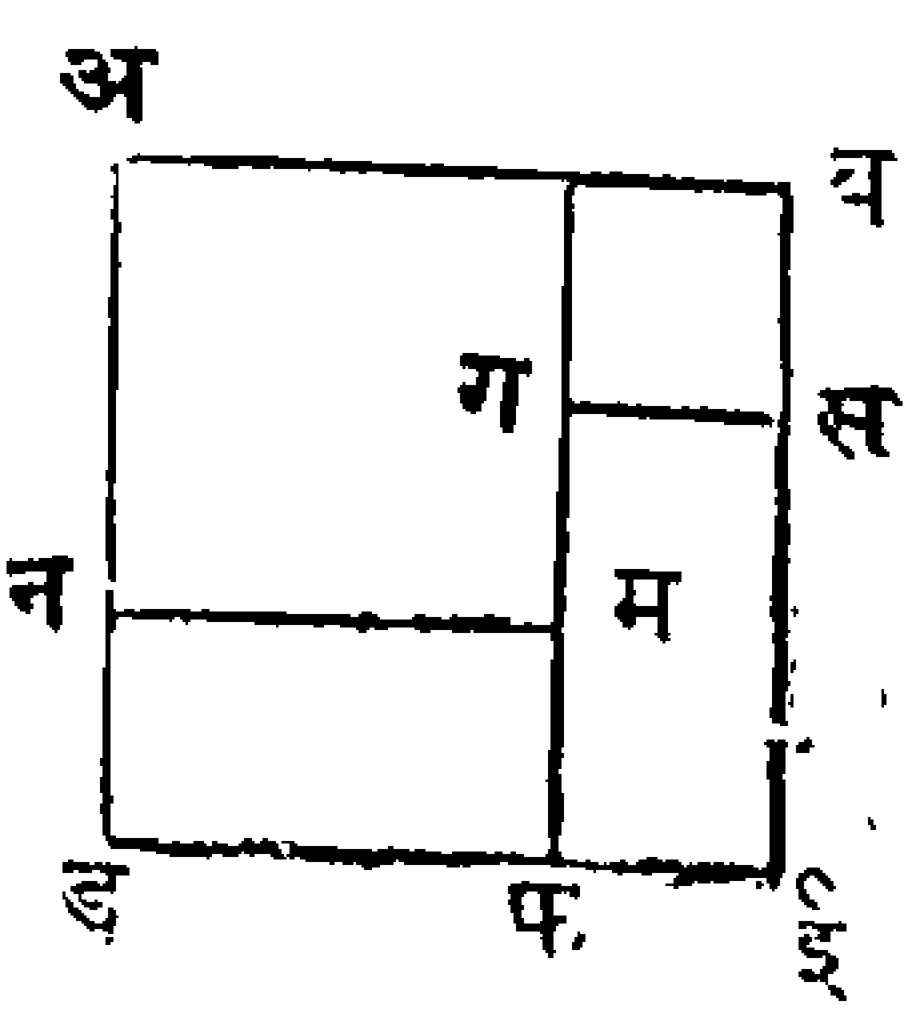
आतां **बक्ष**, **कक्ष** हे समांतरभुजचौकोन आहेत; ते अनुक्रमें **बग**, **कह** ह्यां-बरोबर आहेत; व **बल**, **कल** ह्यांबरोबरही आहेत, असें सिद्ध करावें. म्हणजे प्र. प्र. १ व प्र. प्र. २ ह्यांच्या योगानें इष्टसिद्धि होते.

१. खंड ७ प्रश्न ३०–मागच्या प्रश्नांत दिलेल्या गोष्टींखेरीज जर (१) **अ**कोन काटकोन आहे, व (२) **बग**, **कह**, हीं अनुक्रमें **अब**, **अक** ह्या बाजूंवरील चौरसें आहेत, ह्या गोष्टी ज्यास्त दिलेल्या असतील; तर २६ व्या प्रश्नाप्रमाणें **अक्ष** ही **बक**शीं बराबर आणि तीवर लंब ठरेल, व **अक्ष** ही **बड**शीं बराबर व तिशीं समांतर आहे (प्रतिज्ञा); ∴ **बई** हा **बक**वरील चौरस ठरेल, आणि मग त्या प्रश्नाला १.४७ ह्याचेंच स्वरूप येईल.

१. खंड ७ प्रश्न ३१–लंबामुळें जे नवीन दोन काटकोनत्रिकोण होतात, त्यांस १.४७ लावून पुढें प्र. प्र. २ लावावें; आणि पुनः मूळच्या त्रिकोणास १.४७ लावून शेवटीं प्र.प्र. १ लावावें.

दुसऱ्या पुस्तकांतल्या सिद्धांतांवरील प्रश्नांविषयीं सूचना.

२. ४ प्रश्न ७–**अम**, **बग** हीं अनुक्रमें **अक**, **बक** ह्यांवरील चौरसें आहेत (१.४६ उप. २); आणि **नफ**, **फस** ह्यांपैकीं प्रत्येक चौकोन **अक**, **बक** ह्यांचा काटकोनचौकोन आहे, हें थोडक्यांत सिद्ध होतें. ∴ इष्टसिद्धि.



२. ४ प्रश्न ८–(व्यक्तिप्र.) **अबब**-

रील चौरस=अक व. चौ+बक व. चौ+२ (अक, बक काटकोन चौकोन). (सिद्धता) अब, अक का=

अ ———— क ———— ब

अक व. चौ+अक, बक का (२.३), आणि अब, कब का=बक व. चौ+अक, बक का (२.३); ∴ अब, अक का+अब, बक का=अक व. चौ+बक व. चौ+२(अक, बक का) (प्र. प्र २). आतां अब, अक का+अब, बक का=अब व. चौ (२.२). ∴ अब व. चौ=अक व. चौ+बक व. चौ+२(अक, बक का) (प्र. प्र.१).

२.५ प्रश्न ९–(व्यक्तिप्र.) अड, डब का+कड व. चौ=बक व. चौ.

(सिद्धता) अक=बक (प्रतिज्ञा), ∴ अक, डब का=बक, डब का (२. व्याख्या १); आणि

अ ———— क — ड — ब

कड, डब का+कड व. चौ=बक, कड का (२.३). ∴ अक, डब का+कड, डब का+कड व. चौ= बक, डब का+बक, कड का (प्र. प्र. २). आतां अक, डब का +कड, डब का=अड, डब का (२.१); व बक, डब का+बक, कड का=बक व. चौ (२.२). ∴ अड, डब का+कड व. चौ= बक व. चौ (प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १).

२.७ ह्याची आकृतीवांचून सिद्धता– (व्यक्तिप्र.) अब व. चौ+बक व. चौ=२(अब, बक का) +अक व. चौ

(सिद्धता) अब,

अ ———— क ———— ब

बक का=अक, बक का+बक व. चौ (२.३); ∴ २ (अब, बक का)=२ (अक, बक का)+२ (बक व. चौ) (प्र. प्र. २ उपसि.). ∴ २ (अब, बक का)+अक व. चौ=२(अक, बक का)+ २ (बक व. चौ)+अक व. चौ (प्र. प्र. २). आतां २ (अक, बक का)+२(बक व. चौ)+अक व. चौ=अब व. चौ+बक व. चौ (२.४ व प्र. प्र. २). ∴ अब व. चौ+बक व. चौ=२ (अब, बक का)+अक व. चौ (प्र. प्र. १).

२. ८ प्रश्न ५–(व्यक्तिप्र.) अब, बक ह्यांच्या बेरजेवरील चौरस=४ (अब, बक का)+अक व चौ.

(सिद्धता) बक बरोबर बड केली. अ ——— क ब ड

आतां अब व. चौ+बक व. चौ=२(अब, बक का)+अक व. चौ (२.७); आणि बक=बड, ∴ अब व. चौ+बड व. चौ=२(अब, बक का)+अक व. चौ (२. व्याख्या २); आणि २ (अब, बड का)=२(अब, बक का) (२. व्या. १). ∴ अब व चौ+बड व. चौ+२(अब, बड का)=४ (अब, बक का)+अक व. चौ (प्र. प्र. २). आणि अब व. चौ+बड व. चौ+२ (अब, बड का)= अड व. चौ (२.४); ∴ अड व. चौ=४ (अब, बक का)+अक व. चौ (प्र. प्र १).

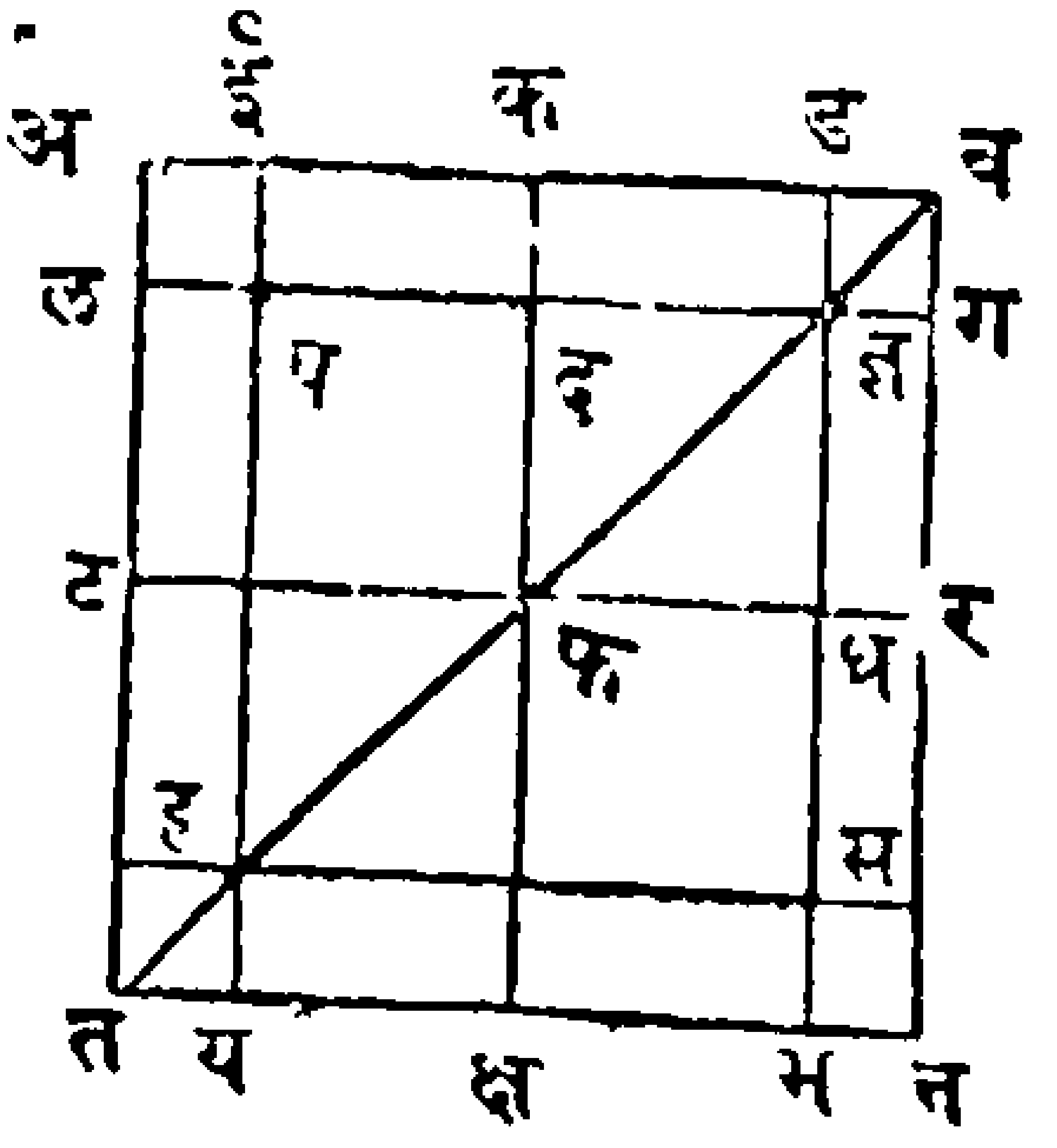
अथवा (व्यक्तिप्र.) अब, बक ड ——— अ ई क. ब

यांच्या बेरजेवरील चौरस=८(अब, बक का)+अक व. चौ.

(सिद्धता) बअ वाढवून बक बरोबर डअ केली, व डब ही ई बिंदूंत दुभागिली. आतां डई व. चौ=अब, अड का+अई व. चौ (२.५). ∴ ४(डई व. चौ)=४(अब, अड का)+४(अई व. चौ) (प्र. प्र. २ उपसि). आतां ४(डई व. चौ)=डब व. चौ आणि ४(अई व. चौ)=अक व. चौ (२.४ उपसि. २). ∴ डब व. चौरस=४ अब, अड का+अक व. चौ (प्र. प्र. २ व. प्र. प्र. १). अड= बक आणि डब=अब+बक; ∴ अब, बक यांच्या बेरजेवरील चौरस =८ (अब, बक का.)+अक व. चौ.

२.९ प्रश्न ४–(व्यक्तिप्र.) अड व. चौ+डब व. चौ=२ (अक व. चौ)+२(कड व. चौ).

(सिद्धता) बड बरोबर अई करून अब वर अन चौरस काढिला; आणि बन कर्ण काढणें इत्यादिक बाकीची सारी रचना केली.



आतां हें सहज सिद्ध होईल कीं, लम हा अडवरील चौरस आहे, डग हा बड वरील चौरस आहे, टक्ष अथवा कर हा अक

वरील चौरस आहे, आणि पफ अथवा फस हा कडवरील चौरस आहे; तसेंच कज्ञ=पट आणि रज्ञ=सक्ष.

आतां अड व. चौ+बड व. चौ=लम+डग=टक्ष+पट+सक्ष+दृध+डग+पफ+फस=टक्ष+(कज्ञ+रज्ञ+दृध+डग)+पफ+फस=टक्ष+कर+पफ+फस=२ (अक व. चौ)+२ (कड व. चौ).

२.९ प्रश्न ५–(व्यक्तिप्र.) अड व. चौ+डब व. चौ=२ (अक व. चौ)+२(कड व. चौ).

(सिद्धता) अड व. चौ=अक व. चौ+कड व. चौ+२ (अक, कड का) (२.४). ∴ अड व. $\overline{\text{अ क ड ब}}$ चौ+डब व. चौ=अक व. चौ+कड व. चौ+२ (अक, कड का) +डब व. चौ (प्र. प्र. २). अक=बक, ∴ २(अक, कड का)+डब व. चौ=२(बक, कड का)+डब व. चौ (२. व्या. १ व. प्र. प्र. २). आणि २ (बक, कड का)+डब व. चौ=बक व. चौ+कड व. चौ (२.७)=अक व. चौ+कड व. चौ. ∴ अड व. चौ+डब व. चौ=२ (अक व. चौ)+२ (कड व. चौ) (प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १).

२.१० प्रश्न १–२.९ ह्याच्या रचनेमध्यें ईब, फड ह्यांचा मेलनबिंदु जो फ, त्यापासून अबशीं समांतर रेषा काढून ती ईक लंबाला मिळविली आहे. तसें २.१० ह्यांत केलें नाहीं. त्याच्या आकृतीमध्येंही जर ईब, फड ह्यांचा मेलनबिंदु ग ह्यापासून अबशीं समांतर रेषा काढून तिला ईफ लंब मिळविला, तर त्याच्या सिद्धतेमध्यें कांहीं फरक होत नाहीं.

२.१० प्रश्न ४–२.९ प्रश्न ४ ह्याच्या आकृतीमध्यें डई ही मूळची रेषा आहे व ती क बिंदूंत दुभागून अपर्यंत वाढविली आहे, असें मानिलें असतां, २.१० ह्याची सिद्धता त्या प्रश्नांत झाल्यासारिखीच आहे.

२.१० प्रश्न ५–(व्यक्तिप्र.) अड व. चौ+डब व. चौ=२ (अक व. चौ)+२(कड व. चौ). याची $\overline{\text{अ क ब ड}}$ सिद्धता अक्षरशः २.९ प्रश्न ५ प्रमाणेंच आहे.

२.११ प्रश्न २-ग्रंथांतल्या रचनेपैकीं **अक** लंब काढणें, तो **अब**-बरोबर करणें, तो दुभागणें, **ईब** सांधणें, **ईब** बरोबर **ईफ** करणें, व **अफ** बरोबर **अह** करणें, एवढीच रचना **अब**चे इष्टभाग होण्यास आवश्यक आहे; चौरसें तयार करणें इत्यादिक बाकीची रचना सिद्धतेलाच लागते.

२.११ प्रश्न ३-ह्या रचनेंतील सांधणाऱ्या रेषेचा राहिलेला भाग २.११ च्या आकृतींतल्या **अफ** रेषेबरोबर होतो. ∴ इष्टसिद्धि.

२.११ प्रश्न ४-(२.११ ची आकृति पहा) **अब<बई** (१.१९ प्रश्न ३); ∴ **अक<ईफ** (प्र. प्र. अ व उप.); ∴ **ईक<अफ** (प्र. प्र.५). ∴ **अब**च्या अर्धापेक्षां **अह** जास्त आहे (प्र. प्र. अ).

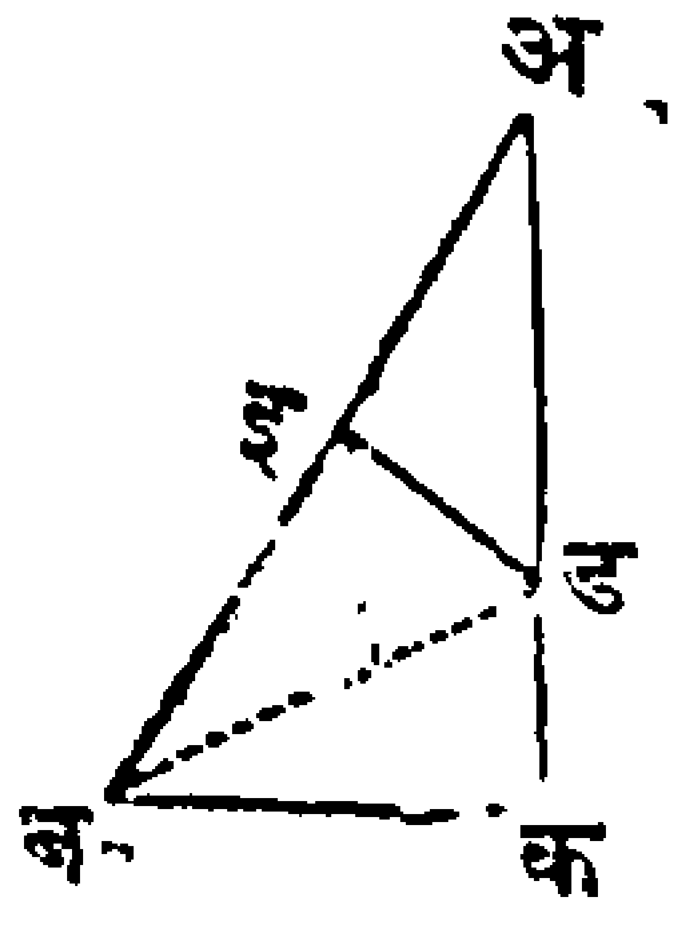
२.११ प्रश्न ५-२. ११च्या आकृतींत **अब** दुभागिली म्हणजे मागील प्रश्नाच्या आधारानें इष्टसिद्धि होते.

२.११ प्रश्न ६-२.११ च्या आकृतींत **कफ, अफ** का=**अक** व. चौ हें २.११ च्या सिद्धतेमध्यें सिद्ध झालें आहे.

२.११ प्रश्न ८-२.११ च्या आकृतींत **कफ** ही दिलेली रेषा मानिली, तर प्र. ६ ह्यावरून तिच्या २.११ प्रमाणें केलेल्या भागांपैकीं **अक** हा मोठा भाग आहे; त्याच्या बरोबर **अब** रेषा आहे; व तिचा **कफ**च्या लहान भागाएवढा तुकडा पाडिल्यानें तिचेही २.११ प्रमाणेंच भाग झाले आहेत. ∴ इष्टसिद्धि.

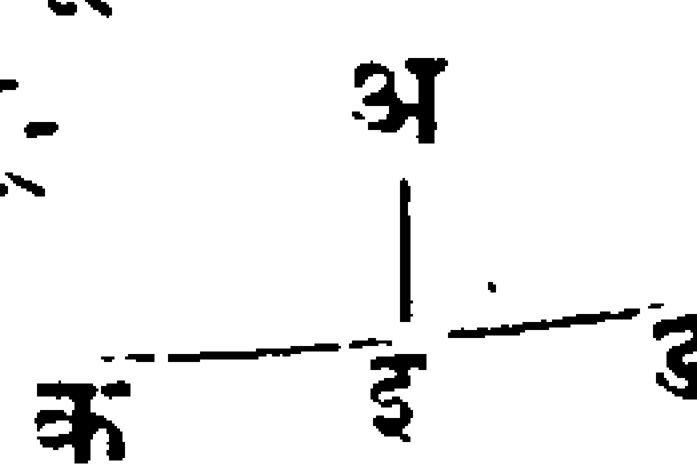
२.१२ प्रश्न ३-२.१२ चीग्रंथांतली सिद्धता, २.१२ प्रश्न २,प्र. प्र. १, प्र. प्र. ३, व प्र. प्र. ४ उपसि. ४ ह्यांवरून इष्टसिद्धि होते.

२.१३ प्रश्न ५-**बड** सांधिली. आतां **अबड** त्रिकोणाचा **अ** हा लघुकोण आहे. ∴ **बड** व. चौ+२(**अब, अई** का)=**अब** व. चौ+**अड** व. चौ (२.१३); तसेंच **बड** व. चौ+२(**अक, अड** का)= **अब** व. चौ+**अड** व. चौ, (२.१३). ∴ प्र. प्र. १, प्र. प्र. ३ व प्र. प्र. ४ उपसि. ४ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.



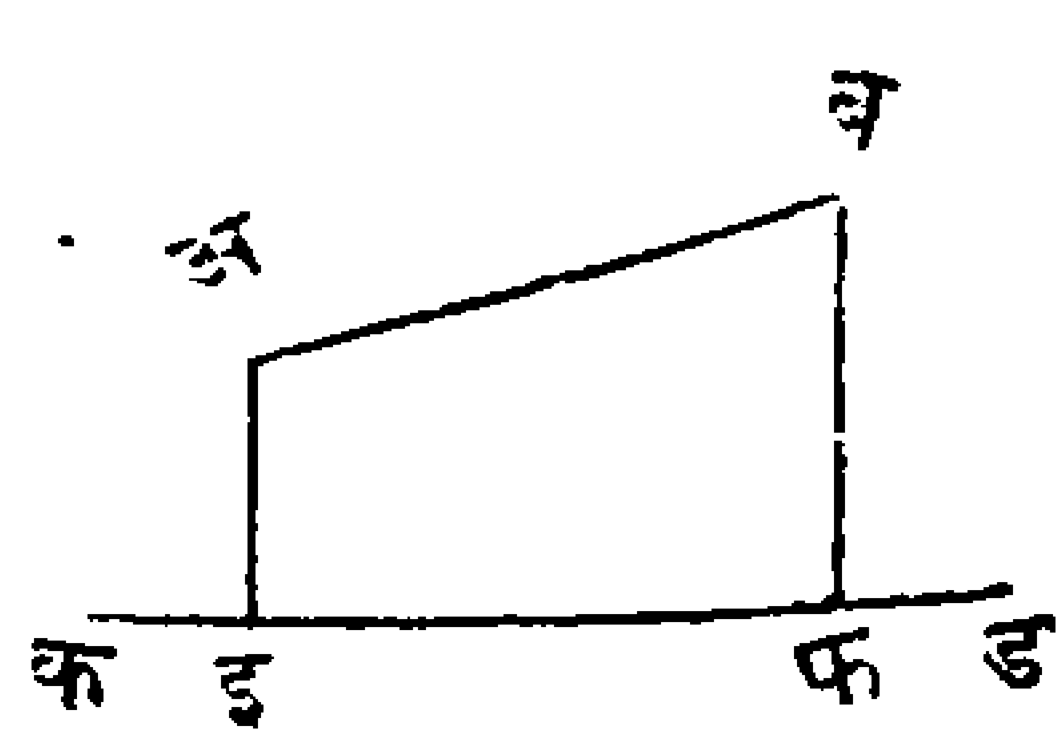
२.१३ प्रश्न ६–ह्या प्रश्नांत " **छाया** " शब्दाचा जो अर्थ दिला आहे, त्याप्रमाणें २.१२ ची आकृति व २.१३ च्या (१), (२) ह्या आकृति, ह्या तिहींमध्यें **बड** ही **अब**ची **बक** वरील छाया होय. ∴ २.१२ च्या प्रतिज्ञेचें स्वरूपः—" विशालकोणत्रिकोणाच्या विशालकोणासमोरच्या बाजूवरील चौरस हा, इतर बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, इतर बाजूंपैकीं एक व तीवरील दुसरीची छाया ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, जास्त असतो. " २.१३ च्या प्रतिज्ञेचें स्वरूपः—" त्रिकोणाच्या कोणत्याही लघुकोणासमोरच्या बाजूवरील चौरस हा, इतर बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेपेक्षां, इतर बाजूंपैकीं एक व तीवरील दुसरीची छाया ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें, कमी असतो. "

छाया ह्या शब्दाची योजना खालीं लिहिल्याप्रमाणें बिंदु व रेषा ह्या दोहींच्या संबंधानें केली असतां बराच उपयोग होईल. (१) " दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या अमर्याद रेषेवर काढिलेला लंब त्या रेषेला ज्या बिंदूंत मिळतो, त्या बिंदूला दिलेल्या बिंदूची दिलेल्या अमर्याद रेषेवरील छाया म्हणावें. " जसें, **अ** बिंदूपासून **कड** या अमर्याद रेषेवर **अइ** लंब काढिला आहे; तर **इ** बिंदु ही **अ** बिंदूची **कड** या अमर्याद रेषेवरील छाया होय.

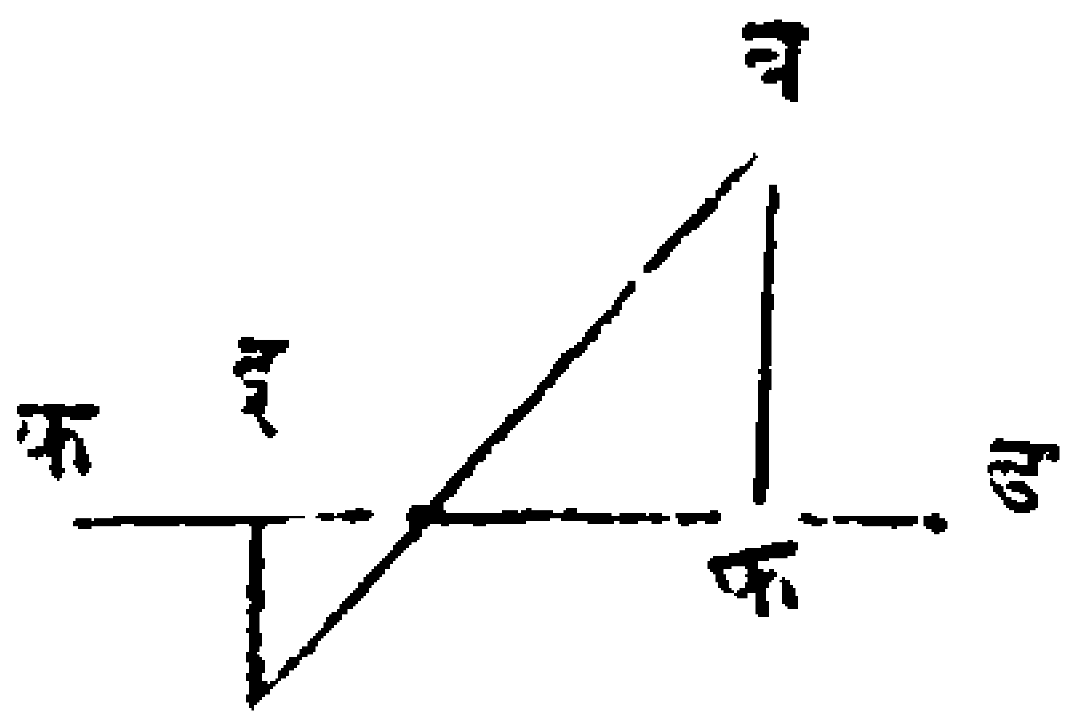


उपसि. दिलेला बिंदु जर दिलेल्या अमर्याद रेषेंतच असेल, तर त्याची छाया तोच बिंदु होय.

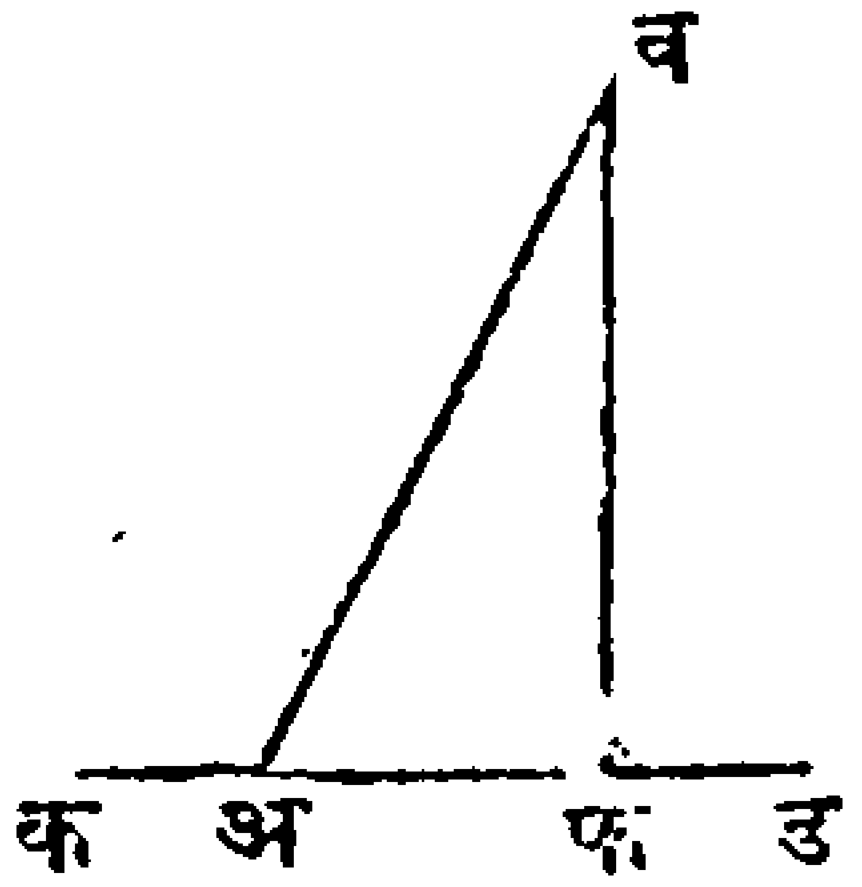
(२) " दिलेल्या समर्याद रेषेच्या दोन्ही टोंकांपासून दिलेल्या अमर्याद रेषेवर दोन लंब काढिले असतां, त्या लंबांमध्यें अमर्याद रेषेचा जो भाग सांपडतो, त्याला दिलेल्या समर्याद रेषेची दिलेल्या अमर्याद रेषेवरील छाया म्हणावें ". जसें, **अब** ह्या समर्याद रेषेच्या **अ**, **ब** ह्या दोन्हीं टोंकांपासून **कड** ह्या अमर्याद रेषेवर अनुक्रमें **अइ**, **बफ** हे लंब काढिले आहेत; तर **इफ** ही **अब**ची **कड**-



वरील छाया होय.



उपसि. १ दिलेल्या समर्यादरेषेचें एक टोंक दिलेल्या अमर्याद रेषेंतच असेल, तर दुसऱ्या टोंकापासून अमर्याद रेषेवर काढिलेल्या लंबाचें त्या पहिल्या टोंकापासून जें अंतर, तीच इष्टछाया होय. म्हणून प्रस्तुत प्रश्नामध्यें सांगितलेल्या छाया शब्दाच्या अर्थाचा ह्या अर्थांत अंतर्भाव होतो.



उपसि. २–दिलेल्या समर्याद रेषेचीं दोन्ही टोंकें दिलेल्या अमर्याद रेषेंतच असतील, तर ती समर्याद रेषा हीच तिची त्या अमर्याद रेषेवरील छाया होय.

उपसि. ३–दिलेली समर्याद रेषा दिलेल्या अमर्याद रेषेशीं समांतर असली, तर तिची त्या अमर्याद रेषेवरील छाया तिच्या बरोबर असते.

उपसि. ४–दिलेली समर्याद रेषा दिलेल्या अमर्याद रेषेवर लंब असेल, तर तिची त्या अमर्याद रेषेवरील छाया त्या रेषांचा मेलनबिंदु हीच होय.

दुसऱ्या पुस्तकावरील प्रश्नांविषयीं सूचना.

२. प्रश्न १–(१) दुसऱ्या पुस्तकामध्यें मुख्य दोन विषय आहेत. रेषांचे निरनिराळ्या प्रकारांनीं कल्पिलेले भाग व त्या रेषा ह्यांच्या काटकोनचौकोनांची व त्यांवरील चौरसांची परस्परांशीं तुलना करणें, हा एक विषय होय; आणि काटकोनत्रिकोणाच्या बाजूंवरील चौरसांची जशी परस्परांशीं तुलना १.४७ यांत करून दाखविली आहे, तशीच विशालकोणत्रिकोण व लघुकोणत्रिकोण

ह्यांच्या बाजूंवरील चौरसांची परस्परांशीं तुलना करणें, हा दुसरा विषय होय.

(३) २.२ व २.३ ह्यांचा २.१ ह्यांत समावेश होतो; २.६ ह्याचा २.५ ह्यांत समावेश होतो; आणि २.१० ह्याचा २.९ ह्यांत होतो.

(४) "दिलेल्या समर्याद रेषेमध्यें किंवा ती वाढवून तीमध्यें एक बिंदु घेतला असतां, त्या रेषेच्या दोन्ही टोंकांपासून त्या बिंदूपर्यंत जीं अंतरें, त्यांना त्या रेषेचे भाग ह्मणावें" अशी "रेषेचे भाग" ह्या पदाची जर व्याख्या केली, तर रेषेचे भाग दोन प्रकारचे होतात. "रेषेमध्यें बिंदु घेतला असतां जे तिचे दोन भाग होतात, त्यांना त्या रेषेचे आंतरभाग ह्मणावें," **अ क ब कं** जसें, **अब** रेषेचे **अक**, **बक** हे आंतरभाग होत. "रेषा वाढवून तीमध्यें बिंदु घेतला असतां जे तिचे भाग होतात, त्यांना त्या रेषेचे बाह्यभाग म्हणावें." जसें, **अब** रेषेचे **अकं**, **बकं** हे बाह्यभाग होत.

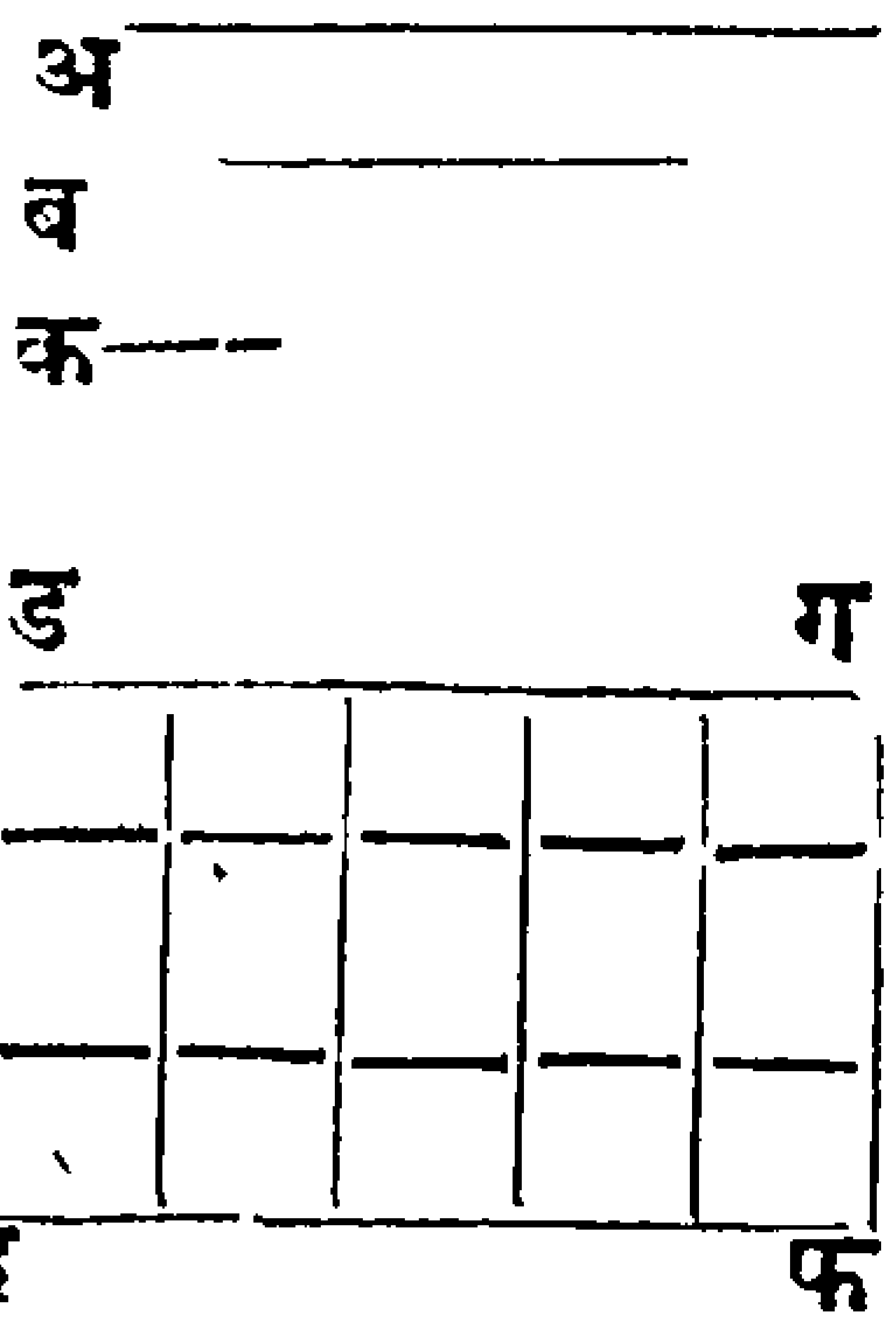
धन व ऋण ह्या शब्दांच्या अर्थाविषयीं जो गणितांतला संकेत आहे, त्यावरून पाहतां **बक**, **बकं** ह्या दोन भागांपैकीं एकास धन व दुसऱ्यास ऋण ह्या संज्ञा देतां येतील.

आंतरभाग व बाह्यभाग ह्या संज्ञा रेषेच्या दोन दोन असमान भागांना मात्र लक्षून योजावयाच्या, हें पक्कें ध्यानांत असलें पाहिजे.

(५) रेषेच्या भागांचे असे दोन प्रकार मानिले, तर २.९ ह्याच्या प्रतिज्ञेंतच २.१० ह्याच्या प्रतिज्ञेचा समावेश होईल. कारण २.९ ह्यांत रेषेचे आंतरभाग आहेत व २.१० ह्यांत बाह्यभाग आहेत.

(६) धनर्ण रेषांविषयीं जो वर संकेत सांगितला, त्याखेरीज "दोन धनरेषांचा अथवा दोन ऋणरेषांचा काटकोनचौकोन व रेषेवरील चौरस हे धन समजावे." आणि "धनर्ण रेषांचा काटकोनचौकोन ऋण समजावा" असे आणखी संकेत केले, व धनर्ण परिमेयांच्या बेरजेविषयीं आणि वजावाकीविषयीं संख्यागणितांतील जे संकेत आहेत, तेही स्वीकारिले; तर २.२ व २.३. २.४ व २.७, २.५ व २.६ आणि २.१२ व २.१३ ह्या दोन दोन सिद्धांतांचा एकेकच सिद्धांत होतो.

१. प्रश्न २–**अ**, **ब** ह्या रेषांचा **डफ** हा काटकोनचौकोन तयार करून त्याच्या **डग**, **डइ** ह्या बाजूंचे **क** रेषेएवढाले तुकडे पाडिले, ते अनुक्रमें ५ व ३ भरले, व छेदनबिंदूंतून **डग**, **डइ** ह्यांशीं समांतर रेषा काढिल्या; तेव्हां त्या चौकोनांत सारीं **क** रेषेवरील चौरसाएवढालीं चौरसें तयार झालीं. आतां ह्या चौरसांची संख्या ठरवायाची. तर प्रत्येक ओळींत पांच पांच चौरसें अशा तीन ओळी आहेत, अथवा प्रत्येक ओळींत तीन तीन चौरसें अशा पांच ओळी आहेत; ह्मणून पांच चौरसांची तिप्पट अथवा तीन चौरसांची पांचपट केल्यानें चौरसांची संख्या समजेल. ह्यावरून **अ**, **ब** रेषांतल्या, **क** रेषेएवढाल्या भागांच्या संख्या ज्या ५ व ३, त्यांचा गुणाकार केल्यानें **अ**, **ब** ह्यांच्या काटकोनचौकोनांतील, **क** रेषेएवढाल्या चौरसांची संख्या उत्पन्न झाली. ह्याप्रमाणेंच केवढ्याही रेषांच्या संबंधानें सिद्धता करितां येईल. म्हणून इष्टसिद्धि.



(काटकोनचौकोनाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू तिसऱ्या एका रेषेनें मोजिल्या असतां येणाऱ्या भागसंख्या पूर्ण आहेत, असें वरच्या उदाहरणांत मानिलें आहे. आतां ह्या भागसंख्यांपैकीं एक किंवा दोन्ही अपूर्ण संख्या असल्या, तरी देखील ह्या सिद्धांताची सत्यता आकृतीच्या योगानें प्रत्ययास आणून देतां येते. परंतु काटकोनचौकोनाच्या जवळजवळच्या दोन बाजू जर अन्योन्यापरिच्छेद्य असल्या, म्हणजे कोणत्याही एकाच रेषेनें त्या दोन्ही बराबर मोजितां येणें असंभाव्य असलें, तर मात्र ह्या सिद्धांताची सत्यता आकृतीच्या योगानें प्रत्ययास आणून देतां येत नाहीं. मग हा गणितांतील परमावधीच्या नियमावरून खरा ठरवावा लागतो.)

२. प्रश्न ४–“ दिलेल्या क्षेत्रामध्यें (म्हणजे पातळीमध्यें) अमुक प्रकारचीं क्षेत्रपरिमाणें अमुक आहेत, असें दाखविणाऱ्या संख्येला त्या क्षेत्राचें क्षेत्रफळ म्हणतात. ” क्षेत्र मोजण्याकरितां जीं परिमाणें योजावयाचीं तीं अर्थात् क्षेत्रात्मकच असलीं पाहिजेत. तीं परिमाणें त्रिकोण, चौकोन, वर्तुळ इत्यादिक कोणत्याही आकृतीचीं असलीं तरी चालतील. परंतु क्षेत्र मोजण्याला चौरस हेंच परिमाण योजण्याची वहिवाट अनादिसिद्ध आहे; आणि त्यांतही रेषा मोजण्याकरितां कल्पिलेलीं जीं हात, फूट, कोस, मैल इत्यादिक परिमाणें, त्यांवरील चौरसें हींच क्षेत्र मोजण्याकरितां परिमाणें योजितात; व प्रत्येक रेषापरिमाणाच्या मागें चौरस हें विशेषण लावून तेंच त्या रेषापरिमाणावरील चौरसाचें नांव समजतात. जसें, एक हात लांबीच्या रेषेवरील चौरसाला “ चौरसहात” म्हणतात.

२. प्रश्न ५–खालीं लिहिलेल्या प्रत्येक रीतींतल्या सर्व रेषांच्या लांब्या (हात, फूट इत्यादिक) कोणत्या तरी एकाच रेषापरिमाणानें दाखवून त्या रीतींची योजना करावी, आणि जी संख्या येईल, ती त्याच रेषापरिमाणावरील चौरसांची संख्या समजावी, म्हणजे तें इष्ट क्षेत्रफळ होईल.

(१) काटकोनचौकोनाचें क्षेत्रफळ काढण्याची रीति–जवळजवळच्या दोन बाजूंच्या लांब्या (ज्यांस लांबी व रुंदी अथवा पाया व उंची ह्मणतात त्या) दाखविणाऱ्या संख्यांचा गुणाकार करावा. (आधार. २. प्रश्न २).

(२) चौरसाचें क्षे०–एका बाजूची लांबी दाखविणाऱ्या संख्येचा वर्ग करावा. (आधार. २. प्रश्न ३)

(३) त्रिकोणाचें क्षे०–पाया व उंची दाखविणाऱ्या संख्यांच्या गुणाकाराचें अर्ध करावें. (आधार. १.४१ व २. प्रश्न २).

(४) समभुजचौकोनाचें क्षे०–कर्णांच्या लांब्या दाखविणाऱ्या संख्यांचा गुणाकार करावा. (समभुजचौकोनाचे कर्ण परस्परांवर लंब असतात; ∴ (३) ह्या रीतीवरून ही रीति ठरते).

(५) समांतरभुजचौकोनाचें क्षे०–पाया व उंची दाखविणाऱ्या संख्यांचा गुणाकार करावा. (आधार. १.३५ व २. प्रश्न २).

(६) समांतरद्विभुजचौकोनाचें क्षे०–समांतर असणाऱ्या दोन बाजू दाखविणाऱ्या संख्यांची बेरीज व त्या बाजूंमधील अंतर (म्हणजे एकींतील कोणत्याही बिंदूपासून दुसरीवर काढिलेला लंब) दाखविणारी संख्या ह्यांच्या गुणाकाराचें अर्ध करावें. (ह्या चौकोनाचा एक कर्ण काढिला म्हणजे त्यांत दोन त्रिकोण होतात. त्या चौकोनाच्या समांतर असणाऱ्या बाजू, हे त्या त्रिकोणांचे पाये, व त्या बाजूंमधील अंतर ही त्या प्रत्येक त्रिकोणाची उंची असें मानून (३) ही रीति योजावी; म्हणजे ही रीति उत्पन्न होते).

(७) चौकोनाचें क्षे०–एका कर्णावर इतर कोणबिंदूंपासून काढिलेल्या लंबांची बेरीज दाखविणारी संख्या व कर्ण दाखविणारी संख्या, ह्यांचा गुणाकार करावा. (एका कर्णानें जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांस (३) ही रीति लावावी; म्हणजे ही रीति ठरते.)

(८) कोणत्याही सरळरेषाकृतीचें क्षे०–दिलेल्या सरळरेषाकृतीचे कोणतेही दोन कोणबिंदु (व मुख्यत्वेंकरून जे दोन कोणबिंदु परस्परांपासून फार दूर आहेत असें दिसेल ते) सांधावे; सांधणाऱ्या रेषेवर इतर प्रत्येक कोणबिंदूपासून लंब काढावे; म्हणजे दिलेल्या आकृतींत नुसते त्रिकोण व समांतरद्विभुजचौकोन होतात. मग (३) व (६) ह्या रीतींची योजना करावी, म्हणजे इष्ट क्षेत्रफळ होईल.

२. प्रश्न ७–मासल्याकरितां थोडे सिद्धांत संख्यांस उद्देशून लिहून दाखवितों.

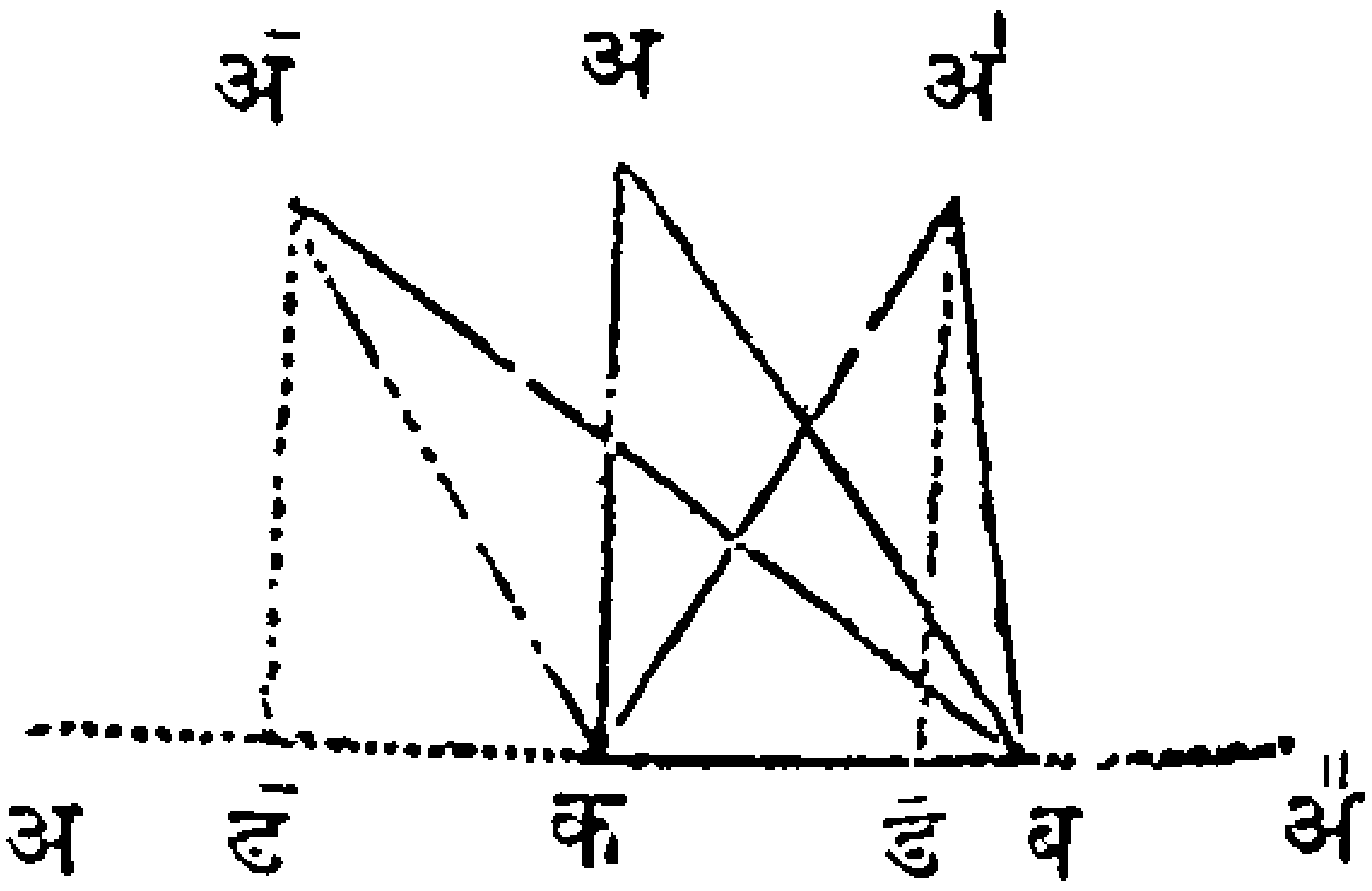
(२.४)–कोणत्याही संख्येचा वर्ग हा, तिच्या दोन भागांचे वर्ग व त्यांच्या गुणाकाराची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतो.

(२.५ उपसि.)–दोन असमान संख्यांच्या वर्गांची वजाबाकी ही, त्याच संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर असते.

(२.११)–संख्येचे असे दोन भाग करावयाचे कीं, सर्व संख्या व तिचा एक भाग ह्यांचा गुणाकार, दुसऱ्या भागाच्या वर्गाबरोबर होईल.

पृथक्करण–**अ** ही दिलेली संख्या आणि **क्ष** हा तिच्या इष्टभागांपैकीं दुसरा (म्हणजे ज्याचा वर्ग, सर्व संख्या व पहिला भाग ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर होणार तो) सांपडला, असें जर मानिलें, तर **अ–क्ष** हा दुसरा भाग होईल. ∴ **क्ष**^{2}=**अ** (**अ–क्ष**) (प्रतिज्ञा). ∴ **क्ष**^{2}+**अक्ष**=**अ**^{2}. हें वर्गसमीकरण सोडविलें असतां **क्ष**=$\frac{\sqrt{५}-१}{२}$ **अ** असें ठरतें. ∴ **अ–क्ष**=$\frac{३-\sqrt{५}}{२}$ **अ**. ∴ $\frac{३-\sqrt{५}}{२}$ **अ** हा दिलेल्या संख्येचा पहिला भाग, व $\frac{\sqrt{५}-१}{२}$ **अ** हा दुसरा भाग होय. म्हणजे पहिला भाग हा दिलेल्या संख्येला $\frac{३-\sqrt{५}}{२}$ ह्या संख्येनें गुणिल्यानें येतो, व दुसरा भाग दिलेल्या संख्येला $\frac{\sqrt{५}-१}{२}$ ह्या संख्येनें गुणिल्यानें येतो, असें ठरलें. $\frac{३-\sqrt{५}}{२}$ ही संख्या $\frac{१}{२}$ पेक्षां कमी आहे, ∴ पहिला भाग मूळच्या संख्येच्या अर्धापेक्षां कमी असतो; व अर्थात् दुसरा भाग अर्धापेक्षां जास्त असतो.

२. प्रश्न ९–**अबक** ह्या त्रिकोणाचा **क** कोन काटकोन आहे.



बकची स्थिति आणि **अक**, **बक** ह्यांच्या लांब्या हीं न बदलूं देतां **अक** बाजू **क** टोंकाभोंवतीं फिरविली. तिच्या **अ′क**, **अ″क** इत्यादिक प्रत्येक स्थितीमध्यें **अ′ब**, **अ″ब** इत्यादिक रेषा काढून **अ′ड**, **अ″ड** इत्यादिक लंब काढिले. **क** कोन कमी करितां करितां अगदीं नाहींसा केला, तेव्हां **अक**ची **अ′क** ही स्थिति झाली. व **अब**ची **अ′ब** ही स्थिति झाली. **क** कोन वाढवितां वाढवितां **अक**, **बक** ह्यांची एकच सरलरेषा केली, तेव्हां **अक**ची **अ″क** ही स्थिति झाली, व **अब**ची **अ″ब** ही स्थिति झाली.

अक, **बक** ह्यांच्या लांब्या बदलत नाहींत, म्हणून त्यांच्या सर्व स्थितींमध्यें त्यांच्या चौरसांची बेरीज कायम राहते. **अक**च्या उजव्या अंगास **अब** ही उत्तरोत्तर कमी होत जाते, व **अ॔ब** ह्या स्थितींत ती लघुतम होते; तसेंच **अक**च्या डाव्या अंगास **अब** ही वाढत जाते, आणि **अ॑ब** ह्या स्थितींत ती महत्तम होते. म्हणून **अब** वरील चौरस देखील, तिच्या **अ॑ब** ह्या स्थितींत लघुतम व **अ॔ब** ह्या स्थितींत महत्तम होतो. **अक**च्या मूळच्या स्थितींत तिची **बक** वरील छाया मुळींच नाहींशी होते; आणि ती दोन्ही अंगांस वाढतां वाढतां शेवटीं **अक** बरोबरच होते; म्हणून **अक**ची **बक** वरील छाया आणि **बक** ह्या दोहोंच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ही, **अक**च्या मूळच्या स्थितींत पूज्य होते; व **अ॑क**, **अ॔क** ह्या स्थितींत ती, २(**अक**, **बक** का) ह्या बरोबर होते.

आतां **अक**च्या प्रत्येक स्थितीमध्यें **अब** वरील चौरसाची, **अक**, **बक** ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजेशीं तुलना करावयाची आहे, असें समजा. तर **अक**च्या

(१) **अ॑क** ह्या स्थितींत त्यांची तुलना २.७ ह्यांत केली आहे.

(२) **अ॑क**, **अक** ह्यांच्या मधल्या **अ॑क** इत्यादिक स्थितींत त्यांची तुलना २.१३ ह्यांत केली आहे.

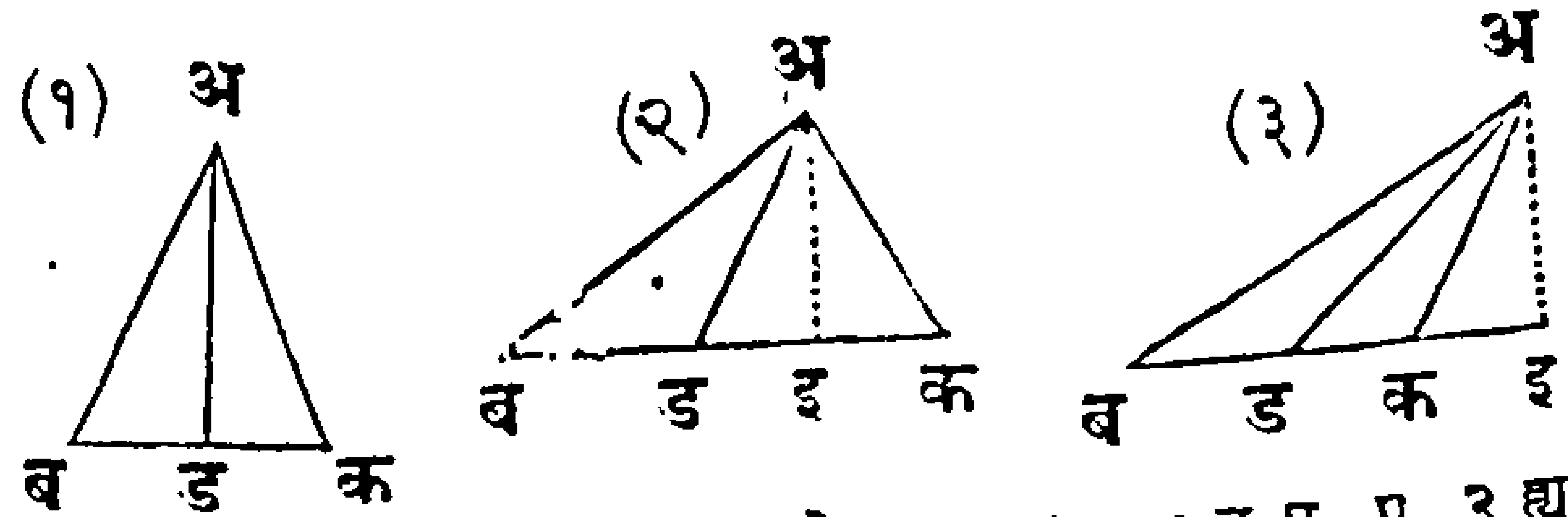
(३) **अक** ह्या स्थितींत त्यांची तुलना १.४७ ह्यांत केली आहे.

(४) **अक**, **अ॔क** ह्यांच्या मधल्या **अ॔क** इत्यादिक स्थितींत त्यांची तुलना २.१२ ह्यांत केली आहे.

(५) **अ॔क** ह्या स्थितींत त्यांची तुलना २.४ ह्यांत केली आहे.

ह्याप्रमाणें ह्या पांच सिद्धांतांची सांगड बनली आहे.

२. प्रश्न १०–(व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाच्या **बक** पायाचा **ड** मध्य आहे; तर **अब** व. चौ+**अक** व. चौ=२ (**अड** व. चौ)+२ (**बड** व. चौ) हें सिद्ध करावयाचें.

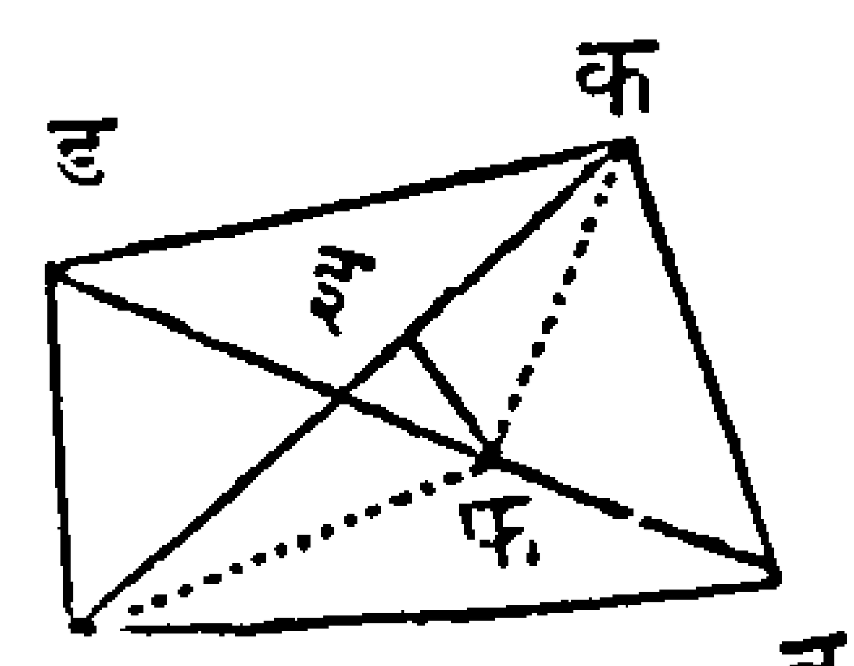


(१) **अड** रेषा **बक**वर लंब असेल, तर १.४७ व प्र. प्र. २ ह्यांवरून इष्टसिद्धि होईल.

(२) व (३) **अड** रेषा **बक**वर लंब नसेल, तर **बक**वर **अइ** लंब काढूं. आतां (२) ह्या आकृतींत २.९ प्रमाणें व (३) ह्या आकृतींत २.१० प्रमाणें **बइ** व. चौ+**कइ** व. चौ=२ (**बड** व. चौ) +२ (**डइ** व. चौ). ह्या प्रत्येकांत २ (**अइ** व. चौ) मिळविला. तेव्हां (**बइ** व. चौ+**अइ** व. चौ)+(**कइ** व. चौ+**अइ** व. चौ)= २(**बड** व. चौ)+२ (**डइ** व. चौ)+२(**अइ** व. चौ). ∴ १.४७, प्र. प्र. २, प्र. प्र. ए व प्र. प्र. १ ह्यांची यथाप्रसंग योजना केल्यानें इष्टसिद्धि होईल.

ह्या सिद्धांताला इतःपर दुसऱ्या पुस्तकाचा **अ** सिद्धांत म्हणूं.

२. प्रश्न ११–१.खंड ४ प्रश्न १,२. अ, प्र. प्र. २ व २.४ उपसि. २ ह्यांची योजना करावी.



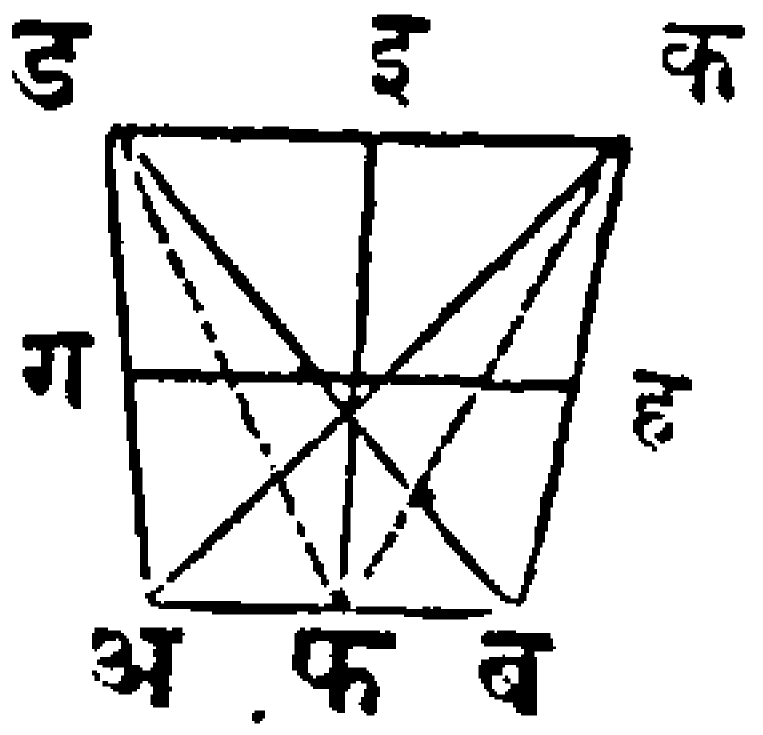
२. प्रश्न १२–(व्यक्तिप्र.) **अबकड** चौकोनाच्या **अक**, **बड** कर्णांचे अनुक्रमें **इ**, **फ** हे मध्य आहेत; तर चारी बाजूंवरील चौरसांची बेरीज=**अक** व. चौ.+**बड** व. चौ+४(**इफ** व. चौ) हें सिद्ध करावयाचें.

अफ, **कफ** सांधिल्या. आतां **अबड**, **कबड** ह्या त्रिकोणांस २. अ व प्र. प्र. २ लाविल्यानें चार बाजूंवरील चौरसांची बेरीज=४ (**डफ** व. चौ)+२ (**अफ** व. चौ)+२ (**कफ** व. चौ). ४(**डफ** व. चौ) =**डब** व. चौ (२.४ उप. २); व **अकफ** त्रिकोणास २. अ लाविल्यानें २(**अफ** व. चौ)+२ (**कफ** व. चौ)=४(**इफ** व. चौ)+४(**अइ** व. चौ). ∴ २.४ उपसि. २, प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

समांतरभुजचौकोनाच्या कर्णाचे मध्य सांधणारी रेषा नाहींशी होते, म्हणून मागील प्रश्न ह्या प्रश्नाचा विशेष प्रकार आहे.

२. प्रश्न १३–२. अ ह्याची योजना तीन वेळ करून, प्र. प्र. २, २.४ उपसि. २ वं प्र. प्र. ३ हीं योजावीं.

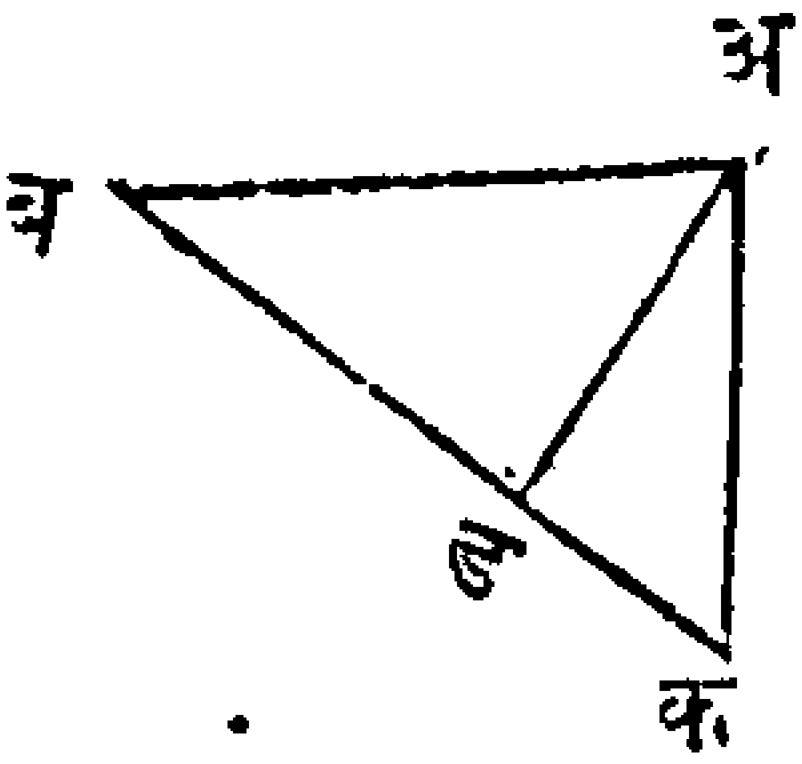
२. प्रश्न १५–**अबड**, **अबक** ह्या त्रिकोणांस २. अ, प्र. प्र. २, २.४ उपसि. २, इत्यादिक लाविल्यानें **अक** व. चौ+**बड** व. चौ+**अड** व. चौ+**बक** व. चौ=**अब** व. चौ+२ (**डफ** व. चौ)+२ (**कफ** व. चौ.); आणि **कफड** त्रिकोणास २. अ, प्र. प्र. २ उपसि. व २.४ उपसि. २ लाविल्यानें २ (**डफ** व. चौ)+२ (**कफ** व. चौ)=**डक** व. चौ+४ (**इफ** व. चौ). ∴ प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १ ह्यांवरून सिद्ध होतें कीं, **अक** व. चौ+**बड** व. चौ+**अड** व. चौ+ **बक** व. चौ=**अब** व. चौ+**डक** व. चौ+४ (**इफ** व, चौ). ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल कीं, **अक** व. चौ+**बड** व. चौ+**अब** व. चौ+ **डक** व. चौ=**अड** व. चौ+**बक** व. चौ+४ (**गह** व. चौ) ∴ प्र.प्र. २, प्र. प्र. ३ व प्र. प्र. ४ उपसि. ४ ह्यांची योजना केल्यानें इष्टसिद्धि होईल.



२. प्रश्न १७–दिलेल्या काटकोनचौकोनाचे कर्ण काढून, त्यांचा छेदनबिंदु व दिलेला बिंदु हे सांधावे; आणि दिलेला बिंदु हा ज्यांचा शिरोबिंदु आहे, असे दोन कर्णावर जे दोन त्रिकोण होतात, त्यांस २. अ व प्र. प्र. १ हीं लावावीं. म्हणजे इष्टसिद्धि होते.

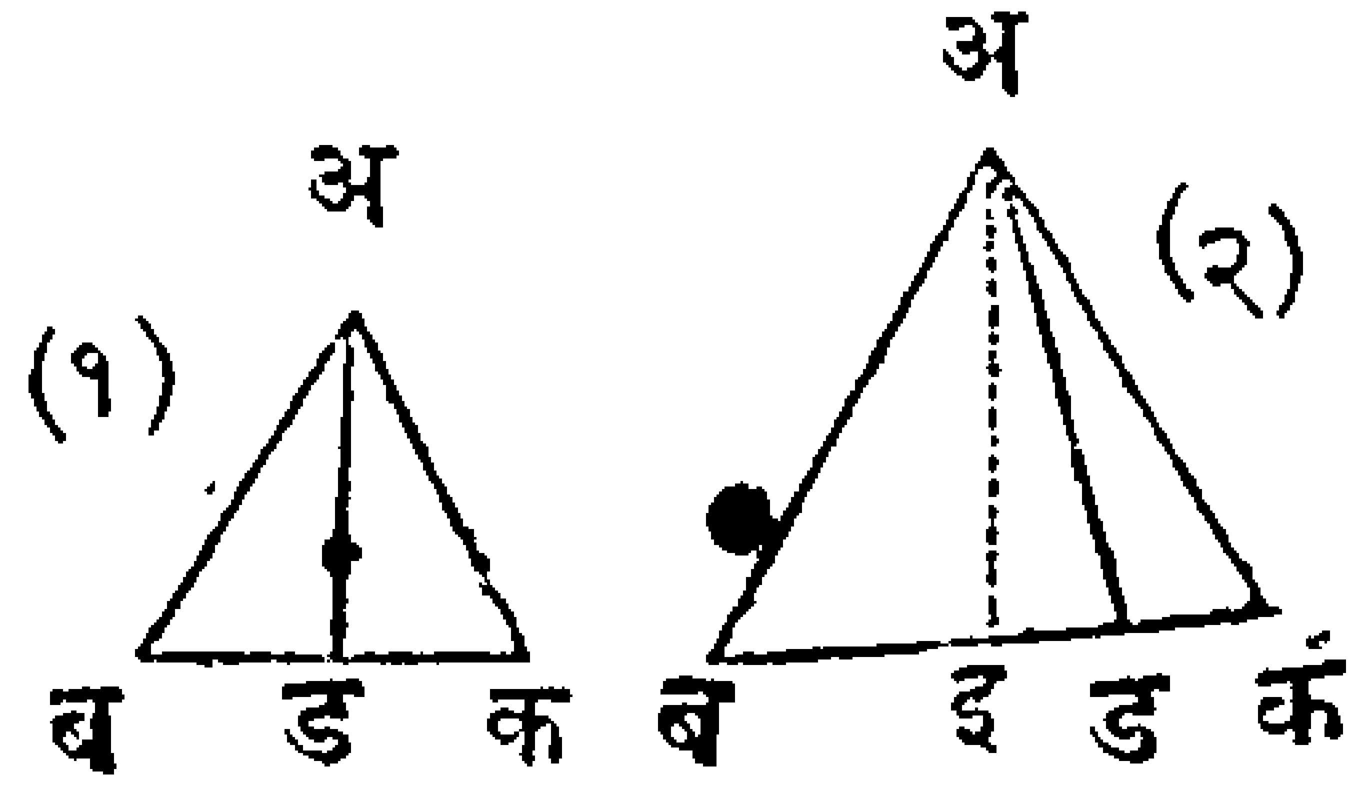
२. प्रश्न १९–२.१३ ची योजना दोन वेळ करून प्र. प्र. २ व प्र. प्र. ३ हीं लावावीं. म्हणजे इष्टसिद्धि होते.

२. प्रश्न २०–१. खंड ७ प्रश्न ३१, २.४, प्र. प्र. १, प्र. प्र. ३ व प्र. प्र. ४ उपसि. ४ हीं अनुक्रमें योजावीं. म्हणजे इष्टसिद्धि होते.



२. प्रश्न २१–(व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाचा **अ** कोन काटकोन आहे, व **अड** रेषा **बक** वर लंब आहे, तर **अब** व. चौ=**बक**, **बड** का हें सिद्ध करावयाचें.

(सिद्धता) **अड** व. चौ=**बड**, **कड** का (२. प्रश्न २०). ∴ **अड** व. चौ+**बड** व. चौ=**बड**, **कड** का+**बड** व. चौ (प्र. प्र. २) ∴ १.४७, २.३ व प्र. प्र. १ ह्यांवरून इष्टसिद्धि होईल.



२. प्रश्न २२–(व्यक्तिप्र.) **अबक** समद्विभुज त्रिकोणाच्या **बक** पायांतील **ड** बिंदु व **अ** शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी **अड** रेषा आहे; तर **अड** व. चौ+**बड**, **कड** का=**अब** व. चौ हें सिद्ध करावयाचें.

(१) **अड** ही **बक**वर लंब असेल, तर १.४७ वरून इष्टसिद्धि होईल.

(२) **अड** ही **बक**वर लंब नसेल, तर **बक** वर **अइ** लंब काढिला. आतां १.२६ भा. २ ह्यावरून **अइ**, **बक**ला दुभागिते. ∴ **बड**, **कड** का.+**डइ** व. चौ=**बइ** व. चौ (२.५). ∴ **बड**, **कड** का+ **डइ** व. चौ+**अइ** व. चौ=**बइ** व. चौ+**अइ** व. चौ (प्र. प्र. २). ∴ १.४७, प्र. प्र. २ व प्र. प्र. १ ह्यांवरून इष्टसिद्धि.

२. प्रश्न २३–मागील प्रश्नाच्या (२) ह्या भागांत २.५ च्या ठिकाणीं २.६ लावावयाचा; एवढाच कायतो भेद.

२. प्रश्न २४–(१)ह्या भागांतील प्रत्येक काटकोनचौकोन १.४१ प्रमाणें दिलेल्या काटकोनत्रिकोणाच्या दुपटीबरोबर आहे. ∴ प्र. प्र. ६ ह्यावरून इष्टसिद्धि होईल. (२) हा भाग, १.४७ उप, २.५ उप व प्र. प्र. १ ह्यांच्या योजनेनें क्र. रीतीनें सि. होतो.

२. प्रश्न २५ (१)–१.४७, प्र. प्र. २, २.४ व प्र. प्र. १ हीं योजावीं.

(२)–१.४७, २.७ प्रश्न ३ व प्र. प्र. १ हीं योजावीं.

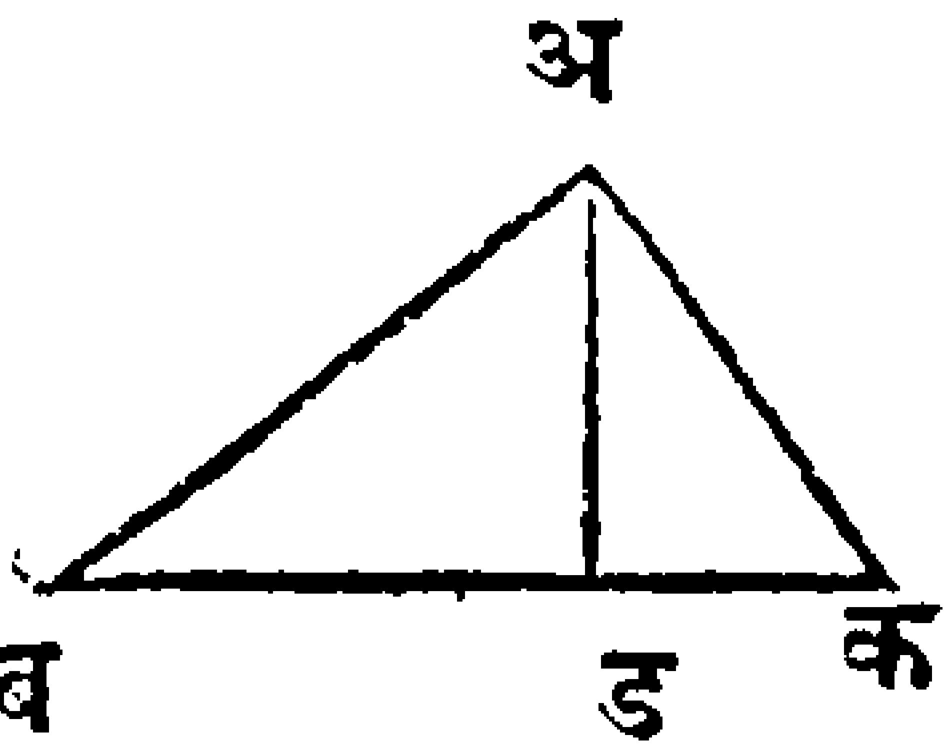
२. प्रश्न २५ उपसि.–वरील (१) व (२) हे सिद्धांत, प्र. प्र. २ व प्र. प्र. ३ ह्यांवरून उघड आहे कीं, " काटकोनत्रिकोणाच्या भुजकोटी ह्यांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांवरील चौरसांची बेरीज ही, कर्णावरील चौरसाच्या दुपटीबरोबर असते.

२. प्रश्न २६–२.५ प्रश्न ७ (१) व (२) पहा.

२. प्रश्न २७–१. खंड ३ प्रश्न २२ व २.४ उपसि. २ हे योजावे.

२. प्रश्न २८–१. खंड ३प्रश्न २३ व २.४ उपसि. २ हे योजावे.

२. प्रश्न २९–(व्यक्तिप्र.) **अबक** त्रिकोणाच्या **बक** बाजूवर **अड** लंब आहे; आणि **बड, कड** का=**अड** व. चौ; तर **अ** कोन काटकोन आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



बड, कड का=**अड** व. चौ (प्रतिज्ञा) ∴ २(**बड, कड** का)=२(**अड** व. चौ) (प्र. प्र. २ उपसि.); ∴ **बड** व. चौ+**कड** व. चौ+२ (**बड, कड** का) =**बड** व. चौ+**कड** व. चौ+२ (**अड** व. चौ) (प्र.प्र. २). ∴ २.४,१.४७, प्र. प्र. ३, प्र. प्र. १ व १.४८ ह्यांवरून इष्टसिद्धि होईल.

२. प्रश्न ३०–(भुज, कोटि, कर्ण इत्यादि जे शब्द खालीं लिहिलेल्या रीतींमध्यें योजिले आहेत, ते, त्यांच्या लांब्या एकेकाच रेषापरिमाणाच्या योगानें दाखविणाऱ्या संख्यांच्या ठिकाणीं योजिले आहेत,असें समजावें.)

(१)–प्रथम भुजकोटी ह्यांवरून कर्ण काढावा. नंतर भुज व कोटि ह्यांच्या गुणाकाराला कर्णानें भागावें, म्हणजे लंब येईल (२. प्रश्न २४ (१); आणि मग १.४७ उपसि. १ ह्याच्या आधारानें आबाधा काढाव्या.

(२)–१.४७ उपसि. १ ह्याच्या आधारानें कोटि अथवा भुज काढितां येईल.

(३)–दोन्ही आबाधांच्या गुणाकाराचें वर्गमूळ काढिलें, म्हणजे लंब येईल (२. प्रश्न २०).

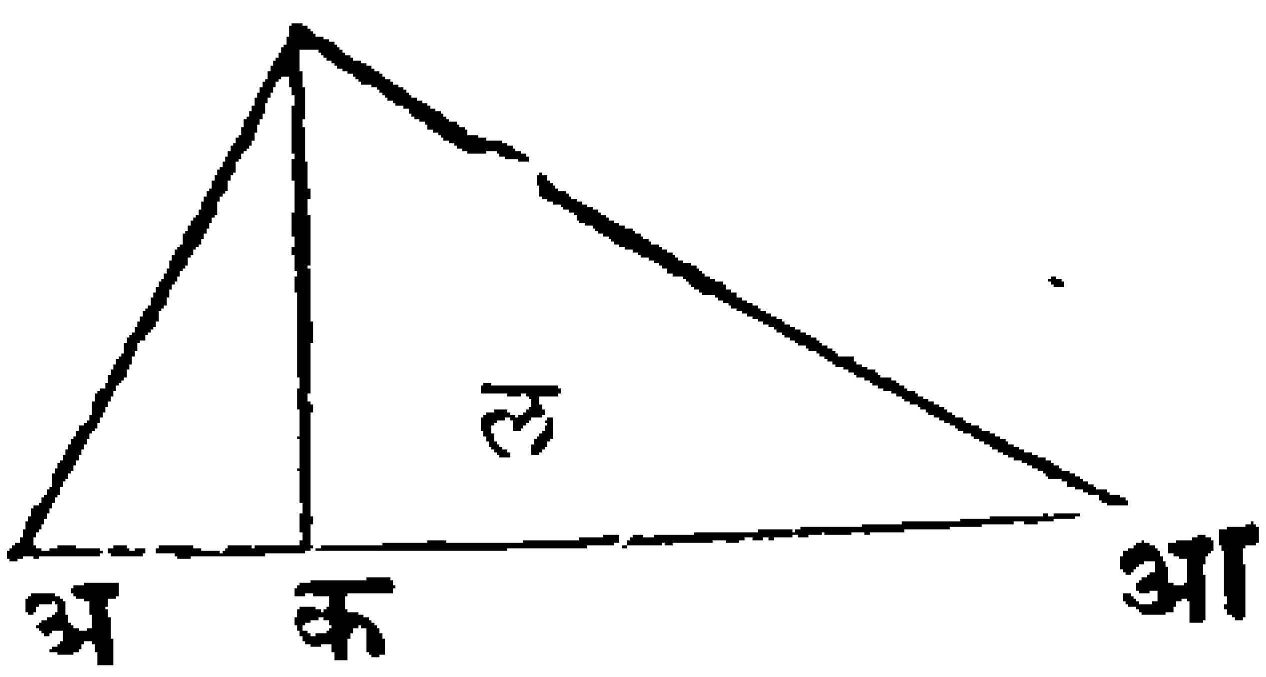
(४)–भुज व कोटि ह्यांपैकीं जें दिलें असेल, त्याच्या वर्गाला त्याच्याच जवळच्या आबाधेनें भागिलें असतां कर्ण येईल. (२. प्रश्न २१)

(५) लंबाच्या वर्गाला एका आबाधेनें भागिलें असतां दुसरी आबाधा येईल. (२. प्रश्न २०)

(६)–आधीं १.४७ उपसि. १ ह्याच्या आधारानें एक आबाधा काढावी, नंतर (५) ह्या रीतीनें दुसरी आबाधा काढावी.

(७)–ह्यांत प्रथम असा सिद्धांत सिद्ध केला पाहिजे कीं, " काटकोनत्रिकोणाच्या कर्णावरील चौरस व लंबावरील चौरसाची चौपट, ह्यांची वजाबाकी ही, दोन्ही आबाधांच्या वजाबाकीवरील चौरसाबरोबर असते. "

(व्यक्तिप्र.)–**ल** हा लंब, **क** हा कर्ण व **अ, आ** ह्या आबाधा आहेत; तर **क** व. चौ–४ (**ल** व. चौ)=**अ,आ** ह्यांच्या वजाबाकीवरील चौरस हें सिद्ध करावयाचें.



(सिद्धता) **क**=**अ**+**आ** (प्रतिज्ञा). ∴ **क** व. चौ=**अ** व. चौ+**आ** व. चौ+२ (**अ, आ** का) (२.४); आणि ४ **ल** व. चौ=४ (**अ, आ** का) (२. प्रश्न २०); ∴ **क** व. चौ—४ (**ल** व. चौ)=(**अ** व चौ+**आ** व. चौ)–२ (**अ, आ** का) (प्र. प्र. ३). **अ** व. चौ+**आ** व. चौ –२(**अ, आ** का)=**अ,आ** ह्यांच्या वजाबाकीवरील चौरस (२.७ प्रश्न ५.). ∴ **क**. व. चौ–४(**ल** व. चौ)=**अ, आ** ह्यांच्या वजाबाकीवरील चौरस (प्र. प्र. १).

ह्यावरून, कर्णाच्या वर्गांतून लंबाच्या वर्गाची चौपट वजा करून बाकी राहील तिचें वर्गमूळ काढावें, म्हणजे ती दोन्ही आबाधांची वजाबाकी येईल. मग कर्ण ही दोन्ही आबाधांची बेरीज व ती व-

जांबाकी ह्यांच्या बेरजेचें अर्ध केल्यानें एक आबाधा येईल (२. प्रश्न २६).

(८)–कर्णाच्या वर्गाच्या दुपटींतून भुजकोटी ह्यांच्या बेरजेचा वर्ग वजा केला, म्हणजे त्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग राहील (२. प्रश्न २५ उपसि.). त्या बाकीचे वर्गमूळ काढिलें म्हणजे भुजकोटी ह्यांची वजाबाकी येईल; आणि बेरीज दिलेली आहेच; म्हणून २. प्रश्न २६ ह्यावरून भुजकोटी काढितां येतील.

(९)–कर्णाच्या वर्गाच्या दुपटींतून भुजकोटी ह्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग वजा केल्यानें भुजकोटी ह्यांच्या बेरजेचा वर्ग येईल (२.प्रश्न २५ उपसि.). पुढें २.प्रश्न २६ ह्याची योजना करावी.

(१०)–कर्ण व भुज ह्यांची बेरीज अथवा वजाबाकी हिनें कोटीच्या वर्गास भागावें, म्हणजे कर्ण व भुज ह्यांची अनुक्रमें वजाबाकी अथवा बेरीज येईल. मग २. प्रश्न २६ योजावा. किंवा "कर्णभुजांची बेरीज (अथवा वजाबाकी) व कोटि ह्यांच्या वर्गाच्या अंतरास त्या बेरजेनें (अथवा वजाबाकीनें) भागिलें असतां भुज निघतो."

युक्लिडच्या पहिल्या चार पुस्तकांवर

प्रश्न.

१. १.४, १.२०, १.२१ ह्याचे दोन्ही भाग व १.२६भाग पहिला, ह्या सिद्धांतांमध्यें त्रिकोणांच्या संबंधानें ज्या गोष्टी सिद्ध झाल्या आहेत, त्या इतर कोणत्याही सरलरेषाकृतींना लागू आहेत, असें दाखवा.

२. १.५ उपसि. व १.६ उपसि. ह्यांत त्रिकोणाचे जे धर्म सिद्ध झाले आहेत, ते इतर कोणत्याही सरलरेषाकृतीला लागू आहेत काय? (म्हणजे "जी सरलरेषाकृति समभुज असते, ती समकोण असते" व "जी समकोण असते ती समभुज असते" हे सिद्धांत खरे आहेत काय?)

३. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायावर काढिलेला लंब जर त्रिकोणांतच पडला, तर (१) इतर दोन बाजू समान असल्यास, पायाचे लंबानें झालेले भाग समान असतात; आणि (२) इतर दोन

बाजू असमान असल्यास पायाच्या लंबानें झालेल्या भागांपैकीं मोठ्या बाजू जवळचा भाग मोठा असतो.

४. त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून पायावर टाकिलेला लंब जर त्रिकोणांत पडला, तर (१) इतर दोन बाजू समान असल्यास, तो लंब शिरकोनास दुभागितो; आणि (२) इतर दोन बाजू असमान असल्यास, शिरकोनाच्या दोन भागांपैकीं मोठ्या बाजूजवळचा भाग मोठा असतो.

५. त्रिकोणाच्या शिरकोनास दुभागणारी रेषा पायास मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, (१) जर इतर दोन बाजू समान असल्या, तर पायाचे दोन भाग समान होतात; आणि (२) जर इतर बाजू असमान असल्या, तर पायाच्या भागांपैकीं मोठ्या बाजूजवळचा भाग मोठा असतो.

६. त्रिकोणाच्या शिरकोनास दुभागणारी रेषा पायास मिळे तोंपर्यंत वाढविली असतां, (१) जर इतर बाजू समान असल्या, तर त्या रेषेनें पायांशीं केलेले संलग्नकोण समान असतात; आणि (२) जर इतर बाजू असमान असल्या, तर त्या संलग्नकोणांपैकीं मोठ्या बाजूसमोरचा कोन मोठा (व विशालकोण) असतो.

७. (१) त्रिकोणाच्या पायाखेरीज दोन बाजू समान असल्या, तर शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा शिरकोणास दुभागिते; आणि (२) आणि जर इतर बाजू असमान असल्या, तर त्या रेषेनें झालेल्या शिरकोणाच्या दोन भागांपैकीं मोठ्या बाजूजवळचा भाग लहान असतो.

(सूचना—ह्या सिद्धांताचा दुसरा भाग सिद्ध करण्याकरितां शिरकोनास दुभागणारी रेषा काढावी, आणि ती पायाच्या दोन समान भागांपैकीं लहान बाजूजवळच्या भागांतच पडली पाहिजे, असें क्र. त्रि. रीतीनें ठरवावें; म्हणजे इष्टसिद्धि होते.)

८. (१) त्रिकोणाच्या पायाखेरीज बाजू समान असल्या, तर शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा पायाशीं जे संलग्नकोण करिते, ते समान असतात; आणि (२) इतर दोन बाजू असमान असल्या,

तर त्या सलग्नकोणांपैकीं मोठ्या बाजूसमोरचा कोन मोठा असतो. (सूचना—१.२५ योजावा.)

९. (१) त्रिकोणाच्या पायाखेरीज दोन बाजू समान असल्या, तर शिरोबिंदूपासून पायावर टाकिलेला लंब, शिरकोनास दुभागणारी रेषा, आणि शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा, ह्या तिन्ही मिळून जातात; आणि (२) इतर दोन बाजू असमान असल्या, तर शिरकोन दुभागणारी रेषा इतर दोन रेषांच्या मध्यें पडते; व लंबापेक्षां शिरकोन दुभागणारी रेषा मोठी आणि तिच्यापेक्षां शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा मोठी, असें त्यांचें महत्त्व असतें.

१०. "ज्याचीं एक किंवा अनेक उत्तरें संभवतात, त्याला संभाव्यकृत्य (अथवा प्रश्न) म्हणावें" व "ज्याचें एकही उत्तर संभवत नाहीं, त्याला असंभाव्यकृत्य म्हणावें." संभाव्य कृत्यांपैकीं "ज्याचीं उत्तरें अनंत संभवतात, त्याला अनियतकृत्य म्हणावें" आणि "ज्याच्या उत्तरांची संख्या निश्चित असते, त्याला नियतकृत्य म्हणावें." ह्या व्याख्यांस अनुसरून, खालीं लिहिलेल्या कृत्यांपैकीं प्रत्येक संभाव्य किंवा असंभाव्य आहे व संभाव्य असल्यास नियत किंवा अनियत आहे, हें सांगा. जें कृत्य नियत असेल त्याचीं सर्व उत्तरें काढून दाखवा; जें अनियत असेल त्याचें एखादें उत्तर काढून दाखवून त्याची अनियतता प्रत्ययास आणून द्या; आणि जें असंभाव्य असेल, त्याच्या असंभाव्यतेचें कारण सांगा.

(१) दिलेल्या एका बिंदूतून जाणारी सरलरेषा काढावयाची.

(२) दिलेल्या दोन बिंदूंतून जाणारी सरलरेषा काढावयाची.

(३) दिलेल्या दोन बिंदूंतून ज्याचा परिघ जाईल असें वर्तुल काढावयाचें.

(४) दिलेल्या तीन बिंदूंतून जाणारी सरलरेषा काढावयाची.

(५) दिलेल्या तीन बिंदूंतून ज्याचा परिघ जाईल असें वर्तुल काढावयाचें.

(६) दिलेल्या वर्तुलाच्या परिघांतल्या तीन बिंदूंपासून समान अंतरांवर असणारी व त्या वर्तुळास न छेदणारी अशी अमर्याद रेषा काढावयाची.

(७) ज्याच्या दोन बाजू दिलेल्या दोन रेषांशीं अनुक्रमें बरावर होतील, असा त्रिकोण काढा.

(८) ज्याचा शिरकोन पायाकडील प्रत्येक कोनाच्या चौपटी-बरावर आहे, असा समद्विभुजत्रिकोण दिलेल्या रेषेवर काढा.

(९) ज्याचा प्रत्येक कोन काटकोन होईल (अथवा १। काटकोन होईल) असा एक बहुकोण काढून दाखवा.

(१०) ज्याचा शिरकोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल असा समद्विभुजत्रिकोण दिलेल्या रेषेवर काढा.

(११) त्रिकोणाच्या (तीन बाजू व तीन कोन ह्या) सहा अवयवांपैकीं कोणते कोणते अवयव दिले असतां तो त्रिकोण काढणें हें कृत्य नियत होतें ? हें सांगून त्या त्या अवयवांच्या योगानें तो त्रिकोण काढून दाखवा.

(१२) एक अमर्याद रेषा व तिच्या दोहों अंगांस दोन बिंदु दिले आहेत. तर त्या रेषेंत असा एक बिंदु काढा कीं, त्यापासून दिलेल्या दोन बिंदूंपर्यंत काढिलेल्या रेषांनीं झालेला कोन दिलेल्या रेषेनें दुभागिला जाईल.

(१३) त्रिकोणाचा पाया, पायाकडील एक कोन व इतर दोन बाजूंची बेरीज, हीं दिलीं असतां तो त्रिकोण काढावयाचा.

(१४) [१] दिलेल्या दोन बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवरची रेषा काढावयाची. अशा रेषा किती संभवतील ? [२] दिलेल्या बिंदूंतून अशी एक रेषा काढा कीं, ती दुसऱ्या दोन दिलेल्या बिंदूंपासून सारख्या अंतरांवर असेल.

(१५) असा एक समभुजत्रिकोण काढा कीं, त्याचा पाया दिलेल्या अमर्याद रेषेंत असेल, व इतर दोन बाजू (अथवा त्या वाढविल्या असतां) अनुक्रमें दिलेल्या दोन बिंदूंतून जातील.

(१६) " अमुक प्रकारच्या बिंदूंचें निधान काढावयाचें " हें कृत्य अनियतच असलें पाहिजे, हें बिंदुनिधानाच्या व्याख्येवरून स्पष्ट करून दाखवा.

११. दोन समांतर रेषांस मिळणाऱ्या रेषेच्या मध्यांतून एक रेषा काढून ती त्या समांतररेषांस मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर तीही त्या पहिल्या रेषेनें दुभागिली जाते.

१२. दोन समांतर रेषांपासून सारख्या अंतरांवरच्या एका बिंदूंतून त्या रेषांस छेदणाऱ्या दोन रेषा काढिल्या, तर त्या दोन रेषांमध्यें जे समांतर रेषांचे भाग सांपडतात, ते समान असतात.

१३. (१) समांतरभुजचौकोनाच्या कर्णांच्या मध्यांतून जाणारी कोणतीही अमर्याद रेषा त्या चौकोनास दुभागिते; आणि (२) त्याच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंचे जे दोन दोन भाग त्या रेषेनें होतात, त्यांपैकीं समोरासमोरच्या कोणबिंदूंजवळचे भाग समान असतात.

१४. समांतरभुजचौकोनास दुभागणारी रेषा त्याच्या प्रत्येक कर्णाच्या मध्यांतून जाते.

१५. समांतरभुजचौकोनास दुभागणाऱ्या रेषेच्या मध्यांतून जाणारी दुसरी कोणतीही अमर्यादरेषा त्या चौकोनास दुभागिते.

१६. दिलेल्या बिंदूपासून अशी एक अमर्याद रेषा काढा कीं, तिनें दिलेला समांतरभुजचौकोन दुभागिला जाईल.

१७. समांतरभुजचौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंतील समोरासमोरच्या दोन कोणबिंदूंपासून अनुक्रमें सारख्या अंतरांवरचे दोन बिंदु सांधिले, तर ती सांधणारी रेषा त्या चौकोनास दुभागिते.

१८. " एका सरलरेषाकृतीचे सर्व कोणबिंदु दुसरीच्या बाजूंमध्यें असले, तर ती सरलरेषाकृति दुसरीमध्यें काढिली आहे, असें म्हणावें. " ह्या व्याख्येला अनुसरून, दिलेल्या समांतरभुजचौकोनामध्यें असा एक समभुजचौकोन काढा कीं, दिलेल्या

चौकोनाच्या एका बाजूंतील एक दिलेला बिंदु इच्छिलेल्या चौकोनाचा एक कोणबिंदु होईल.

१९. दोन अमर्याद रेषा व एकींत एक बिंदु हीं दिलीं आहेत; तर तीमध्येंच दुसरा असा बिंदु काढावयाचा कीं, तो दिलेली दुसरी रेषा व दिलेला बिंदु ह्यांपासून सारख्या अंतरांवर असेल.

२०. "त्रिकोणाच्या एका कोणबिंदूपासून त्याच कोनाच्या दोन बाजूंचे त्यांच्या त्यांच्या तृतीयांशांएवढाले तुकडे पाडिले, आणि ते ज्या बिंदूंत पडले ते बिंदु सांधिले; तर सांधणारी रेषा तिसऱ्या बाजूशीं समांतर होते, व तिसरीच्या तृतीयांशाबरोबर होते" असें सिद्ध करा; आणि हा सिद्धांत सिद्ध करण्याच्या पद्धतीवरून असें दाखवा कीं "चतुर्थांश, पंचमांश इत्यादिक" कोणत्याही हिश्शांना हा सिद्धांत लागू आहे.

२१. **अबक** ह्या समद्विभुज त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या समान बाजूंमध्यें अनुक्रमें **ड**, **ई** हे असे बिंदु काढा कीं, **बड**, **डई**, **ईक** ह्या रेषा समान होतील.

२२. **अबक** ह्या समद्विभुजत्रिकोणाच्या **बक** पायावर लंब असणारी एक रेषा **अब** बाजूला **ड** बिंदूंत छेदिते, आणि वाढविलेल्या **कअ** बाजूला **ई** बिंदूंत मिळते. तर **अड**, **अई** ह्या समान आहेत, असें सिद्ध करा.

२३. समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाच्या टोंकांपासून समोरच्या बाजूंवर काढिलेल्या लंबांनीं पायाशीं जे कोन होतात, ते प्रत्येकीं शिरकोनाच्या अर्धाबरोबर असतात.

२४. **अबक** त्रिकोणाच्या बाजूंवर, त्या त्रिकोणाच्या बाहेर, **अबफ**, **अकई**, **बकड** असे तीन समभुजत्रिकोण काढिले आहेत; तर **अड**, **बई**, **कफ** ह्या रेषा समान आहेत, असें सिद्ध करा.

२५. समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या; तर त्या रेषांमधील कोन हा, त्रिकोणाचा पाया वाढवून होणाऱ्या (मूळच्या त्रिकोणाच्या) बाहेरील कोनाबरोबर असतो.

२६. **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** बाजू **बक** पाया पलीकडे वाढविल्या असतां होणारे बाहेरचे कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा **ड** बिंदूंत मिळतात; तर **बडक** कोन व अर्धा **अ** कोन यांची बेरीज एक काटकोन आहे, असें सिद्ध करा.

२७. त्रिकोणाच्या पायाचीं टोकें व समोरच्या बाजूंचे मध्य ह्यांस सांधणाऱ्या रेषा त्या मध्यांच्या पलीकडे वाढवून त्यांचे त्यांच्या एवढालेच तुकडे पाडिले; तर ज्या बिंदूंत ते तुकडे पडतात, ते दोन बिंदु व त्रिकोणाचा शिरोबिंदु हे तीन बिंदु एकाच सरळरेषेंत असतात.

२८. (१)असा एक समद्विभुज त्रिकोण काढा कीं, त्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोन शिरकोनाच्या दीडपट होईल. (२) हें कृत्य नियत आहे किंवा अनियत आहे? कां?

२९. **बभक** हा एक लघुकोण आहे. त्याच्या दोन बाजूंमध्यें **ब**, **क** हे असे दोन बिंदु काढा कीं, **अब**, **बक** ह्यांची बेरीज एका दिलेल्या रेषेबरोबर होईल; व **अबक** कोन दिलेल्या दुसऱ्या कोनाबरोबर होईल.

३०. **अबक** त्रिकोणाचे **अ**, **ब**, **क** कोन **डईफ** त्रिकोणाच्या **ड**, **ई**, **फ** कोनांशीं अनुक्रमें समान आहेत, आणि **अब**च्या दुपटीबरोबर **डई** आहे; तर **अक**, **बक** ह्यांच्या दुपटींबरोबर अनुक्रमें **डफ**, **ईफ** आहेत, असें सिद्ध करा; आणि हा सिद्धांत सिद्ध करण्याच्या पद्धतीवरून, तिप्पट, चौपट इत्यादिक कोणत्याही पटीला हा सिद्धांत लागू आहे, असें दाखवा.

३१. समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाच्या टोंकांपासून समोरच्या बाजूंपर्यंत काढिलेल्या रेषा जर पायाशीं सारखे कोन करतील, तर त्या रेषांचीं टोंकें सांधणारी रेषा पायाशीं समांतर होते.

३२. **अब**, **अक** ह्या दोन रेषांपैकीं **अब** मध्यें **प** हा एक बिंदु दिला आहे; तर **अक** रेषेंत **ड** हा असा बिंदु काढा कीं, **अपड** कोन **अडप** कोनाच्या तिपटीबराबर होईल.

३३. त्रिकोणाच्या पायाखेरीज दोन बाजूंच्या बेरजेएवढ्या एका रेषेच्या एका टोंकाशीं त्या त्रिकोणाच्या शिरकोनाच्या अर्धाएवढा

कोन केला; व कोन करणाऱ्या रेषेवर पहिल्या रेषच्या दुसऱ्या टोंकापासून लंब काढिला; तर तो लंब त्रिकोणाच्या पायापेक्षां मोठा नसतो.

३४. असा एक त्रिकोण काढा कीं, त्याचा पाया दिलेल्या एका रेषेबराबर होईल, त्याच्या इतर दोन बाजूंची बेरीज दिलेल्या दुसऱ्या रेषेबराबर होईल, व शिरकोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल. ह्यांत दिलेल्या रेषांच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे ?

३५. असा एक त्रिकोण काढा कीं त्याचा पाया दिलेल्या एका रेषेबराबर होईल, इतर दोन बाजूंची वजाबाकी दिलेल्या दुसऱ्या रेषेबराबर होईल, व शिरकोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल. ह्यांत दिलेल्या रेषांच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे ?

३६. त्रिकोणाचा पाया, उंची व शिरकोन हीं दिलीं असतां तो त्रिकोण काढावयाचा.

३७. त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची बेरीज व त्याचे दोन कोन हीं दिलीं असतां तो त्रिकोण काढावयाचा. ह्या कोनांच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे ?

३८. दोन समांतर रेषा व त्यांपैकीं एकींतही नसणारा असा एक बिंदु हीं दिलीं आहेत; तर त्या दोन रेषांमध्यें असे दोन बिंदु काढा कीं, त्यांपासून दिलेल्या बिंदूपर्यंत काढिलेल्या दोन रेषा समान व परस्परांवर लंब होतील.

३९. एका चौकोनाच्या दोन बाजू परस्परांशीं समांतर आहेत, व दुसऱ्या दोन बाजू समान आहेत, पण समांतर नाहींत; तर त्या चौकोनाचे समोरासमोरचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत, असें सिद्ध करा.

४०. **अबकड** चौकोनाच्या **अब, कड** ह्या बाजू समान आहेत, पण समांतर नाहींत; व **अ, ड** हे कोन समान आहेत. तर **अड** ही **बक**शीं समांतर आहे, असें सिद्ध करा.

४१. दिलेल्या बिंदूंतून जाणारी व दिलेल्या दोन समांतर रेषांस

छेदणारी अशी एक रेघ काढा कीं, तिचा त्या दोन रेघांमध्यें सांपडलेला भाग तिसऱ्या एका दिलेल्या रेघेबराबर होईल. तिसऱ्या रेघेच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे?

४२. असा एक बिंदु शोधून काढा कीं, त्यापासून दिलेल्या दोन अमर्याद रेघांचीं अंतरें दुसऱ्या दोन दिलेल्या रेघांशीं अनुक्रमें समान होतील. असे बिंदु किती सांपडतील?

४३. दिलेल्या दोन अमर्याद रेघांस छेदणारी अशी एक रेघा काढा कीं, ती दिलेल्या तिसऱ्या रेघेशीं समांतर होईल; व तिचा त्या दोन रेघांमध्यें सांपडलेला भाग दिलेल्या चौथ्या रेघेबरावर होईल.

४४. कोणत्याही समर्याद रेघेचीं दोन्हीं टोंकें व तिचा मध्य अशा तीन बिंदूंपासून दुसऱ्या एखाद्या अमर्याद रेघेवर लंब टाकिले; तर (१) दुसरी रेघा पहिलीला छेदीत नसल्यास, पहिलीच्या दोन्ही टोंकांपासून टाकिलेल्या लंबांची बेरीज मध्यापासून टाकिलेल्या लंबाच्या दुपटीबराबर असते; आणि (२) दुसरी रेघा पहिलीला छेदीत असल्यास, टोंकांपासून टाकिलेल्या लंबांची वजाबाकी मध्यापासून टाकिलेल्या लंबाच्या दुपटीबराबर असते. (३) हे सिद्धांत सिद्ध करण्याच्या पद्धतीवरून असें दाखवा कीं, ह्यांत लंबांच्या ठिकाणीं परस्परांशीं समांतर रेघा काढिल्या, तरी देखील हे सिद्धांत खरे ठरतात.

४५. दिलेल्या समांतरभुजचौकोनास न कापणाऱ्या एका अमर्याद रेघेवर त्या चौकोनाच्या चारही कोणबिंदूंपासून लंब काढिले आहेत; तर समोरासमोरच्या दोन कोणबिंदूंपासून काढिलेल्या लंबांची बेरीज, इतर दोन लंबांच्या बेरजेबराबर आहे, असें सिद्ध करा.

४६. ज्या षट्कोणाकृतीच्या समोरासमोरच्या दोन दोन बाजू समांतर असतात, तिच्या समोरासमोरचे कोणबिंदु सांधणाऱ्या तिन्ही रेघा एकाच बिंदूंत परस्परांस छेदितात.

४७. समभुजत्रिकोणाचे पायाकडील कोन दुभागणाऱ्या रेघांच्या मेलनबिंदूपासून इतर दोन बाजूंशीं समांतर रेघा काढून त्या पायास मिळत तोंपर्यंत वाढविल्या, तर पायाचे तीन समान भाग होतात.

४८. **अबकड** ह्या समांतरभुजचौकोनाच्या **अब, कड** ह्या बाजूंचे अनुक्रमें **ई, फ** हे मध्य आहेत; तर **अफ, ईक** ह्या रेषांनीं **बड** कर्णाचे तीन समान भाग होतात, असें दाखवा.

४९. दोन मिळणाऱ्या अमर्याद रेषांच्या मधील दिलेल्या बिंदूंतून जाणारी अशी एक रेषा काढा कीं, तिचा जो भाग त्या दोन रेषांच्या मध्यें सांपडेल, तो दिलेल्या बिंदूंत दुभागिला जाईल.

५०. दिलेले तीन बिंदु ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंचे मध्य होतील, असा त्रिकोण काढा. ह्या तीन बिंदूंच्या संबंधानें कोणती अट दिली पाहिजे ?

५१. (१) एकाच पायावर आणि त्याच्या भिन्न अंगांस असणाऱ्या दोन (क्षेत्रफळानें) समान त्रिकोणांचे शिरोबिंदु सांधणारी रेषा पायानें, अथवा वाढविलेल्या पायानें, दुभागिली जाते; व (२) एकाच पायावर आणि त्याच्या भिन्न अंगांस असणाऱ्या दोन त्रिकोणांचे शिरोबिंदु सांधणारी रेषा जर पायानें अथवा वाढविलेल्या पायानें दुभागिली जाईल, तर ते त्रिकोण समान असतात.

५२. त्रिकोणाच्या पायाशीं समांतर असणाऱ्या रेषेचा जो भाग त्रिकोणाच्या इतर दोन बाजूंच्यामध्यें सांपडतो, तो, त्रिकोणाचा शिरोबिंदु व पायाचा मध्य ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेनें दुभागिला जातो.

५३. त्रिकोणाच्या दोन बाजूंचे मध्य व समोरचे कोणबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषांचा छेदनबिंदु व तिसरा कोणबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा तिसऱ्या बाजूस मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर तिनें तिसरी बाजू दुभागिली जाते.

५४. त्रिकोणाच्या दोन बाजूंवर समोरच्या कोणबिंदूंपासून काढिलेल्या लंबांचा छेदनबिंदु व तिसरा कोणबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा तिसऱ्या बाजूस मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर ती तिसऱ्या बाजूवर लंब होते.

५५. (१) त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंच्या मध्यांपासून त्या त्या बाजूंवर काढिलेले लंब एकाच बिंदूंत मिळतात; (२) त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंचे मध्य व समोरचे कोणबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषा

एकाच बिंदूंत मिळतात; (३) त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा एकाच बिंदूंत मिळतात; आणि (४) त्रिकोणाच्या तिन्ही कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूंवर टाकिलेले लंब एकाच बिंदूंत मिळतात.

५६. त्रिकोणाच्या पायांतील एक दिलेला बिंदु व शिरोबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेशीं पायाच्या मध्यांतून समांतर रेषा काढिली, आणि ती त्रिकोणाच्या एका बाजूला (ती बाजू न वाढवितां) जेथें मिळेल, तो बिंदु व दिलेला बिंदु हे सांधिले; तर सांधणारी रेषा त्रिकोणास दुभागिते.

५७. एका अमर्याद रेषेच्या एकाच अंगास दिलेल्या दोन बिंदूंपैकीं एकापासून त्या रेषेवर लंब टाकिला; तो तिच्या दुसऱ्या अंगास वाढवून, त्या वाढविलेल्या भागाचा त्या लंबाइतकाच तुकडा पाडिला; आणि जेथें तुकडा पडला, तो बिंदु व दिलेला दुसरा बिंदु हे सांधिले. तर सांधणारी रेषा दिलेल्या अमर्याद रेषेला ज्या बिंदूंत छेदिते, त्यापासून दिलेल्या दोन बिंदूंच्या अंतरांची बेरीज लघुत्तम असते (म्हणजे ती बेरीज, त्या अमर्याद रेषेंतील इतर कोणत्याही बिंदूपासून दिलेल्या दोन बिंदूंपर्यंत अंतरांच्या बेरजेपेक्षां कमी असते); आणि हीं अंतरें त्या अमर्याद रेषेशीं सारखे कोन करितात.

५८. एकाच पायावर असणाऱ्या समान त्रिकोणांपैकीं समद्विभुजत्रिकोणाची परिमिति लघुत्तम असते.

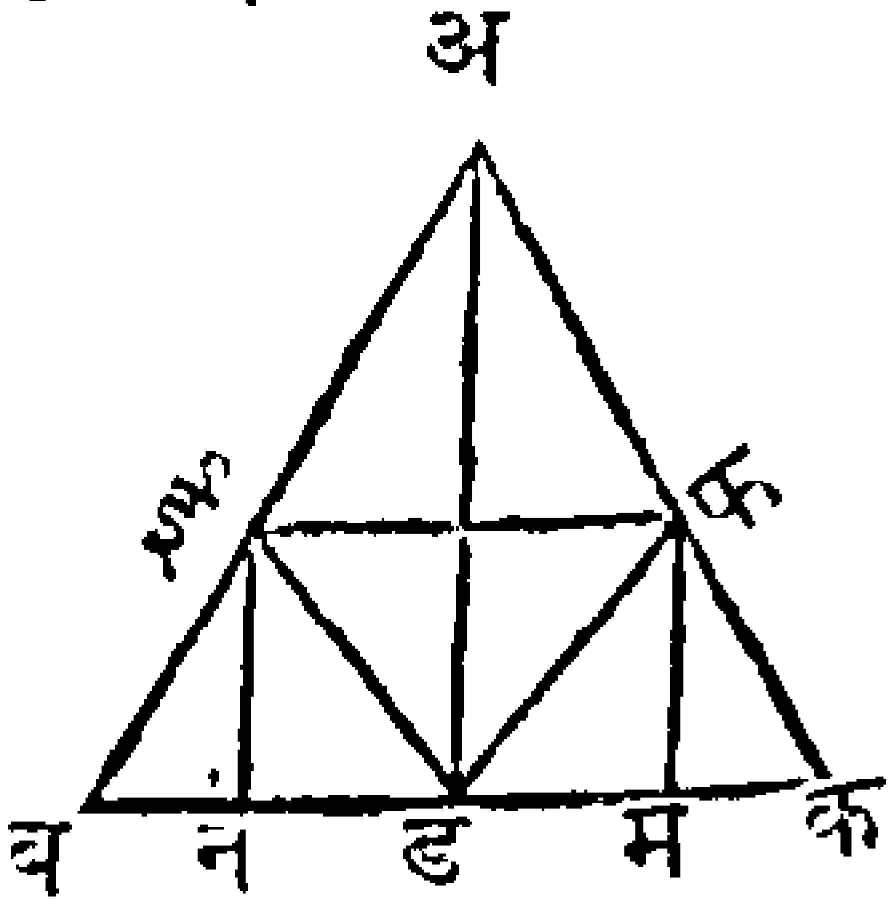
५९. (१) ज्यांच्या दोन दोन बाजू दिलेल्या दोन रेषांशीं अनुक्रमें समान आहेत, अशा सर्व त्रिकोणांपैकीं, ज्याच्या त्या दोन बाजू परस्परांवर लंब असतात, तो त्रिकोण महत्तम असतो. (२) ज्यांचे कर्ण दिलेल्या दोन रेषांशीं अनुक्रमें समान आहेत, अशा सर्व समांतरभुजचौकोनांमध्यें समभुजचौकोन महत्तम असतो.

६०. ज्यांच्या जवळजवळच्या दोन दोन बाजू दिलेल्या दोन रेषांशीं अनुक्रमें बराबर आहेत, अशा सर्व समांतरभुजचौकोनांपैकीं काटकोनचौकोन महत्तम असतो.

६१. ज्यांच्या परिमिति सारख्या असून सर्व कोन काटकोन आहेत अशा सर्व चौकोनांपैकीं चौरस महत्तम असतो.

६२. जे त्रिकोण एकाच पायावर आणि सारख्या शिरकोनांचे आहेत, त्यांपैकीं समद्विभुजत्रिकोण महत्तम असतो.

६३. **अबक** त्रिकोणाच्या **अ** ह्या शिरोबिंदुपासून व **अब**, **अक** ह्या बाजूंच्या **ई**, **फ** ह्या मध्यांपासून **बक** पायावर **अड**, **ईन**, **फम** हे लंब काढिले आहेत; आणि **ईफ**, **ईड**, **फड** सांधिल्या आहेत. तर असें दाखवा कीं,



(१) **ईअफ** त्रिकोण **ईडफ** त्रिकोणाशीं एकरूप आहे;

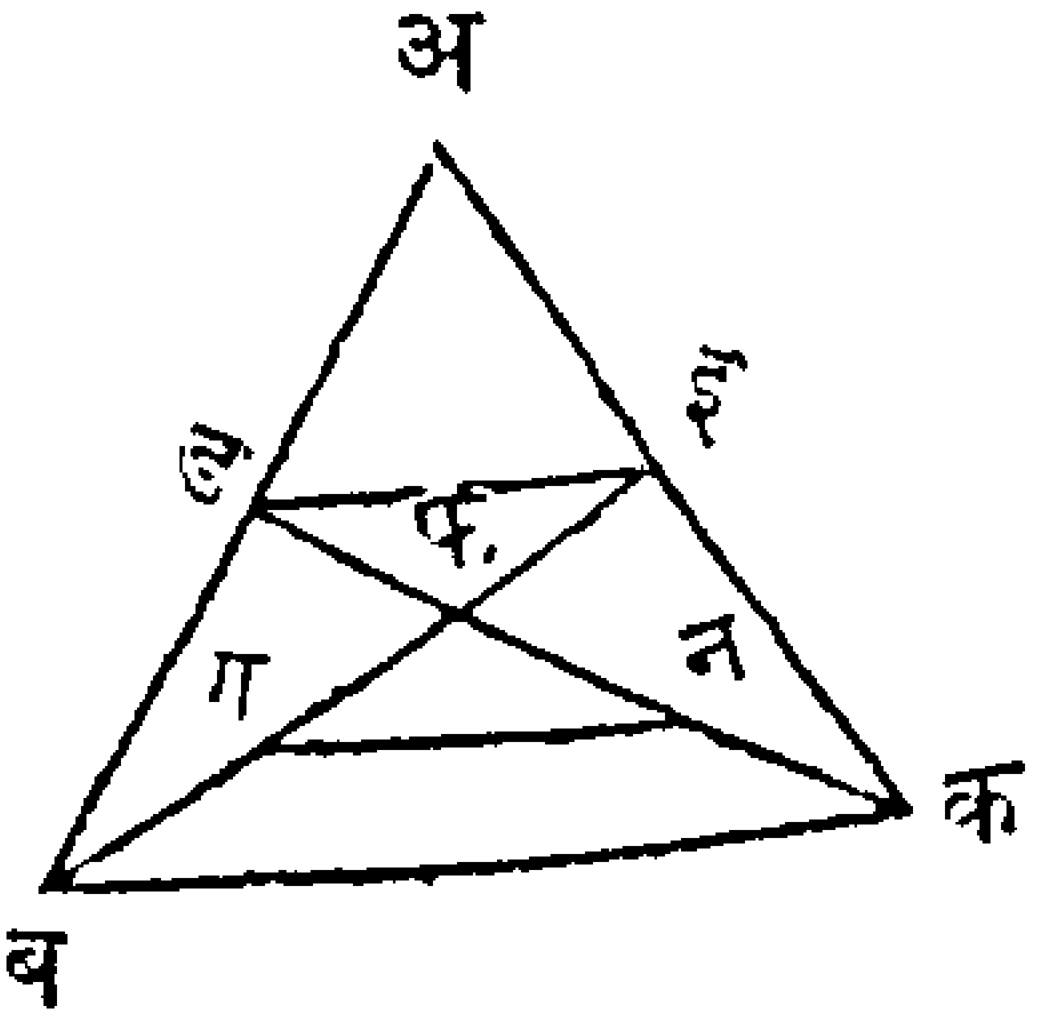
(२) **ईबन** त्रिकोण **ईडन** त्रिकोणाशीं एकरूप आहे;

(३) **फकम** त्रिकोण **फडम** त्रिकोणाशीं एकरूप आहे;

(४) **इम** हा काटकोनचौकोन आहे; व तो **अबक** त्रिकोणाच्या अर्धाबरोबर आहे.

(५) ह्या चार गोष्टींच्या आधारानें त्रिकोणाकृति कागदाच्या अशा घड्या पाडून दाखवा कीं, त्यांच्या योगानें " त्या त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, " व " त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ, पाया आणि उंची ह्यांच्या अर्धाच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीबरोबर आहे " ह्या गोष्टी स्पष्ट दिसतील.

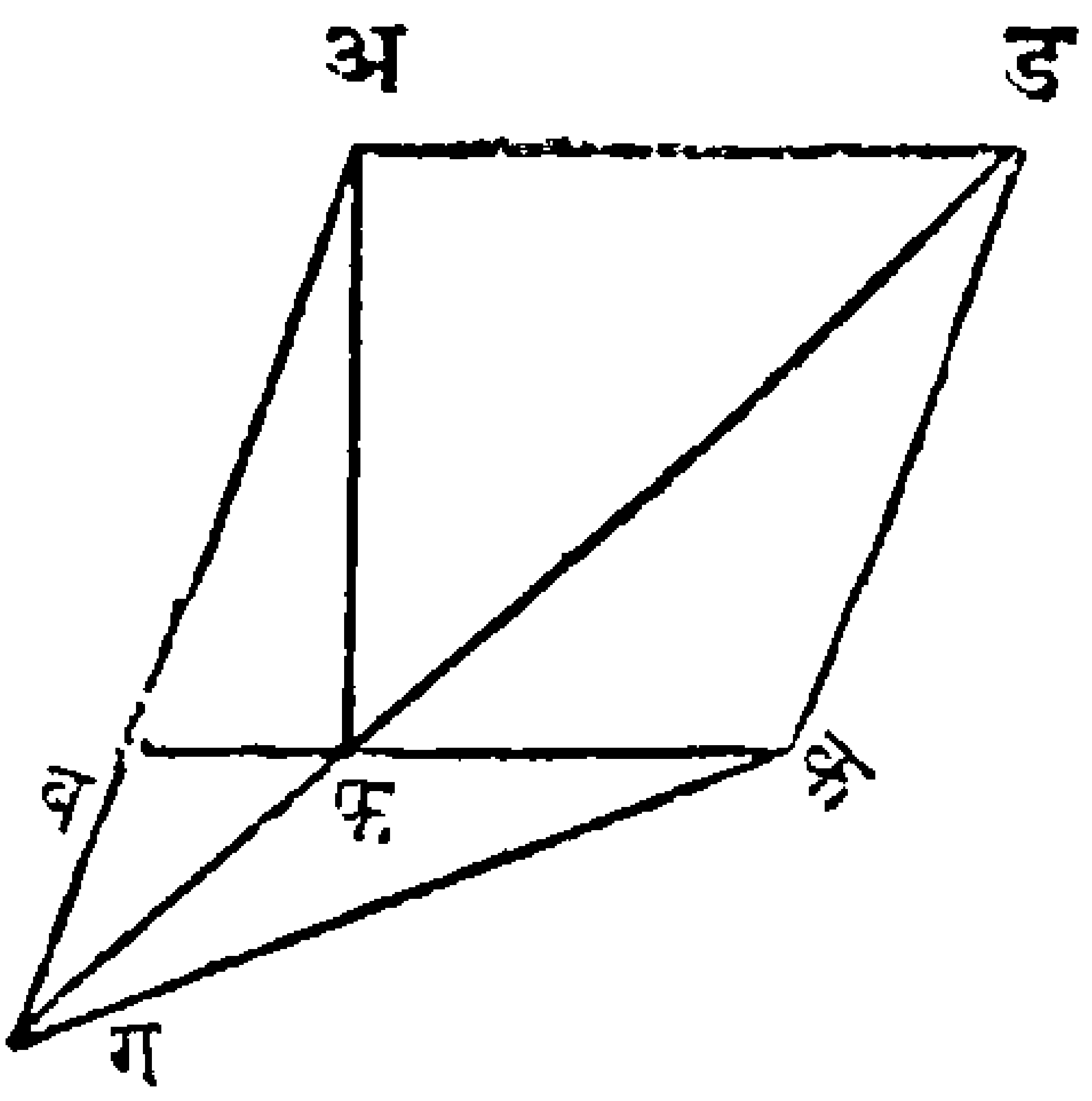
६४. **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** ह्या बाजूंचे **ड**, **इ** हे मध्य व समोरचे कोणबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या **बइ**, **कड** रेषा **फ** बिंदूंत छेदितात; आणि **फब**, **फक** ह्या रेषांचे मध्य सांधणारी रेषा **गन** आहे. तर असें सिद्ध करा कीं,



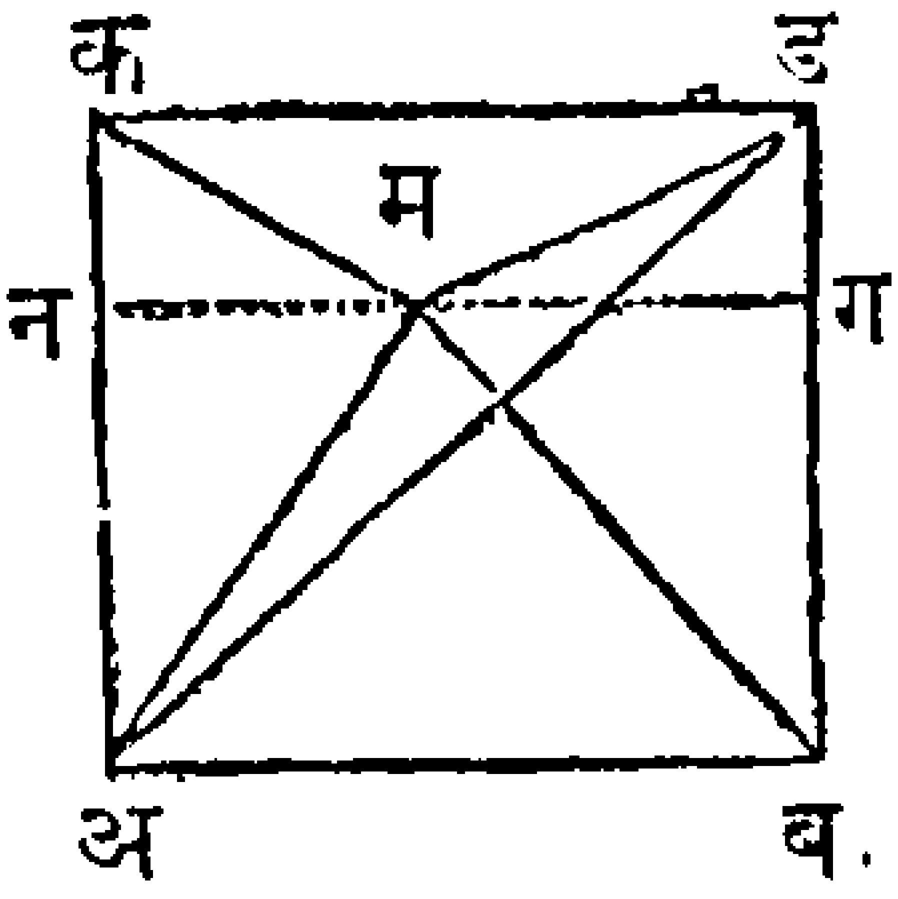
(१) **डइ** ही **गन**शीं समांतर व समान आहे,

(२) **गफ**, **फइ** ह्या समान आहेत;

(३) " त्रिकोणांच्या बाजूंचे मध्य व त्यांच्या त्यांच्या समोरचे कोणबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषांचा छेदनबिंदु व कोणत्याही बाजूचा मध्य ह्यांचें अंतर हें, तोच मध्य व समोरचा कोणबिंदु ह्यांच्या मधील अंतराच्या तृतीयांशाबराबर असतें ", (हा सिद्धांत पदार्थविज्ञानांत उपयोगीं पडतो.)



६५. **अबकड** समांतरभुज चौकोनाच्या **अब** बाजूच्या वाढविलेल्या भागांतील **ग** हा एक बिंदु व **ड** कोणबिंदु ह्यांस सांधणारी **गड** रेषा **बक** ला **फ** बिंदूंत छेदिते; आणि **अफ**, **गक** सांधिल्या आहेत. तर **अबफ** त्रिकोण **गकफ** त्रिकोणाबराबर होईल.



६६ (१) "**म** हा एक बिंदु, **अबडक** ह्या समांतरभुजचौकोनाच्या **अड** कर्णानें झालेल्या दोन त्रिकोणांपैकीं **अकड** त्रिकोणांत आहे; आणि त्यापासून त्या चौकोनाच्या चारही कोणबिंदूंपर्यंत रेषा काढिल्या आहेत. तर **म** हा ज्याचा शिरोबिंदु आहे, अशा त्रिकोणांपैकीं **अक** बाजू व **अड** कर्ण ह्यांवरील त्रिकोणांची बेरीज **अब** वरील त्रिकोणाबराबर आहे ", असें सिद्ध करावयाचें.

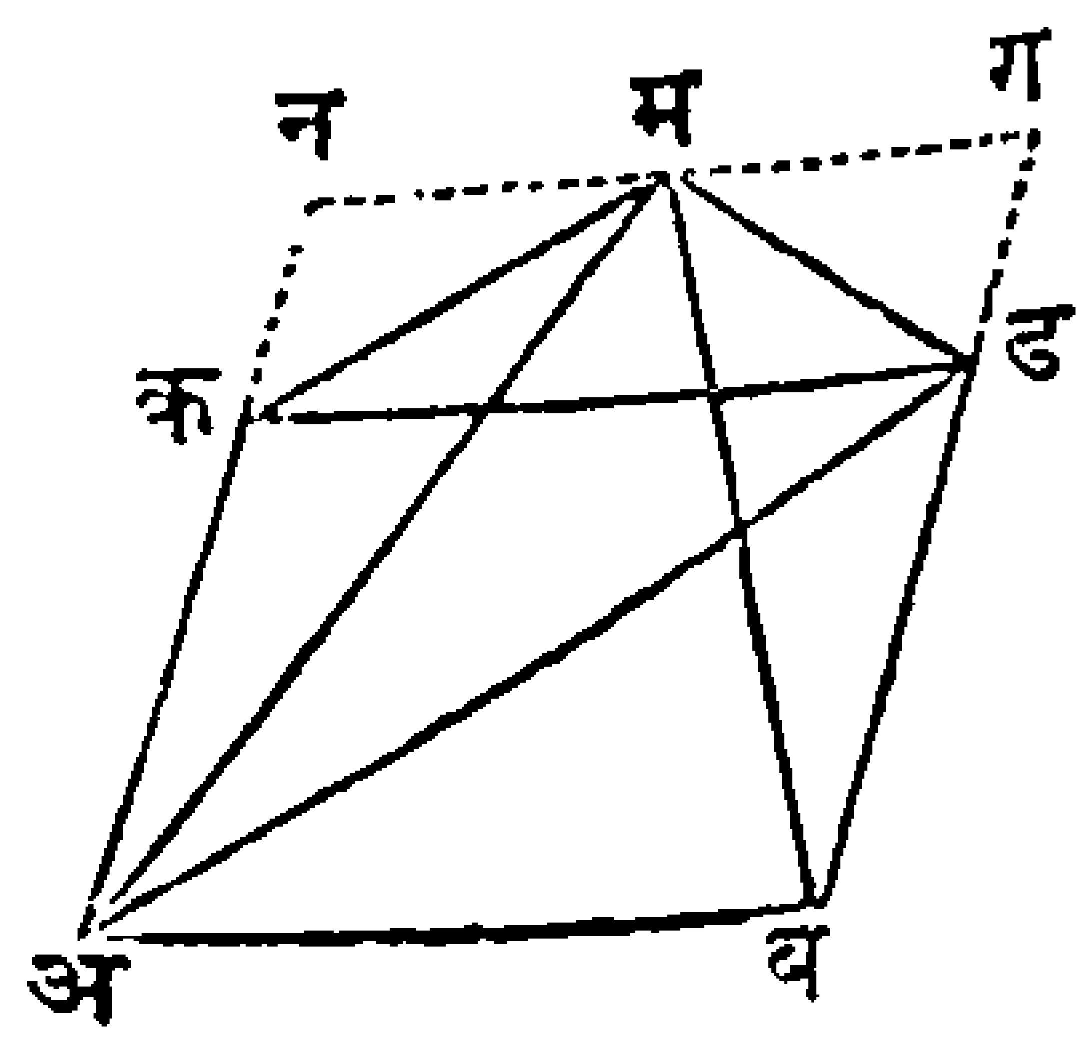
(सूचना— **म** बिंदूंतून **कड**शीं **नग** समांतर काढावी. नंतर **अग**, **कग** ह्या चौकोनांची बेरीज **अड** चौकोनाबराबर आहे, ही गोष्ट, १.४१ व कांहीं प्र. प्रमाणें ह्यांच्या आधारानें, **अमब** आणि **कमड** ह्या त्रिकोणांची बेरीज **अकड** त्रिकोणाबराबर ठरवावी. म्हणजे

प्र. प्र. ३ ह्यावरून **अमब** त्रिकोण, **अमक**, **अमड** ह्यांच्या बेरजे-बरावर ठरतो).

(२) **म** बिंदु जर **अकड** त्रिकोणाच्या **अक**, **कड** किंवा **अड** ह्या बाजूंत असला; अथवा **क**, **ड** किंवा **अ** ह्या कोणबिंदूशीं मिळाला; तर (१) ह्या सिद्धांताच्या प्रतिज्ञेचें स्वरूप कसें होईल, हें सविस्तर सांगा; आणि **म** बिंदूच्या ह्या प्रत्येक स्थितीमध्यें तो सिद्धांत खरा आहे, असें दाखवा.

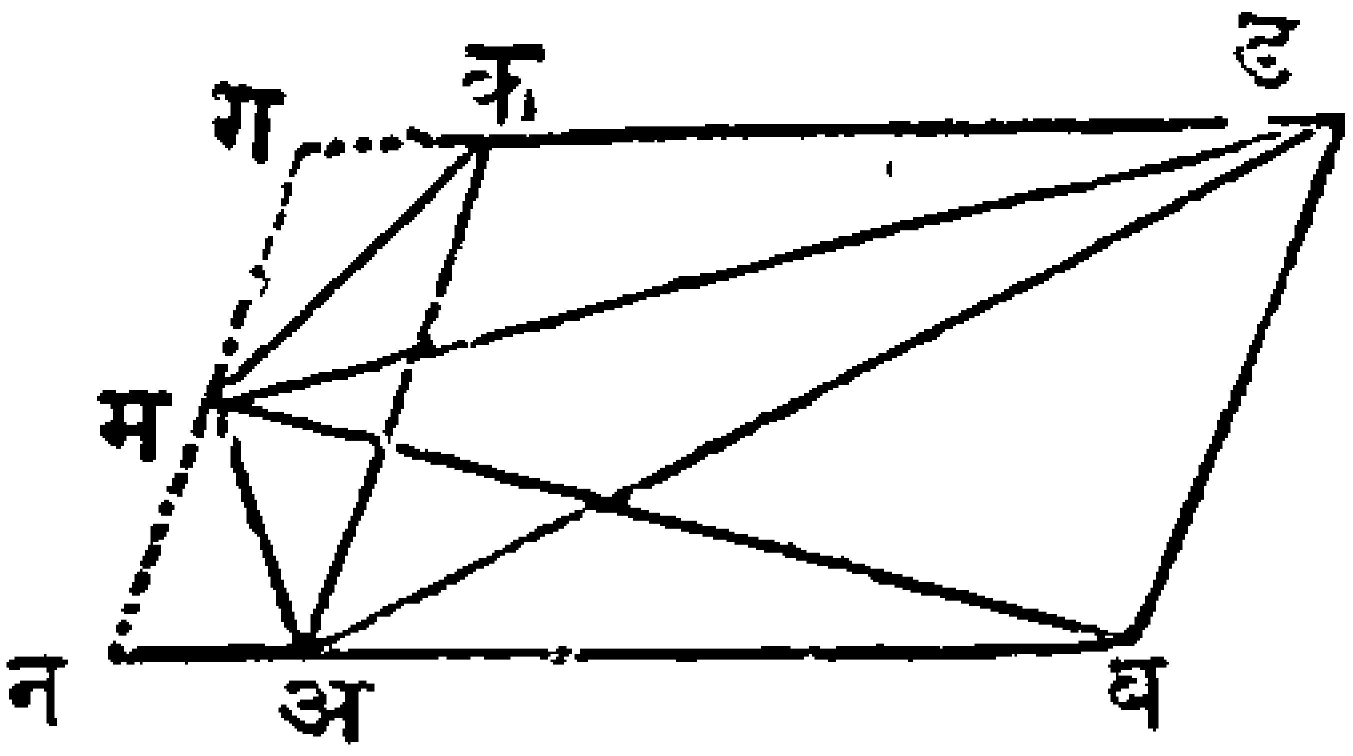
(३) **म** बिंदु **अबड** त्रिकोणांत असेल, तर (१) ह्यांतील सिद्धांताच्या प्रतिज्ञेचें जें स्वरूप होईल तें सांगा; आणि तो सिद्धांत सिद्ध करून दाखवा.

(४) **म** बिंदु दिलेल्या चौकोनाच्या बाहेर आहे; परंतु (**अक**, **अड** ह्या रेषा अमर्याद मानिल्या असतां) **कअड** कोनाच्या आंतच तो बिंदु आहे. तरी देखील (१) ह्यांतील सिद्धांत खरा आहे. असें सिद्ध करून दाखवा.



(सूचना—**अग** समांतरभुजचौकोन तयार करा. आतां **अड**, **कग** ह्या चौकोनांची बेरीज **अग** चौकोनाबरोबर आहे. ∴ **अकड**, **कमड** ह्या त्रिकोणांची बेरीज **अमब** त्रिकोणाबरोबर आहे (१. ४१ व कांहीं प्र. प्र.). ∴ **अमक**, **अमड** ह्या त्रिकोणांची बेरीज **अमब** त्रिकोणाबरोबर आहे.)

(५) **म** बिंदु **अक**, **बड**, **अड** ह्यांच्या वाढविलेल्या भागांत असला, तर (१) ह्यांतील सिद्धांताच्या प्रतिज्ञेचें जें स्वरूप होईल, तें सांगून सिद्ध करा.



(६) **म** बिंदु जर दिलेल्या चौकोनाच्या बाहेर असून **कअड** कोनाच्याही बाहेर असेल; तर **म** हा ज्यांचा शिरोबिंदु आहे, अशा त्रिकोणांपैकीं "**अक, अब** ह्या बाजूंवरील त्रिकोणांची बेरीज **अड** कर्णावरील त्रिकोणाबराबर होते," असें सिद्ध करा.

(सूचना–**बग** समांतरभुजचौकोन तयार करा. आतां **अग** चौकोन+**अड** चौकोन=**बग** चौकोन (प्र. प्र. ड);

∴ **अमक** त्रिकोण+**अकड** त्रिकोण=**मबड**त्रि० (१.४१ व कांहीं प्र. प्रमाणें).

∴ **अमक** त्रि०+**अकड** त्रि०+**अमब** त्रि०=**बमड** त्रि०+**अमब** त्रि० (प्र. प्र. २).

आणि **बमड** त्रि०+**अमब** त्रि०=**अबडम** चौकोन (प्र. प्र. ड).

व **अबडम** चौकोन=**अमड** त्रि०+**अबड** त्रि० (प्र. प्र. ड).

∴ **अमक** त्रि०+**अकड** त्रि०+**अमब** त्रि०=**अमड** त्रि०+**अबड** त्रि० (प्र. प्र. १ उप. २).

∴ **अमक** त्रि०+**अमब** त्रि०=**अमड** त्रि० (१.३४ व प्र. प्र.३).

(७) **कअड** कोनाच्या संबंधानें **म** बिंदूच्या ज्या निरनिराळ्या स्थिति, त्यांना लक्षून वर सिद्ध केलेले सिद्धांत, **बअड** कोनाच्या संबंधानें **म** बिंदूच्या सर्व स्थितींना लक्षून म्हणा; व ते सिद्ध करा.

(८) **कअड, बअड** ह्या कोनांच्या बाजू **अ** बिंदूच्या पलीकडे वाढविल्या असतां जे कोन होतील, त्यांच्या संबंधानें **म** बिंदूच्या निरनिराळ्या स्थितींना लक्षून वरचे सहा सिद्धांत म्हणा; व ते सिद्ध करा.

६७. (मागील प्रश्नाच्या (१) व (४) ह्या भागांच्या आकृति पहा):—

(१) **म** हा बिंदु, **अबडक** समांतरभुजचौकोनाची **अक** बाजू व **अड** कर्ण ह्यांच्या मधील कोनांत अगर त्याच्या बाजूंत कोठेंतरी आहे; तर **अक** बाजू व तिचें **म**पासून अंतर ह्यांचा काटकोन-चौकोन आणि **अड** कर्ण व त्याचें **म** पासून अंतर ह्यांचा काटकोन-चौकोन ह्यांची बेरीज ही, **अब** बाजू व तिचें **म** पासून अंतर ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर आहे. (२) **म** हा बिंदु **कअड** कोनाच्या (व **कअ**, **डअ** बाजू **अ** बिंदूपलीकडे वाढवून होणाऱ्या कोनाच्या-ही) बाहेर असेल, तर **अब**, **अक** ह्या बाजू व त्यांचीं **म** पासून अंतरें ह्यांच्या काटकोनचौकोनांची बेरीज ही, **अड** कर्ण व त्याचें **म** पासून अंतर ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर होते. (३) **म** बिंदूच्या (२) ह्या भागांतील स्थितीमध्यें **अब**, **अक**, **अड** ह्यांव-रील लंब धन समजावयाचे, आणि **म**च्या इतर कोणत्याही स्थितींत ज्या लंबाची दिशा बदलेल, तो ऋण समजावयाचा " असा संकेत माना;२. प्रश्न १ ह्यावरील टिपणाच्या (४), (५), (६), ह्या भागां-तलेही संकेत स्वीकारा; आणि ह्या सर्व संकेतांच्या आधारानें असें दाखवा कीं, वर (२) ह्या भागांत सांगितलेला सिद्धांत **म** बिं-दूच्या इतर कोणत्याही स्थितीला शब्दशः लागू आहे. (हा सिद्धांत पदार्थविज्ञानशास्त्रांत फार उपयोगीं पडतो.)

६८. (१) एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्याच्या तीन बाजूंशीं अनुक्रमें समांतर असतील, तर ते त्रिकोण मिथःसमकोण- असतात. (२) एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन बाजूंवर अनुक्रमें लंब असतील, तर ते त्रिकोण मिथःसमकोण असतात.

६९. ज्याची परिमिति व क्षेत्रफळ हीं अनुक्रमें दिलेल्या त्रिको-णाची परिमिति व क्षेत्रफळ ह्यांशीं बरोबर होतील, असा एक समां-तरभुजचौकोन काढा.

७०. एक त्रिकोण व एक काटकोनचौकोन हे समान असून समान उंच्यांचे असतील, तर त्या चौकोनाची परिमिति त्रिकोणाच्या परिमितीपेक्षां कमी असते.

७१. (१) " समान उंच्यांच्या दोन त्रिकोणांपैकीं एकाचा पाया दुसऱ्याच्या पायाच्या कांहीं पटीबरावर अथवा कोणत्या तरी हिश्शा-बराबर असल्यास, पहिला त्रिकोण (म्हणजे त्याचें क्षेत्रफळ) दुस-ऱ्याच्या अनुक्रमें त्याच पटीबराबर किंवा त्याच हिश्शा-बरोबर असतो. (२) समान पायांच्या दोन त्रिकोणांपैकीं एकाची उंची दुसऱ्याच्या उंचीच्या कांहीं पटीबराबर अथवा कोणत्यातरी हिश्शाबराबर असल्यास, पहिला त्रिकोण दुसऱ्याच्या अनुक्रमें त्याच पटीबराबर अथवा त्याच हिश्शाबराबर असतो. (३) (क्षेत्र-फळानें) समान असणाऱ्या त्रिकोणांपैकीं एकाचा पाया दुसऱ्याच्या पायाच्या कांहीं पटीबराबर अथवा कोणत्या तरी हिश्शाबराबर अस-ल्यास, पहिल्याची उंची दुसऱ्याच्या उंचीच्या अनुक्रमें त्याच हिश्शा-बराबर अथवा त्याच पटीबराबर असते. " हे तीन सिद्धांत प्रथमतः दुप्पट व अर्ध आणि तिप्पट व तृतीयांश ह्यांच्या संबंधानें सिद्ध करून दाखवा; आणि त्या सिद्धतेवरून त्या व्यापक सिद्धांतांची सत्यता स्थापित करा.

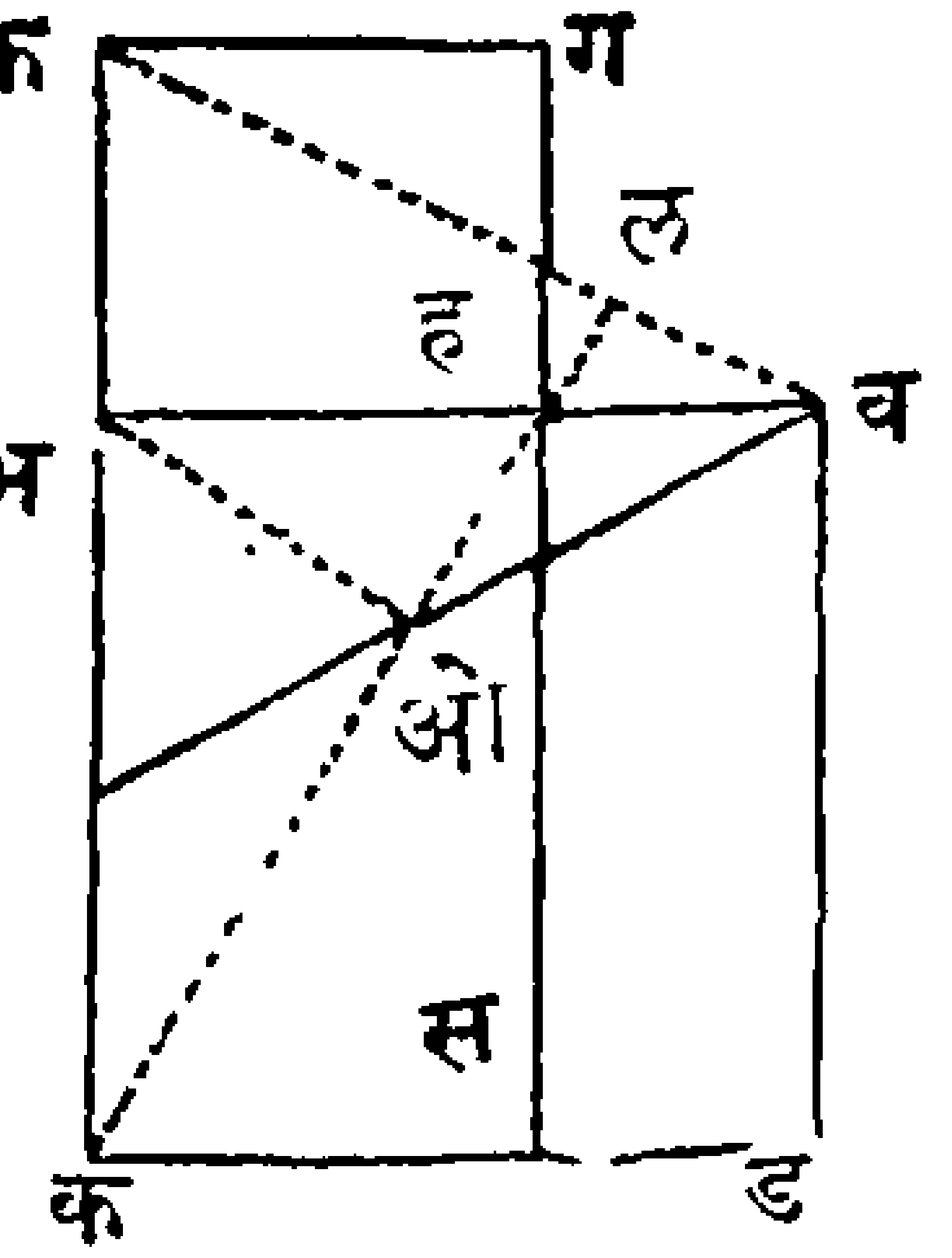
७२. एक समद्विभुजत्रिकोण व एक विषमभुजत्रिकोण ह्यांमध्यें (१) पायांची समानता, (२) उंच्यांची समानता व (३) क्षेत्रांची समानता ह्यांपैकीं कोणतेही दोन धर्म दिले असल्यास, समद्विभुज त्रिकोणाची परिमिति विषमभुजत्रिकोणाच्या परिमितिपेक्षां कमी असते.

७३. (१) समांतरद्विभुजचौकोनाच्या समांतर असणाऱ्या बाजूंचे मध्य सांधणारी रेषा त्या चौकोनास दुभागिते; व (२) समां-तर नसणाऱ्या दोन बाजूंचे मध्य सांधणारी रेषा इतर दोन बाजूंच्या बेरजेच्या अर्धाबराबर असते.

७४. समांतरभुजचौकोनाच्या एका कर्णांतील एकाच बिंदूच्या संबधानें जे कर्णाभोंवतालचे समांतरभुजचौकोन होतात, त्यांचे दुसरे कर्ण समांतर असतात.

(सूचना—ह्या कर्णांचीं एकेका आंगचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेषा पूरक समांतरभुजचौकोनांचे कर्ण होतात; आणि कर्णांत घेतलेला

बिंदु ज्यांचा कोणबिंदु आहे, अशीं त्या पूरकांचीं अर्धे समान ठरतात. ह्यांत त्यांच्या जवळचा एकच त्रिकोण मिळवून प्र. प्र. २ व १.३९ ह्यांची योजना करावी.)



७५. बाजूस काढिलेल्या २.११ च्या आकृतींत **बफ** सांधिली आहे, आणि **कह** सांधून **बफ**ला **ल** बिंदूंत मिळेतोंपर्यंत वाढविली आहे; तर खालीं लिहिलेले सिद्धांत सिद्ध करा.

(१) **अबफ, अकह** हे त्रिकोण एकरूप आहेत.

(२) **अकह, बलह** हे त्रिकोण मिथःसमकोण आहेत.

(३) **कल**रेषा **बफ**वर लंब आहे.

(४) **फकल** त्रिकोण **बओल** त्रिकोणाशीं समकोण आहे.

(५) **डओ** रेषा **अक**च्या अर्धाबराबर आहे.

(६) **अओ** रेषा **कह**वर लंब आहे.

७६. असा एक समभुजचौकोन काढा कीं, तो दिलेल्या त्रिकोणाबराबर होईल व त्याची प्रत्येक बाजू त्या त्रिकोणाच्या महत्तम बाजूबराबर होईल.

७७. (१) समद्विभुजत्रिकोणाच्या दोन्ही समान बाजू, समोरच्या कोणबिंदूंपासून सारख्या अंतरांवर असतात. (२) समभुजत्रिकोणाच्या सर्व बाजू समोरच्या कोणबिंदूंपासून सारख्या अंतरांवर असतात.

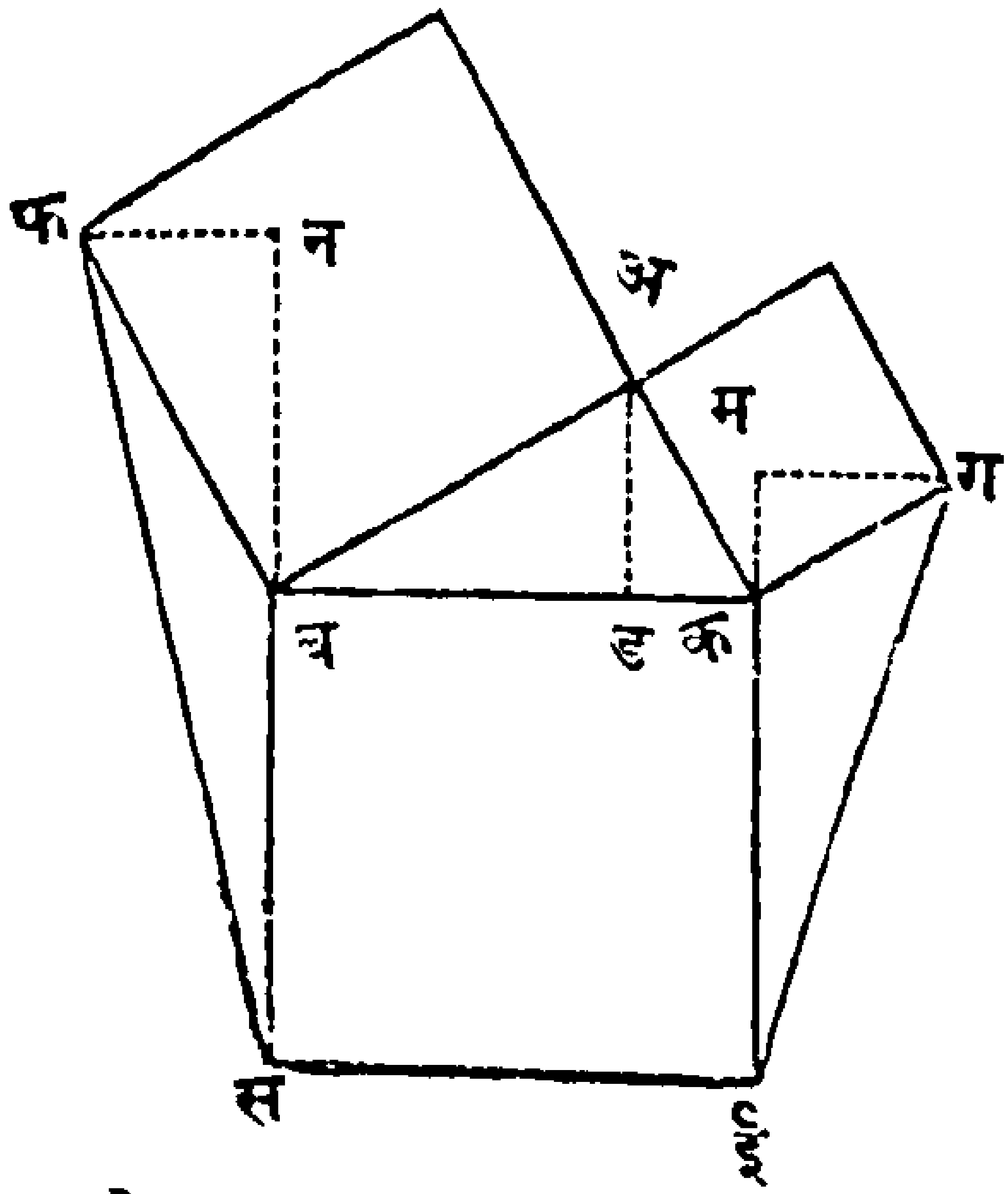
७८. (१) समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायांतील कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या समान बाजूंच्या अंतरांची बेरीज ही, समान बाजूंपैकीं एक व तिच्या समोरचा कोणबिंदु ह्यांच्यामधील अंतराबराबर असते; आणि (२) समद्विभुजत्रिकोणाचा पाया वाढवून वाढवि-

लेल्या भागांत एक बिंदु घेतला असतां, त्यापासून समान बाजूंच्या अंतरांची वजाबाकी ही, समान बाजूंपैकीं एक व तिच्या समोरचा कोणबिंदु ह्यांच्या अंतराबराबर असते.

७९. (१) समभुजत्रिकोणांतील कोणत्याही बिंदूपासून त्याच्या तिन्ही बाजूंपर्यंत अंतरांची बेरीज ही, त्याची कोणतीही बाजू व तिच्या समोरचा कोणबिंदु ह्यांच्या अंतराबराबर असते; आणि (२) समभुजत्रिकोणाचा बाहेरील कोणताही बिंदु, त्या त्रिकोणाच्या ज्या दोन बाजू अमर्याद मानिल्या असतां त्यांच्यामधील कोनांत येत असेल, त्यांच्या त्या बिंदूपासून अंतरांची बेरीज व त्या बिंदूपासून तिसऱ्या बाजूचें अंतर ह्यांची वजाबाकी ही, त्रिकोणाची कोणतीही बाजू व समोरचा कोणबिंदु ह्यांच्या अंतराबराबर असते.

८०. चौकोनांतल्या कोणत्या बिंदूपासून त्याच्या चारही कोणबिंदूंपर्यंत अंतरांची बेरीज लघुत्तम असते ?

८१. **अबक** ह्या त्रिकोणाचा **अ** कोन काटकोन आहे; **अब, बक** आणि **अक** ह्यांवर अनुक्रमें **अफ, बई** आणि **अग** हीं चौरसें (त्रिकोणाच्या बाहेर) काढिलीं आहेत; **सब, ईक** वाढवून त्यांवर अनुक्रमें **फन, गम** लंब काढिले आहेत; आणि



अड हा **बक**वर लंब काढिला आहे. तर खालीं लिहिलेल्या गोष्टी सिद्ध करा.

(१) **बन, कम** ह्या रेषा अनुक्रमें **बड, कड** ह्यांबराबर आहेत.

(२) **फस, गई** ह्यांवरील चौरसांची बेरीज **बक**वरील चौरसाच्या पांचपटीबराबर आहे.

८२. (१) चौरसाच्या चारही बाजूंमध्यें त्याच्या कोणबिंदूंपासून सारख्या अंतरांवर एकाच अनुक्रमानें चार बिंदु घेऊन ते जर एकाच अनुक्रमानें सांधिले, तर जो चौकोन होतो, तो चौरस असतो; आणि (२) तो चौरस, घेतलेल्या बिंदूमुळें चौरसाच्या कोणत्याही एका बाजूचे जे दोन भाग होतात, त्यांवरील चौरसांच्या बेरजेबरा-बर असतो.

८३. (१) समद्विभुजत्रिकोणाचा शिरकोन काटकोन असेल, तर त्याच्या पायाकडील कोनास दुभागणाऱ्या रेषेनें समोरच्या बाजूचे जे दोन भाग होतात, त्यांपैकीं कर्णाजवळच्या भागावरील चौरस हें, दुसऱ्या भागावरील चौरसाच्या दुपटीबरावर असतें.

(सूचना—छेदनबिंदूपासून कर्णावर लंब टाकिला असतां, तो दुसऱ्या भागाबरावर असतो.)

(२) दिलेल्या रेषेचे असे दोन भाग करा कीं, त्यांपैकीं एका भा-गावरील चौरस दुसऱ्यावरील चौरसाच्या दुपटीबरावर होईल.

(सूचना—(१) ह्या भागावरून रीति ठरवावी.)

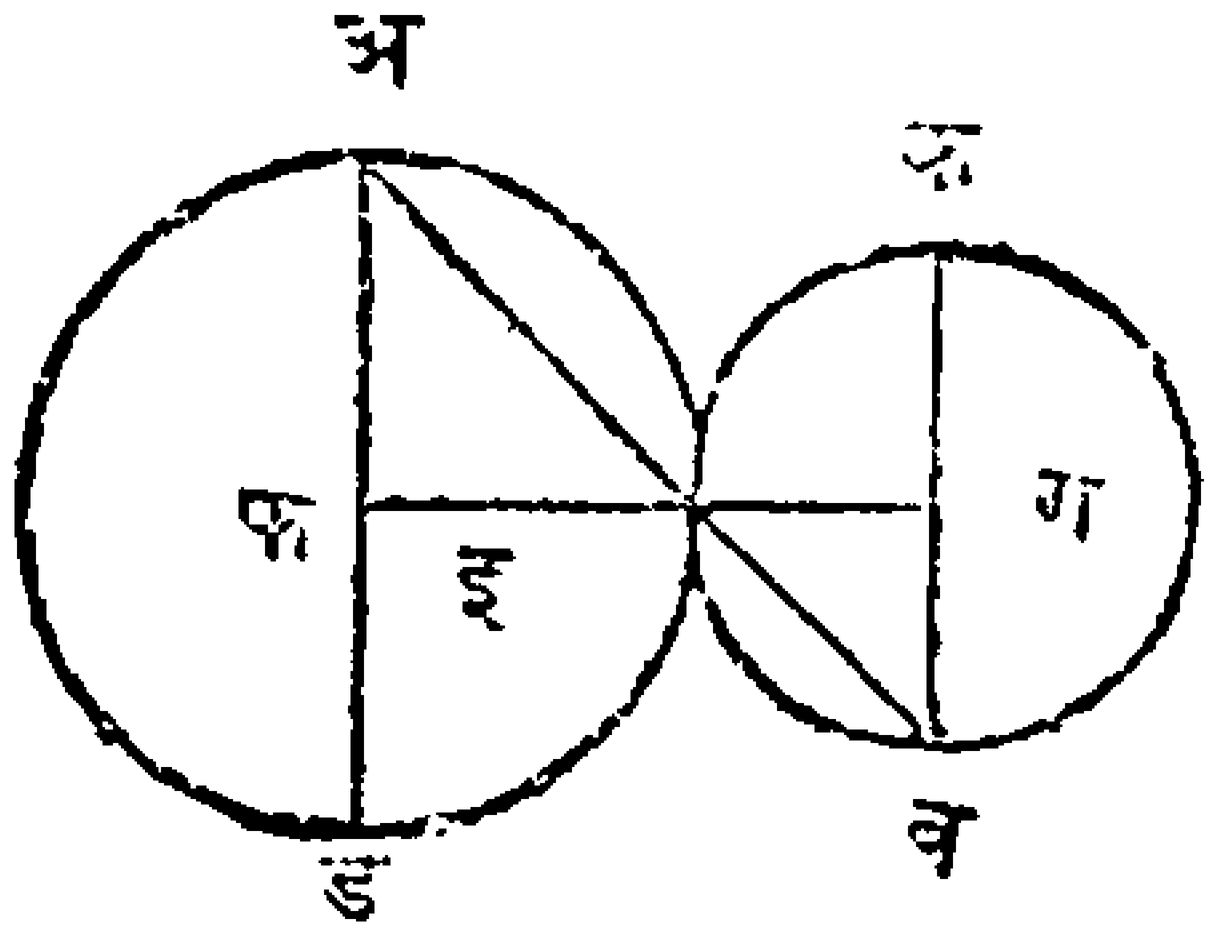
८४. दोन असमान रेषांवरील चौरसांची बेरीज ही, त्यांच्या काट-कोनचौकोनाच्या दुपटीपेक्षां जास्त असते.

(सूचना—२. ५, २.९ व कांहीं प्र. प्रमाणें यांची योजना करा.)

८५. समभुजत्रिकोणाचें क्षेत्रफळ, त्याची कोणतीही बाजू व तिचें अर्ध ह्यांच्या काटकोनचौकोनापेक्षां कमी असते.

८६. समद्विभुजत्रिकोणाच्या समान बाजूंपैकीं एकीवर समोरच्या कोणबिंदूपासून टाकिलेल्या लंबावरील चौरस हें, त्या बाजूच्या (लंबानें झालेल्या) दोन भागांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व पायाजवळील भागावरचा चौरस ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतें.

८७. **अबई**, **कडई** हीं दोन वर्तुळें परस्परांस ई बिंदूंत बाहेरून स्पर्श करितात; **अब**, **कड** हे त्यांचे समांतर व्यास आहेत; आणि



अनुक्रमें **फ**, **ग** हे त्यांचे मध्य आहेत. तर (१) **अइफ**, **डइग** हे त्रिकोण मिथःसमकोण आहेत; व (२) **अ**, **ड** हीं व्यासांचीं व्युत्क्रम टोंकें आणि **ई** हा स्पर्शबिंदु हे तिन्ही एकाच सरळरेषेंत आहेत, असें सिद्ध करा.

(३) हीं वर्तुळें आंतून स्पर्श करणारीं असतील, तर त्यांच्या समांतर व्यासांची एकाच आंगचीं टोंकें व स्पर्शबिंदु, हे तीन बिंदु एकाच सरल रेषेंत असतात.

८८. **अबड**, **अकई** ह्या रेषा एका वर्तुळास अनुक्रमें **ब**, **क** बिंदूंत स्पर्श करितात; आणि **डई** रेषा **बड**, **कई** ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. तर **डई** ही त्या वर्तुळास स्पर्श करिते, असें सिद्ध करा.

८९. एका अर्धवर्तुळाचा **अब** व्यास आणि **क** मध्यबिंदु आहे; ज्याचा मध्यबिंदु **ओ** आहे असें एक वर्तुल त्या अर्धवर्तुळांत काढिलें आहे (म्हणजे तें वर्तुळ त्या अर्धवर्तुलास व त्याच्या व्यासास स्पर्श करितें); तर **ओ** बिंदु हा, अर्धवर्तुळाची **अब**शीं समांतर असणारी स्पर्शरेषा व **क** बिंदु ह्या दोहोंपासून समान अंतरांवर आहे.

९०. वर्तुळांत काढिलेल्या **अबकड** चौकोनाच्या **अड** बाजूमध्यें वर्तुलमध्य आहे; तर (१) त्याचे **ब**,**क** हे कोन विशाळकोण असतील, आणि (२) **बक** वाढवून तिजवर **डई** लंब टाकिला, तर **अड**वरील चौरस हें, **अब**, **बक**, **कड** ह्यांवरील चौरसें व **बक**, **कई** काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर होईल; असें सिद्ध करा.

९१. वर्तुळांत काढिलेल्या **अबकड** चौकोनाच्या **अड** बाजूंत वर्तुळमध्य आहे; तर (१) **अब**, **डक** ह्या बाजू अनुक्रमें **ब**, **क** बिंदूंपलीकडे वाढविल्या असतां मिळतील; व (२) त्यांचा मेलनबिंदु **फ**, आणि **अक**, **बड** कर्णांचा छेदनबिंदु **ग** ह्यांस सांधणारी **फग** रेषा वाढविली असतां ती **अड** वर लंब होईल, असें सिद्ध करा.

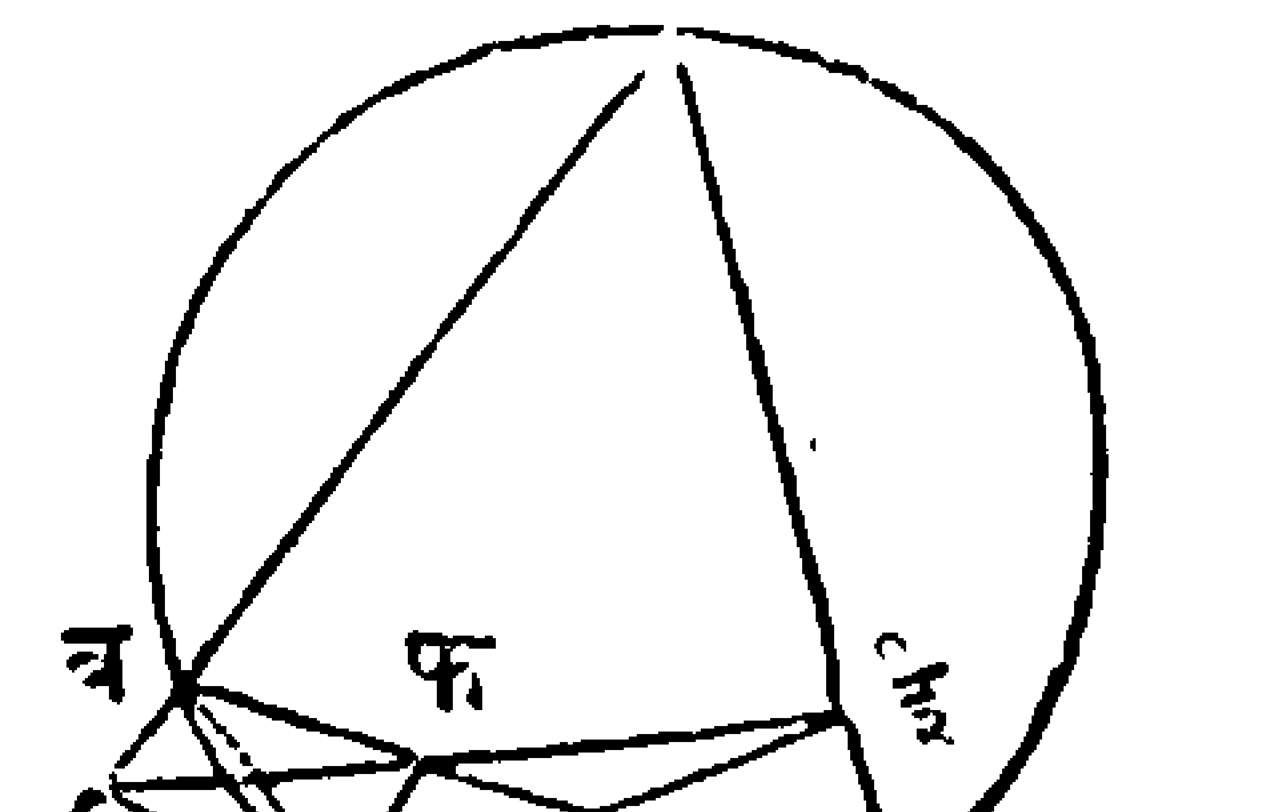
९२. वर्तुळांत काढिलेल्या एका चौकोनाचा एक कोन काटकोन आहे; तर मध्यबिंदूपासून त्याच्या सर्व बाजूंवर टाकिलेल्या लंबांवरील चौरसांची बेरीज ही, त्रिज्येवरील चौरसाच्या दुपटीबरोबर होईल.

९३. वर्तुळमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्यांपैकीं पहिलीला दुसरी दुभागिते, दुसरीला तिसरी दुभागिते, ह्याप्रमाणें प्रत्येकीला तिच्या पुढची दुभागिते; तर त्या ज्या उत्तरोत्तर वाढत जातात, असें दाखवा.

९४. दिलेल्या वर्तुळाचा व्यास वाढवून त्यांत असा एक बिंदु काढा कीं, त्यापासून त्या वर्तुळास काढिलेली स्पर्शरेषा दिलेल्या समर्याद रेषेबरावर होईल.

९५. (१) एका वर्तुळाच्या दोन ज्यांनीं परस्परांस वर्तुळांत छेदिलें असलें, तर त्यांच्या मधील कोन हा, तो व त्याच्या समोरचा कोन ह्यांच्या समोरील कंसांच्या बेरजेच्या अर्धाएवढ्या कंसावरील मध्यकोणाबरावर असतो. (२) एका वर्तुळाच्या दोन ज्या वाढविल्यानें मिळत असल्या, तर त्यांच्या मधील कोन हा, त्या ज्यांच्यामध्यें सांपडलेल्या दोन कंसांच्या वजाबाकीच्या अर्धाएवढ्या कंसावरील मध्यकोणाबरावर असतो.

९६. वर्तुळांत काढिलेल्या **अबक** त्रिकोणाच्या **अ** कोनासमोरील कंसांतल्या **प** बिंदूपासून तिन्ही बाजूंवर लंब काढिले; तर (१) **अब, अक** ह्या दोन्ही बाजूंवरचे लंबांपैकीं जर एकीवरचा लंब तिला वर्तुळांत मिळाला; तर दुसरीवरचा तिला वर्तुळाबाहेरच मिळेल (म्हणजे दोन्ही लंब



वर्तुळांत किंवा दोन्ही वर्तुळाबाहेर मिळणार नाहींत); आणि एकीवरचा लंब तिला परिघांत मिळाला, तर दुसरीवरचाही तिला परिघांतच मिळेल.

अब, **अक**, **वक** ह्यांवर अनुक्रमें **पड**, **पई**, **पफ** हे लंब काढिले; **पब**, **पक** सांधिल्या; आणि **डफ**, **फई** सांधिल्या. तर

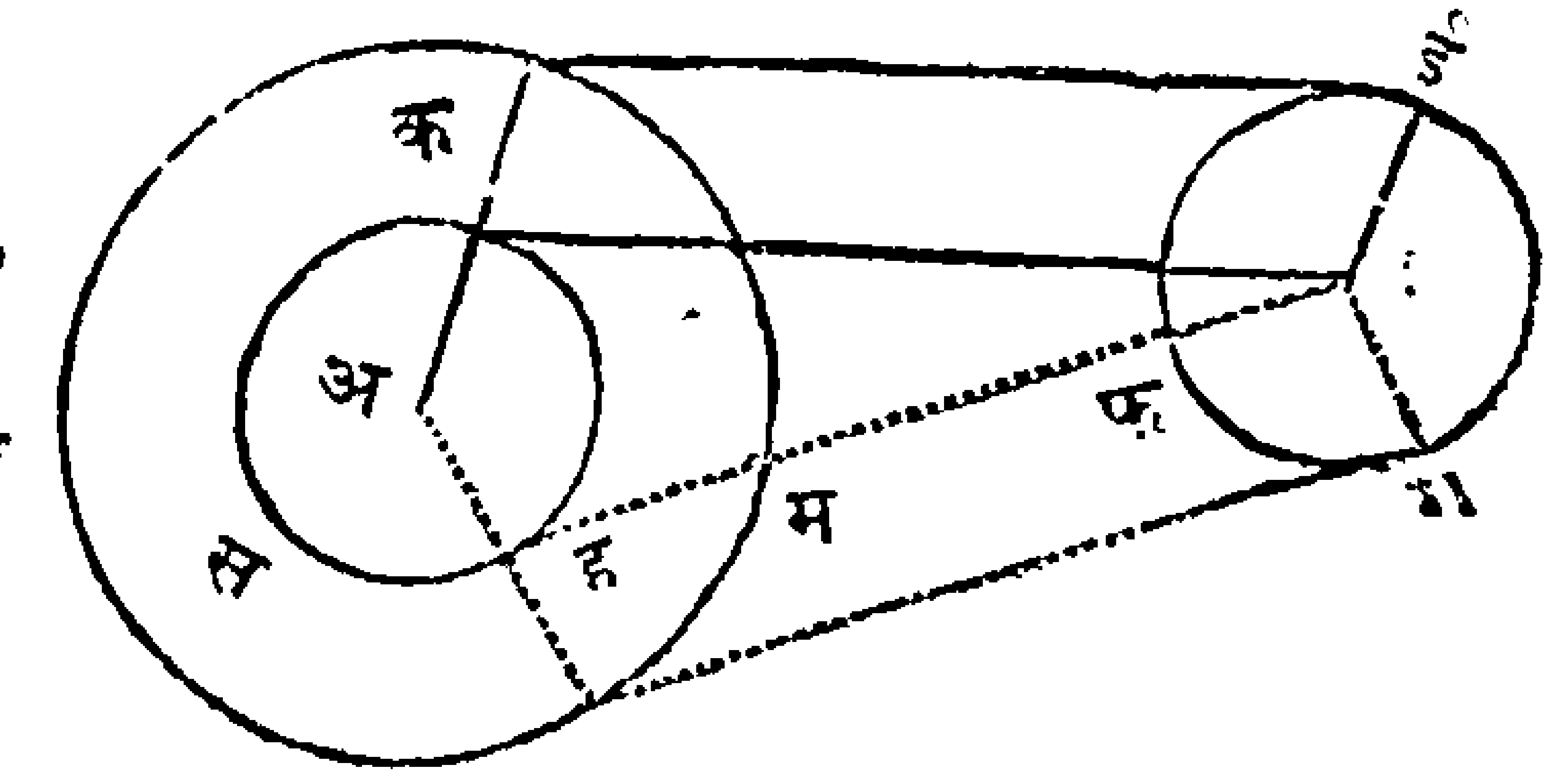
(२) **पफड** कोन **पबड** कोनाबरोबर आहे.

(३) **पफड** कोन **पकई** कोनाबरोबर आहे.

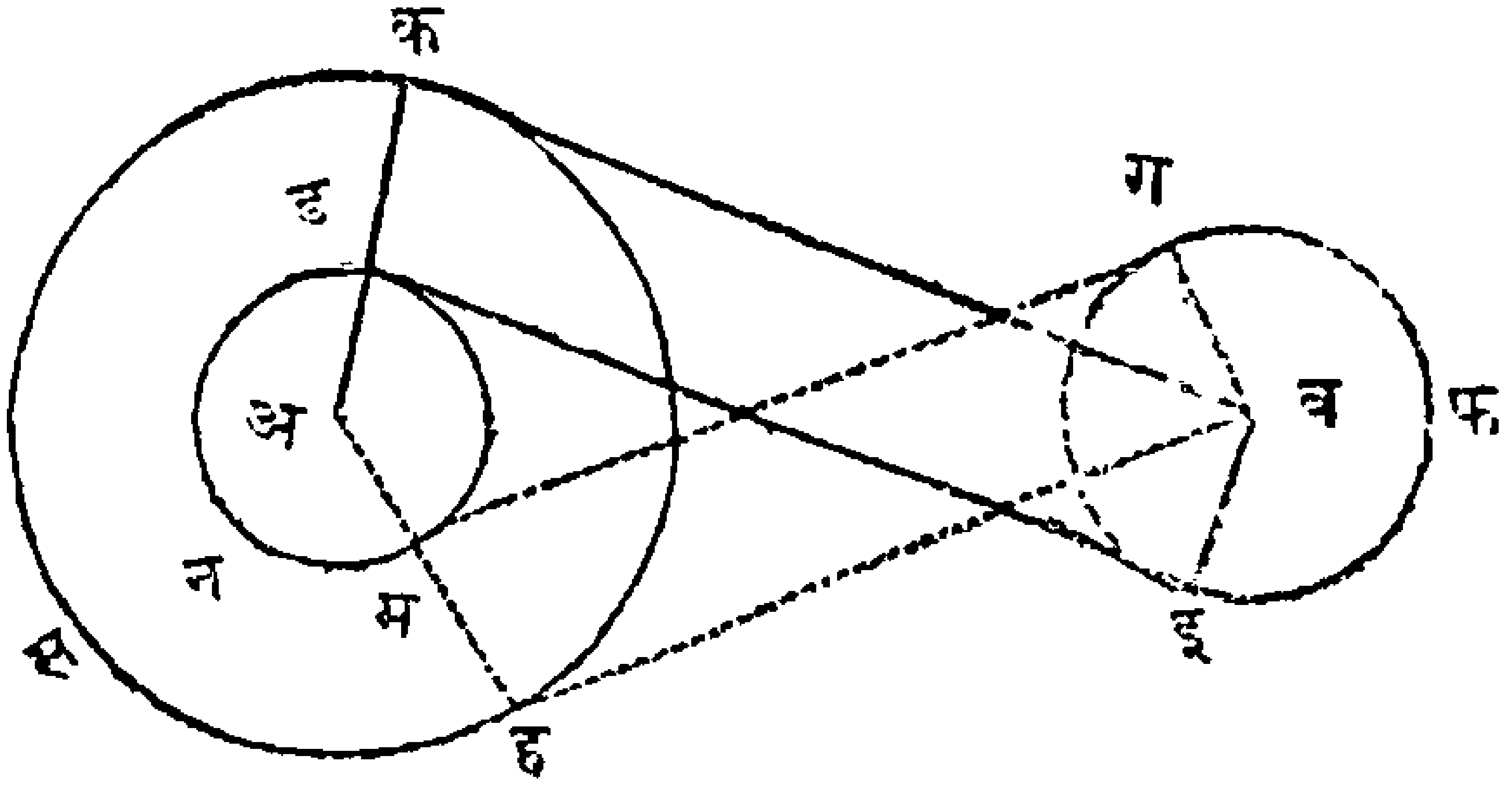
(४) **पफड**, **पफई** कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे.

(५) वर्तुळांत काढिलेल्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंवर परिघांतील एखाद्या बिंदूपासून लंब टाकिले; तर ते त्या बाजूंस ज्या बिंदूंत मिळतात, ते तिन्ही बिंदु एकाच सरळरेषेंत असतात.

९७. (१) **डनम**, **ईफग** ह्या वर्तुळांचे **अ**, **ब** हे मध्यबिंदु आहेत; त्यांच्या त्रिज्यांच्या वजाबाकीएवढ्या त्रिज्येनें, **डनम** वर्तुळाशीं समकेंद्र असें **कसह** वर्तुळ काढिलें आहे; **ब** पासून **कसह** वर्तुळाला **बक** ही स्पर्शरेषा काढिली आहे; स्पर्शबिंदूतून जाणारी **डनम** वर्तुळाची **अड** ही त्रिज्या काढिली आहे; **बई** त्रिज्या **अड**शीं समांतर काढिली आहे; आणि **डई** सांधिली आहे. तर **डई** रेषा **डनम**, **ईफग** ह्या दोन वर्तुळांस साधारण स्पर्शरेषा आहे, असें सिद्ध करा.



(२) मागच्या रचनेंत **डनम**, **ईफग** ह्या वर्तुळांच्या त्रिज्यांच्या



बजाबाकीएवढ्या त्रिज्येनें **कसह** वर्तुळ काढिलें होतें; एथें **डनम, ईफग** ह्या वर्तुळांच्या त्रिज्यांच्या बेरजेएवढ्या त्रिज्येनें **कसह** वर्तुळ काढिलें आहे; आणि बाकीची सर्व रचना मागच्या रचनेप्रमाणेंच केली आहे. तर **डई** ही **डनम, ईफग** ह्या वर्तुळांस साधारण स्पर्शरेषा आहे, असें सिद्ध करा.

(३) दोन वर्तुळांस साधारण स्पर्शरेषा काढण्याच्या रीति मागच्या दोन कलमांच्या आधारानें तयार करून दाखवा. दिलेलीं वर्तुळें समान असतील, तर (१) ह्या कलमांतील रचनेंत काय फरक केला पाहिजे ?

(४) एकमेकांपासून दूर असणाऱ्या वर्तुळांस (१) व (२) ह्या प्रत्येक कलमांतील रीतीनें दोनदोन साधारण स्पर्शरेषा निघतील.

(५) परस्परांस बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांस तीनच साधारण स्पर्शरेषा काढितां येतात.

(६) परस्परांस छेदणाऱ्या वर्तुळांस दोनच साधारण स्पर्शरेषा काढितां येतात.

(७) परस्परांस आंतून स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांस एकच साधारण स्पर्शरेषा काढितां येते.

(८) एक वर्तुळ दुसऱ्याच्या आंत असून त्यास स्पर्श करीत नसेल, तर त्यांना साधारण स्पर्शरेषा मुळींच काढितां येत नाहीं.

९८. वर्तुळांत काढलेल्या **अबकड** चौकोनाच्या **अब, डक** बाजू **ब, क** बिंदूंपलीकडे वाढविल्या असतां **प** बिंदूंत मिळतात; **बक, अड** बाजू **क, ड** बिंदूंपलीकडे वाढविल्या असतां **स** बिंदूंत मिळतात; **बकप, डकस** ह्या त्रिकोणांच्या भोंवतीं काढिलेल्या वर्तुळांचा **क** खेरीज छेदनबिंदु **ई** आहे. तर **प, ई, स** हे बिंदु एकाच सरलरेषेंत आहेत, असें सिद्ध करा.

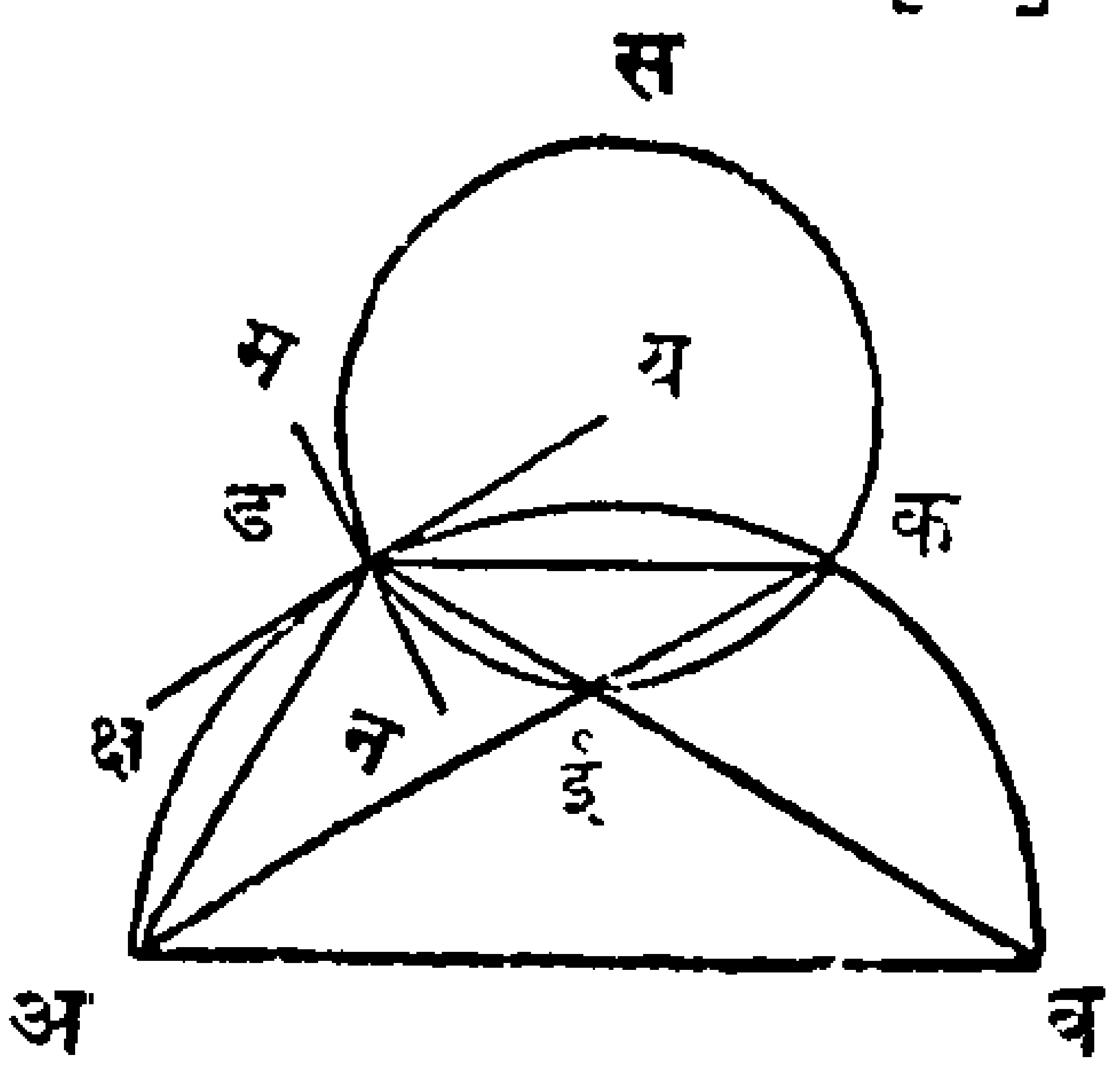
९९. त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनास दुभागणारी रेषा त्या त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुळाच्या परिघास जेथें पुनः मिळते, तो बिंदु

व त्या कोनासमोरच्या बाजूचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा, त्या समोरच्या बाजूवर लंब असते.

१००. त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनास दुभागणारी रेषा व त्या कोनासमोरच्या बाजूच्या मध्यापासून तिजवरच काढिलेला लंब, ह्यांचा मेलनबिंदु हा, त्या त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलाच्या परिघांतच असतो.

१०१. (आकृति [१]) **अबकड** ह्या अर्धवर्तुळांतल्या **अक**, **बड** ज्या ई बिंदूंत छेदितात; **डईक** त्रिकोणाभोंवतीं **डईकस** वर्तुळ काढिलें; **ड** बिंदूंतून **क्षय**, **नम** ह्या अनुक्रमें पहिल्या व दुसऱ्या वर्तुलांस स्पर्शरेषा काढिल्या; आणि **अड** सांधिली. तर असें सिद्ध करा कीं,

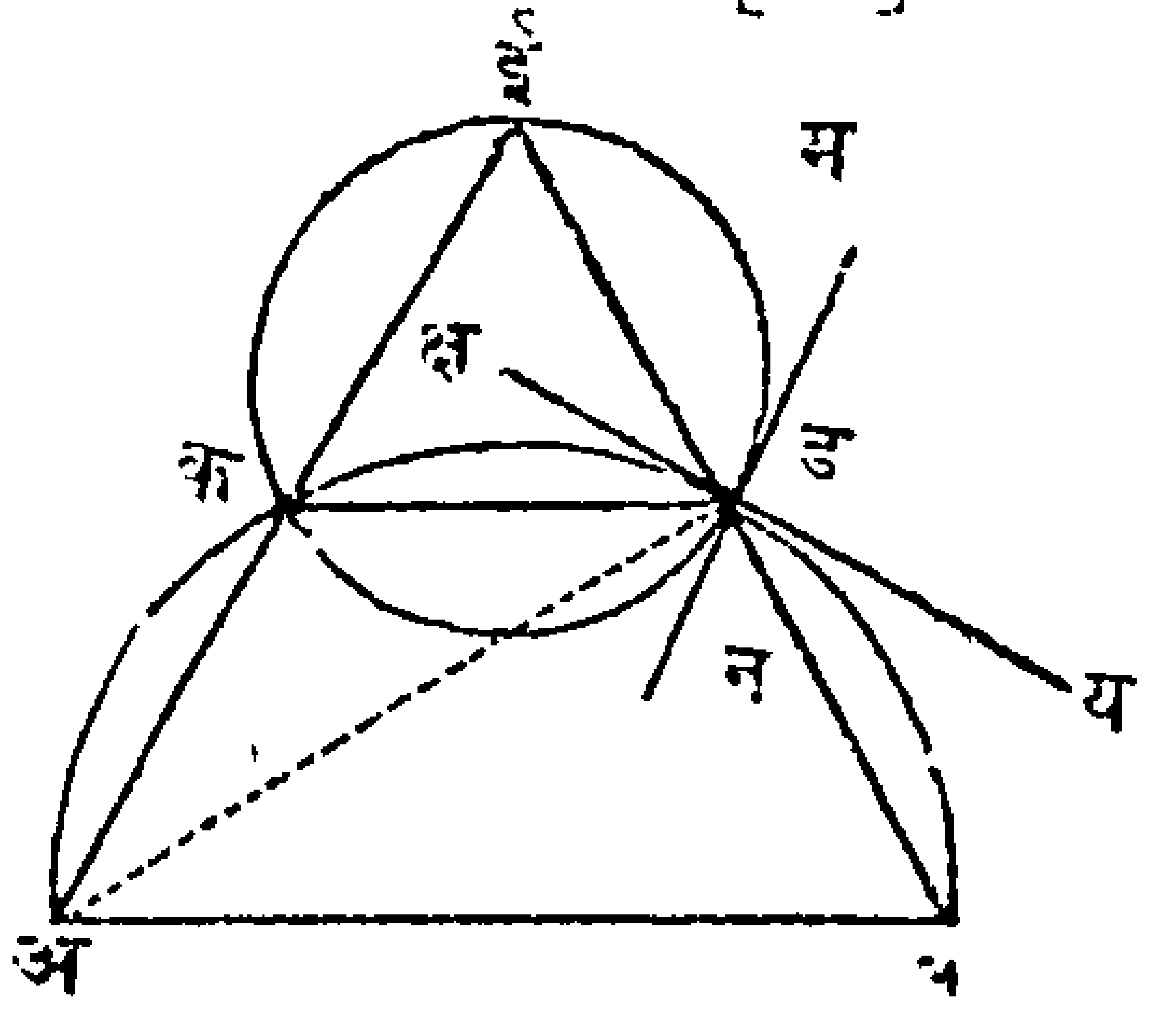
[१]



(१) **अडक्ष** कोन **नडई** कोनाबराबर आहे.

(२) **क्षय**, **नम** ह्या परस्परांवर लंब आहेत.

[२]



(३) (आकृति [२]) **अक**, **बड** ज्यांचा ई हा मेलनबिंदु अर्धवर्तुलाबाहेर असला, आणि **डईक** त्रिकोणाभोंवतीं वर्तुळ काढिलें, तरीही **ड** अथवा **क** बिंदूंतून दोन्ही वर्तुलांस काढिलेल्या स्पर्शरेषा एकमेकींवर लंब असतात.

(सूचना-**नडब** कोन=**मडई** कोन=**ईकड** कोन=**अबड** कोन.·.
नडब कोन=**अबड** कोन; आणि **बडय** कोन=**बअड** कोन.·. **न-**
डय कोन=**डअब** कोन+**डबभ** कोन=१ काटकोन.)

१०२. एका वर्तुलाच्या **अब** ज्येला **क**, **ड** या दोन बिंदूंत छेद-
णारें व त्या वर्तुळास **ई** बिंदूंत आंतून स्पर्श करणारें वर्तुळ काढिलें
आहे; आणि **ई** बिंदूपासून **अ**, **क**, **ड**, **ब** बिंदूंपर्यंत रेषा काढिल्या
आहेत. तर **अईक** कोन **बईड** कोनाबरोबर आहे, असें सिद्ध करा.

१०३. दोन (समांतर अथवा असमांतर) रेषांपैकीं एकीला
तींतील दिलेल्या बिंदूंत स्पर्श करणारें व दुसरीला कोठें तरी स्पर्श
करणारें वर्तुळ काढा.

१०४. ज्याचा परीघ दिलेल्या एका बिंदूंतून जाईल, व जें दि-
लेल्या दोन (समांतर किंवा असमांतर) रेषांस स्पर्श करील, असें
वर्तुळ काढा.

१०५. दिलेल्या वर्तुळांत जितके चौकोन काढितां येतात, त्या
सर्वांमध्यें त्याच वर्तुलांत काढलेलें चौरस महत्तम असतें.

(सूचना-वर्तुलांत काढिलेल्या चौकोनाच्या कोणबिंदूंपर्यंत काढि-
लेल्या त्रिज्यांनीं जे चार त्रिकोण होतात, त्यांच्या बेरजेबरोबर तो
चौकोन असतो; आणि ज्यांच्या दोन दोन बाजू दिलेल्या दोन रेषांशीं
अनुक्रमें समान असतात, अशा सर्व त्रिकोणांमध्यें ज्याच्या त्या बाजू
परस्परांवर लंब असतात, तो महत्तम असतो.)

१०६. दिलेल्या वर्तुळाचे असे दोन खंड करा कीं, त्यांपैकीं एकां-
तील कोन दुसऱ्यांतील कोनाच्या अकरापटीबरोबर होईल.

१०७. एका वर्तुळांतल्या दिलेल्या बिंदूंतून जाणाऱ्या सर्व ज्यांमध्यें
त्या बिंदूंत दुभागिली जाणारी ज्या लघुतम असते.

१०८ एका वर्तुळाच्या परस्परांवर लंब असणाऱ्या आणि वर्तु-
ळांत परस्परांस छेदणाऱ्या दोन ज्यांनीं त्या वर्तुळाच्या परिघाचे
जे चार भाग होतात, त्यांपैकीं समोरासमोरच्या भागांची बेरीज प-
रिघार्धाबरोबर असते.

१०९. दिलेल्या बिंदूंतून जाणारी व दिलेल्या वर्तुळास छेदणारी अशी एक रेषा काढावयाची कीं, तिनें त्या वर्तुळाचे जे दोन खंड होतील, त्यांपैकीं एकांतील कोन दिलेल्या कोनाबरोबर होईल. हा बिंदु दिलेल्या वर्तुळांत असला, तर त्याचें मध्यांतर निदान किती असलें पाहिजे ?

११०. दिलेल्या अमर्याद रेषेमध्यें असा एक बिंदु काढा कीं, त्यापासून दिलेल्या वर्तुळास स्पर्शरेषा काढिली असतां, ती दिलेल्या रेषेशीं दिलेल्या कोनाएवढा कोन करील.

१११. त्रिकोणाभोंवतीं काढिलेल्या वर्तुळाचा मध्य व त्याचा एक कोणबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा व त्याच कोणबिंदूपासून समोरच्या बाजूवर काढिलेला लंब, ह्यांनीं, त्याच कोणबिंदूजवळ, त्रिकोणाच्या दोन्ही बाजूंशीं जे कोन होतात, त्यांपैकीं सांधणाऱ्या रेषेनें एका बाजूशीं केलेला कोन, लंबानें दुसरीशीं केलेल्या कोनाबरोबर असतो.

११२. त्रिकोणांत व त्याच्या भोंवतीं काढिलेल्या वर्तुलांचे मध्यबिंदु सांधणारी रेषा जर त्याच्या एका बाजूला दुभागील, तर त्याच्या इतर बाजू समान असतात.

११३. (१) दोन वर्तुळांस दोन साधारण स्पर्शरेषा काढिल्या, तर एका वर्तुळाचे दोन स्पर्शबिंदु सांधणारी रेषा दुसऱ्याचे स्पर्शबिंदु सांधणाऱ्या रेषेशीं समांतर असते; व (२) त्या स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदूमधील भाग समान असतात.

११४. एका त्रिकोणाकृति इलाख्याच्या तीन बाजू २१०, २३० व ३६० कोस लांबीच्या आहेत. त्यांतील मुख्य शहरापासून इलाख्याच्या तिन्ही कोंपऱ्यांपर्यंत आगगाडीचे सरळ रस्ते तयार करण्याचा मक्ता एकानें ८० लाख रुपयांस घेतला. पुढें त्याला समजलें कीं, एक कोस रस्त्यास वीसहजार रुपयांपेक्षां कमी खर्च पुरत नाहीं. तर त्याला तोटा होईल किंवा नफा होईल.

११५. वर्तुलापासून त्याच्या त्रिज्येइतक्या अंतरावरील एका बिंदूपासून त्याला स्पर्शरेषा काढिली, तर ती त्रिज्येच्या (सुमारें) किती

पटी बराबर असेल ? आणि तो बिंदु व मध्यबिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेशीं स्पर्शरेषेनें केलेला कोन किती अंशांचा असेल ?

११६. एकाच वर्तुलाच्या समांतर नसणाऱ्या दोन स्पर्शरेषांमध्यें जो कोन होतो, तो त्या स्पर्शरेषांच्या मध्यें सांपडलेल्या (बहिर्वक्र) कंसावरील मध्यकोणाचा पूरक असतो.

११७. वर्तुळाच्या परिघार्धापेक्षां मोठा नसणाऱ्या एका कंसाच्या दोन टोंकांजवळ दोन कोन वर्तुळाच्या बाहेर झाले आहेत; प्रत्येक कोनाची एकेक बाजू त्या वर्तुळास स्पर्श करिते; दोन कोनांच्या इतर दोन बाजू परस्परांशीं समांतर आहेत; व ते दोन्ही कोन त्या समांतर रेषांच्या एकाच अंगास आहेत. तर त्या कोनांची वजाबाकी, त्या कंसावरील मध्यकोणाबराबर असते.

भूमितीची पूरणिका.

प्रस्तावना.

भूमितिशास्त्राचें व त्यांत मुख्यत्वेंकरून युक्तिंडच्या भूमितीचें थोडें तरी अध्ययन करणें हा बहुतेक सुधारलेल्या देशांत विद्यार्थ्यांच्या अध्ययनाचा एक आवश्यक भाग मानितात, ह्याचें कारण विद्यार्थ्यांच्या ध्यानांत आलें पाहिजे; म्हणून त्याविषयीं थोडेंसें सांगतों.

कोणत्याही विषयाचें शास्त्र, त्या विषयाची कला, आणि अनुभवावलंबिशास्त्र व अनुमानावलंबिशास्त्र हे शास्त्राचे दोन भेद, ह्यांविषयीं ह्या पूरणिकेच्या शेवटीं जें थोडेंसें लिहिलें आहे, त्यावरून स्पष्ट दिसेल कीं, अनुमानावलंबिशास्त्राची योग्यता फार मोठी आहे. ज्या विषयाच्या शास्त्राला हें स्वरूप देतां आलें, तो विषय पूर्णावस्थेस पोंचला असें समजतात. म्हणूनच शास्त्रकार कोणत्याही विषयाच्या शास्त्राला हें स्वरूप देण्याविषयीं करवेल तितका यत्न करितात. तस्मात् ह्या शास्त्रादिक गोष्टींविषयीं व मुख्यत्वेंकरून अनुमानावलंबिशास्त्राविषयीं विद्यार्थ्यांस थोडी तरी माहिती असणें आवश्यक आहे. कोणत्याही विषयाच्या शास्त्राची व त्यांत अनुमानावलंबिशास्त्राची रचना मुख्यत्वेंकरून पृथक्करण व संयोगीकरण नांवांच्या दोन पद्धतींना अनुसरून असते; म्हणून त्याची रचना ध्यानांत येण्यास ह्या दोन पद्धतींविषयीं विद्यार्थ्यांची चांगली समजूत झाली पाहिजे. ह्या दोन पद्धतींमध्यें अनुमानाचें इतकें प्राधान्य आहे कीं, त्या अनुमानात्मकच आहेत असें ह्मटलें तरी चालेल; म्हणून ह्या पद्धतींविषयीं समजूत होण्यास विद्यार्थ्यांना अनुमानाची शुद्धाशुद्धता चांगली समजली पाहिजे.

पृथक्करण व संयोगीकरण ह्या पद्धति व अनुमान ह्यांची योजना करण्याचा प्रसंग शास्त्ररचनेंतच येतो असें नाहीं. कोणत्याही कार्याचें कारण शोधण्याचा, अमुक कारणापासून अमुक कार्य कसें उ-

त्पन्न झालें असावें हें शोधण्याचा, आणि आपण केलेला शोध अनुमानद्वारा दुसऱ्याच्या ध्यानांत आणून देण्याचा प्रसंग जेव्हां जेव्हां पडतो, तेव्हां तेव्हां ह्या दोन पद्धतींची योजना करावी लागतेच. अनुमानाची गोष्ट तर अशी आहे कीं, ज्यांत अनुमान करण्याचा प्रसंग पडत नाहीं. असा (सुषुप्तीखेरीज) मनुष्याचा बहुधा एक क्षणही जात नाहीं. म्हणून त्या दोन्ही पद्धति व अनुमान ह्यांविषयीं विद्यार्थ्यांस फार चांगली माहिती असली पाहिजे, हें उघड आहे.

आतां अनुमानादिकांची चांगली माहिती होण्यास त्या विषयावरील स्वतंत्र ग्रंथांचें अध्ययन केलें पाहिजे. परंतु ही गोष्ट पुष्कळ अडचणींमुळें सर्व विद्यार्थ्यांच्या हातून घडत नाहीं; ह्याकरितां अनुमानादिकांचे गुणदोष समजून निदान निर्दोष अनुमानें करण्याची सवई लागणें, आणि अमुक गोष्ट अमुक प्रकारची आहे असें अनुमानद्वारा दुसऱ्याच्या ध्यानांत आणून देतेसमयीं अनुमानें सुबोध अशा अनुक्रमानें सांगतां येणें (म्हणजे संयोगीकरणपद्धतीची योजना बिनचूक करितां येणें) ह्या गोष्टी तरी विद्यार्थ्यांस साधल्याच पाहिजेत. ह्या गोष्टी साधण्याला युक्लिडच्या भूमितीचें थोडें तरी अध्ययन करणें हा उत्तम उपाय आहे, असें बहुतेक सुधारलेल्या देशांतले विद्वान् लोक मानितात. युक्लिडची भूमिति हा सारा ग्रंथ संयोगीकरणपद्धतीनेंच लिहिलेला आहे; आणि तो अनुमानद्वारा कोणतीही गोष्ट सिद्ध करून दाखविण्याच्या अत्यंत सुबोध पद्धतीचा व एकंदरींत संयोगीकरणपद्धतीनें लिहिलेल्या अनुमानावलंबिशास्त्राचा इतका उत्तम मासला आहे कीं, त्याचें योग्यपद्धतीनें अध्ययन केलें असतां पूर्वोक्त गुण विद्यार्थ्यांचे अंगीं अंशतः तरी येतीलच, अशी विद्वान् लोकांची खातरी आहे; म्हणूनच विद्यार्थ्यांकडून ह्या ग्रंथाचें थोडें तरी अध्ययन करविण्याविषयीं त्यांचा आग्रह असतो.

अनुमानादिकांचे गुणदोष समजावून देणें इत्यादिक जो वर सांगितला तो युक्लिडच्या ग्रंथाच्या अध्यापनाचा एक उद्देश झाला. ह्या खेरीज त्रिकोणामिति, महत्वमापन इत्यादिक शुद्धगणिताचे कांहीं भाग व प्रेरणाशास्त्र, ज्योतिःशास्त्र इत्यादिक संयुक्तगणिताचे कांहीं भाग

ह्यांच्या अध्ययनाला भूमितीचें बरेंच ज्ञान आवश्यक असतें; तें विद्यार्थ्यांस प्राप्त व्हावें, हा युक्लिडकृत भूमितीच्या अध्यापनाचा दुसरा उद्देश होय. परंतु भूमिति ह्या विषयावरचा युक्लिडचाच ग्रंथ विद्यार्थ्यांस आरंभीं शिकविण्याविषयीं जो विद्वानांचा आग्रह बहुतेक सुधारलेल्या देशांत दिसून येतो, तो मुख्यत्वेंकरून पहिलाच उद्देश सिद्धीस नेण्याकरितां आहे, ह्यांत संदेह नाहीं. कां कीं, जर मुख्यत्वेंकरून दुसरा उद्देश सिद्धीस न्यावयाचा, तर युक्लिडची "लांबलचक" पद्धति टाकून कामापुरत्या सिद्धांतांनीं युक्त असे भूमितीवर संक्षिप्त ग्रंथ तयार केले आणि ते विद्यार्थ्यांस शिकविले, म्हणजे झालें. ही गोष्ट अशक्य होती काय? अथवा आजपर्यंत कोणास सुचली नसेल काय? तथापि युक्लिडच्या "लांबलचक" पद्धतीमध्यें फारसा फेरफार न होतां सुमारें दोन हजार वर्षे त्याच्याच ग्रंथाचें अध्ययन अविच्छिन्न चालू आहे. ह्यावरून पहिल्या उद्देशाचें प्राधान्य सहज दिसून येतें. ह्या उद्देशाकडे विद्यार्थ्यांचें (व कांहीं अध्यापकांचेंही) अगदीं दुर्लक्ष होतें; त्यामुळें ह्या ग्रंथाचें अध्ययन उभयपक्षीं व्यर्थ व कंटाळवाणें वाटतें. पहिल्या उद्देशाकडे दुर्लक्ष होण्याचें मुख्य कारण (मराठी भाषेंत भूमिति शिकणारांच्या संबंधानें) असें दिसतें कीं, युक्लिडकृत ग्रंथाच्या अध्ययनानें ज्या अनुमानविषयक नियमांचें व पृथक्करणादि पद्धतींचें ज्ञान करून घ्यावयाचें, ते नियम व त्या पद्धति ह्यांविषयीं त्या ग्रंथाच्या मराठी भाषेंतील आवृत्तींत एक अक्षरही लिहिलेलें नाहीं. ही अडचण दूर करण्याकरितां न्यायशास्त्रविषयक कांहीं शब्दांच्या व्याख्या, अनुमानादिकांविषयीं कांहीं नियम व पृथक्करणादिकांचें संक्षिप्त वर्णन अशा कांहीं गोष्टी ह्या पुरणिकेमध्यें लिहिल्या आहेत. असल्या संक्षिप्त वर्णनावरून ह्या गोष्टींचें चांगलेंसें ज्ञान होणार नाहीं, हें उघड आहे; तथापि पूर्वोक्त पहिला उद्देश सिद्धीस जाण्यापुरतें ज्ञान होईल, असें वाटतें. निदान ह्या वर्णनावरून ह्या गोष्टींविषयीं विद्यार्थ्यांना जिज्ञासा व अध्यापकांना त्या शिकविण्याविषयीं उत्कंठा उत्पन्न झाली, तरी पुष्कळ झालें.

आतां युक्लिडच्या ग्रंथाचें योग्य पद्धतीनें अध्ययन केलें असतां पहिला उद्देश अंशतः तरी सिद्धीस जाईल, असें वर सुचविलें आहे, ती त्याच्या अध्ययनाची योग्य पद्धति येणेंप्रमाणें:--

पहिल्यानें युक्लिडच्या भूमितीचा कांहीं भाग लक्षपूर्वक वाचून त्यांतील सिद्धांत युक्लिडच्याच सुबोध पद्धतीनें व ग्रंथाच्या मदतीवांचून सिद्ध करितां येतील अशी तजवीज करावी. ग्रंथाचा विषय समजण्याकरितां असा हा यत्न करीत असतां आरंभीं त्यांतल्या कृत्यांच्या व प्रमेयांच्या पृथक्करणाचा विचार करावयास लागूं नये; म्हणजे अमुक कृत्यांत अमुक रचना केली असतां इष्टप्राप्ति होईल हें युक्लिड ह्यानें कसें शोधून काढिलें असावें, अमुक प्रमेयाची सिद्धता करण्याची सामग्री त्यानें कशकशी शोधून काढिली असावी, इत्यादि गोष्टींचा विचार आरंभीं करूं नये. ग्रंथांत सांगितलेल्या रचनांच्या व प्रमाणांच्या योगानें त्यांतील कृत्यांत इच्छिलेल्या गोष्टी कसकशा प्राप्त होतात, व प्रमेयें कसकशीं निर्दोष अनुमानांच्या योगानें सिद्ध होतात, हें मात्र आरंभीं निमूटपणें चांगलें समजून घ्यावें. ह्याप्रमाणें ग्रंथाच्या कांहीं भागाचें चांगलें अध्ययन झालें, म्हणजे अनुमानादिकांचे नियम आणि पृथक्करण व संयोगीकरण हीं समजून घेऊन तीं आपण पाठ केलेल्या भूमितींतल्या उदाहरणांस व सोडविण्याकरितां दिलेल्या प्रश्नांस लागू करून पहावीं. ह्या योगानें त्यांचा बराच परिचय झाला, म्हणजे संख्यागणितादि इतर शास्त्रांतल्या आणि व्यवहारांतल्या गोष्टी अनुमानद्वारा सिद्ध करण्याचे कामीं त्या नियमांची योजना करावयास शिकावें.

ह्या पूरणिकेंतील न्यायशास्त्रविषयक गोष्टींना मुख्यत्वेंकरून इंग्रजी भाषेंतील मिल, जेव्हन्स आणि फौलर ह्यांच्या न्यायशास्त्रविषयक ग्रंथांचा आधार घेतला आहे; व रा. रा. काशिनाथ बाळकृष्ण मराठे ह्यांच्या (मराठी) न्यायशास्त्रांतल्या कांहीं संज्ञा घेतल्या आहेत. त्यांबद्दल मी त्यांचा फार आभारी आहें. पूरणिका तयार करण्याचे कामीं माझ्या गुरुजींनीं व माझ्या एका विद्वान् मित्रानें मला पुष्कळ

महत्त्वाच्या सूचना केल्या. परंतु त्यांच्या नांवाला शोभतील अशा गोष्टी ह्या पूरणिकेंत नाहींत; म्हणून त्यांचीं नांवें एथें लिहीत नाहीं.

ह्या पूरणिकेला न्यायमार्गोपदेशिका म्हटलें तरी चालेल.

विनंति.—ह्या ग्रंथांत ज्या चुका आढळतील, त्या कृपा करून अगत्य कळवाव्या; म्हणजे त्यांच्या सत्यासत्यतेचा विचार करून त्या पुढच्या आवृत्तींत दुरुस्त करीन.

पुणें. ता० २० मे
सन १८८५.

ग्रंथकर्त्ता.

भूमितीच्या पूरणिकेची अनुक्रमणिका.

विषय. पृष्ठांक.

भूमितीची पूरणिका.

प्रतिज्ञा व तिचे भेद.

प्रतिज्ञा.—" अमुक पदार्थ* अथवा पदार्थसमुदाय अमुक प्रकारचा आहे अथवा नाहीं " अशा अर्थाच्या वाक्याला प्रतिज्ञा म्हणावें. जसें, " विष्णु विद्वान् आहे "; " कांहीं त्रिकोण समभुज नसतात;" " त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसरीपेक्षां जास्त असते " ह्या सर्व प्रतिज्ञा होत.

एथें प्रतिज्ञा हा शब्द वाक्यार्थाच्या सत्यतेला किंवा असत्यतेला लक्षून योजिला नाहीं. "मनुष्य हा तीन डोळ्यांचा प्राणी आहे" ह्या वाक्याचा अर्थ जरी खोटा आहे, तरी तो अर्थ वर सांगितल्या प्रकारचा आहे; म्हणून ह्या वाक्याला प्रतिज्ञा म्हणावयाचेंच.

उद्देश्यपद, विधेयपद व योजक.—प्रतिज्ञेच्या ह्या स्वरूपाचे तीन भाग करितां येतात. " अमुक पदार्थ अथवा पदार्थसमुदाय " हा पहिला भाग, " अमुक प्रकारचा " हा दुसरा भाग, आणि " आहे अथवा नाहीं " हा तिसरा भाग. पहिल्या भागाला प्रतिज्ञेचें उद्देश्य व दुसऱ्याला विधेय म्हणतात; आणि त्यांचे वाचक जे शब्द

---

* पदार्थ ह्या शब्दाचा व्यवहारांतला व पदार्थविज्ञानविषयक मराठी ग्रंथांतला जो अर्थ आहे, त्यापेक्षांही व्यापक असा अर्थ आपणांस एथें घ्यावयाचा आहे. तो हा कीं, " ज्याला ज्याला स्वतंत्र सत्ता (ह्मणजे अस्तित्व) आहे किंवा ज्याच्या स्वतंत्र सत्तेविषयीं मनाला कल्पना तरी करितां येते, त्याला पदार्थ ह्मणावें. " व्याकरणांत ज्या शब्दास नामें ह्मणतात, त्यांनीं जे जे दाखविले जातात. ते सारे पदार्थच होत.

विवक्षित पदार्थाचा वाचक जो शब्द किंवा शब्दसमुदाय, त्याला " पद " ह्मणावें. हा पदशब्दाचा अर्थ व्याकरणांतील पदशब्दाच्या अर्थापासून भिन्न आहे, हें ध्यानांत असावें.

किंवा शब्दसमुदाय त्या प्रतिज्ञेंत असतील, त्यांना अनुक्रमें उद्देश्य-पद आणि विधेयपद ह्मणतात. तिसरा भाग म्हणजे उद्देश्याची वि-धेयाशीं तुलना (अथवा योग) दाखविणारें जें "आहे," "नाहीं," "असतें," "नसतें," "होय" इत्यादिक एकादें क्रियापद, त्याला योजक म्हणावें. जसें पूर्वोक्त तीन प्रतिज्ञांमध्यें "विष्णु," "कांहीं त्रिकोण" "त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज" हीं उद्देश्यपदें; "विद्वान्," "समभुज," "तिसरीपेक्षां जास्त" हीं विधेयपदें; आणि "आहे," "नसतात," "असते" हीं यो-जकें होत.

प्रतिज्ञेच्या लक्षणावरून स्पष्ट आहे कीं, "उद्देश्यपदानें दर्शवि-लेल्या सर्व अथवा कांहीं *व्यक्तींचें विधेयपदानें दर्शविलेल्या कांहीं व्यक्तींशीं ऐक्य आहे, अथवा सर्व व्यक्तींशीं ऐक्य नाहीं" हें दाखविणें, अथवा उद्देश्य-पदानें दर्शविलेल्या व्यक्ति किंवा व्यक्तिसमुदाय हा, विधेयपदानें दर्शविलेल्या *जातींतला आहे किंवा नाहीं" हें दाखविणें, हाच कायतो प्रतिज्ञेचा अर्थ असतो. जसें, "विष्णु विद्वान् आहे," एथें "विष्णु" ह्या पदानें दर्शविलेल्या व्यक्तीचें "विद्वान् (पुरुष)" ह्या पदानें दर्शविलेल्या जातींतल्या एका व्यक्तीशीं ऐक्य आहे, अ-थवा "विष्णु" ही व्यक्ति "विद्वान् पुरुष" ह्या जातींतली आहे, असें दर्शविलें आहे. "कांहीं त्रिकोण समभुज नसतात," ह्या प्रतिज्ञेंत "त्रिकोण" ह्या जातींतल्या कांहीं व्यक्ति "समभुज (त्रि-कोण)" ह्या जातींतल्या नाहींत, असें दर्शविलें आहे. "लोंक-रीचें वस्त्र उबदार असतें" ह्या प्रतिज्ञेंत "लोंकरीचें वस्त्र" ह्या जा-तींतल्या सर्व व्यक्तींचें "उबदार (वस्त्र)" ह्या जातींतल्या कांहीं

* "ही गाय" हें व्यक्तिवाचक पद आणि "गाय" हें जातिवा-चक पद. "काशींतलें विश्वेश्वराचें देवालय" हें व्यक्तिवाचक पद व "देवालय" हें जातिवाचक पद. "ही सभा" हें व्यक्तिवाचक पद व "सभा" हें जातिवाचक पद, "विष्णूच्या कानांतली मोत्यांची जोडी" हें व्यक्तिवाचक पद व "मोत्यांची जोडी" हें जातिवाचक पद. "पफ व्यास" हें व्यक्तिवाचक पद आणि "व्यास" हें जातिवाचक पद.

व्यक्तींशीं ऐक्य आहे, म्हणजे "लोंकरीचें वस्त्र" ह्या जातींतल्या सर्व व्यक्ति "उबदार (वस्त्र)" ह्या जातींतल्या कांहीं व्यक्ति आहेत, असें दर्शविलें आहे.

उद्देश्यपद, विधेयपद आणि योजक असे कोणत्याही प्रतिज्ञेचे तीन भाग असावयाचेच; परंतु प्रतिज्ञेला हें वर सांगितलेलें स्वरूप नसलें, तर तिचे ते तीन भाग स्पष्ट दिसत नाहींत. मुख्यत्वेंकरून योजक हें विधेयाशीं मिसळलेलें असतें; आणि तिचे तीन भाग स्पष्ट दिसतील असें स्वरूप तिला देऊं लागल्यास भाषासंप्रदाय सुटतो. परंतु तिचे भाग स्पष्ट दिसणें हें प्रस्तुत (म्हणजे न्यायशास्त्रसंबंधी) विचारामध्यें फार सोईचें आहे; म्हणून प्रत्येक प्रतिज्ञेचें उद्देश्य आणि विधेय हीं आधीं संदर्भावरून अथवा वक्त्याच्या उद्देशावरून ठरवावीं, आणि मग भाषासंप्रदाय राखवेल तितका राखून त्या प्रतिज्ञेला पूर्वोक्त स्वरूप द्यावें, व तिचे ते तीन भाग स्पष्टपणें दाखवावे. जसें, "ज्या संख्येच्या एकंस्थानीं विषम अंक असतो, तिला चोहोंनीं भाग तुटत नाहीं" ह्या प्रतिज्ञेमध्यें जिच्या एकंस्थानीं विषम अंक असतो तिचा धर्म सांगण्याचा उद्देश असल्यास, (१) जिच्या एकंस्थानीं विषम अंक असतो ती संख्या (२) चोहोंनीं विभाज्य (३) नसते" असें म्हणावें; आणि चार ह्या संख्येचा धर्म सांगण्याचा उद्देश असल्यास "(१) चार ही संख्या (२) जिच्या एकंस्थानीं विषम अंक असेल तिला विभागणारी (३) नाहीं" असें म्हटलें पाहिजे. "रामा जेवला" ह्या प्रतिज्ञेचे (१) "रामा," (२) "जेवलेला" व (३) "आहे" हे तीन भाग होत. "रामा नीतीनें वागतो" ह्या प्रतिज्ञेचे (१) "रामा," (२) "नीतीनें वागणारा" व (३) "आहे" हे तीन भाग होत. "विष्णु आहे" ह्या प्रतिज्ञेचे (१) "विष्णु," (२) "वर्तमानकालिकसत्तावान्" व (३) "आहे" हे तीन भाग होत.

व्यक्तिप्रतिज्ञा व जातिप्रतिज्ञा.—ज्या प्रतिज्ञेचें उद्देश्यपद व्यक्तिवाचक असतें, तिला "व्यक्तिप्रतिज्ञा" म्हणावें; आणि जिचें उद्देश्यपद जातिवाचक असतें, तिला "जातिप्रतिज्ञा" म्हणावें.

जसें, "हो गाय तांबडी आहे" ही व्यक्तिप्रतिज्ञा आणि "सर्व गाई (अथवा कांहीं गाई) तांबड्या असतात" ही जातिप्रतिज्ञा. "**पफ** व्यास त्रिज्येच्या दुपटीबरोबर आहे" ही व्यक्तिप्रतिज्ञा; आणि "व्यास त्रिज्येच्या दुपटीबरोबर असतो" ही जातिप्रतिज्ञा होय.

व्यापकार्थकपद आणि **व्याप्यार्थकपद**.–प्रतिज्ञेमध्यें उद्देश्यस्थानीं किंवा विधेयस्थानीं योजिलेल्या पदानें ज्या व्यक्ति दर्शविल्या जाण्याचा संभव आहे, त्यांपैकीं प्रत्येक व्यक्तीला लक्षून तें पद त्या प्रतिज्ञेंत योजिलेलें असेल, तर तें त्या स्थळीं "**व्यापकार्थकपद**" म्हणावें; आणि त्या पदानें दाखविलेल्या जाणाऱ्या व्यक्तींपैकीं कांहीं व्यक्तींना मात्र लक्षून तें पद योजिलेलें असेल, तर त्याला "व्याप्यार्थक पद" म्हणावें. जसें, "प्रत्येक (अथवा कोणताही) चौरस हा समांतरभुजचौकोन असतो" अथवा "सर्व चौरस हे समांतरभुजचौकोन असतात" ह्या प्रत्येक प्रतिज्ञेचा अर्थ "चौरस ह्या जातींतील सर्व व्यक्ति समांतरभुजचौकोन ह्या जातींतल्या कांहीं व्यक्ति आहेत" असाच आहे. म्हणून एथें "चौरस" हें पद व्यापकार्थक आणि "समांतरभुजचौकोन" हें पद व्याप्यार्थक झालें. "कांहीं नाणीं रुप्याचीं नसतात" येथें "नाणीं" हें पद व्याप्यार्थक आणि "रुप्याचीं (नाणीं)" हें पद व्यापकार्थक आहे. कांकीं "नाणीं" ह्या जातींतल्या कांहीं व्यक्तींचें "रुप्याचीं नाणीं" ह्या जातींतल्या कोणत्याही व्यक्तीशीं ऐक्य नाहीं, असा ह्या प्रतिज्ञेचा अर्थ आहे; म्हणजे "नाणें" हें जातिवाचक पद त्या जातींतील कांहीं व्यक्तींस लक्षून योजिलेलें आहे, व "रुप्याचीं नाणीं" हें जातिवाचक पद त्या जातींतल्या सर्व व्यक्तींस लक्षून योजिलेलें आहे. "**कखग** त्रिकोण समभुज आहे" येथें "**कखग** त्रिकोण" हें व्यापकार्थक पद आहे; व "समभुज (त्रिकोण)" हें व्याप्यार्थक पद आहे.

प्रतिज्ञेंतल्या पदांची व्याप्यार्थकता किंवा व्यापकार्थकता दाखविणारे "कांहीं," "कित्येक," "प्रत्येक," "कोणताही," "सर्व,"

इत्यादिक शब्द, भाषासंप्रदाय न सोडितां प्रत्यक्ष योजितां येतील, तर अगत्य योजावे; म्हणजे प्रतिज्ञेचा अर्थ संदिग्ध रहात नाहीं.

व्यापकप्रतिज्ञा आणि **व्याप्यप्रतिज्ञा**.–प्रतिज्ञेचें उद्देश्यपद व्यापकार्थक असलें, तर तिला "व्यापकप्रतिज्ञा म्हणावें;" आणि उद्देश्यपद व्याप्यार्थक असलें, तर तिला "व्याप्यप्रतिज्ञा" म्हणावें. जसें, "प्रत्येक चोरस समकोण असतो" ही व्यापकप्रतिज्ञा; व "कांहीं समांतरभुजचौकोन समकोण नसतात" ही व्याप्यप्रतिज्ञा झाली.

व्याप्ति.–व्यापकप्रतिज्ञेचें उद्देश्यपद जातिवाचक असल्यास तिला "व्याप्ति" असें म्हणतात.

सत्तार्थकप्रतिज्ञा व **अभावार्थकप्रतिज्ञा**.–प्रतिज्ञेचे योजक "आहे" "असतें" इत्यादिक एखादें असलें, तर तिला "सत्तार्थक-प्रतिज्ञा" म्हणावें; आणि योजक "नाहीं" "नसतें" इत्यादिक असलें, तर त्या प्रतिज्ञेला "अभावार्थकप्रतिज्ञा" म्हणावें. जसें, "**अ** रेषा **क** रेषेशीं समान आहे" ही सत्तार्थकप्रतिज्ञा; व "**अ** रेषा **क** रेषेशीं समान नाहीं" ही अभावार्थक प्रतिज्ञा होय.

व्यापकप्रतिज्ञा आणि व्याप्यप्रतिज्ञा हे भेद उद्देश्यपदाच्या व्याप्तीला लक्षून केले, आणि सत्तार्थकप्रतिज्ञा व अभावार्थकप्रतिज्ञा हे भेद योजकाच्या भाववाचकतेला व अभाववाचकतेला लक्षून केले. आतां ह्या दोन्ही गोष्टींस एकदम लक्षून प्रतिज्ञांचे भेद कल्पिले, तर (१) सत्तार्थक–व्यापकप्रतिज्ञा, (२) सत्तार्थकव्याप्यप्रतिज्ञा, (३) अभावार्थक-व्यापकप्रतिज्ञा आणि (४) अभावार्थकव्याप्यप्रतिज्ञा असे चार भेद होतील. ह्यांना अनुक्रमें **अ**, **इ**, **ए**, **ओ** अशा संज्ञा देऊं. "चौरस" आणि "समकोण (ज्याचे सर्व कोन सारखे आहेत असा)" ह्या उद्देश्यविधेयपदांच्या एकाच जोडीला लक्षून ह्या चारही प्रकारच्या प्रतिज्ञा तयार केल्यास त्यांची स्वरूपें अशीं होतील:–

अ—प्रत्येक चौरस समकोण असतो.

इ—कोणताही चौरस समकोण नसतो.

ए—कांहीं चौरस समकोण असतात.

ओ—कांहीं चौरस समकोण नसतात.

इ प्रतिज्ञेच्या उद्देश्याला " प्रत्येक," " हरएक," " दरएक," " सर्व " हीं विशेषणें लाविलीं असतां ती प्रतिज्ञा बहुधा संदिग्धार्थक होते. ही गोष्ट " प्रत्येक हिंदू काळ्या वर्णाचा नसतो," " सर्व हिंदू काळ्या वर्णाचे नसतात," " हरएक इंग्रज काळ्या वर्णाचा नसतो," " सर्व इंग्रज काळ्या वर्णाचे नसतात " ह्या प्रतिज्ञांवरून स्पष्ट दिसेल. ह्याकरितां इ प्रतिज्ञेच्या उद्देश्याला " कोणताही," " कोणताच," " एकही," " एक देखील," " एक सुद्धां," हीं विशेषणें लावावीं.

उद्देश्यविधेयपदांच्या व्याप्तीविषयीं नियमः—

(१) व्यापकप्रतिज्ञांचीं उद्देश्यपदें व्यापकार्थक असतात.

(२) व्याप्यप्रतिज्ञांचीं उद्देश्यपदें व्याप्यार्थक असतात.

(३) सत्तार्थक प्रतिज्ञांचीं विधेयपदें व्याप्यार्थक असतात. (परंतु त्या पदांना " कांहीं " इत्यादिक व्याप्यार्थकतादर्शक विशेषण लावण्याचा भाषासंप्रदाय नाहीं.)

(४) अभावार्थक प्रतिज्ञांचीं विधेयपदें व्यापकार्थक असतात.

ह्या चार नियमांवरून खालीं लिहिलेले नियम निघतात.

(१) अ प्रतिज्ञेचें उद्देश्यपद व्यापकार्थक असतें; आणि विधेयपद व्याप्यार्थक असतें.

(२) इ प्रतिज्ञेचीं दोन्ही पदें व्यापकार्थक असतात.

(३) ए प्रतिज्ञेचीं दोन्ही पदें व्याप्यार्थक असतात.

(४) **ओ** प्रतिज्ञेचें उद्देश्यपद व्याप्यार्थक असतें; आणि विधेयपद व्यापकार्थक असतें.

उद्देश्यविधेयांच्या एकाच जोडीला लक्षून तयार केलेल्या **अ**, **इ**, **ए**, **ओ** ह्या चार प्रतिज्ञांचे जे परस्परांशीं संबध त्यांचीं नांवें:—

(१) **व्यापकविपरीत प्रतिज्ञा**.—**अ** आणि इ ह्या प्रतिज्ञा परस्परांच्या " व्यापकविपरीत प्रतिज्ञा " म्हणाव्या; आणि त्यांच्या संबंधाला व्यापकवैपरीत्य," म्हणावें.

(२) **व्याप्यविपरीत प्रतिज्ञा**.—ए आणि **ओ** ह्या प्रतिज्ञा पर-

स्परांच्या "व्याप्यविपरीत" म्हणाव्या; आणि त्यांच्या संबंधाला "व्याप्यवैपरीत्य" म्हणावें.

(३) **व्याप्यव्यापक प्रतिज्ञा.**–**अ** आणि **इ** ह्या प्रतिज्ञा अनुक्रमें **ए** आणि **ओ** ह्यांच्या व्यापकप्रतिज्ञा, व **ए** आणि **ओ** ह्या अनुक्रमें **अ** आणि **इ** ह्यांच्या व्याप्यप्रतिज्ञा आहेत; म्हणून **अ** आणि **ए** ह्यांचा व **इ** आणि **ओ** ह्यांचा जो परस्परांशीं संबंध त्याला "व्याप्यव्यापकभाव" म्हणावें.

(४) **विरुद्धप्रतिज्ञा.**–**अ** आणि **ओ**, तशाच **इ** आणि **ए** ह्या परस्परांशीं "विरुद्धप्रतिज्ञा" म्हणाव्या; आणि ह्यांच्या संबंधाला "विरोध" म्हणावें.

व्यक्तिप्रतिज्ञा ही (व्यापकप्रतिज्ञेच्या लक्षणाप्रमाणें) व्यापक प्रतिज्ञाच होय. तिची व्याप्यप्रतिज्ञा संभवत नाहीं. म्हणून कोणत्याही व्यक्तिप्रतिज्ञेची व्यापकविपरीतप्रतिज्ञा आणि विरुद्धप्रतिज्ञा ह्या दोन्ही एकच असतात. ही गोष्ट भूमितीमध्यें फार उपयोगी आहे.

(५) **व्यत्त्यास.**– कोणतीही प्रतिज्ञा आणि तिच्या उद्देश्यविधेयपदांचा व्यत्त्यास केल्यानें (म्हणजे उद्देश्यपदाच्या ठिकाणीं विधेयपद आणि विधेयपदाच्या ठिकाणीं उद्देश्यपद ठेवणें एवढीच अदलाबदल केल्यानें) होणारी प्रतिज्ञा, त्या दोहोंपैकीं कोणत्याही एकीला "मूल प्रतिज्ञा" अथवा "मूल" म्हणावें, आणि दुसरीला तिची "व्यत्त्यस्तप्रतिज्ञा" किंवा तिचा "व्यत्त्यास" म्हणावें; आणि अशा दोन प्रतिज्ञांच्या परस्पर संबंधाला "मूलव्यत्त्यासभाव" म्हणावें. जसें, "समसंख्या ही अविभाज्यसंख्या नसते," आणि "अविभाज्यसंख्या ही समसंख्या नसते" ह्या दोन प्रतिज्ञांपैकीं कोणतीतरी एक "मूलप्रतिज्ञा" अथवा "मूल" मानिलें, तर दुसरी तिची "व्यत्त्यस्तप्रतिज्ञा" अथवा तिचा "व्यत्त्यास" होय.

मूलांतील पदें व्याप्यार्थक किंवा व्यापकार्थक जशीं असतील तशींच व्यत्त्यासांत ठेविलीं पाहिजेत असें नाहीं; पदें तींच असून त्यांची व्याप्ति बदलली, तरी त्याला व्यत्यासच म्हणावयाचें, असा ह्या ग्रंथांतला संकेत समजावा. जसें, "प्रत्येक चौरस हा समकोण-

चौकोन असतो " ह्या प्रतिज्ञेचे " प्रत्येक समकोणचौकोन हा चौरस असतो " आणि "कांहीं समकोणचौकोन चौरस असतात" हे दोन्ही व्यत्त्यासच समजावयाचे. ह्या दोहोंपैकीं पहिल्यामध्यें " समकोणचौकोन " ह्या पदाची व्याप्ति बदलली गेली, हें उघड आहे.

कोणत्याही प्रतिज्ञेचा व्यत्त्यास व्याप्यप्रतिज्ञात्मक असल्यास त्याला " व्याप्यव्यत्त्यास " ह्मणावें, आणि व्यापकप्रतिज्ञात्मक असल्यास त्याला " व्यापकव्यत्त्यास " म्हणावें. जसें, " प्रत्येक चौरस हा समकोणचौकोन असतो " ह्या मूलप्रतिज्ञेचा " कांहीं समकोणचौकोन चौरस असतात " हा व्याप्यव्यत्त्यास होय, आणि " प्रत्येक समकोणचौकोन चौरस असतो " हा व्यापकव्यत्त्यास होय.

(६) **प्रतियोग.**–प्रतिज्ञेच्या विधेयपदाच्या ठिकाणीं त्याचें प्र*-तियोगिपद घालणें व योजक सत्तार्थक असल्यास अभावार्थक करणें आणि अभावार्थक असल्यास सत्तार्थक करणें, एवढाच त्या प्रतिज्ञेमध्यें फेरफार केला असतां जी प्रतिज्ञा होते, तिला मूलप्रतिज्ञेचा " प्रतियोग " म्हणावें. जसें, " चोहोंनीं विभाज्य असणारी संख्या सम असते " ह्या प्रतिज्ञेचा " चोहोंनीं विभाज्य असणारी संख्या विषम नसते " हा प्रतियोग होय. अशा दोन प्रतिज्ञा हे परस्परांचे प्रतियोग असतात.

अ आणि **इ** ह्यांपैकीं प्रत्येक प्रतिज्ञेच्या प्रतियोगाला (तिचा अर्थ न बदलतां) दुसरीचें रूप येतें. तसेंच **ए** आणि **ओ** ह्यांविषयीं ही समजावें.

---

* कोणत्याही पदानें दर्शविलेली व्यक्ति किंवा व्यक्तिसमुदाय हा ज्या जातींतील व्यक्तिसमुदायाचा भाग आहे, असें प्रसंगविशेषीं मानिलें असेल, त्या जातींतल्या इतर सर्व व्यक्तींचें दर्शक जें पद, त्याला मूळ पदाचें " प्रतियोगिपद " ह्मणावें. जसें, " समसंख्या " ह्या पदानें दर्शविलेला व्यक्तिसमुदाय हा " पूर्णसंख्या " ह्या जातींतल्या व्यक्तिसमुदायाचा भाग मानिला आहे, ह्मणून त्या जातींतल्या इतर सर्व व्यक्तींचें वाचक जें " विषमसंख्या " हें पद, तें " समसंख्या " ह्या पदाचें प्रतियोगि पद समजावें. " देशस्थ ब्राह्मण " ह्या पदाचें प्रतियोगिपद " कोंकणस्थ ब्राह्मण " हें नव्हे;" देशस्थभिन्न ब्राह्मण " हें होय.

(७) **अन्वयव्यतिरेक.**–" जी जी व्यक्ति अमुक एका प्रकारची असते, ती ती अमुक दुसऱ्या प्रकारची असते " अशा अर्थाच्या प्रतिज्ञेला " अन्वयव्याप्ति " (अथवा " अन्वय " असेंही) म्हणतात; आणि " जी जी व्यक्ति अमुक एका प्रकारची नसते, ती ती अमुक दुसऱ्या प्रकारची नसते. " अशा अर्थाच्या प्रतिज्ञेला " व्यतिरेकव्याप्ति " (अथवा " व्यतिरेक " असेंही) म्हणतात. जसें, " जो जो त्रिकोण समभुज असतो, तो तो समकोण असतो " ही अन्वयव्याप्ति, आणि " जो जो त्रिकोण समभुज नसतो तो तो समकोण नसतो. " ही व्यतिरेकव्याप्ति होय.

कार्यकारण.—" ज्या एक किंवा अनेक गोष्टी एकाच काळीं विद्यमान असतां उत्तरक्षणीं दुसरी अमुक गोष्ट उत्पन्न व्हावयाचीच, त्या एक किंवा अनेक गोष्टींना मिळून त्या उत्पन्न झालेल्या गोष्टीचें कारण म्हणावें; आणि त्या उत्पन्न झालेल्या गोष्टीला त्या कारणाचें कार्य म्हणावें. " जसें, " दोन समर्याद सरलरेषांपैकीं (१) एकीचें एक टोंक दुसरीच्या एका टोंकाशीं मिळणें, (२) त्यांची दिशा एक होणें व (३) त्या समान असणें, ह्या तीन गोष्टी एकाच काळीं विद्यमान असतां त्यांचीं दुसरीं टोंकें मिळणें, ही चवथी गोष्ट उत्पन्न व्हावयाचीच; म्हणून पहिल्या तीन गोष्टी मिळून चवथीचें कारण होय; आणि चवथी हें त्या तिहींचें मिळून कार्य होय. ह्या व्याख्येंत सांगितल्या प्रकारचा कार्यकारणभाव ज्या गोष्टींमध्यें आहे, त्यांचा नित्य संबंध असतो, म्हणजे जेव्हां जेव्हां तें कारण उत्पन्न होईल, तेव्हां तेव्हां तें कार्य उत्पन्न व्हावयाचेंच असा नियम असतो. (ह्या व्याख्येप्रमाणें अनेक गोष्टी मिळून जर एखाद्या कार्याचें कारण असलें, तर त्यांपैकीं प्रसंगवशात् कोणत्याही एकाच गोष्टीला देखील कारण ही संज्ञा व्यवहारांत देतात. हा कारण शब्दाच्या व्यावहारिक व न्यायशास्त्रोक्त अर्थांमधील भेद ध्यानांत ठेवावा; आणि " कांकीं, " " ज्यापक्षीं " इत्यादिक कारणवर्णनारंभसूचकशब्द व " म्हणून " " त्यापक्षीं " इत्यादिक कार्यवर्णनारंभसूचकशब्द योजितेवेळीं, ज्या

गोष्टींना उद्देशून ते योजावयाचे, त्यांचा न्याय शास्त्रोक्त कार्यकारणभाव आहे अशी खातरी झाली, तरच ते शब्द योजावे. ")

प्रत्यक्षपद्धति, शाब्दपद्धति व अनुमानपद्धति.--अमुक प्रतिज्ञा (निर्विवाद) सत्य आहे, असें ठरविण्याच्या मुख्य पद्धति तीन दिसतात. (१) त्या प्रतिज्ञेविषयीं इंद्रियद्वारा प्रत्यक्ष अनुभव घेणें ही एक पद्धति. हिला " प्रत्यक्षपद्धति " म्हणावें. जसें, " अमुक देवालय शिवाचें आहे " असें ठरवावयाचें आहे, तर त्यांतील मुख्य देवता प्रत्यक्ष पाहून ठरविणें ही प्रत्यक्षपद्धति झाली. (२) कोणा यथार्थ वक्त्याच्या वाक्यावरून एखादी प्रतिज्ञा खरी ठरविणें, ही दुसरी पद्धति, हिला " शाब्दपद्धति " म्हणावें. जसें, प्राचीनकाळच्या बहुतेक गोष्टी आपण इतिहासकर्त्यांच्या वाक्यांवरून खऱ्या ठरवितों; ही शाब्दपद्धति झाली. (३) तिसरी " अनुमानपद्धति" हिचें उदाहरण असें कीं, " ह्या दोन खांबांच्या उंच्या सारख्या आहेत " असें ठरवावयाचें आहे, म्हणून एकच काठी दोन्ही खांबांना जोडून पाहिली, ती प्रत्येकाशीं सारखी भरली असें समजा. आतां " एकाच पदार्थाशीं समान असणारे पदार्थ परस्पर समान असतात, दोन खांबांच्या उंच्या हे पदार्थ काठीची लांबी ह्या एकाच पदार्थाशीं समान आहेत; म्हणून त्या उंच्या परस्पर समान आहेत " ही अनुमानपद्धति झाली.

उपमानपद्धति.–अमुक प्रतिज्ञा खरी आहे, असें ठरविण्याची आणखी एक पद्धति मानितात. हिला " उपमानपद्धति " अशी संज्ञा देऊं. हिचें सामान्य स्वरूप एक दोन उदाहरणांनीं दर्शवितों. " **अबकडई** ही पंचकोणाकृति समभुज आहे, असें दिलें आहे, आणि " ती समकोण आहे " ही गोष्ट कोणी ठरवीत आहे, असें समजा. आतां सरलरेषाकृतींचें समभुजत्व आणि समकोणत्व ह्यांचा नित्यसंबंध आहे, अशी ठरविणाराची खातरी नसतां (व नित्यसंबंध नाहीं, अशीही खातरी नसतां) जर तो म्हणेल कीं, " त्रिकोण समभुज असला, तर तो समकोण असतो, असें ठरलें आहे, प्रस्तुत

पंचकोण समभुज आहे; ह्मणून तोही समकोण असला पाहिजे," तर समभुजत्रिकोण व प्रस्तुत पंचकोण ह्यांचें सरलरेषाकृतित्व आणि समभुजत्व ह्या धर्मांच्या संबंधानें जें सादृश्य, त्याच्याच केवळ आधारावर त्यानें प्रस्तुत पंचकोण समकोण ठरविला, असें होईल. ही उपमानपद्धति झाली. तसेंच "पृथ्वी आणि शुक्र ह्या दोन ग्रहांमध्यें, आपल्या अक्षाभोंवतीं भ्रमण, सूर्याभोंवतीं भ्रमण, गोलकल्पाकृति, इत्यादि कांहीं धर्मांच्या संबंधानें सादृश्य आहे; आणि पृथ्वीच्या पृष्ठावर प्राणी आहेत; ह्मणून शुक्राच्या पृष्ठावरही प्राणी असले पाहिजेत," असें कोणी ठरविलें; आणि ते सादृश्यविषयक धर्म व पृष्ठावर प्राणी असणें ह्यांचा नित्यसंबंध आहे, अशी ठरविणाराची खातरी नसली (व नित्यसंबंध नाहीं अशीही खातरी नसली,) तर त्यानें केवळ सादृश्याच्याच आधारानें ही गोष्ट ठरविली असें होतें. ही उपमानपद्धति झाली. हिचें सामान्य लक्षण असें.- "अमुक (एक अथवा अनेक) व्यक्तींमध्यें अमुक धर्म आहे, व त्या व्यक्तींचें नवीन एका व्यक्तीशीं एक अथवा अनेक गोष्टींच्या संबंधानें सादृश्य आहे, असें अनुभवास आलें; पण त्या सादृश्यविषयक गोष्टींचा त्या (साध्य) धर्माशीं नित्यसंबंध आहे, अशी खातरी होत नाहीं (व नाहीं अशीही खातरी होत नाहीं) असें असतांही, त्या नवीन व्यक्तीमध्यें तो (साध्य) धर्म आहे, असें केवळ त्या सादृश्याच्याच आधारानें ठरविणें " ही उपमानपद्धति " होय.

ह्या पद्धतीनें ठरविलेली गोष्ट हा नुसता अदमास अथवा अटकळ होय; ती सत्य असतेच असा नियम नाहीं. तथापि इतर कोणत्याही पद्धतीच्या योजनेचें साहित्य ज्यांत जुळत नाहीं, असे जे प्रसंग मनुष्याला पदोपदीं येतात, त्या प्रसंगीं आरंभीं ह्या पद्धतीचीच योजना करणें भाग पडतें; मग जसजसें इतर पद्धतींपैकीं एखादीच्या योजनेचें साहित्य जुळतें, तसतसा त्या गोष्टीच्या सत्यासत्यतेचा निर्णय होतो. नाना शास्त्रांतलीं जीं अनंत प्रमेयें आहेत, त्यांपैकीं कित्येक अशीं आहेत कीं, तीं शोधून काढणारांना आरंभीं ह्याच पद्धतीनें

त्यांविषयीं अदमासच करावा लागला. मग प्रयोग*-निरीक्षणद्वारा कार्यकारणविचाराच्या योगानें हळू हळू त्यांची सत्यता स्थापित होत गेली. केप्लरचे कांहीं नियम हे आरंभीं त्यानें ह्याच पद्धतीनें शोधून काढिले होते. पुढें न्यूटन ह्यानें तीं आकर्षणाचीं कार्यें आहेत, असें दाखवून त्यांची सत्यता अनुमानपद्धतीनें स्थापित केली.

न्यायशास्त्राचा विषय.—ह्या चारही पद्धतींच्या गुणदोषांचा विचार करणें हा न्यायशास्त्राचा मुख्य विषय आहे. असें कित्येक न्यायशास्त्रकार मानितात, परंतु वहुतेकांचें मत असें आहे कीं, प्रत्यक्ष आणि शाब्द ह्या पद्धतींनीं खरी ठरलेली गोष्ट न्यायशास्त्रांत निर्विवादच मानावयाची; आणि अमुक प्रतिज्ञा खरी आहे असें ह्या दोन पद्धतींच्या योजनेवांचून ठरविण्याकरितां मिळालेला जो पुरावा (म्हणजे आधारभूत प्रतिज्ञा) तो असावा तितका आहे किंवा नाहीं, हें ठरविणें, हाच कायतो न्यायशास्त्राचा विषय. सारांश अनुमानपद्धति व उपमानपद्धति ह्यांच्या गुणदोपांचा विचार करणें हा न्यायशास्त्राचा विषय, असें बहुतेक न्यायशास्त्रकारांचें मत आहे. हीं मतें कशींही असोत. सध्यां आपणांस नुसत्या अनुमानपद्धतीच्या एका भागाविषयीं मात्र थोडे नियम सांगावयाचे आहेत.

+ **अनुमान.**—पूर्वीं कोणत्या तरी पद्धतीनें खऱ्या ठरलेल्या (अथवा खऱ्या मानिलेल्या) एक अथवा अनेक प्रतिज्ञांच्या योगानें

---

* दोन गोष्टींचा कार्यकारणभाव ठरवावयाचा असतां, ज्या गोष्टीला आपण कारण म्हणणार, ती उत्पन्न करून उत्तरक्षणीं कार्य उत्पन्न होतें किंवा नाहीं, हें पहाणें, ह्या कृत्याला " प्रयोग " म्हणावें; आणि जेव्हां जेव्हां कार्य आपोआप उत्पन्न होईल, तेव्हां तेव्हां पूर्वक्षणीं तेंच कारण उत्पन्न झालें होतें किंवा नाहीं, हें पहाणें, ह्या कृत्याला " निरीक्षण " म्हणावें.

+ अनुमान हा शब्द मराठीभाषेंत वहुधा " अदमास " अथवा " अटकळ " ह्या अर्थानें योजितात, परंतु येथें तो अर्थ घ्यावयाचा नाहीं. हा शब्द येथें पद्धतीला लक्षून योजिला आहे. हें ध्यानांत असावें.

नवीन एखादी प्रतिज्ञा स्थापित करणें, ह्या पद्धतीला (अनुमान-पद्धति अथवा) अनुमान म्हणावें.

प्रमाणें.–अनुमानामध्यें ज्या एक अथवा अनेक प्रतिज्ञांच्या आधारानें नवीन प्रतिज्ञा स्थापित करावयाची, त्यांना "प्रमाणप्रतिज्ञा" अथवा "प्रमाणें" ह्मणावें.

अनुमिति, पक्ष व साध्य.––अनुमानपद्धतीनें स्थापित झालेल्या प्रतिज्ञेला "अनुमिति" म्हणावें. अनुमितीच्या उद्देश्याला "पक्ष" आणि विधेयाला "साध्य" म्हणावें.

अनुमानाचे व्यापकानुमान आणि व्याप्यानुमान असे दोन भेद आहेत.

व्यापकानुमान.–पूर्वी कोणत्यातरी पद्धतीनें खऱ्या ठरलेल्या एक अथवा अनेक व्यक्तिप्रतिज्ञा किंवा व्याप्यजातिप्रतिज्ञा यांच्या आधारानें व्यापकजातिप्रतिज्ञा खरी ठरविणें, ह्या पद्धतीला "व्यापकानुमान" ह्मणावें; आणि ह्या पद्धतीनें स्थापित केलेल्या प्रतिज्ञेला "व्यापकानुमिति" म्हणावें.

जसें "१ व २ ह्यांची बेरीज २ व ३ ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर आहे;" "१, २ व ३ ह्यांची बेरीज ३ व ४ ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर आहे;" "१, २, ३ व ४ ह्यांची बेरीज ४ व ५ ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर आहे;" अशा कांहीं † व्यक्तिप्रतिज्ञा (प्रत्यक्ष अनुभवानें) खऱ्या ठरल्या असतां, त्यांच्या

† "पांच रुपये," "पांच आंबे" इत्यादिक पदें वस्तुत: जातिवाचक असून गणितशास्त्रांत तीं व्यक्तिवाचक मानितात, व त्यांच्या संबंधानें "पांच" (ह्मणजे कोणतेही पांच पदार्थ) हें जातिवाचक पद मानितात. "पांच," "सहा" इत्यादिक पदें वस्तुत: जातिवाचक असून तीं व्यक्तिवाचक मानून त्यांच्या संबंधानें "संख्या" हें जातिवाचक पद मानितात. ह्या संप्रदायास अनुसरून येथें वरच्या प्रतिज्ञांस व्यक्तिवाचक ह्मटलें आहे.. परंतु वस्तुत: ह्या येथें व्याप्यजातिप्रतिज्ञा होत.

आधारानें "१ ह्या संख्येपासून कोणत्याही पूर्ण संख्येपर्यंत सर्व पूर्ण संख्यांची बेरीज ही, ती पूर्ण संख्या व तिच्या पुढची पूर्ण संख्या ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर असते." ही व्यापकजातिप्रतिज्ञा स्थापित करणें, हें "व्यापकानुमान" होय.

आतां ह्या प्रतिज्ञेच्या उद्देश्यस्थानीं ज्या बेरजा आहेत, त्यांच्या जातींतील कांहीं बेरजांविषयीं ती प्रतिज्ञा खरी ठरली; एवढ्यावरूनच (ह्मणजे कार्यकारणविचारानें उद्देश्य जातीचे जातिधर्म आणि साध्यधर्म ह्यांचा नित्यसंबंध न ठरवितां) जर ती जातिप्रतिज्ञा खरी आहे असें ह्मटलें, तर तो केवळ अदमास होय; ही गोष्ट निरपवाद ठरली असें ह्मणतां येत नाहीं. उदाहरणार्थ "कोणतीही पूर्णसंख्या व तिच्या पुढची पूर्णसंख्या ह्यांच्या गुणाकारांत ४१ मिळविले असतां, बेरीज अविभाज्य संख्यात्मक येते" ह्या प्रतिज्ञेचा आरंभींच्या कांहीं पूर्णसंख्यांच्या संबंधानें अनुभव घेतला असतां, ती खरी दिसते; पण ती कार्यकारणविचारानें खरी ठरवितां येत नाहीं; ह्यामुळें ती अपवादास पात्र आहे; आणि थोडा जास्त अनुभव घेतला असतां कळतें कीं, चाळीस ह्या संख्येच्या संबंधानें ही प्रतिज्ञा खोटी पडते. ह्यास्तव, एकापासून कोणत्याही पूर्णसंख्येपर्यंत सर्व पूर्ण संख्यांच्या बेरजेचे जातिधर्म, आणि ती व तिच्या पुढची पूर्णसंख्या ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाशीं त्या बेरजेचें साम्य, ह्यांचा (कार्यकारणविचारानें) नित्यसंबंध ठरविला पाहिजे. तो नित्यसंबंध गणितश्रेढीच्या साह्यानें ठरतो. परंतु अशा प्रसंगीं नित्यसंबंध ठरविण्याची गणितशास्त्रांतली एक विशेष पद्धति आहे, ती वरच्याच उदाहरणानें स्पष्ट करून दाखवितों.

संख्यागणितोक्तव्यापकानुमान.—"१ व २ ह्यांची बेरीज २ व ३ ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर आहे," "१, २ व ३ ह्यांची बेरीज ३ व ४ ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर आहे," इत्यादिक कांहीं व्यक्तिप्रतिज्ञा खऱ्या आहेत; तर "एकापासून कोणत्याही पूर्णसंख्येपर्यंत सर्व पूर्ण संख्यांची बेरीज, तीसंख्या व तिच्या

पुढची पूर्णसंख्या ह्यांच्या गुणाकाराच्या अर्धाबरोबर असते " ही व्यापकजातिप्रतिज्ञा स्थापित करावयाची आहे.

(१) प्रथमतः " न ह्या (कोणत्यातरी) पूर्णसंख्येपर्यंत सर्व पूर्ण संख्यांच्या बेरजेला ही प्रतिज्ञा लागू आहे, असें मानिलें असतां, तिच्यापुढच्या (म्हणजे न+१) ह्या संख्येपर्यंत सर्व पूर्णसंख्यांच्या बेरजेलाही ती प्रतिज्ञा लागू होतेच " असें स्थापित करूं.

$१+२+३\ldots\ldots न=न\frac{(न+१)}{२}$ असें मानिलें.

ह्या दोन समान संख्यांपैकीं प्रत्येकींत (न+१) ही संख्या मिळविली असतां त्यांच्या बेरजाही समान होतील. म्हणून

$१+२+३\ldots\ldots न+(न+१)=न\frac{(न+१)}{२}+(न+१).$

ह्या दोन समान संख्यांपैकीं दुसरीचें स्वरूप

$\frac{न(न+१)+२(न+१)}{२}$ म्हणजे $\frac{(न+१)(न+२)}{२}$ हें झालें. म्हणून कोणत्यातरी एका पूर्णसंख्येच्या संबंधानें ती प्रतिज्ञा खरी असल्यास, तिच्या पुढच्या पूर्णसंख्येच्या संबंधानें ही खरी आहे, असें सिद्ध झालें.

(२) आतां ती प्रतिज्ञा २ ह्या संख्येच्या संबंधानें खरी आहे, असें प्रत्यक्ष अनुभवानें ठरलें आहे, म्हणून तिच्या पुढच्या म्हणजे तीन ह्या संख्येच्या संबंधानेंही ती खरी असली पाहिजे; म्हणूनच चार ह्या संख्येच्या संबंधानेंही ती खरी असली पाहिजे. इत्यादि कारणांवरून ती जातिप्रतिज्ञा निर्विवाद खरी ठरली.

ह्या पद्धतीला "संख्यागणितोक्तव्यापकानुमान" अशी संज्ञा देऊं.

भूमितिशास्त्रोक्तव्यापकानुमान.—कोणतीही जातिप्रतिज्ञा स्थापित करण्याची भूमितिशास्त्रांतील पद्धति, हें एका प्रकारचें व्यापकानुमानच आहे, (असें कितीएक न्यायशास्त्रकारांचें मत आहे). ह्या भूमितींतल्या पद्धतीमध्यें जी जातिप्रतिज्ञा स्थापित करावयाची, तींतील उद्देश्यजातींतल्या एका विशेष व्यक्तीमध्यें साध्यधर्म आहे, एवढेंच कायतें स्थापित करितात; आणि तेवढ्यावरूनच " त्या उद्देश्यजातींतल्या इतर अनंत व्यक्तींमध्यें तो साध्यधर्म आहे " हें स्था-

पित झालें असें मानितात. जसें "प्रत्येक समभुज त्रिकोण समकोण असतो," ही जातिप्रतिज्ञा स्थापित करावयाची; तर **अबक** नांवाचा एक विशेष समभुजत्रिकोण घेऊन तो समकोण आहे असें (त्या त्रिकोणाचें समभुजत्व इत्यादिकांच्या आधारानें) स्थापित करितात; आणि एवढ्यावरूनच "इतर कोणताही समभुजत्रिकोण (मग तो कितीही लहान बाजूंचा असो अथवा कितीही मोठ्या बाजूंचा असो, तो) समकोण आहे" हें सिद्ध झालें, असें समजतात.

पण हें त्या पद्धतीच्या बाह्य स्वरूपाचें वर्णन झालें. ह्या स्वरूपावरून कदाचित् कोणी असें मानील कीं, हीमध्यें एका व्यक्तीवरूनच अनंत व्यक्तींविषयीं अनुमान करितात, व ह्यामुळें "तुकाराम वाणी साधु होता, म्हणून सगळे वाणी साधु असतात" ह्या व्यापकानुमानाच्या वर्गांतलेंच हें भूमितींतलें व्यापकानुमान आहे. पण ही समजूत खोटी. येथें एका विशेष व्यक्तीमध्यें साध्यधर्म आहे, असें ठरलें, "म्हणून" उद्देश्य जातींतल्या इतर प्रत्येक व्यक्तीमध्यें साध्यधर्म आहे, हें सिद्ध झालें, असें समजावयाचें नाहीं; म्हणजे व्यक्तिप्रतिज्ञा खरी ठरली एवढेंच कायतें जातिप्रतिज्ञा स्थापित झाली असें म्हणण्याचें कारण आहे, असें समजावयाचें नाहीं. तर ह्या पद्धतीचें वास्तविक स्वरूप असें आहे कीं (१) उद्देश्य जातींतल्या एका विशेष व्यक्तीमध्यें साध्यधर्म आहे ही प्रतिज्ञा जर (व्याप्यानुमान ह्या नांवाची पद्धति पुढें सांगावयाची आहे तिनें) स्थापित करितां आली, (२) आणि त्या व्यक्तीच्या ज्या धर्मांच्या आधारानें ती प्रतिज्ञा स्थापित करितां आली असेल, ते सारे धर्म जर उद्देश्यजातींतल्या इतर प्रत्येक व्यक्तीमध्यें असले, तर त्या प्रत्येक व्यक्तीविषयींही प्रस्तुत व्यक्तीप्रमाणेंच सिद्धता करितां येईल; म्हणून ती जातिप्रतिज्ञा स्थापित झाली असें समजतात. म्हणजे अर्थात् (१) आणि (२) या दोन्ही गोष्टी मिळून, ती जातिप्रतिज्ञा स्थापित झाली असें म्हणण्याचें कारण होय. जसें-(१) "**अबक** हा विशेष समभुजत्रिकोण समकोण आहे" हें (व्याप्यानुमानपद्धतीनें) स्थापित करितां आलें; (२) आणि तें त्रिकोणाच्या ज्या समभुजत्वादि धर्मांच्या

आधारानें स्थापित करितां आलें, ते सारे धर्म इतर प्रत्येक समभुज त्रिकोणामध्यें असावयाचेच; म्हणून त्या प्रत्येक त्रिकोणाविषयीं ही **अबक** त्रिकोणाप्रमाणेंच सिद्धता करितां येईल. ह्याकरितां "प्रत्येक समभुजत्रिकोण समकोण असतो" हें स्थापित झालें. येथें (१) आणि (२) ह्या दोन गोष्टी मिळून इष्टसिद्धीचें कारण होय, हें स्पष्ट आहे.

व्यापकानुमानाच्या पूर्वोक्त वर्णनावरून ध्यानांत येईल कीं, ह्या पद्धतीनें स्थापित झालेली प्रतिज्ञा ही, तींतील सर्व प्रमाणप्रतिज्ञांपेक्षां जास्त व्यापक असते. म्हणजे सर्व प्रमाणप्रतिज्ञा मिळून जें कांहीं पूर्वी सिद्ध झालेलें असतें, त्यापेक्षां नवीन स्थापित केलेल्या प्रतिज्ञेंत कांहीं तरी जास्त सिद्ध केलें जातें. म्हणून या पद्धतीचें लक्षण असें केलें तर चालेल कीं "अनुमानपद्धतीच्या ज्या भेदानें स्थापित केलेली प्रतिज्ञा त्यांतील सर्व प्रमाणप्रतिज्ञांपेक्षां जास्त व्यापक असते, त्या भेदाला व्यापकानुमान म्हणावें" आणि मग व्याप्यानुमानाचें लक्षण खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल.

व्याप्यानुमान.— "अनुमानपद्धतीच्या ज्या भेदानें स्थापित केलेली प्रतिज्ञा त्यांतील कोणत्याही प्रमाणप्रतिज्ञेपेक्षां जास्त व्यापक नसते, त्या भेदाला व्याप्यानुमान म्हणावें" जसें:—

(१) "लोंकरीचें प्रत्येक वस्त्र उबदार असतें;" ही प्रमाणप्रतिज्ञा.
म्हणून "कांहीं उबदार वस्त्रें लोंकरीचीं असतात." ही अनुमिति.

(२) "लोंकरीचें प्रत्येक वस्त्र उबदार असतें," व "शालजोडी हें लोंकरीचें वस्त्र असतें;" } ह्या दोन प्रमाणप्रतिज्ञा.
म्हणून "शालजोडी उबदार असते." ही अनुमिति.

ह्या प्रत्येक उदाहरणावरून स्पष्ट दिसेल कीं, प्रमाणप्रतिज्ञांमध्यें दिलेल्या गोष्टींपेक्षां अनुमानामध्यें जास्त कांहीं स्थापित झालें नाहीं.

एकप्रमाणकव्याप्यानुमान व द्विप्रमाणकव्याप्यानुमान.— व्याप्यानुमानांतल्या प्रमाणप्रतिज्ञांच्या संख्येवरून त्याचे दोन भेद मानिले आहेत. "ज्या व्याप्यानुमानामध्यें प्रमाणप्रतिज्ञा एकच

असते, त्याला एकप्रमाणकव्याप्यानुमान म्हणावें" उदाहरण (१) आणि "ज्या व्याप्यानुमानामध्यें प्रमाणप्रतिज्ञा दोन असतात, त्याला द्विप्रमाणकव्याप्यानुमान म्हणावें." उदाहरण (२).

प्रत्यक्षप्रमाण १.—एका पदानें दर्शविलेल्या कोणत्याही एका व्यक्तीचें दुसऱ्या पदानें दर्शविलेल्या कोणत्यातरी एका व्यक्तीशीं ऐक्य असणें व नसणें, ह्या दोन्ही गोष्टी एककालीं खऱ्या असणें संभवत नाहीं.

उपसिद्धांत.–"अमुक व्यक्ति अमुकप्रकारची अथवा अमुक जातींतली आहे" आणि "तीच व्यक्ति त्याच प्रकारची अथवा त्याच जातींतली नाहीं" ह्या दोन्ही गोष्टी एककालीं खऱ्या असणें संभवत नाहीं.

प्रत्यक्षप्रमाण २.–एका पदानें दर्शविलेल्या कोणत्याही एका व्यक्तीचें दुसऱ्या पदानें दर्शविलेल्या कोणत्यातरी एका व्यक्तीशीं ऐक्य असणें व नसणें, ह्या दोन गोष्टींपैकीं कोणतीतरी एक गोष्ट खरी असलीच पाहिजे.

उपसिद्धांत.–"अमुक व्यक्ति अमुक प्रकारची अथवा अमुक जातींतली आहे" आणि "तीच व्यक्ति त्याच प्रकारची अथवा त्याच जातींतली नाहीं" ह्या दोन गोष्टींपैकीं कोणतीतरी एक गोष्ट खरी असलीच पाहिजे.

एकप्रमाणकव्याप्यानुमानाविषयीं

नियम.

उद्देश्यविधेयपदांच्या एकाच जोडीला लक्षून तयार केलेल्या प्रतिज्ञांच्या सत्यतेविषयीं व असत्यतेविषयीं नियमः—

(१) **अ** आणि **ओ** अथवा **इ** आणि **ए** ह्या परस्परांशीं विरुद्ध असणाऱ्या दोन दोन प्रतिज्ञांपैकीं कोणतीतरी एक खरी व दुसरी खोटी असें असलेंच पाहिजे. ह्मणजे दोन्ही खऱ्या अथवा दोन्ही खोट्या असणें संभवत नाहीं.

उपनियम.-अ, इ ह्यांपैकीं कोणत्याही प्रतिज्ञेचा विरोध तिच्या उद्देश्यजातींतल्या एकाच व्यक्तीच्या संबंधानें जरी खरा ठरला, तरी ती अ किंवा इ प्रतिज्ञा खोटी ठरते.

अपवादाची व्याख्या-अ, इ ह्यांपैकीं कोणत्याही प्रतिज्ञेचा जो एक किंवा अनेक व्यक्तींच्या संबंधानें विरोध, तो खरा ठरला, म्हणजे त्याला त्या प्रतिज्ञेचा (अथवा सामान्य नियमाचा) "अपवाद" ह्मणतात.

(२) **अ** आणि इ ह्या दोन व्यापकविपरीत प्रतिज्ञांपैकीं निदान एक तरी खोटी असलीच पाहिजे. म्हणजे एक खोटी असेल किंवा दोन्ही खोट्या असतील; पण दोन्ही खऱ्या असणें संभवत नाहीं. (" सर्व हिंदू काळ्या वर्णाचे असतात " व " कोणताही हिंदू काळ्या वर्णाचा नसतो " ह्या दोन्ही खोट्या असणाऱ्या **अ** आणि **इ** प्रतिज्ञा).

(३) **अ** आणि **ए** अथवा **इ** आणि **ओ** ह्या दोन दोन व्याप्य-व्यापक प्रतिज्ञांपैकीं व्यापक खरी असल्यास, व्याप्य खरी असलीच पाहिजे; आणि व्याप्य खोटी असल्यास, व्यापक खोटी असलीच पाहिजे.

(४) **ए** आणि **ओ** ह्या व्याप्यविपरीत प्रतिज्ञांपैकीं निदान एक तरी खरी असलीच पाहिजे. म्हणजे त्यांपैकीं एक खरी असेल किंवा दोन्ही खऱ्या असतील; परंतु दोन्ही खोट्या असावयाच्या नाहींत. (" कांहीं हिंदू काळ्या वर्णाचे असतात " व " कांहीं हिंदू काळ्या वर्णाचे नसतात, " या दोन्ही खऱ्या असणाऱ्या **ए** आणि **ओ** प्रतिज्ञा.)

ह्यांपैकीं पहिले दोन नियम पूर्वोक्त प्रत्यक्षप्रमाणें व त्यांचे उपसिद्धांत ह्यांच्या आधारानें सिद्ध करावे; आणि बाकीचे त्या नियमांच्या आधारानें सिद्ध करावे.

" उद्देश्यविधेयपदांच्या एकाच जोडीला लक्षून तयार केलेल्या **अ**, **इ**, **ए**, **ओ** प्रतिज्ञांपैकीं **अ** खरी असल्यास इतर प्रत्येक खरी असेल किंवा खोटी असेल? " " **अ** खोटी असल्यास इतर प्रत्येक

खरी असेल किंवा खोटी असेल?" अशा प्रकारचे प्रत्येक प्रतिज्ञेविषयीं प्रश्न तयार करून त्यांचीं उत्तरें द्यावीं; आणि तीं मागच्या प्रत्यक्षप्रमाणांच्या व नियमांच्या आधारानें सिद्ध करून उदाहरणांनीं स्पष्ट करावीं; म्हणजे ते नियम चांगले पाठ होतील.

उद्देश्यविधेयांच्या भिन्न जोड्यांस लक्षून असणाऱ्या प्रतिज्ञांच्या सत्यतेविषयीं व असत्यतेविषयीं नियमः—

(५) परस्पर-प्रतियोगि-प्रतिज्ञांपैकीं एक खरी असल्यास दुसरी खरी व एक खोटी असल्यास दुसरी खोटी असलीच पाहिजे. (कां कीं वस्तुतः त्या प्रतिज्ञा एकार्थकच असतात.) जसें "चोहोंनीं विभाज्य असणाऱ्या संख्या सम असतात" ही प्रतिज्ञा खरी असल्यास, "चोहोंनीं विभाज्य असणाऱ्या संख्या विषम नसतात" ही तिची प्रतियोगिप्रतिज्ञा खरी असलीच पाहिजे; व पहिली खोटी असल्यास, दुसरी खोटी असलीच पाहिजे.

(६) **अ** प्रतिज्ञा खरी असल्यास तिचा व्याप्यव्यत्यास खरा असतोच (हें **अ** प्रतिज्ञेच्या अर्थावरूनच दिसतें.) जसें "प्रत्येक चौरस समांतरभुजचौकोन असतो." ह्या प्रतिज्ञेचा अर्थ "चौरस ह्या जातींतल्या साऱ्या व्यक्ति आणि समांतरभुजचौकोन या जातींतल्या कांहीं व्यक्ति ह्यांचें ऐक्य आहे" असा होय. म्हणून ही प्रतिज्ञा जर खरी असेल, तर "कांहीं समांतरभुजचौकोन चौरस असतात." हा तिचा व्याप्यव्यत्यासही खरा असलाच पाहिजे.

(७) **अ** प्रतिज्ञा खरी असल्यास तिचा व्यापकव्यत्यास खरा असतो असा नियम नाहीं. जसें (१.५) व (१.६) हे युक्लिडचे सिद्धांत परस्परांचे व्यापकव्यत्यास आहेत, व ते दोन्ही खरे आहेत; पण "प्रत्येक चौरस समांतरभुजचौकोन असतो" ही प्रतिज्ञा खरी आहे, आणि "प्रत्येक समांतरभुजचौकोन चौरस असतो" हा तिचा व्यापकव्यत्यास खरा नाहीं.

(८) इ प्रतिज्ञा खरी असल्यास तिचे दोन्ही व्यत्यास खरे असतात. जसें "कोणताही काटकोनत्रिकोण समभुज नसतो" ही प्रतिज्ञा खरी आहे, म्हणून (तिच्या अर्थावरूनच) "कोणताही सम-

भुजत्रिकोण "काटकोनत्रिकोण नसतो" हा तिचा व्यापकव्यत्यास खरा आहे, ह्मणून (नियम ३ प्रमाणें) "कांहीं समभुजत्रिकोण काटकोनत्रिकोण नसतात" हा व्याप्यव्यत्यासही खरा आहे.

(९) ए प्रतिज्ञा खरी असल्यास तिचा व्याप्यव्यत्यास खरा असतो, पण व्यापकव्यत्यास खरा असतो असा नियम नाहीं. जसें "कांहीं काटकोनत्रिकोण समद्विभुज असतात" ही प्रतिज्ञा खरी आहे. ह्मणून (हिच्या अर्थावरूनच) "कांहीं समद्विभुजत्रिकोण काटकोनत्रिकोण असतात." हा तिचा व्याप्यव्यत्यास खरा आहे; परंतु "सारे समद्विभुजत्रिकोण काटकोनत्रिकोण असतात." हा तिचा व्यापकव्यत्यास खरा नाहीं.

(१०) **ओ** प्रतिज्ञा खरी असल्यास तिचे दोन्ही व्यत्यास अनिश्चित असतात.

(११) **अ** प्रतिज्ञा खरी असल्यास तिच्या प्रतियोगाचे दोन्ही व्यत्यास खरे असतात. (**अ**चा प्रतियोग **इ** प्रतिज्ञात्मक होतो, म्हणून ५ व्या व ८ व्या नियमांवरून हें सिद्ध होतें.)

(१२) **ओ** प्रतिज्ञा खरी असल्यास तिच्या प्रतियोगाचा व्याप्यव्यत्यास खरा असतो (**ओ**चा प्रतियोग ए प्रतिज्ञात्मक होतो; म्हणून नियम ५ व ९ यांवरून हें सिद्ध होतें.)

(१३) अन्वयव्यतिरेकांपैकीं एक खरा असल्यास दुसरा खरा असतो असा नियम नाहीं. उदा० "जो जो पदार्थ सोन्याचा असतो तो तो पिंवळा असतो" हा अन्वय खरा आहे; पण "जो जो पदार्थ सोन्याचा नसतो तो तो पिंवळा नसतो" हा त्याचा व्यतिरेक खरा नाहीं. तसेंच "जी जी संख्या सम नसते ती ती चोहोंनीं विभाज्य नसते" हा व्यतिरेक खरा आहे; पण "जी जी संख्या सम असते ती ती चोहोंनीं विभाज्य असते" हा त्याचा अन्वय खरा नाहीं.

(१४) अन्वय आणि त्याचा व्यापकव्यत्यास हे दोन्ही खरे असल्यास, त्या अन्वयाचा व्यतिरेकही खरा असतो. (कां कीं अन्वय आणि त्याचा व्यापकव्यत्यास हे खरे असले, तर त्यांचीं उद्देश्य-

विधेयपदें सारख्या व्याप्तीचीं ठरतात. ह्मणजे त्यांपैकीं कोणत्याही एका पदानें दर्शविलेल्या जातींतील कोणतीही व्यक्ति दुसऱ्या पदानें दर्शविलेल्या जातीच्या बाहेरची नाहीं, असें ठरतें. म्हणून अर्थात् व्यतिरेकही खरा ठरतो.) उ० "जो जो त्रिकोण समभुज असतो, तो तो समकोन असतो." हा अन्वय आणि "जो जो त्रिकोण समकोण असतो, तो तो समभुज असतो." हा त्याचा व्यापकव्यत्यास हे दोन्ही खरे ठरले आहेत. म्हणून "जो जो त्रिकोण समभुज नसतो, तो तो समकोण नसतो" हा व्यतिरेकही खरा आहे.

(१५) अन्वय आणि व्यतिरेक हे दोन्ही खरे असल्यास, अन्वयाचा व्यापकव्यत्यासही खरा असतो. (कां कीं अन्वयव्यतिरेक खरे ठरले ह्मणजे दोन्हीं पदें सारख्या व्याप्तीचीं ठरतात, व अन्वयाचा व्यापकव्यत्यास खरा ठरण्यास एवढीच गोष्ट आवश्यक आहे.) उदाहरण मागच्या नियमांतलें.

द्विप्रमाणकव्याप्त्यनुमानाविषयीं संक्षिप्तविचार.

प्रथमतः ह्याचें अतिसरलरूप दोन उदाहरणांनीं दाखवितों.

(१) "लोंकरीचें वस्त्र उबदार असतें," (साध्यप्रमाण)
व "शालजोडी हें लोंकरीचें वस्त्र असतें;" (पक्षप्रमाण)
ह्मणून "शालजोडी उबदार असते." (अनुमिति)
(२) "विषमसंख्या सहांनीं विभाज्य नसते," (साध्यप्रमाण)
व "सव्वादोनशें ही विषमसंख्या आहे;" (पक्षप्रमाण.)
ह्मणून "सव्वादोनशें ही संख्या सहांनीं विभाज्य नाहीं." (अनुमिति)

ह्या दोन उदाहरणांवरून स्पष्ट आहे कीं, द्विप्रमाणकव्याप्त्यनुमानामध्यें दोन प्रमाणें व एक अनुमिति अशा तीनच प्रतिज्ञा असतात. ह्या तीन प्रतिज्ञांस त्या अनुमानाचे अवयव म्हणतात. ह्या तीन अवयवांचीं मिळून सहा पदें व्हावयाचीं. परंतु प्रत्येक पद दोन दोन वेळां येतें; म्हणून ह्या अनुमानांत पदेंही तीनच असतात.

पक्ष, साध्य व हेतु.—द्विप्रमाणकव्याप्त्यानुमानांतील अनुमितीच्या उद्देश्याला "पक्ष" आणि विधेयाला "साध्य" म्हणावें. प्रमाणप्रतिज्ञांमध्यें पक्ष व साध्य ह्यांची ज्या तिसऱ्या एकाच पदार्थीं तुलना केलेली असते, त्याला "हेतु" म्हणावें. जसें (१) ह्या अनुमानांत "शालजोडी" हा पक्ष, "उबदार वस्त्र" हें साध्य, आणि "लोंकरीचें वस्त्र" हा हेतु होय. (२) ह्या अनुमानांत "सव्वादोनशें" हा पक्ष, "सहांनीं विभाज्य (संख्या)" हें साध्य, व "विषमसंख्या" हा हेतु होय.

साध्यप्रमाण व पक्षप्रमाण.—द्विप्रमाणकव्याप्त्यानुमानांतील दोन प्रमाणांपैकीं ज्यांत हेतु व साध्य ह्यांची तुलना केलेली असते, त्या प्रमाणाला "साध्यप्रमाण" म्हणावें; आणि ज्यांत पक्ष व हेतु ह्यांची तुलना केलेली असते; त्याला "पक्षप्रमाण" म्हणावें. (१) व (२) ह्या दोन्ही अनुमानांमध्यें साध्यप्रमाण, पक्षप्रमाण व अनुमिति हीं स्पष्ट दाखविलीं आहेत.

द्विप्रमाणकव्याप्त्यानुमानाच्या पूर्वोक्त दोन उदाहरणांवरून जें त्याचें रूप दिसतें, तेंच कायतें त्याचें निर्दोषरूप आहे, असें नाहीं. ह्या अनुमानाचीं निर्दोषस्वरूपें एकंदर एकोणवीस आहेत, असें न्यायशास्त्रकारांनीं ठरविलें आहे. त्यांपैकीं हें अत्यंत सुबोध असें आहे. म्हणून ह्याला "अतिसरलरूप" अशी वर संज्ञा दिली आहे. इतर प्रत्येक स्वरूपामध्यें कांहीं फेरफार केल्यानें त्यालाही हें स्वरूप देतां येतें.

द्विप्रमाणकव्याप्त्यानुमानाचें अतिसरलरूप.—ह्याचें मुख्य लक्षण असें कीं, त्यांतल्या तीनही प्रतिज्ञा प्रत्यक्ष उच्चारिलेल्या असाव्या; त्यांचा अनुक्रम, आधीं साध्यप्रमाण, मग पक्षप्रमाण व शेवटीं अनुमिति असाच असावा; साध्यप्रमाण **अ** अथवा **इ** ह्यांपैकींच असून त्याच्या उद्देश्यविधेयस्थानीं अनुक्रमें हेतु व साध्य हींच असावीं; आणि पक्षप्रमाण **अ** किंवा **ए** हेंच असून त्याच्या उद्देश्यविधेयस्थानीं अनुक्रमें पक्ष व हेतु हेच असावे.

व्यवहारामध्यें हें अनुमानाचें अतिसरलरूप क्वचितच दृष्टीस पडतें.

जसें (१) हें अनुमान उच्चारावयाचें असलें, म्हणजे बहुधा " लोंक-रीचें वस्त्र उबदार असतें, म्हणून शालजोडी उबदार असते " अ-थवा " शालजोडी लोंकरीची असते, म्हणून उबदार असते " किंवा " शालजोडी उबदार असते; कांकीं, ती लोंकरीची असते " अ-थवा " शालजोडी लोंकरीची असल्यामुळें उबदार असते." अशा एखाद्या प्रकारानें उच्चारितात. म्हणजे एखादें प्रमाण बहुधा गाळि-तात व प्रतिज्ञांचा अनुक्रम इच्छेस येईल तसा ठेवितात.

अनुमान अशा रीतीनें उच्चारण्याची ही वहिवाट केवळ व्यवहा-रांतच आहे असें नाहीं. व्याप्त्यानुमानपद्धतीचा उत्तम मासला जो युक्लिडचा ग्रंथ, त्यामध्यें देखील असा प्रकार आहे. जसें " **अबक** त्रिकोण समभुज आहे, म्हणून (१.५ उपसि. ह्यावरून) तो सम-कोण आहे. " ह्याप्रमाणें भूमितींतलीं (व गणिताच्या इतर भागां-तलींही) अनुमानें बहुधा उच्चारितात. ह्या अनुमानाचें अतिसरल-रूप असें:-

" जो त्रिकोण समभुज असतो तो समकोण असतो, " (सा.प्र.)

व " **अबक** हा त्रिकोण समभुज आहे; " (प. प्र.)

∴ " **अबक** हा त्रिकोण समकोण आहे. " (अनुमिति)

हें अतिसरलरूप जरी क्वचित् आढळणारें आहे, तरी तें अत्यंत सुबोध आहे, म्हणून कोणत्याही द्विप्रमाणकव्याप्त्यानुमानाच्या शुद्धा-शुद्धतेविषयीं विचार करावयाचा असल्यास, त्याला हें स्वरूप द्यावें; म्हणजे त्याची शुद्धाशुद्धता स्पष्ट दिसते.

(खालीं लिहिलेल्या तिन्ही प्रत्यक्षप्रमाणांमध्यें " पद " हा शब्द " त्यानें दर्शविलेली व्यक्ति किंवा व्यक्तिसमुदाय " ह्याबद्दल योजिला आहे, असें समजावें. जसें " एका पदाचें दुसऱ्या पदाशीं ऐक्य आहे " ह्या वाक्याचा अर्थ " एका पदानें जी व्यक्ति किंवा जो व्यक्तिसमुदाय दर्शविला आहे, तीच व्यक्ति किंवा तोच व्यक्तिसमु-दाय दुसऱ्यानें दर्शविला आहे " असा समजावा.)

प्रत्यक्षप्रमाण ३.— जर तीन पदांपैकीं पहिल्याचें दुसऱ्याशीं

ऐक्य असलें, व दुसऱ्याचें तिसऱ्याशीं ऐक्य असलें; तर पहिल्याचें तिसऱ्याशीं ऐक्य असतें.

उपसिद्धांत.—जर एक व्यक्ति, व्यक्तिसमुदाय किंवा जाति दुसऱ्या एखाद्या जातींतली असेल, आणि दुसऱ्या जातींतली प्रत्येक व्यक्ति तिसऱ्या जातींतली असेल; तर पहिली व्यक्ति, व्यक्तिसमुदाय किंवा जाति ही तिसऱ्या जातींतली असते. जसें, पूर्वोक्त पहिल्या अनुमानामध्यें "शालजोडी" ही पहिली जाति "लोंकरीचीं वस्त्रें" ह्या दुसऱ्या जातींतली आहे; आणि ह्या दुसऱ्या जातींतली प्रत्येक व्यक्ति "उबदार वस्त्रें" ह्या तिसऱ्या जातींतली आहे; म्हणून "शालजोडी" ही पहिली जाति "उबदार वस्त्रें" ह्या तिसऱ्या जातींतली आहे, असें ठरून, "शालजोडी उबदार असते" अशी अनुमिति निघाली.

प्रत्यक्षप्रमाण ४.—जर पहिल्या पदाचें दुसऱ्या पदाशीं ऐक्य असलें, पण दुसऱ्याचें तिसऱ्याशीं ऐक्य नसलें; तर पहिल्याचें तिसऱ्याशीं ऐक्य नसतें.

उपसिद्धांत.—जर एक व्यक्ति, व्यक्तिसमुदाय किंवा जाति दुसऱ्या जातींतली आहे, पण दुसऱ्या जातींतली एक देखील व्यक्ति तिसऱ्या जातींतली नाहीं; तर पहिली व्यक्ति, व्यक्तिसमुदाय किंवा जाति तिसऱ्या जातींतली नसते. जसें, पूर्वोक्त दुसऱ्या अनुमानामध्यें "सव्वादोनशें" ही एक व्यक्ति "विषमसंख्या" ह्या जातींतली आहे, पण ह्या जातींतली एक देखील व्यक्ति "सहांनीं विभाज्य संख्या" ह्या जातींतली नाहीं; म्हणून "सव्वादोनशें" ही व्यक्ति "सहांनीं विभाज्य संख्या" ह्या जातींतली नाहीं, असें ठरून, "सव्वादोनशें ही संख्या सहांनीं विभाज्य नाहीं" अशी अनुमिति निघाली.

प्रत्यक्षप्रमाण ५.—जर एका पदाचें दुसऱ्या पदाशीं ऐक्य नाहीं, आणि दुसऱ्याचेंही तिसऱ्याशीं ऐक्य नाहीं, असें ठरलें असलें; तर तेवढ्यावरूनच पहिल्याचें तिसऱ्याशीं ऐक्य आहे व नाहीं ह्यांपैकीं कोणतेंच ठरावयाचें नाहीं.

उपसि०--जर एक व्यक्ति, व्यक्तिसमुदाय किंवा जाति दुसऱ्या जातींतली नाहीं, व दुसऱ्या जातींतली एक देखील व्यक्ति तिसऱ्या जातींतली नाहीं असें ठरलें असेल; तर तेवढ्यावरूनच पहिली व्यक्ति, व्यक्तिसमुदाय किंवा जाति तिसऱ्या जातींतली आहे व नाहीं ह्यांपैकीं कोणतेंच ठरावयाचें नाहीं. जसें "कोणताही इंग्रज काळ्या वर्णाचा नसतो" व "कोणताही ब्राह्मण इंग्रज नसतो" येथें "ब्राह्मण" ही पहिली जाति "इंग्रज" ह्या दुसऱ्या जातींतली नाहीं, व "इंग्रज" ही दुसरी जाति "काळ्यावर्णाचे लोक" ह्या तिसऱ्या जातींतली नाहीं, असें ठरलें आहे; तर एवढ्यावरूनच "ब्राह्मण" ही पहिली जाति "काळ्यावर्णाचे लोक" ह्या तिसऱ्या जातींतली आहे व नाहीं ह्यांपैकीं एकही ठरत नाहीं. म्हणजे "सारे ब्राह्मण काळ्या वर्णाचे असतात" व "एक देखील ब्राह्मण काळ्या वर्णाचा नसतो" ह्यांपैकीं कोणतेंच ठरत नाहीं.

एथपर्यंत सांगितलेलीं पांच प्रत्यक्षप्रमाणें व पूर्वींचे सारे नियम ह्यांच्या आधारानें पुढें लिहिलेले द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानाचे नियम सिद्ध होतात. हल्लींचीं तीन प्रत्यक्षप्रमाणें पुढच्या नियमांस लागू करतेसमयीं, सर्वत्र पहिलें पद "पक्ष" दुसरें पद "हेतु" व तिसरें पद "साध्य" असें समजून तीं प्रत्यक्षप्रमाणें लागू करावीं.

द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानाविषयीं.

नियम.

(१६) प्रत्येक द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानामध्यें (पक्ष, साध्य व हेतु अशीं) तीनच पदें असावीं (जास्त किंवा कमी नसावीं.)

"कोणताही गुण पूज्य असतो, दुष्टपणा हा (व्याकरणदृष्ट्या) गुण आहे; म्हणून दुष्टपणा पूज्य आहे." एथें "गुण" हें पद दोन प्रमाणांत दोन अर्थाचें आहे. ह्मणून ह्या अनुमानांत वस्तुतः चार पदें आहेत, ह्याकरितां हें सदोष अनुमान होय. अशीं स्पष्टपणें भिन्नार्थक पदें कदाचित् कोणी थट्टेमध्यें मात्र योजील, हें खरें; तथापि,

"अनुभवाशीं विरुद्ध असणारी गोष्ट साक्षीनें खरी ठरावयाची नाहीं, तारेनें बातमी जाते हें तुमचें म्हणणें आमच्या 'अनुभवाशीं विरुद्ध' आहे; म्हणून हें साक्षीनें खरें ठरावयाचें नाहीं" असलीं उदाहरणें व्यवहारांत पुष्कळ आढळतात.

(१७) प्रत्येक द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानामध्यें (साध्यप्रमाण, पक्ष-प्रमाण व अनुमिति अशा) तीनच प्रतिज्ञा असाव्या (जास्त अथवा कमी नसाव्या).

"शालजोडी लोंकरीची असते; म्हणून ती उबदार असते" अ-थवा "लोंकरीचें वस्त्र उबदार असतें; म्हणून शालजोडी उबदार असते" ह्या प्रत्येकांतलें स्पष्ट न उच्चारलेलें प्रमाण खरें आहे असें जर दिलें नाहीं, तर हें अनुमानच नव्हे.

(१८) हेतुपद हें दोन प्रमाणांपैकीं निदान एकामध्यें तरी व्याप-कार्थक असलें पाहिजे.

कारण कीं, तें दोन्हीं प्रमाणांत व्याप्यार्थक असल्यास कदाचित् त्यानें दर्शविलेल्या व्यक्तिवर्गाच्या भिन्न भागांशीं पक्ष व साध्य ह्यांची तुलना केली जाईल; आणि त्यामुळें त्या अनुमानांत वस्तुतः चार पदें होऊन पहिल्या नियमाशीं विरोध येईल. उ० "सर्व ब्राह्मण हिंदू आहेत, व सर्व शूद्र हिंदू आहेत; म्हणून सर्व ब्राह्मण शूद्र आहेत." ह्या दोषाला "व्याप्यहेतुकता" ह्मणावें.

(१९.) जें पद प्रमाणप्रतिज्ञेमध्यें व्यापकार्थक नसेल, तें अनुमि-तीमध्यें व्यापकार्थक होतां कामा नये.

कां कीं, असें केल्यानें वस्तुतः चवथें पद त्या अनुमानांत योजलें जातें आणि त्यामुळें पहिल्या नियमाशीं विरोध येतो. उदा० "सर्व ब्राह्मण हिंदू आहेत, व शूद्र हे ब्राह्मण नाहींत; म्हणून शूद्र हे हिंदू ना-हींत." एथें "हिंदू" हें पद प्रमाणप्रतिज्ञेंत व्याप्यार्थक असून अनुमितीमध्यें व्यापकार्थक झालें." तसेंच "विश्वासघात करणारे लोक मोठ्या अधिकारास पात्र नाहींत, व कांहीं शूद्र विश्वासघात करणारे ठरले; ह्मणून शूद्र मोठ्या अधिकारास पात्र नाहींत." एथें "शूद्र" ह्या पदाच्या संबंधानें तोच दोष झाला आहे. हा दोष

पहिल्या उदाहरणाप्रमाणें साध्याच्या संबंधानें झाला असेल, तर त्याला "साध्यदोष" म्हणावें; आणि दुसऱ्या उदाहरणाप्रमाणें पक्षाच्या संबंधानें झाला असेल, तर त्याला "पक्षदोष" ह्मणावें.

(२०) दोन्ही प्रमाणप्रतिज्ञा अभावार्थक असतील, तर त्यांपासून अनुमिति कांहींच निघणार नाहीं.

हें पांचव्या प्रत्यक्षप्रमाणावरून स्पष्ट आहे. तेथील उदाहरण पहावें.

(२१) दोन प्रमाणप्रतिज्ञांपैकीं कोणतीही एक अभावार्थक असल्यास अनुमितीही अभावार्थकच असली पाहिजे.

हें चवथ्या व दुसऱ्या प्रत्यक्षप्रमाणावरून स्पष्ट आहे. चवथ्याचें उदाहरण पहावें.

(२२) अनुमिति अभावार्थक असल्यास, कोणती तरी एक प्रमाणप्रतिज्ञा अभावार्थक असलीच पाहिजे.

कां कीं, दोन्ही प्रमाणप्रतिज्ञा सत्तार्थक असल्यास तिसऱ्या प्रत्यक्षप्रमाणाप्रमाणें, अनुमितिही सत्तार्थकच उत्पन्न होईल, आणि ती तर अभावार्थक आहे, असें दिलें आहे.

(२३) दोन्ही प्रमाणें व्याप्यप्रतिज्ञात्मक असल्यास त्यांपासून कोणतीच अनुमिति निघावयाची नाहीं.

कारण कीं, दोन्ही प्रमाणें ए प्रतिज्ञात्मक असल्यास, त्यांत कोणतेंच पद व्यापकार्थक नसल्यामुळें त्यांत व्याप्यहेतुकता होईल; म्हणजे १८ व्या नियमाशीं विरोध येईल. दोन्ही प्रमाणें **ओ** प्रतिज्ञात्मक असल्यास २० व्या नियमाशीं विरोध येईल. आतां एक प्रमाणप्रतिज्ञा ए व दुसरी **ओ** असेल, तर २१ व्या नियमाप्रमाणें अनुमिति अभावार्थकच काढावी लागेल; आणि तेणेंकरून १८ व्या अथवा १९ व्या नियमाशीं विरोध येईल. कां कीं, अशा प्रमाणप्रतिज्ञांमध्यें कोणतें तरी एकच पद व्यापकार्थक असणार; तें हेतुपद मानिल्यास १९ व्या नियमाशीं विरोध येईल व तें साध्य अथवा पक्ष मानिल्यास १८ व्या नियमाशीं विरोध येईल.

(२४) दोन प्रमाणांपैकीं एक व्याप्यप्रतिज्ञात्मक असल्यास, अनुमिति व्याप्यप्रतिज्ञात्मकच असली पाहिजे.

कारण कीं, प्रमाणप्रतिज्ञा **अ** आणि **ए** असल्यास, त्यांत एकच पद व्यापकार्थक होऊन तें हेतुपद मानावें लागेल; आणि पक्ष व साध्य व्याप्यार्थक राहिल्यामुळें अनुमिति **ए** हीच होईल. प्रमाणप्रतिज्ञा **इ**, **ए** अथवा **अ**, **ओ** ह्या असल्यास त्यांत दोनच पदें व्यापकार्थक होतील; त्यांपैकीं एक हेतु होऊन बाकीचें एकच व्यापकार्थक पद अनुमितींत योजावयास सांपडेल; आणि ती अनुमिति तर (नि.२१ प्र०) अभावार्थकच असली पाहिजे, म्हणून ती **ओ**च निघेल.

ज्या द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानामध्यें ह्या नऊ नियमांपैकीं कोणत्याही नियमाचा भंग झाला नाहीं असें ठरेल, तेंच शुद्धानुमान समजावें; म्हणजे त्यांतल्या प्रमाणांच्या सत्यतेवरून त्यांतल्या अनुमितीची सत्यता स्थापित झाली असें समजावें. परंतु ज्यांत ह्यांपैकीं कोणत्याही एक अथवा अनेक नियमांशीं विरुद्ध स्थिति असेल, तें अशुद्धानुमान समजावें; म्हणजे त्यांतल्या प्रमाणांच्या सत्यतेवरून त्यांतल्या अनुमितीची सत्यता स्थापित झाली असें सुतरां समजूं नये. अशुद्धानुमान हें वस्तुतः अनुमानच नव्हे. ह्याला "हेत्वाभास" म्हणतात.

ही जी द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानाची शुद्धाशुद्धता सांगितली, तीवरून प्रत्येक शुद्धानुमानांतली अनुमिति वस्तुतः सत्यच असते (ह्मणजे तिची सत्यता प्रत्यक्ष अनुभवास येतेच), व प्रत्येक अशुद्धानुमानांतली (म्हणजे हेत्वाभासांतली) अनुमिति वस्तुतः असत्यच असते, असें समजावयाचें नाहीं. एथें शुद्ध व अशुद्ध ह्या संज्ञा केवळ पद्धतीच्या निर्दोषतेला व सदोषतेला लक्षून योजिल्या आहेत; अनुमितीच्या सत्यासत्यतेला लक्षून योजिल्या नाहींत.

द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानांतलीं प्रमाणें व अनुमिति ह्यांच्या सत्यासत्यतेविषयीं नियम.

(२५) जर अनुमान शुद्ध आहे (म्हणजे पद्धति निर्दोष आहे) आणि त्यांतील प्रत्येक प्रमाणप्रतिज्ञा खरी ठरली आहे, तर त्यांतील अनुमिति खरी मानिलीच पाहिजे.

(२६) जर अनुमिति खोटी ठरेल, तर (१) अनुमान अशुद्ध असणें (२) साध्यप्रमाण खोटें असणें व (३) पक्षप्रमाण खोटें असणें ह्या तिहींपैकीं निदान एकतरी गोष्ट असलीच पाहिजे.

कारण कीं, जर ह्या तीनही गोष्टी नसतील, म्हणजे अनुमान शुद्ध असेल व दोन्ही प्रमाणें खरीं असतील, तर २५ व्या नि. प्र० अनुमितीही खरी निघेल. पण ती खोटी आहे असें दिलें आहे; म्हणून (१),(२),(३) ह्यांपैकीं निदान एक गोष्ट तरी असलीच पाहिजे.

ह्यावरून असे उपनियम निघतात कीं:-

(अ) जर अनुमान शुद्ध आहे व साध्यप्रमाण खरें आहे, पण अनुमिति खोटी आहे; तर पक्षप्रमाण खोटें असलेंच पाहिजे.

(इ) जर अनुमान शुद्ध आहे व पक्षप्रमाण खरें आहे, पण अनुमिति खोटी आहे; तर साध्यप्रमाण खोटें असलेंच पाहिजे.

(उ) जर साध्यप्रमाण व पक्षप्रमाण हीं दोन्ही खरीं आहेत, पण अनुमिति खोटी आहे; तर अनुमान अशुद्ध असलेंच पाहिजे. (म्हणजे पद्धतींत कांहीं तरी दोष असला पाहिजे.)

(२७) जर अनुमान शुद्ध आहे, व अनुमितिही खरी आहे; तर प्रत्येक प्रमाण खरें असेलच असा नियम नाहीं.

उदाहरण." मनुष्यें चतुष्पाद असतात, मांजर हें मनुष्य आहे; म्हणून मांजर हें चतुष्पाद आहे." येथें अनुमान शुद्ध व अनुमिति खरी आहे, तथापि दोन्ही प्रमाणें खोटीं आहेत.

(२८) जर अनुमान शुद्ध आहे आणि कोणतें तरी एक प्रमाण व अनुमिति हीं दोन्ही खरीं आहेत, तर राहिलेलें प्रमाण खरें असेलच असा नियम नाहीं. उदाहरण:—"पांचांनीं विभाज्य असणाऱ्या संख्या सम असतात, २४० ही संख्या ५ नीं विभाज्य आहे; म्हणून ती सम आहे." येथें अनुमान शुद्ध आहे आणि पक्षप्रमाण व अनुमिति हीं खरीं आहेत; तथापि साध्यप्रमाण खोटें आहे. तसेंच "चोहोंनीं विभाज्य असणारी संख्या सम असते, १४ ही संख्या चोहोंनीं विभाज्य आहे; म्हणून १४ ही संख्या सम आहे." येथें अनुमान

शुद्ध आहे आणि साध्यप्रमाण व अनुमिति हीं खरीं आहेत; परंतु पक्षप्रमाण खोटें आहे.

(२९) जर अनुमान शुद्ध आहे, दोन प्रमाणें व अनुमिति हीं सर्व व्यापकप्रतिज्ञात्मक आहेत, आणि पक्षप्रमाण व अनुमिति हीं दोन्ही खरीं आहेत; तर साध्यप्रमाणाची विपरीत प्रतिज्ञा खोटी असलीच पाहिजे. (मग तें साध्यप्रमाण स्वतः खोटें असो किंवा खरें असो.)

कारण कीं, साध्यप्रमाणाची विपरीत प्रतिज्ञा खरी मानली असतां, तीच दिलेल्या अनुमानांत साध्यप्रमाणाचे जागीं ठेविल्यानें दिलेल्या अनुमितीची विपरीतप्रतिज्ञा २५ व्या नियमाप्रमाणें खरी ठरेल; आणि दिलेली अनुमितिही खरी आहे; ह्मणून परस्परांशीं विपरीत अशा दोन प्रतिज्ञा खऱ्या ठरतील, आणि तेणेंकरून दुसऱ्या नियमाशीं विरोध येईल. ह्याकरितां साध्यप्रमाणाशीं विपरीतप्रतिज्ञा खोटीच असली पाहिजे.

जसें:–" पांचांनीं विभाज्य असणाऱ्या सर्व संख्या १० नीं विभाज्य असतात, प्रत्येक पुरा शेंकडा ५ नीं विभाज्य असतो; म्हणून प्रत्येक पुरा शेंकडा १० नीं विभाज्य असतो." एथें नियमांत दिल्याप्रमाणें सर्व व्यवस्था आहे; आणि साध्यप्रमाण खोटें आहे; तथापि " पांचांनीं विभाज्य असणारी कोणतीही संख्या १० नीं विभाज्य नसते " ही साध्यप्रमाणाशीं विपरीतप्रतिज्ञा खोटीच असली पाहिजे. कां कीं, ती खरी मानिल्यास, ती प्रस्तुत अनुमानांत साध्यप्रमाणाच्या जागीं ठेविल्यानें (क० २५ प्र०) " कोणताही पुरा शेंकडा १० नीं विभाज्य नसतो " ही प्रस्तुत अनुमितीशीं विपरीतप्रतिज्ञा खरी ठरेल. परंतु प्रस्तुत अनुमिति खरी आहे असें दिलें आहे. म्हणून दुसऱ्या नियमाशीं विरोध येईल. ह्याकरितां ही विपरीतप्रतिज्ञा खोटी आहे.

(३०) २९ व्या नियमांत दिल्याप्रमाणें सर्व स्थिति असल्यास, साध्यप्रमाणाची व्याप्यप्रतिज्ञा खरी असलीच पाहिजे.

कारण, ती खोटी मानिली, तर पहिल्या नियमाप्रमाणें तिच्याशीं विरुद्धप्रतिज्ञा, म्हणजे साध्यप्रमाणाची विपरीतप्रतिज्ञा खरी होईल,

पण ती खोटी असें मागच्या नियमांत ठरलें आहे; ह्मणून साध्यप्रमाणाची व्याप्यप्रतिज्ञा खरी असली पाहिजे.

जसें, मागच्या नियमांतल्या उदाहरणांत "पांचांनीं विभाज्य असणाऱ्या कांहीं संख्या १० नीं विभाज्य आहेत" ही साध्यप्रमाणाची व्याप्यप्रतिज्ञा खरी असली पाहिजे. कारण कीं, ही खोटी मानिली तर (नि० १ प्र०) "पांचांनीं विभाज्य असणारी कोणतीही संख्या १० नीं विभाज्य नसते" ही तिच्याशीं विरुद्ध असणारी प्रतिज्ञा खरी होईल, पण ती खोटी असें २९ व्या नियमांत ठरलें आहे; म्हणून ती व्याप्यप्रतिज्ञा खरी असली पाहिजे.

सापेक्षप्रतिज्ञा व केवलप्रतिज्ञा, संकेतप्रतिज्ञा व पक्षांतरप्रतिज्ञा.-(१) "अमुक प्रतिज्ञा खरी असल्यास, (किंवा जर खरी असेल तर) दुसरी अमुक प्रतिज्ञा खरी असेल" अशा अर्थाच्या व अशाच (म्हणजे संकेतार्थक शब्दांनीं युक्त असणाऱ्या) स्वरूपाच्या प्रतिज्ञा, आणि (२) "अमुक अनेक प्रतिज्ञांपैकीं कोणती तरी एकच खरी आहे" अशा अर्थाच्या व "अथवा," "किंवा," "नाहीं तर" इत्यादि पक्षांतरबोधक शब्दांनीं युक्त असणाऱ्या स्वरूपाच्या प्रतिज्ञा, अशा दोन प्रकारच्या प्रतिज्ञा, हा प्रतिज्ञांचा एक निराळाच भेद मानितात. असल्या प्रत्येक प्रतिज्ञेमध्यें ज्या अनेक प्रतिज्ञा असतात, त्यांपैकीं एक किंवा अनेक प्रतिज्ञांची सत्यता स्थापित होण्याला इतरांच्या सत्यासत्यतेची अपेक्षा असते. जसें. (१) "**कखग** त्रिकोण जर समभुज असेल, तर तो समकोण होईल." एथें "तो समकोण होईल" ह्या प्रतिज्ञेची सत्यता स्थापित होण्यास "तो समभुज आहे" हिच्या सत्यतेची अपेक्षा आहे. तसेंच (२) "क रेषा ख रेषेशीं समान असेल अथवा असमान असेल" एथें ज्या दोन प्रतिज्ञा आहेत, त्यांपैकीं कोणत्याही एकीची सत्यता स्थापित होण्याला दुसरीच्या असत्यतेची अपेक्षा आहे.

प्रतिज्ञांच्या ह्या भेदाला आपण "सापेक्षप्रतिज्ञा" ही संज्ञा देऊं; आणि एथवर ज्या प्रतिज्ञांविषयीं विचार केला, त्यांना, म्हणजे "अमुक पदार्थ अमुक प्रकारचा आहे (अथवा नाहीं)" अशा

स्वरूपाच्या प्रतिज्ञांस "केवलप्रतिज्ञा" म्हणूं. सापेक्षप्रतिज्ञांचे जे दोन भेद वर दाखविले, त्यांपैकीं (१) ह्याला "संकेतप्रतिज्ञा" व (२) ह्याला "पक्षांतरप्रतिज्ञा" अशा संज्ञा देऊं. सारांश "केवलप्रतिज्ञा" व "सापेक्षप्रतिज्ञा" असे प्रतिज्ञेचे मुख्य दोन भेद झाले, आणि "संकेतप्रतिज्ञा व "पक्षांतरप्रतिज्ञा" असे सापेक्षप्रतिज्ञेचे दोन भेद झाले.

ह्या दोन्ही प्रकारच्या सापेक्षप्रतिज्ञांस 'त्यांचे अर्थ न बदलूं देतां' केवलप्रतिज्ञेचीं स्वरूपें देतां येतात. जसें "**कखग** त्रिकोणाची समकोणता हा त्याच्या समभुजतेचा परिणाम आहे" आणि "**कखग** त्रिकोण समकोण असणें ही गोष्ट, तो समभुज असणें ह्या गोष्टीच्या आधारानें स्थापित होते" हीं वरच्या संकेतप्रतिज्ञेचीं केवल स्वरूपें झालीं. तसेंच "**क** रेषा **ख** रेषेशीं समान असणें व असमान असणें ह्यांपैकीं कोणती तरी एकच गोष्ट खरी आहे" हें वरच्या पक्षांतरप्रतिज्ञेचें केवल स्वरूप झालें.

पूर्वापरभाग.–संकेतप्रतिज्ञेचे मुख्य दोन भाग असतात, आणि त्यांपैकीं एकाची सत्यता दुसऱ्याच्या सत्यतेचा परिणाम आहे, हें सांगणें एवढाच कायतो ह्या प्रतिज्ञेचा वाक्यार्थ असतो; त्या भागांची सत्यासत्यता तीमध्यें दिली आहे, असें मुळींच समजावयाचें नाहीं. ह्या दोन भागांपैकीं ज्याच्या सत्यतेचा परिणाम दुसऱ्याची सत्यता आहे असें सांगितलें असेल, त्याला "पूर्वभाग" व दुसऱ्याला "अपरभाग" अशा संज्ञा देऊं. जसें वरच्या संकेतप्रतिज्ञेचा "**कखग** त्रिकोण समभुज असेल" हा पूर्वभाग आणि "तो समकोण होईल" हा अपरभाग होय; आणि पूर्वभागाच्या सत्यतेचा परिणाम अपरभागाची सत्यता आहे, असें सांगणें एवढाच कायतो ह्या प्रतिज्ञेचा वाक्यार्थ आहे.

संकेतप्रतिज्ञेमध्यें तिच्या पूर्वापरभागांच्या सत्यासत्यतेविषयीं कांहींच सांगण्याचा उद्देश नसतो, ही गोष्ट, "ह्या दुधांत साखर घातली असेल, तर तें गोड लागेल" असल्या प्रतिज्ञांवरून स्पष्ट दिसते.

व्यत्यास–संकेतप्रतिज्ञेच्या पूर्वभागाचा अपरभाग व अपरभागाचा पूर्वभाग केल्यानें जी संकेतप्रतिज्ञा होते, तिला मूलप्रतिज्ञेचा व्यत्यास म्हणावें. उ० "जर पाऊस पडला असला, तर धान्य पिकलें असेल." ह्या संकेतप्रतिज्ञेचा "जर धान्य पिकलें असेल, तर पाऊस पडला असेल" हा व्यत्यास होय.

संकेतप्रतिज्ञेच्या पूर्वभागांत अनेक प्रतिज्ञा असून अपरभागांत एकच प्रतिज्ञा असली, आणि पूर्वभागांतील कोणती तरी एक प्रतिज्ञा व अपरभाग ह्यांचा विनियम केला, तर जी प्रतिज्ञा होते, तिलाही मूलप्रतिज्ञेचा व्यत्यासच म्हणावें. उ० "जर पाऊस पडला असेल व धान्य पिकलें असेल, तर स्वस्ताई झाली असेल" ही मूलप्रतिज्ञा मानिली असतां, "जर पाऊस पडला असेल व स्वस्ताई झाली असेल, तर धान्य पिकलें असेल;" आणि "जर धान्य पिकलें असेल व स्वस्ताई झाली असेल, तर पाऊस पडला असेल" हा प्रत्येक त्या मूलप्रतिज्ञेचा व्यत्यास होय.

पक्षांतरप्रतिज्ञेमध्यें ज्या अनेक केवलप्रतिज्ञा असतात, त्या प्रत्येकीला त्या पक्षांतरप्रतिज्ञेचा भाग म्हणावें.

संकेतानुमान.–संकेतप्रतिज्ञा खरी आहे असे दिलें असतां (म्हणजे तिच्या पूर्वभागाच्या सत्यतेवर अपरभागाची सत्यता अवलंबून आहे असें दिलें असतां), पूर्वापरभागांपैकीं एकाच्या सत्यासत्यतेवरून दुसऱ्याची सत्यासत्यता ठरविण्याच्या पद्धतीला "संकेतानुमान" ह्मणावें.

संकेतानुमानाविषयीं नियम.

(३१) संकेतप्रतिज्ञा व तिचा पूर्वभाग हीं खरीं असल्यास अपरभाग खरा असतोच. जसें "**कखग** त्रिकोण समभुज असेल, तर त्याचा प्रत्येक कोन ६० अंशांचा असेल" ही संकेतप्रतिज्ञा व "**कखग** त्रिकोण समभुज आहे" हा तिचा पूर्वभाग हीं खरीं असल्यास, "त्याचा प्रत्येक कोन ६० अंशांचा आहे" हा तिचा अपरभाग खरा असलाच पाहिजे.

(३२) संकेतप्रतिज्ञा खरी असून तिचा अपरभाग खोटा असेल, तर पूर्वभागही खोटा ठरतो.

कारण कीं, पूर्वभाग खरा मानिला, तर ३१ व्या नियमाप्रमाणें अपरभागही खरा ठरेल; पण तो खोटा आहे असें दिलें आहे; म्हणून पूर्वभाग खोटा असला पाहिजे. उ०–"जर क संख्येच्या एकंस्थानीं पूज्य असेल, तर ती पांचांनीं विभाज्य असेल" ही संकेतप्रतिज्ञा खरी असेल, व "ती पांचांनीं विभाज्य आहे" हा तिचा अपरभाग खोटा असेल (म्हणजे अर्थात् "ती पांचांनीं विभाज्य नाहीं" हा त्या अपरभागाचा विरोध खरा असेल) तर "तिच्या एकंस्थानीं पूज्य आहे" हा तिचा पूर्वभाग खोटा असला पाहिजे (म्हणजे "तिच्या एकंस्थानीं पूज्य नाहीं" हा पूर्वभागाचा विरोध खरा असला पाहिजे.)

(३३) संकेतप्रतिज्ञा खरी असून तिचा पूर्वभाग खोटा असेल, तर तेवढ्यावरूनच अपरभागाची सत्यासत्यता ठरावयाची नाहीं.

जसें–"क संख्येच्या एकंस्थानीं पूज्य असेल, तर ती दोहोंनीं विभाज्य असेल" ही संकेतप्रतिज्ञा खरी असून तिचा पूर्वभाग खोटा असेल, तर तेवढ्यावरूनच ती दोहोंनीं विभाज्य आहे अथवा नाहीं हें ठरावयाचें नाहीं. कांकीं, तिच्या एकंस्थानीं पूज्य नसलें तरी एखादा सम अंक असेल, तर ती दोहोंनीं विभाज्य असेल; आणि विषम अंक असेल, तर दोहोंनीं विभाज्य नसेल.

(३४) संकेतप्रातिज्ञा व तिचा अपरभाग हीं खरीं असलीं, तर तेवढ्यावरूनच पूर्वभागाची सत्यासत्यता ठरत नाहीं.

जसें, मागच्या कलमांतल्या उदाहरणांतली संकेतप्रतिज्ञा खरी असून "ती दोहोंनीं विभाज्य आहे" हा तिचा अपरभागही खरा असला, तरी तेवढ्यावरूनच तिच्या एकंस्थानीं पूज्य आहे असें ठरावयाचें नाहीं. कां कीं, तिच्या एकंस्थानीं कोणताही सम अंक असला, तरी ती दोहोंनीं विभाज्य असावयाचीच.

उपनियम–ह्या नियमावरून स्पष्ट आहे कीं, संकेतप्रतिज्ञा खरी असल्यास तिचा व्यत्यास खरा असतो असा नियम नाहीं. उ०–

" क संख्येच्या एकंस्थानीं पूज्य असेल तर ती दोहोंनीं विभाज्य असेल " ही संकेतप्रतिज्ञा खरी आहे; पण " क संख्या दोहोंनीं विभाज्य असेल, तर तिच्या एकंस्थानीं पूज्य असेल " हा तिचा व्यत्यास खरा नाहीं. तसेंच "विष्णु ब्राह्मण असेल व २० वर्षांपेक्षां जास्त वयाचा असेल, तर त्याची मुंज झाली असेल " ही संकेत-प्रतिज्ञा खरी आहे; परंतु " विष्णु ब्राह्मण असेल व त्याची मुंज झाली असेल, तर तो २० वर्षांपेक्षां जास्त वयाचा असला पाहिजे " हा तिचा व्यत्यास खरा नाहीं.

पक्षांतरानुमान.-पक्षांतरप्रतिज्ञा खरी मानिली असतां तिच्या एक अथवा अनेक भागांच्या सत्यासत्यतेवरून तिच्या इतर भागांची सत्यासत्यता ठरविण्याच्या पद्धतीला " पक्षांतरानुमान " ह्मणावें.

पक्षांतरप्रतिज्ञेच्या लक्षणांवरून उघड आहे कीं, ती खरी आहे असें दिलें असल्यास, तिच्या भागांपैकीं कोणता तरी एक भाग खरा असलाच पाहिजे, व तिचेच अनेक भाग एककाळीं खरे असावयाचे नाहींत; इतकें दिलें आहे, असें समजावयाचें.

पक्षांतरानुमानाविषयीं नियम.

(३५) पक्षांतरप्रतिज्ञा खरी असून तिचा एक भाग खरा ठरला, तर तिचे इतर सारे भाग खोटे ठरतात.

कारण तिचे अनेक भाग एककाळीं खरे असणें संभवत नाहीं. उ०- " ही लेखणी पाण्यांत टाकिली असतां बुडेल किंवा तरंगेल" ही पक्षांतरप्रतिज्ञा खरी आहे. आतां तिच्या भागांपैकीं "बुडेल" हा खरा ठरला, तर " तरंगेल " हा खोटा ठरेल; व " तरंगेल " हा खरा ठरला, तर " बुडेल " हा खोटा ठरेल. तसेंच " अ संख्या क संख्येशीं समान असेल, किंवा तिच्यापेक्षां मोठी असेल, किंवा लहान असेल " ही संकेतप्रतिज्ञा खरी आहे. आतां तिच्या तीन भागांपैकीं कोणताही एक खरा आहे असें ठरलें, तर इतर दोन्ही खोटे ठरतील, हें उघड आहे.

(३६) पक्षांतरप्रतिज्ञा खरी असून तिच्या भागांपैकीं एक किंवा

अनेक खोटे आहेत असे ठरलें, तर तिच्या इतर भागांपैकीं कोणता तरी एक खरा असला पाहिजे, असें ठरतें.

कारण कीं, पक्षांतरप्रतिज्ञेचा कोणता तरी एक भाग खरा असलाच पाहिजे. जसें, "ह्या पुस्तकाची किंमत एक रुपया असेल, किंवा एक रुपयापेक्षां जास्त असेल, अथवा एक रुपयापेक्षां कमी असेल" ही पक्षांतरप्रतिज्ञा खरी आहे. आतां हिचा पहिला भाग जर खोटा ठरला, तर इतर दोन भागांपैकीं एक खरा असला पाहिजे; आणि पहिले दोन खोटे ठरले, तर तिसरा खरा असला पाहिजे.

संकेतानुमान व पक्षांतरानुमान ह्यांच्या संयोगानें फार उपयोगी असा एक अनुमानविषयक नियम उत्पन्न होतो. तो असा कीं:—

(३७) जर अनेक संकेतप्रतिज्ञा खऱ्या आहेत, ह्यांच्या पूर्वभागांपैकीं कोणता तरी एक भाग खरा असणें आवश्यक आहे, आणि अपरभागांपैकीं कोणतेही दोन एककाळीं खरे असणें संभवत नाहीं, इतकें सारें दिलें असेल; तर ह्या प्रत्येक संकेतप्रतिज्ञेचा व्यत्यास खरा असलाच पाहिजे. उ०—

अबक त्रिकोणाची **अक** बाजू **अब** बाजूपेक्षां

(१) लहान असेल, तर **ब** कोन **क** कोनापेक्षां लहान होईल.

(२) मोठी असेल, तर **ब** कोन **क** कोनापेक्षां मोठा होईल.

(३) आणि **अक** बाजू **बक** बाजूबरावर असेल, तर **ब** कोन **क** कोनाबरावर होईल.

ह्या तीन संकेतप्रतिज्ञा खऱ्या ठरल्या आहेत; ह्यांच्या पूर्वभागांपैकीं कोणता तरी एक खरा असलाच पाहिजे हें उघड आहे; व अपरभागांपैकीं कोणतेही दोन एककालीं खरे असणें संभवत नाहीं हेंही उघड आहे. म्हणून "**अबक** त्रिकोणाचा **ब** कोन **क** कोनाबरोबर असेल, तर त्याची **अक** बाजू **बक** बाजूबरोबर असली पाहिजे," इत्यादिक जे त्या संकेतप्रतिज्ञांचे व्यत्यास, तेही खरे असले पाहिजेत.

आतां कोणतीही संकेतप्रतिज्ञा खरी ठरविणें, ह्याचा अर्थ "तिच्या पूर्वभागाच्या सत्यतेवरून तिच्या अपरभागाची सत्यता स्था-

पित होते, असें दाखविणें " हा होय. म्हणून " **अबक** त्रिकोणाचा **ब** कोन **क** कोनाबरोबर आहे " हा वरच्या व्यत्यासाचा पूर्वभाग खरा मानिला असतां " **अक** बाजू **बक** बाजूबरोबर आहे " हा त्याचा अपरभाग खरा ठरतो, असें दाखविलें म्हणजे झालें. हें सहज सिद्ध करितां येतें.

जातिविभागीकरण.

कोणत्याही जातिवाचकपदानें दर्शविलेल्या व्यक्तींच्या एक अथवा अनेक असाधारण धर्मांस लक्षून त्या जातीचे भेद (अथवा प्रकार) ठरविणें, ह्या कृत्याला त्या जातीचें " विभागीकरण " म्हणावें. जसें, (हिंदुस्थानांतलीं) " नाणीं " हीं सारीं धातूंचींच केलेलीं असतात, असें मानिल्यास, ह्या जातिवाचकपदानें दर्शविलेल्या व्यक्तींचा जो " भिन्न भिन्न धातूंचीं केलेलीं असणें " हा एक असाधारण धर्म आहे, त्यास लक्षून " सोन्याचीं नाणीं " " रुप्याचीं नाणीं " इत्यादिक भेद ठरविणें, हें " नाणें " ह्या जातीचें विभागीकरण झालें. तसेंच " रुप्याचीं नाणीं " ह्या जातिवाचकपदानें दर्शविलेल्या व्यक्तींच्या भिन्न भिन्न किंमतींस लक्षून " रुपये, " " अधेल्या, " " पावल्या " इत्यादिक भेद ठरविणें हें " रुप्याचीं नाणीं " ह्या जातीचें विभागीकरण झालें.

भेद व **भाग.**– विभागीकरण ह्या शब्दाच्या अवयवार्थावरून " भाग करणें " व " भेद (अथवा प्रकार) करणें " हीं एकाच अर्थाचीं पदें आहेत असें वाटेल. पण तसें समजावयाचें नाहीं. व्यक्तीच्या अथवा जें कांहीं पूर्ण मानिलें असेल त्याच्या केवळ्याही तुकड्याला भाग म्हणतात; त्याला भेद म्हणत नाहींत. एखाद्या फळाची साल हा त्याचा भाग होय; व " अंबा, " " पेरू " इत्यादिक हे फळाचे भेद होत. भाग व भेद ह्यांतील फरक ओळखण्याची अशी एक खूण दिसून येते कीं, जातीच्या कोणत्याही भेदाला उद्देशून त्या जातीचें विधान करितां येतें, पण पूर्ण मानिलेल्या पदार्थाच्या भागाला उद्देशून त्या पदार्थाचें विधान करितां येणार नाहीं. जसें

"अंबा हें फळ आहे" असें म्हणतां येतें, पण एखाद्या फळाच्या सालीला फळ म्हणतां येत नाहीं.

उपभेद.– कोणत्याही जातीच्या एखाद्या भेदाचे पुनः भेद कल्पिले असतां त्यांना मूलजातीचे उपभेद म्हणावें. जसें– "नाणीं" ह्या जातीचा "रुप्याचीं नाणीं" हा भेद, व त्या भेदाचा "रुपये" हा भेद; म्हणून "रुपये" हा "नाणीं" ह्या मूलजातीचा उपभेद झाला.

भेदक.– कोणत्याही जातीचें विभागीकरण करीत असतां, त्या जातींतल्या ज्या असाधारण धर्मास किंवा धर्मसमुदायास लक्षून तिचे भेद ठरवावयाचे असतील, त्याला त्या विभागीकरणांतले भेदक म्हणावें. जसें, "पुस्तक" ह्या जातीचे "संस्कृत पुस्तकें," "मराठी पुस्तकें" इत्यादिक भेद पुस्तकांच्या भिन्न भिन्न भाषांस लक्षून कल्पिले आहेत; म्हणून एथें "प्रत्येक पुस्तकाची भाषा" हें भेदक होय. "समभुजत्रिकोण," "समद्विभुजत्रिकोण" आणि "विषमभुजत्रिकोण" हे "त्रिकोण" ह्या जातीचे भेद कल्पिले आहेत; एथें "प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाजूंचें साम्यासाम्य" हें भेदक आहे. "सम अपूर्णांक" आणि "विषम अपूर्णांक" हे अपूर्णांकाचे भेद कल्पिले आहेत; एथें "प्रत्येक अपूर्णांकांत एकमाचे कल्पिलेले हिस्से व तसले घेतलेले हिस्से ह्यांचें न्यूनाधिक्य" हें भेदक होय.

जातीचे भेद कल्पितेसमयीं तींतील प्रत्येक व्यक्तीचा एकच धर्म भेदक मानणें आवश्यक आहे असें नाहीं; अनेक असाधारण धर्म मिळून भेदक मानिलें तरी चालतें. जसें "चौरस," "काटकोन चौकोन," "समभुजचौकोन" व "विषमभुज चौकोन" हे "चौकोन" ह्या जातीचे चार भेद मानिले आहेत, ते, "सर्व बाजू समान असणें" व "सर्व किंवा कांहीं असमान असणें" ह्यांपैकीं एक असाधारण धर्म, आणि "सर्व कोन काटकोन असणें" व सर्व किंवा कांहीं तिर्यक्कोण असणें" ह्यांपैकीं एक असाधारण धर्म अशा दोन धर्मांस लक्षून कल्पिले आहेत. म्हणून एथें हे दोन धर्म मिळून चौकोनाच्या विभागीकरणांतलें भेदक झालें.

विभागीकरणाविषयीं नियम.

(१) जातीचा प्रत्येक भेद दाखविणारें पद जातिवाचकच असलें पाहिजे; व्यक्तिवाचक असूं नये. जसें, ब्राह्मण ह्या जातीचे, "देशस्थ ब्राह्मण," "कोकणस्थ ब्राह्मण" इत्यादि हे भेद आहेत; पण "विष्णुशास्त्री" "कृष्णशास्त्री" हे भेद नव्हत.

(२) जातिवाचक पदाच्या व्याप्तीपेक्षां त्या जातीचा प्रत्येक भेद दाखविणाऱ्या पदाची व्याप्ति कमीच असली पाहिजे; म्हणजे जातिवाचकपदानें दर्शविलेल्या व्यक्तींच्या संख्येपेक्षां भेदवाचकपदानें दर्शविलेल्या व्यक्तींची संख्या कमी असली पाहिजे. जसें, चौरस हा चौकोनाचा भेद आहे, पण चौकोन हा चौरसाचा भेद होणें संभवत नाहीं. कांकीं, चौकोन ह्या पदाची व्याप्ति चौरस ह्या पदाच्या व्याप्तीपेक्षां जास्त आहे.

(३) कोणत्याही जातीचे एकाच भेदकावरून केलेले सर्व भेद एकत्र केले असतां नेमकी ती जाति सिद्ध झाली पाहिजे, (एकाच भेदकावरून केलेल्या कोणत्याही जातीच्या सर्व भेदांची मिळून व्याप्ति त्या जातीच्या व्याप्तीशीं नेमकी बरोबर असली पाहिजे.) म्हणजे अमुक भेदांतली अमुक व्यक्ति त्या जातींतली नाहीं, अथवा त्या जातींतली अमुक व्यक्ति तिच्या कोणत्याही भेदांत येत नाहीं, असें होतां कामा नये. जसें, "क्रियाविशेषणें," "शब्दयोगि अव्ययें," "उभयान्वयि अव्ययें," आणि "केवलप्रयोगि अव्ययें" असे अव्ययांचे (म्हणजे ज्यांना लिंगवचनप्रयुक्त विकार होत नाहीं अशा शब्दांचे) भेद केले, तर "तो नुकताच आला" इत्यादि स्थलीं "नुकता" ही क्रियाविशेषण ह्या भेदांतली व्यक्ति असून, ती अव्यय ह्या जातीमध्यें येत नाहीं. तसेंच "क्रियाविशेषणें" टाकून बाकीचे तीनच अव्ययांचे भेद मानिले, तर "सत्वर," "सावकाश" इत्यादिक व्यक्ति अव्यय ह्या जातींतल्या असून तिच्या कोणत्याही भेदांत येत नाहींत. म्हणून हे दोन्ही प्रकारचे भेद सदोषच होत.

जातिविभागीकरणाच्या ह्या दोषाला " जातिभेदवैषम्य " म्हणावें.

(४) कोणत्याही जातीच्या, एकाच भेदकावरून केलेल्या, भेदांपैकीं एका भेदांतील कोणत्याही व्यक्तीचा दुसऱ्या भेदांत समावेश होऊं नये; म्हणजे त्या जातींतली कोणतीही एकच व्यक्ति तिच्या अनेक भेदांत शिरूं नये. जसें, "काटकोनत्रिकोण," "लघुकोणत्रिकोण," " विशालकोणत्रिकोण," " समभुजत्रिकोण, " " समद्विभुजत्रिकोण" आणि "विषमभुजत्रिकोण" हे त्रिकोणाचे सहा भेद आहेत, असें जर म्हटलें, तर ज्याचा एक कोन काटकोन व इतरांपैकीं प्रत्येक अर्ध काटकोन आहे, असा त्रिकोण " काटकोनत्रिकोण " व " समद्विभुजत्रिकोण " ह्या प्रत्येक भेदांत शिरतो. म्हणून "त्रिकोणाचे हे सहा भेद आहेत " असें म्हणणें अशुद्ध होय.

जातिविभागीकरणाच्या ह्या दोषाला " अन्योन्यावेश " म्हणावें. आणि ह्या दोषानें युक्त अशा भेदांना " अन्योन्याविष्टभेद " म्हणावें.

हा दोष मुख्यत्वेंकरून भेदक एक नसल्यामुळें होतो. जसें, वरच्या उदाहरणांत त्रिकोणाच्या कोनांची जाति व बाजूंचें साम्यासाम्य हीं दोन भेदकें झाल्यामुळें हा दोष झाला. " संस्कृत पुस्तकें" " मराठी पुस्तकें, " " इतिहासाचीं पुस्तकें, " " गणिताचीं पुस्तकें." ' कातडी पुठ्ठ्याचीं पुस्तकें " इत्यादिक, असे पुस्तकांचे भेद कल्पिले, तर ह्यांत पुस्तकांची भाषा, विषय आणि त्यांच्या पुठ्ठ्यांची जाति अशीं तीन भेदकें झालीं; म्हणून एथें अन्योन्यावेश झाला. हा दोष होण्याचा संभव फार असतो ह्याकरितां विभागीकरणास आरंभ करितेवेळीं आधीं भेदक कोणतें आहे व तें एकच आहे किंवा नाहीं, ह्या गोष्टींचा निश्चय अवश्य करावा.

(५) कोणत्याही जातीचे, एकाच भेदकावरून कल्पिलेले, सारे भेद समकोटिक असावे; ह्मणजे भेद व उपभेद इत्यादिकांचें मिश्रण करूं नये. जसें, " पूर्णांक," " अपूर्णांक " व " मिश्रांक " (ह्मणजे भागानुबंध व भागापवाहपूर्णांक) असे संख्यांचे तीन भेद मानिले, तर ते समकोटिक होतील. पण " पूर्णांक, " " समअपूर्णांक, " " विषमअपूर्णांक " व " मिश्रांक " असे जर संख्यांचे भेद

मानिले, तर ते असमकोटिक होतील; कारण कीं, "समअपूर्णांक" व "विषमअपूर्णांक" हे वस्तुत: संख्यांच्या "अपूर्णांक" ह्या भेदाचे भेद, म्हणजे संख्यांचे उपभेद आहेत. म्हणून येथें संख्यांचे भेद व उपभेद ह्यांचें मिश्रण झालें.

जातिविभागीकरणाच्या ह्या दोषाला "असमकोटिकता" ह्मणावें.

व्याख्या.

कोणत्याही शास्त्रांतलीं जीं पदें (ह्मणजे शब्द अथवा शब्दसमुदाय) अशीं असतात कीं, त्या शास्त्रामध्यें त्यांचे अमुकच अर्थ समजावयाचे (त्यांचे मूळचे किंवा अवयवांवरून दिसणारे अर्थ मनांत आणावयाचे नाहींत) असा शास्त्रकारांचा संकेत असतो, त्यांना त्या शास्त्रांतलीं "पारिभाषिक" पदें अथवा "सांकेतिक" पदें ह्मणावें. जसें,-"सम अपूर्णांक" ह्या पदाचा अवयवार्थ कोणताही असो, परंतु "ज्याचा छेद अंशापेक्षां जास्त आहे असा अपूर्णांक" हाच त्याचा अर्थ समजावयाचा, असा संख्यागणितांतला संकेत आहे; म्हणून हें संख्यागणितांतलें "पारिभाषिक" अथवा "सांकेतिक" पद झालें. "वर्तुळखंड" ह्या पदाचा अवयवार्थ "वर्तुलाचा तुकडा" असा आहे; मग तो तुकडा नुसत्या सरळरेषांनीं मर्यादिलेला असो, किंवा नुसत्या वक्ररेषांनीं मर्यादिलेला असो, अथवा सरलवक्ररेषांनीं मर्यादिलेला असो, तथापि "वर्तुलखंड" ह्या पदाच्या अवयवार्थावरून त्यास "वर्तुलखंड" ह्मणण्यास चिंता नाहीं. परंतु ह्या पदाविषयीं भूमितिशास्त्राचा असा संकेत आहे कीं, "वर्तुलाची कोणतीही ज्या आणि तिनें कापिलेला कंस ह्याच दोन रेषांनीं झालेली आकृति" असाच त्याचा अर्थ समजावयाचा; ह्मणून "वर्तुलखंड" हें भूमितिशास्त्रांतलें "सांकेतिक" पद होय. "गण," "अव्यय," "गुरुत्वमध्य" हीं अनुक्रमें छंद:शास्त्र, व्याकरण, व पदार्थविज्ञानशास्त्र ह्यांतील सांकेतिक पदें आहेत.

"अमुकच धर्मानें अथवा धर्मसमुदायानें युक्त अशा व्यक्ति" हाच अमुकपदाचा अर्थ समजावयाचा, असा ज्या पदाविषयीं संकेत असतो, त्या सांकेतिकपदाचा तो अर्थ दर्शविणाऱ्या वाक्याला त्या प-

दाची "व्याख्या*" ह्मणतात. जसें,-"संख्यात्व, अपूर्णत्व व छेदाचें अंशापेक्षां आधिक्य, ह्या धर्मांच्या समुदायानें युक्त अशा $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ इत्यादिक व्यक्ति" हाच "सम अपूर्णांक" ह्या पदाचा अर्थ समजावयाचा, असा संकेत आहे; म्हणून "ज्या अपूर्णांकाचा छेद अंशापेक्षां जास्त असतो त्याला सम अपूर्णांक ह्मणावें" हें जें त्या पदाचा तो अर्थ दर्शविणारें वाक्य, त्याला त्या पदाची व्याख्या ह्मणावें.

व्याख्या करण्याचे न्यायशास्त्रोक्त नियम.

(१) व्याख्येयपद ज्या जातीचें वाचक आहे, ती जाति ज्या व्यापकजातीचा भेद आहे असें प्रसंगविशेषीं मानिलें असेल, त्या व्यापकजातीचें वाचक पद, आणि व्याख्येयजातीचा भेदक व सहज ओळखतां येण्याजोगा धर्म (अथवा धर्मसमुदाय) दर्शविणारीं पदें, हीं त्या व्याख्येमध्यें अवश्य असलीं पाहिजेत. जसें; "बहुकोणाकृति" ह्या पदाची व्याख्या करावयाची आहे; तर ही व्याख्येयजाति हा "सरळरेषाकृति" ह्या दुसऱ्या एका व्यापक जातीचा भेद मानिला आहे; ह्मणून ह्या दुसऱ्या जातीचें वाचक "सरलरेषाकृति" हें पद, आणि सरलरेषाकृतीच्या (त्रिकोण व चौकोन ह्या) इतर भेदांपासून ह्या भेदाची भिन्नता दाखविणारें "चोहोंपेक्षां जास्त रेषांनीं झालेली" हें पद, अशीं दोन पदें त्या व्याख्येंत असलींच पाहिजेत. ह्याकरितां "चोहोंपेक्षां जास्त सरलरेषांनीं झालेली जी सरलरेषाकृति तिला बहुकोणाकृति ह्मणावें" अशी त्या पदाची व्याख्या केली पाहिजे.

ह्या उदाहरणांत व्याख्येयजातीचा एकच धर्म भेदक झाला आहे; कोठें कोठें व्याख्येयजातीच्या अनेक धर्मांचा समुदाय मात्र भेदक होतो. जसें; "(१) एकाच पातळींत असणाऱ्या व (२) दोहों अंगांस कितीही वाढविल्या असतां परस्परांस न मिळणाऱ्या अशा

* व्याख्या हा शब्द संस्कृतभाषेंत वर्णन ह्या अर्थाचा आहे; परंतु आलीकडे गणितविषयक मराठी ग्रंथांमध्यें तो शब्द लक्षण ह्या अर्थी योजण्याची वहिवाट पडली आहे. तिला अनुसरून एथेंही तो शब्द लक्षण ह्या अर्थानेंच योजिला आहे.

सरळरेषांच्या जोडीला समांतररेषा म्हणावें." एथें (१) व (२) ह्या दोन धर्मांपैकीं कोणताही एकटाच धर्म भेदक होत नाहीं, दोहोंचा समुदाय मात्र भेदक होतो; ह्मणून ते दोन्ही धर्म दाखविणारीं पदें व्याख्येंत योजिलीं आहेत. हीच गोष्ट "काटकोन," "वर्तुल," "चौरस" इत्यादि अनेक पदांच्या व्याख्यांमध्यें दिसून येते.

(२) व्याख्येमध्यें "अतिव्याप्ति," "अव्याप्ति" व "असंभव" हे दोष नसावे. ह्या दोषांचीं स्वरूपें अशीं:—

अतिव्याप्ति.—व्याख्येयजातीमध्यें ज्या ज्या व्यक्तींचा समावेश व्हावा अशी इच्छा असते, त्यांखेरीज एखाद्या व्यक्तीचा समावेश तीमध्यें होतो असें जर व्याख्येवरून दिसेल, तर त्या व्याख्येमध्यें "अतिव्याप्ति" हा दोष आहे, असें म्हणतात. जसें,—"पदार्थांची किंमत देण्याघेण्याकरितां लोक ज्या पदार्थांची योजना करितात, त्यांस नाणीं म्हणावें" अशी जर नाण्यांची व्याख्या केली, तर बायका बोहऱ्यापासून भांडीं घेऊन त्यांच्या किंमतींबद्दल त्यास जीं फाटकीं चिरगुटें देतात, त्यांचाही नाण्यांत समावेश होईल. म्हणून ह्या व्याख्येमध्यें अतिव्याप्ति हा दोष आहे.

अव्याप्ति.— व्याख्येयजातीमध्यें ज्या ज्या व्यक्तींचा समावेश व्हावा अशी इच्छा असते, त्यांपैकीं एखाद्या व्यक्तीचा समावेश तीमध्यें होत नाहीं असें जर व्याख्येवरून दिसेल, तर त्या व्याख्येमध्यें "अव्याप्ति" हा दोष आहे, असें ह्मणतात. जसें,—"पदार्थांची किंमत देण्याघेण्याच्या सोईकरितां राज्यकर्त्यांनीं केलेले जे धातूचे तुकडे, त्यांस नाणीं ह्मणावें." अशी नाण्यांची व्याख्या केली, तर तीवरून "कवड्या" "बदाम" इत्यादिकांचा समावेश नाण्यांत होणार नाहीं. ह्मणून ह्या व्याख्येमध्यें अव्याप्ति हा दोष आहे.

असंभव.—व्याख्येयजातीमध्यें ज्या ज्या व्यक्तींचा समावेश व्हावा अशी इच्छा असते, त्यांपैकीं एकीचाही समावेश तीमध्यें होत नाहीं, असें जर व्याख्येवरून दिसेल, तर तीमध्यें "असंभव" हा दोष आहे, असें ह्मणावें. जसें;—"पदार्थांची किंमत देण्याघेण्याच्या सोईकरितां राज्यकर्त्यांनीं जे कधींच न झिजणारे पदार्थ केलेले अ-

सतात, त्यांस नाणीं ह्मणावें. " ही नाण्यांची व्याख्या कोणत्याच नाण्यास लागू होण्याचा संभव नाहीं. कां कीं, कधींच न झिजणारा असा एकही पदार्थ नाहीं; ह्मणून ह्या व्याख्येमध्यें असंभव हा दोष आहे.

ज्या व्याख्येमध्यें अतिव्याप्ति इत्यादिक दोष नसतील, तिला जर अशा एका प्रतिज्ञेचें स्वरूप दिलें कीं, तिच्या विधेयस्थानीं तें व्याख्येयपद येईल; तर ती प्रतिज्ञा व तिचा व्यापकव्यत्त्यास हीं दोन्हीं खरीं असलींच पाहिजेत; व ज्या व्याख्येपासून अशा रीतीनें तयार केलेल्या प्रतिज्ञा खऱ्या असतील, तीमध्यें अतिव्याप्ति इत्यादिक दोष नसावयाचेच, असा निश्चय आहे. जसें,–" दोहोंनीं विभाज्य असणाऱ्या पूर्णसंख्येला समसंख्या ह्मणतात, " ही व्याख्या निर्दोष असल्यास " जी पूर्ण संख्या दोहोंनीं विभाज्य असते ती सम असते " ही प्रतिज्ञा, व " जी संख्या सम असते ती दोहोंनीं विभाज्य असते" हा तिचा व्यापकव्यत्त्यास हीं दोन्हीं निरपवाद असावयाचींच; व हीं निरपवाद असल्यास तीमध्यें अतिव्याप्त्यादि दोष नसावयाचेच.

(३) व्याख्येमध्यें जर व्याख्येयजातीच्या अनेक धर्मांचा समुदाय भेदक झालेला असेल, तर त्या धर्मसमुदायांतला प्रत्येक धर्म स्वतंत्र असला पाहिजे; म्हणजे त्यांपैकीं कोणताही एक धर्म त्यांतल्याच दुसऱ्या एखाद्या धर्माच्या आधारानें अनुमानद्वारा सिद्ध करितां येऊं नये. कारण कीं, असें होईल, तर तो सिद्ध करितां येणारा धर्म व्याख्येंत सांगणें व्यर्थ होय. उ०–(१) " ज्याचा एक कोन काटकोन आहे व (२) इतर दोन कोनांची बेरीज एक काटकोन आहे, त्याला काटकोनत्रिकोण ह्मणावें. " एथें सांगितलेल्या (१), (२) ह्या धर्मांपैकीं प्रत्येक धर्म दुसऱ्याच्या आधारानें अनुमानद्वारा सिद्ध करितां येण्याजोगा आहे; ह्मणून हे धर्म स्वतंत्र नाहींत; व ह्यांपैकीं प्रत्येक धर्म स्वतंत्रपणें भेदक आहे; ह्मणून ह्यांपैकीं एक (व मुख्यत्वेंकरून पहिला सहज समजण्याजोगा आहे ह्मणून तो) धर्म व्याख्येंत घातला ह्मणजे व्याख्या निर्दोष होते. तस्मात् दुसरा धर्म सांगणें अगदीं व्यर्थ आहे; इतकेंच नाहीं, पण गैरसोईचें आहे.

व्याख्येच्या ह्या दोषाला " **अतिभेदकता** " ह्मणावें.

एखाद्या पदानें दर्शविलेल्या व्यक्तींचें वर्णन करावयाचें असलें म्हणजे प्रसंगानुसार त्या व्यक्तींचे असले कितीही धर्म सांगितले, तरी तो दोष नव्हे. वर्णनामध्येंही अप्रासंगिक धर्म सांगणें हा दोषच आहे.

(४) ज्या पदाची व्याख्या करावयाची तेंच पद. व ज्याचा अर्थ पूर्वीं ठरलेला नाहीं किंवा संदिग्ध आहे असें दुसरें कोणतेंही पद, व्याख्येमध्यें योजूं नये. उ०–" ज्या पूर्णसंख्येमध्यें समत्व असतें तिला ' समसंख्या ' ह्मणावें " अशी " समसंख्या " ह्या पदाची व्याख्या केली, तर ती अगदीं निरुपयोगी होय. कारण कीं, वस्तुतः पूर्णसंख्येच्या समत्वाचीच व्याख्या करावयाची असून तो शब्द त्या व्याख्येंत योजिला आहे; त्यामुळें तीपासून व्याख्या करणाराचा इष्टार्थ दुसऱ्यास समजण्याचा संभव नाहीं.

तसेंच " ज्या पूर्णसंख्येचा दोन हा अवयव असतो तिला ' समसंख्या ' म्हणावें " अशी समसंख्येची व्याख्या केली, आणि " अवयव " ह्या शब्दाचा इष्टार्थ पूर्वीं सांगितलेला नसला; तर " भाग " असा जो " अवयव " शब्दाचा व्यवहारिक अर्थ आहे, तोच कदाचित् ही व्याख्या वाचणारा घेईल; आणि ह्या अर्थाप्रमाणें ७ ह्या संख्येचा अवयव दोन आहे, ह्मणून ७ ही संख्या सम आहे, असें तो समजेल.

सिद्धता.

" अमुक प्रतिज्ञा खरी आहे " ही गोष्ट, पूर्वीं खऱ्या ठरलेल्या अथवा खऱ्या मानिलेल्या प्रतिज्ञांच्याच आधारावर व्याप्त्यानुमानाच्याच योगानें दुसऱ्याच्या ध्यानांत आणून देण्याची जी पद्धति, तिला त्या प्रतिज्ञेची " सिद्धता " म्हणावें.

साध्यप्रतिज्ञा.–ज्या प्रतिज्ञेची सिद्धता करावयाची तिला "साध्यप्रतिज्ञा " म्हणावें.

क्रमिक सिद्धता व क्रमविरुद्ध सिद्धता.– हे सिद्धतेचे दोन भेद आहेत. त्यांचीं सामान्यलक्षणें अशीं–" ज्या सिद्धतेमध्यें साध्यप्रतिज्ञेच्या विरुद्धप्रतिज्ञेविषयीं कांहींएक न सांगतां साक्षात् ती साध्य-

प्रतिज्ञाच स्थापित केलेली असते, तिला 'क्रमिकसिद्धता' (अथवा क्रमिकरीति) म्हणतात."

"ज्या सिद्धतेमध्यें, साध्यप्रतिज्ञेची विरुद्धप्रतिज्ञा खरी मानिली असतां पूर्वी स्थापित झालेल्या अथवा सत्य मानिलेल्या अमुक गोष्टीशीं विरोध उत्पन्न होतो, असें दाखवून ती विरुद्धप्रतिज्ञा खोटी ठरविली असते, व तिच्या खोटेपणावरून पहिल्या नियमाच्या आधारानें साध्यप्रतिज्ञा स्थापित केलेली असते, तिला 'क्रमविरुद्धसिद्धता (अथवा क्रमविरुद्धरीति) म्हणतात." (हिला "विरोधहारक" सिद्धता म्हटलें असतां शोभेल.)

पुढें लिहिलेल्या तीन उदाहरणांपैकीं पहिलीं दोन क्रमिकसिद्धतेचीं आहेत व तिसरें क्रमविरुद्धसिद्धतेचें आहे.

पहिलें उदाहरण.— "कोणत्याही अनेक स्थानांच्या संख्येंतून तिचा एकंस्थानचा अंक वजा केला असतां राहणारी बाकी (पक्ष) ही, सम संख्या (साध्य) असते" ही व्यापकजातिप्रतिज्ञा सिद्ध करून दाखवावयाची आहे, असें समजा. तर हिच्या सिद्धतेमध्यें "समसंख्या "शून्यांतसंख्या," "कोणत्याही संख्येनें विभाज्य असणारी संख्या" इत्यादिक कांहीं संदिग्धार्थक शब्द योजावे लागणार आहेत, त्यांच्या व्याख्या प्रथमतः करून ठेविल्या पाहिजेत; तसेंच "कोणतीही शून्यांत (म्हणजे जिच्या एकंस्थानीं शून्य आहे अशी) संख्या दहांनीं विभाज्य असते" इत्यादि कांहीं प्रतिज्ञांचे आधार ह्या सिद्धतेंत घ्यावे लागणार आहेत; ह्मणून त्या प्रतिज्ञा आधीं खऱ्या ठरवून ठेविल्या पाहिजेत.

ही सर्व सामग्री सिद्ध आहे, असें समजून ही सिद्धता करूं.

(क्रमिकसिद्धता.)

(१) प्रत्येक शून्यांतसंख्या दहांनीं विभाज्य असते, (सा. प्र.)
साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी ही शून्यांतसंख्या असते; (प. प्र.)
∴* साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी दहांनीं विभाज्य असते.
(अनुमिति)

---

* ∴ हें चिन्ह 'ह्मणून' ह्या शब्दाबद्दल योजिलें आहे.

(२) दहांनीं विभाज्य असणारी प्रत्येक संख्या दोहोंनीं विभाज्य असते,

साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी दहांनीं विभाज्य असते;

∴ साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी दोहोंनीं विभाज्य असते.

(३) दोहोंनीं विभाज्य असणारी प्रत्येक संख्या ही समसंख्या असते,

साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी दोहोंनीं विभाज्य असते;

∴ साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी ही समसंख्या असते.

ही इष्टसिद्धि.

ह्या सिद्धतेंत जीं अनुमानें तयार केलीं आहेत, त्यांमध्यें प्रत्येकाची अनुमिति हें त्याच्या पुढच्याचें पक्षप्रमाण असा अनुक्रम साधला आहे. हाच अनुक्रम जेथें साधेल, तेथें कांहीं प्रतिज्ञांचा संक्षेप करितां येतो; आणि त्या संक्षेपानें सिद्धता दुर्बोध न होतां उलटी ज्यास्त सुबोध होते. तो संक्षेप असाः—

साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी ही शून्यांतसंख्या असते,

प्रत्येक शून्यांत संख्या दहांनीं विभाज्य असते,

दहांनीं विभाज्य असणारी प्रत्येक संख्या दोहोंनीं विभाज्य असते,

दोहोंनीं विभाज्य असणारी प्रत्येक संख्या ही समसंख्या असते;

∴ साध्यप्रतिज्ञेंतली प्रत्येक बाकी ही समसंख्या असते.

ही इष्टसिद्धि.

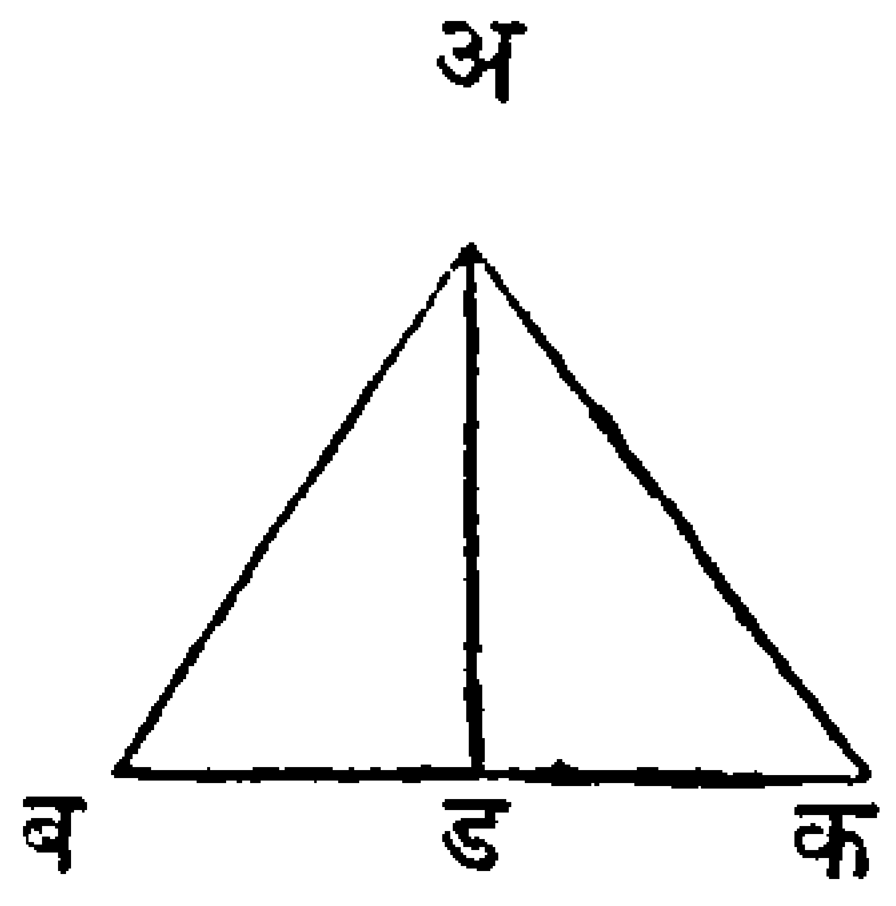
एथें आधीं पहिल्या अनुमानाचें पक्षप्रमाण, पुढें अनुक्रमें सर्व अनुमानांचीं साध्यप्रमाणें व अखेरीस शेवटच्या अनुमानाची अनुमिति, असा प्रतिज्ञांचा अनुक्रम आहे; प्रत्येक प्रमाणप्रतिज्ञेचें विधेयपद हें तिच्या पुढच्या प्रमाणप्रतिज्ञेचें उद्देश्यपद, अशी सर्व प्रमाणप्रतिज्ञांच्या उद्देश्यविधेयपदांची सांखळी बनून गेली आहे; आणि त्या सांखळीच्या योगानें पहिल्या प्रमाणप्रतिज्ञेचें उद्देश्यपद व शेवटच्या प्रमाणप्रतिज्ञेचें विधेयपद ह्यांचें ऐक्य झालें आहे, असें अनुमितीमध्यें

दर्शविलें गेलें आहे. अनुमानांच्या ह्या सांखळीला आपण " कारण*माला " अशी संज्ञा देऊं.

कारणमालेमध्यें एखादें प्रमाण व्याप्यप्रतिज्ञात्मक असल्यास, तें पहिल्या प्रमाणाच्याच जागीं असलें पाहिजे; व एखादें प्रमाण अभावार्थक असल्यास तें शेवटच्या प्रमाणाच्याच जागीं असलें पाहिजे, हीं अन्यत्र असतील, तर ती कारणमाला सदोष होते, हें द्विप्रमाणकव्याप्यानुमानाच्या नियमांवरून स्पष्ट दिसतें.

दुसरें उदाहरण.—" कोणत्याही समद्विभुजत्रिकोणाच्या समान असणाऱ्या दोन बाजूंपैकीं प्रत्येक बाजू ही (पक्ष), शिरोबिंदु व पायांतील कोणताही बिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेपेक्षां मोठी (साध्य) असते " ही व्यापकजातिप्रतिज्ञा सिद्ध करून दाखवावयाची आहे (आणि युक्लिडच्या पहिल्या पुस्तकाचे पहिले २० सिद्धांत पूर्वीं सिद्ध करून ठेविले आहेत), असें समजा.

एथें प्रथमतः ही जातिप्रतिज्ञा उद्देश्यजातींतल्या एका विशेष व्यक्तीलाच उद्देशून म्हणूं, व ती व्यक्तिप्रतिज्ञाच आधीं सिद्ध करूं. ती व्यक्तिप्रतिज्ञा अशीः—



अबक त्रिकोणाच्या **अब** आणि **अक** ह्या बाजू समान आहेत, आणि **अ** हा शिरोबिंदु व **बक** पायांतील **ड** हा एक बिंदु ह्यास सांधणारी **अड** रेषा आहे, इतकें सर्व दिलें आहे; आणि **अब**, **अक**, ह्यांपैकीं प्रत्येक बाजू **अड** पेक्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें आहे.

---

* हिचें अलंकारशास्त्रांतलें उदाहरणः— जितेंद्रिय मनुष्य विनीत असतो,

जितेंद्रियत्वं विनयस्य कारणं	विनीत मनुष्य गुणवान् होतो,
गुणप्रकर्षो विनयादवाप्यते ।	गुणवान् मनुष्य लोकप्रिय होतो,
गुणप्रकर्षेण जनोऽनुरज्यते	लोकप्रिय मनुष्य संपन्न होतो;
जनानुरागप्रभवा हि संपदः ॥	जितेंद्रिय मनुष्य संपन्न होतो.

आधीं **अब** ही **अड**पेक्षां मोठी आहे, असें सिद्ध करूं

(क्रमिकसिद्धता.)

(१) समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडचे कोन समान असतात, (सा. प्र.)

अबक आणि **अकब** हे समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडचे कोन आहेत; (प. प्र.)

∴ **अबक** आणि **अकब** हे कोन समान आहेत. (अनुमिति)

(२) त्रिकोणाची कोणतीही बाजू वाढविल्यानें होणारा बाह्य-कोन हा, त्या त्रिकोणाच्या आंतील पलीकडच्या कोनापेक्षां मोठा असतो, (सा.प्र.)

अडब हा **अकड** त्रिकोणाचा बाह्यकोण आहे, (प. प्र.)

∴ **अडब** कोन आंतील पलीकडच्या **अकड** कोनापेक्षां मोठा आहे. (अनुमिति)

(३) ज्या तीन पदार्थांपैकीं पहिल्याबरोबर दुसरा व दुसऱ्या-पेक्षां तिसरा मोठा असतो, त्यांपैकीं तिसरा पदार्थ, पहिल्यापेक्षां मोठा असतो, (सा. प्र.)

अबक कोन, **अकब** कोन व **अडब** कोन ह्या अशा प्रकारच्या तीन पदार्थांपैकीं **अडब** कोन हा तिसरा आहे; (प. प्र.)

∴ **अडब** कोन **अबक** कोनापेक्षां मोठा आहे. (अनु.)

(४) ज्या त्रिकोणाच्या कोणत्या तरी दोन कोनांपैकीं एक दुस-ऱ्यापेक्षां मोठा असतो, त्याच्या मोठ्या कोनासमोरची बाजू ही, धाकट्या कोनासमोरच्या बाजूपेक्षां मोठी असते, (सा. प्र.)

अब ही बाजू (**अबड** ह्या त्रिकोणाच्या **अडब** आणि **अबड** ह्या दोन असमान कोनांपैकीं **अडब** ह्या) मोठ्या कोनासमोरची आहे; (प. प्र.)

∴ **अब** बाजू ही (**अबड** ह्या धाकट्या कोनासमोरच्या) **अड** बाजूपेक्षां मोठी आहे. (अनुमिति)

(५) **अब**च्या ज्या धर्मांच्या आधारानें ती **अड** पेक्षां मोठी आहे असें सिद्ध करितां आलें, ते सर्व धर्म ज्या ज्या रेषेमध्यें आहेत, तिजविषयींही अशीच सिद्धता करितां येईल, (सा. प्र.)

अक रेषेमध्यें ते सर्व धर्म आहेत; (प. प्र.)

∴ **अक** बाजू ही **अड**पेक्षां मोठी आहे, असें सिद्ध होतें.

(अनुमिति)

म्हणजे **अब** आणि **अक** ही प्रत्येक बाजू **अड**पेक्षां मोठी आहे, असें सिद्ध झालें.

आतां (६) **अड** रेषेच्या ज्या धर्मांच्या आधारानें ही सिद्धता झाली, ते सर्व धर्म ज्या ज्या रेषेमध्यें असतील, त्या त्या रेषेला ही सिद्धता लागू पडेल, (सा. प्र.)

अबक त्रिकोणाचा **अ** शिरोबिंदु व **बक** पायांतील प्रत्येक बिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेमध्यें ते सर्व धर्म आहेत; (प. प्र.)

∴ **अबक** त्रिकोणाचा **अ** शिरोबिंदु व **बक** पायांतील प्रत्येक बिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेला ही सिद्धता लागू पडते. (अनु.)

(७) **अबक** त्रिकोणाच्या ज्या धर्मांच्या योगानें ही सिद्धता झाली, ते धर्म ज्या ज्या त्रिकोणामध्यें आहेत, त्यांना ही सिद्धता लागू पडते, (सा. प्र.)

प्रत्येक समद्विभुजत्रिकोणामध्यें ते धर्म आहेत; (प. प्र.)

∴ प्रत्येक समद्विभुजत्रिकोणाला ही सिद्धता लागू पडते. (अनु.)

ही इष्टसिद्धि.

ह्या सिद्धतेंतील अनुमानांपैकीं (१) व (२) ह्यांच्या अनुमिति मिळून (३) ह्यांचें पक्षप्रमाण झालें आहे. म्हणजे एथें पहिल्या उदाहरणांत दाखविलेल्या प्रकारचा प्रमाणांचा अनुक्रम साधला नाहीं; म्हणून एथें कारणमाला तयार करितां येणार नाहीं.

ह्या सिद्धतेंतल्या कांहीं अनुमानांच्या साध्यप्रमाणांस "पहिल्या पुस्तकाचा पांचवा सिद्धांत," "पहिल्या पुस्तकाचा सोळावा

सिद्धांत " इत्यादिक संज्ञा ठरलेल्या आहेत. त्या संज्ञाच त्यांच्या बद्दल योजण्याची वहिवाट आहे. परंतु ह्या साध्यप्रतिज्ञांच्या संज्ञा त्यांच्याच जागीं (म्हणजे अनुमानाच्या आरंभीं) उच्चारिल्या असतां भाषासंप्रदाय सुटतो; म्हणून बहुधा अनुमितीच्या आरंभीं " अमुक सिद्धांताप्रमाणें " असें पद घालितात. तें साध्यप्रमाणाचें सूचक समजावें. जसें (१) ह्या अनुमानाचें संक्षिप्तरूप.

अबक आणि **अकब** हे समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडील कोन आहेत; (पक्षप्रमाण)

∴ पहिल्या पुस्तकाच्या पांचव्या सिद्धांताप्रमाणें ते समान आहेत.
(साध्यप्रमाण व अनुमिति)

अनुमानाचें हें संक्षिप्तरूप लिहितेवेळीं तर "अमुक सिद्धांताप्रमाणें" हें पदही प्रत्यक्ष न लिहितां त्याची सूचक (१.५) इत्यादिक एखादी खूण अनुमितीच्या शेवटीं लिहितात. जसें:—

अबक आणि **अकब** हे समद्विभुजत्रिकोणाच्या पायाकडचे कोन आहेत;

∴ ते समान आहेत. (१.५)

एखाद्या अनुमानाची अनुमिति हेंच जर त्याच्या पुढच्या अनुमानाचें एक प्रमाण व्हावयाचें असेल, तर बहुधा त्या प्रमाणांचा उच्चार मुळींच करीत नाहींत. जसें (३) ह्या अनुमानाची अनुमिति हें (४) ह्याचें पक्षप्रमाण आहे, ह्मणून त्याचा मुळींच संक्षेप करून (४) ह्या साऱ्या अनुमानाच्या जागीं

" ∴ **अब** बाजू ही **अड** बाजूपेक्षां मोठी आहे. (१.१९) " एवढेंच वाक्य लिहितात.

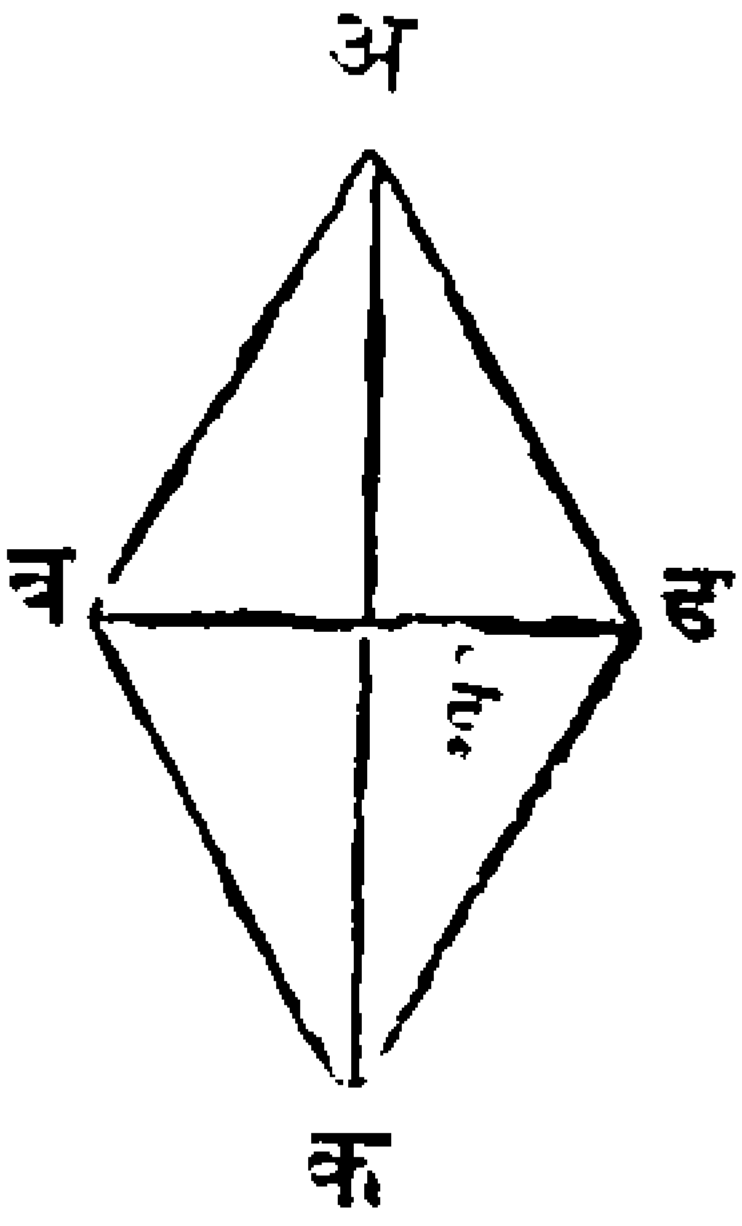
अशा संक्षेपानें अनुमानांतील प्रतिज्ञांचा पूर्वोक्त सरल अनुक्रम रहात नाहीं, हें खरें; तथापि ह्यांत कोणतेंही प्रमाण गाळलें न जातां भाषेचा पाल्हाळ अगदीं कमी होतो; म्हणून ती सिद्धता संक्षेपामुळें दुर्बोध न होतां उलटी अत्यंत सुबोध होते; ह्याकरितां असा संक्षेप करण्यास चिंता नाहीं. परंतु संक्षेपाकरितां योजिलेल्या

संज्ञांचे इष्टार्थ श्रोत्याला चांगले पाठ असतील, तरच संक्षेप करणें सोईचें आहे, हें पक्कें ध्यानांत ठेविलें पाहिजे.

ह्या उदाहरणामध्यें व्यापकजातिप्रतिज्ञा सिद्ध करावयाची असतांही प्रथम उद्देश्य-जातींतल्या एका विशेष व्यक्तीलाच उद्देशून ती प्रतिज्ञा म्हटली, व ती व्यक्तिप्रतिज्ञाच आधीं सिद्ध केली. तथापि तेवढ्यावरूनच ती साध्यजातिप्रतिज्ञा स्थापित झाली, असें कां समजावयाचें, हें (५), (६) व (७) ह्या अनुमानांमध्यें दाखविलें आहे. व्यक्तिप्रतिज्ञांच्या सिद्धीवरून जातिप्रतिज्ञांची सिद्धि दाखविणारीं हीं अनुमानें ह्या सिद्धतेंत दाखविल्याप्रमाणें सविस्तर उच्चारिलीं पाहिजेत असें नाहीं; त्यांचीं साध्यप्रमाणें व पक्षप्रमाणें हीं खरीं आहेत, अशी आपली खातरी असेल, तर "ह्याप्रमाणेंच उद्देश्यजातींतल्या प्रत्येक व्यक्तीविषयीं सिद्धता करितां येईल" अशा अर्थाची अनुमिति ह्मणावी, म्हणजे झालें.

पुढचें उदाहरण अशा संक्षिप्त रीतीनेंच लिहून दाखवितों.

तिसरें उदाहरण– "समभुजचौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागितात" ही जातिप्रतिज्ञा सिद्ध करावयाची आहे, आणि पहिल्या पुस्तकाचे पहिले २५ सिद्धांत सिद्ध करून ठेविले आहेत, असें समजा.



व्यक्तिप्रतिज्ञा.–**अबकड** हा समभुजचौकोन आहे, व **अक**, **बड** ह्यांनीं ई बिंदूंत परस्परांस छेदिलें आहे, इतकें दिलें आहे; आणि **बई**, **डई** हे भाग समान आहेत, व **अई**, **कई** हे भाग परस्परांशीं समान आहेत, ह्या दोन गोष्टी सिद्ध करावयाच्या आहेत.

आधीं **बई**, **डई** ह्या रेषा समान आहेत, असें सिद्ध करूं.

(क्रमविरुद्ध सिद्धता.)

"**बई**, **डई** ह्या रेषा समान आहेत" ही प्रतिज्ञा खरी असली पाहिजे. कारणः–

(१) जर ही खरी नाहीं, असें मानिलें,

तर (पहिल्या नियमाप्रमाणें) "बई, डई ह्या समान नाहींत" ही तिच्याशीं विरुद्धप्रतिज्ञा खरी असली पाहिजे.

म्हणजे बई ही डई पेक्षां मोठी किंवा लहान असली पाहिजे.

प्रथम बई ही डई पेक्षां मोठी आहे, असें मानूं.

आतां (२) अबई, आणि अडई ह्या त्रिकोणांच्या अब, अड ह्या बाजू समान आहेत, (समभुजचौकोनाची व्याख्या.)

अई बाजू ह्या दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे,

व बई ही डई पेक्षां मोठी मानिली आहे;

∴ (३) बअई कोन डअई कोनापेक्षां मोठा आहे. (१.२५)

(४) अबक आणि अडक ह्या दोन त्रिकोणांमध्यें (१.२४) ह्यांत दिलेले सर्व धर्म आहेत;

∴ बक बाजू डक पेक्षां मोठी आहे. (१.२४)

"म्हणजे बक, बड ह्या रेपा समान नाहींत" ही अनुमिति निघाली.

परंतु (५) "बक, डक ह्या समान आहेत" ही वरच्या अनुमितीशीं विरुद्धप्रतिज्ञा निर्विवाद आहे,

(समभुजचौकोनाची व्याख्या.)

∴ (६) (पहिल्या नियमाप्रमाणें) वरची अनुमिति खोटी आहे.

आतां (७) ही वरची अनुमिति खोटी निघण्यास (२६ व्या नियमाप्रमाणें) पद्धति सदोष असली पाहिजे, किंवा प्रमाणप्रतिज्ञांपैकीं निदान एक खोटी असली पाहिजे.

परंतु (८) पद्धति निर्दोष आहे व प्रमाणप्रतिज्ञांपैकीं "बई ही डईपेक्षां मोठी आहे" ही मानिलेली प्रमाणप्रतिज्ञा खेरीज करून बाकीच्या सर्व खऱ्या आहेत;

∴ "बई ही डईपेक्षां मोठी आहे" ही मानिलेली प्रतिज्ञा खोटी ठरली.

(९) ह्याप्रमाणेंच " बई ही डईपेक्षां लहान आहे " ही प्रतिज्ञा देखील खोटी ठरवितां येते;

म्हणजे " बई, डई ह्या रेषा समान नाहींत " ही प्रतिज्ञा खोटी ठरली.

∴ (१०) " बई, डई, ह्या समान आहेत " ही तिच्याशीं विरुद्धप्रतिज्ञा खरी ठरली. (नियम पहिला.)

(११) ह्याप्रमाणेंच अई, कई ह्या समान आहेत, असें सिद्ध करितां येतें;
म्हणजे अबकड ह्या समभुजचौकोनाच्या कर्णरेषा परस्परांस दुभागितात, असें सिद्ध झालें.

(१२) ह्याप्रमाणेंच " प्रत्येक समभुजचौकोनाच्या कर्णरेषा परस्परांस दुभागितात " हें सिद्ध करितां येतें. ही इष्टसिद्धि.

ह्या सिद्धतेंतल्या (१) ह्या अनुमानाला पक्षांतरानुमानाचें रूप दिलें तरी चालेल. तें असें:—

बई रेषा डई रेषेशीं समान असेल, डईपेक्षां मोठी असेल, किंवा डईपेक्षां लहान असेल; (साध्यप्रमाण.)

परंतु (बई रेषा डईशीं) समान नाहीं असें मानिलें आहे;
(पक्षप्रमाण)

∴ (बई रेषा डईपेक्षां) मोठी असली पाहिजे किंवा लहान असली पाहिजे. (नि० ३६) (अनुमिति)

ह्याचा संक्षेप करून लिहिणें तर असें लिहावें:—

बई रेषा डईशीं समान नाहीं असें मानिलें आहे; (पक्षप्रमाण)

∴ बई रेषा डई पेक्षां मोठी किंवा लहान असली पाहिजे.
(नि. ३६) (अनुमिति)

सिद्धतेविषयीं नियम.

(१) ज्याची व्याख्या पूर्वीं केलेली नाहीं अथवा जें संदिग्धा-

र्थक असेल, असें एखादें पद (ज्याचा अर्थ पक्का ठरविल्याखेरीज) सिद्धतेमध्यें योजूं नये.

(२) जी गोष्ट पूर्वी खरी ठरविलेली नाहीं, खरी मानिलेली नाहीं व साध्यप्रतिज्ञेंत दिलेलीही नाहीं, अशा कोणत्याही गोष्टीचा आधार (ती सिद्ध केल्याशिवाय) सिद्धतेमध्यें घेऊं नये.

(३) कोणतीही प्रतिज्ञा सिद्ध करीत असतां एकंदर ज्या गोष्टी सांगावयाच्या, त्यांचा अनुक्रम असा असावा:—प्रथमत: [१] साध्यप्रतिज्ञेचा सविस्तर उच्चार करावा नंतर [२] ती साध्यप्रतिज्ञा ही जातिप्रतिज्ञा असली, आणि तिची व्यक्तिप्रतिज्ञाच आधीं सिद्ध करणें अवश्य आहे असें वाटलें, तर उद्देश्यजातींतल्या एका विशेष व्यक्तीलाच उद्देशून ती प्रतिज्ञा म्हणावी, ती अशी कीं, " त्या उद्देश्यव्यक्तीमध्यें अमुक (एक किंवा अनेक) जातिधर्म आहेत असें दिलें आहे " व ' तीमध्यें अमुक धर्म आहे असें सिद्ध करावयाचें आहे " हे साध्यप्रतिज्ञेचे पक्ष व साध्य स्पष्टपणें दिसतील. पुढें [३] ती व्यक्तिप्रतिज्ञा (अथवा ती तयार केली नसल्यास साध्यजातिप्रतिज्ञा) स्थापित करण्याकरितां (कांहीं कृति करणें अवश्य असल्यास ती करून मग) जें व्याप्यानुमानें सांगणें योजिलें असेल, तें (पुढें लिहिलेल्या नियमांस अनुसरून) सांगावें. (पण जातिप्रतिज्ञा स्थापित करण्याच्या उद्देशानें जर ही व्यक्तिप्रतिज्ञा सिद्ध करावयाची असली, तर त्या व्यक्तीच्या, साध्यप्रतिज्ञेंत दिलेल्या, जातिधर्मांखेरीज कोणत्याही धर्मांचा आधार सिद्धतेमध्यें घ्यावयाचा नाहीं, हें पक्कें लक्ष्यांत ठेवावें; ह्या गोष्टीकडे दुर्लक्ष्य झालें, तर व्यक्तिप्रतिज्ञेच्या सत्यतेवरून जातिप्रतिज्ञेची सत्यता स्थापित व्हावयाची नाहीं). शेवटीं [४] जातिप्रतिज्ञा स्थापित करण्याच्या उद्देशानें ही व्यक्तिप्रतिज्ञा सिद्ध केलेली असल्यास, " ह्याप्रमाणेंच उद्देश्यजातींतल्या प्रत्येक व्यक्तीविषयीं सिद्धता करितां येईल " अशा अर्थाचें वाक्य म्हणावें.

ह्या चार भागांस अनुक्रमें " जातिप्रतिज्ञा " " व्यक्तिप्रतिज्ञा " " सिद्धता " आणि " इष्टसिद्धिकथन " ह्या संज्ञा देऊं.

(४) सिद्धतेंतील जें जें व्याप्यानुमान (त्यांतील प्रतिज्ञांच्या

संज्ञा ठरलेल्या नसल्यामुळें) सविस्तर उच्चारणें आवश्यक आहे असें वाटेल, त्यामध्यें आधीं प्रमाणें व शेवटीं अनुमिति (आणि तें द्विप्रमाणकव्याप्त्यानुमान असल्यास आधीं साध्यप्रमाण, पुढें पक्षप्रमाण व शेवटीं अनुमिति) असाच अनुक्रम असावा. परंतु ज्या अनुमानांतल्या प्रमाणप्रतिज्ञांच्या संज्ञा ठरलेल्या असतील, त्यांमध्यें त्या संज्ञाच अनुमितीच्या आरंभीं (अथवा भाषासंप्रदायाप्रमाणें योग्य दिसेल तेथें) म्हणाव्या.

(५) ज्या सिद्धतेमध्यें अनेक व्याप्त्यानुमानें योजणें अवश्य असेल, तींतील अनुमानांचा अनुक्रम असा (साधितां आल्यास) साधावा कीं, प्रत्येक अनुमानाची अनुमिति हें त्याच्या पुढच्या अनुमानाचें एक प्रमाण होईल; आणि त्यांत (पहिल्या उदाहरणामध्यें दाखविलेली) कारणमाला साधितां येईल, तर फारच चांगलें. परंतु जेथें (दुसऱ्या उदाहरणांत दाखविल्याप्रमाणें) अनेक अनुमानांच्या अनुमिति एकत्र केल्या तरच त्यांच्या पुढच्या अनुमानाचें एखादें प्रमाण तयार होतें, तेथें हा वर सांगितलेला अनुक्रम साधत नाहीं; तथापि अशा प्रसंगींही त्या अनेक अनुमानांमध्यें ज्याची अनुमिति तयार करावयास पुष्कळ वाक्यें म्हणणें आवश्यक असेल, तें अनुमान आधीं सांगावयाचें, असा अनुक्रम ठेवावा.

(६) " अप्रासंगिकता " हा दोष होऊं देऊं नये. (हें सांगणें सकृद्दर्शनीं व्यर्थ वाटतें; परंतु गैरसावधपणामुळें हा दोष होतो, ही गोष्ट निर्विवाद आहे).

ताळा.

प्रत्यक्ष, शाब्द, अनुमान, उपमान ह्यांपैकीं कोणत्याही एका पद्धतीनें स्थापित केलेल्या प्रतिज्ञेची सत्यता, ह्यांपैकींच दुसऱ्या एखाद्या पद्धतीनें स्थापित करितां येते किंवा नाहीं हें ठरविणें; अथवा ज्या पद्धतीनें ती प्रथमतः स्थापित केली असेल, त्याच पद्धतीनें पण प्रथम घेतलेल्या आधाराहून भिन्न गोष्टींच्या आधारावर ती स्थापित होते किंवा नाहीं हें ठरविणें, ह्या कृतीला गणितशास्त्रांत " ताळा करून

पाहणें " (आणि व्यवहारांत 'प्रत्यंतर पाहणें ') म्हणतात. आणि अशा भिन्न पद्धतींनीं अथवा एकाच पद्धतीनें पण भिन्न आधारांवर एकाच प्रतिज्ञेची सत्यता स्थापित झाली, म्हणजे "ताळा पडला" अथवा "ताळा मिळाला" असें म्हणतात. जसें, "२१७३ ह्या संख्येंतून तिचा एकंस्थानचा अंक वजा केल्यानें राहणारी बाकी समसंख्या आहे," ही प्रतिज्ञा सिद्धतेच्या पहिल्या उदाहरणांतल्या जातिप्रतिज्ञेच्या आधारानें व्याप्यानुमानद्वारा सिद्ध होतेच; आणखी ती बाकी २१७० हिला दोहोंनीं प्रत्यक्ष भागून ती समसंख्या आहे असें ठरलें, म्हणजे "ताळा मिळाला" असें समजावें. तसेंच सिद्धतेच्या दुसऱ्या उदाहरणांत **अबक** त्रिकोणाची **अब** बाजू **अड**पेक्षां मोठी आहे असें व्याप्यानुमानद्वारा सिद्ध झालें आहेच, आणखी त्या दोन्ही रेषा एकाच रेषात्मक परिमाणानें मोजून (अथवा **अब**च्या बरोबरीचें सूत **अड**शीं लावून पाहून) **अब**च्या मोठेपणाविषयीं प्रत्यक्ष अनुभव घेतला, आणि तो मोठेपणा ठरला, म्हणजे "ताळा मिळाला" असें होईल. ज्योतिःशास्त्रोक्त नियमांच्या आधारानें अमुक दिवशीं अमुक वेळीं चंद्रग्रहण होईल, असें व्याप्यानुमानानें सिद्ध केलें, आणि त्याप्रमाणें प्रत्यक्ष दिसलें, म्हणजे "ताळा मिळाला". "विवक्षित पूर्णसंख्येला ४ नीं भागून राहणारी बाकी, प्रत्यक्ष भागाकार न करितां, काढावयाची असल्यास, विवक्षित संख्येच्या एकंस्थानच्या अंकालाच ४ नीं भागावें, जी बाकी राहील, तीच इच्छिलेली बाकी समजावी." ह्या (खोट्या) सामान्य रीतीच्या आधारानें "१९८७ ह्या संख्येला ४ नीं भागून राहणारी बाकी ३ असली पाहिजे," ही प्रतिज्ञा निर्दोष व्याप्यानुमानद्वारा सिद्ध झाली; व ह्या संख्येला ४ नीं प्रत्यक्ष भागून पाहिलें तरी ही बाकी ३ च राहते; म्हणून ह्या प्रतिज्ञेचा "ताळा मिळाला."

ह्या शेवटल्या उदाहरणावरून स्पष्ट आहे कीं, (१) एखादी प्रतिज्ञा निर्दोष व्याप्यानुमानद्वारा सिद्ध केली आणि तिचा ताळाही मिळाला, तरी तेवढ्यावरूनच, ज्या प्रतिज्ञांच्या आधारावर प्रस्तुत प्रतिज्ञा सिद्ध केली, त्या सर्व निरपवाद ठरल्या, असें समजतां कामा

नये. त्या खऱ्या ठरण्याचा संभव आहे, व जितक्या भिन्नभिन्न प्रकारांनीं त्या प्रतिज्ञेचा ताळा मिळेल, तितका तितका त्या आधारभूत प्रतिज्ञा खोट्या ठरण्याचा संभव कमी होतो, एवढेंच कायतें ताळा मिळण्याचें फळ समजावें. (२) ताळा मिळाला नाहीं, तर मात्र, ज्या पद्धतीनें प्रस्तुत प्रतिज्ञा स्थापित केली ती पद्धति सदोष असणें व आधारभूत प्रतिज्ञांपैकीं निदान एक खोटी असणें, ह्या दोन गोष्टींपैकीं निदान एक गोष्ट हें, ताळा न मिळण्याचें कारण असलें पाहिजे. हे दोन नियम व ताळ्याच्या संबंधाचे इतर सर्व नियम (२५), (२६), (२७), (२८), (२९), (३०), ह्या नियमांवरून स्पष्ट दिसतील.

पृथक्करण व संयोगीकरण.

ह्या पद्धतींचें वर्णन एथें गणितास लक्षून केलें आहे; तथापि तें बहुतेक वर्णन इतर अनुमानावलंबिशास्त्रांसही लागू पडेल.

प्रमेयाचें पृथक्करण.–गणितांतलें एखादें प्रमेय सिद्ध करण्याची सामग्री शोधावयाची असली, म्हणजे आधीं तें अनुमानपद्धतीनें सिद्ध होण्यास दुसऱ्या कोणत्या गोष्टींचा आधार असला पाहिजे हें शोधावें; पुनः त्या आधारभूत गोष्टी सिद्ध होण्यास दुसऱ्या कोणत्या गोष्टींचा आधार असला पाहिजे हें शोधावें. असा शोध करितां करितां पूर्वी सिद्ध झालेल्या अथवा सत्य मानिलेल्या किंवा साध्यप्रतिज्ञेंत दिलेल्या गोष्टींचा आधार सांपडे तोंपर्यंत शोध करावा; आणि अशा गोष्टींचा आधार जर सांपडला, तर सिद्धतेची सामग्री जुळते. हें प्रमेयाचें पृथक्करण झालें.

प्रमेयाचें संयोगीकरण.–कोणतेंही प्रमेय सिद्ध करण्याची सामग्री जुळली आणि तिच्या योगानें त्या प्रमेयाची सत्यता दुसऱ्याचे ध्यानांत आणून द्यावयाची असली, तर सिद्धतेच्या सर्व नियमांस अनुसरून तिची सिद्धता करावी. हें प्रमेयाचें संयोगीकरण झालें.

कृत्याचें पृथक्करण.–गणितशास्त्रांतलें एखादें कृत्य करण्याची रीति शोधावयाची असली, तर आधीं तें करितां आलें असें स-

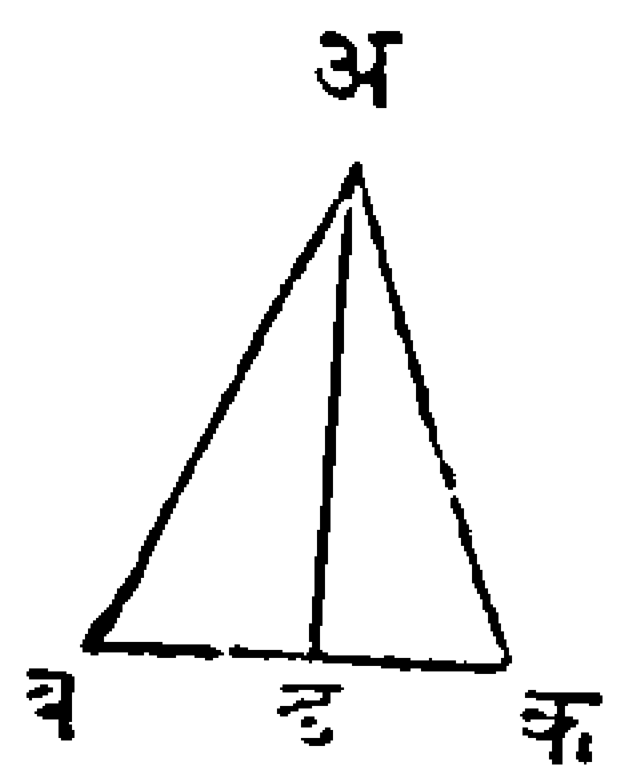
मजावें, आणि त्याच्या स्वरूपावरून तें करितां येण्याला दुसरीं कोणतीं कृत्यें करितां आलीं पाहिजेत हें शोधावें; पुनः तीं आधारभूत कृत्यें करितां येण्यास दुसरीं कोणतीं कृत्यें करितां आलीं पाहिजेत हें शोधावें. असा शोध करितां करितां जीं कृत्यें करण्याच्या रीति पूर्वी ठरलेल्या असतील, अथवा जीं करितां येतात असें मानिलें असेल, अशा कृत्यांचा आधार सांपडेल तोंपर्यंत शोध करावा; आणि अशा कृत्यांचा आधार सांपडला, म्हणजे इष्टकृत्याच्या रीतीची सामग्री जुळली असें समजावें. हें कृत्याचें पृथक्करण झालें. कृत्याच्या पृथक्करणालाच त्या कृत्याच्या "रीतीची उपपत्ति" असें म्हणण्याची वहिवाट आहे.

कृत्याचें संयोगीकरण.–कोणत्याही कृत्याच्या रीतीची सामग्री जुळली आणि ती दुसऱ्यास सांगावयाची असली, म्हणजे त्या सामग्रींतलीं आधारभूत कृत्यें सोईवार अशा अनुक्रमानें सांगून इष्टकृत्याची रीति तयार करून दाखवावी; आणि "त्या रीतीनें उत्पन्न होणाऱ्या प्रत्येक गोष्टीमध्यें इष्टधर्म उत्पन्न व्हावयाचेच" ही गोष्ट (सिद्धतेच्या नियमांस अनुसरून) सिद्ध करून दाखवावी. हें कृत्याचें संयोगीकरण झालें.

कृत्याचें पृथक्करण करून त्याची रीति तयार केली, म्हणजे पुढें त्याला वस्तुतः प्रमेयाचेंच स्वरूप येतें. कारण कीं, "अमुक रीतीची योजना केली असतां जें उत्पन्न होतें, त्यामध्यें अमुक इष्टधर्म असावयाचेच" हें पुढें सिद्ध करावयाचें असतें; आणि हें तर प्रमेय आहे. ह्यावरून कृत्याच्या संयोगीकरणामध्यें त्या कृत्याची रीति व एका प्रमेयाचें संयोगीकरण अशा दोन गोष्टी असतात; ही गोष्ट ध्यानांत ठेवण्याजोगी आहे.

प्रमेयाच्या पृथक्करणाचें व संयोगीकरणाचें भूमितींतलें उदाहरणः–"**अबक** ह्या समद्विभुजत्रिकोणाच्या समान असणाऱ्या बाजूंपैकीं **अब** बाजू ही, **अ** शिरोबिंदु व पायांतील **ड** हा एक बिंदु ह्यांस सांधणाऱ्या **अड** रेषेपेक्षां मोठी आहे" हें प्रमेय सिद्ध करण्याची सामग्री शोधावयाची आहे, असें समजा.

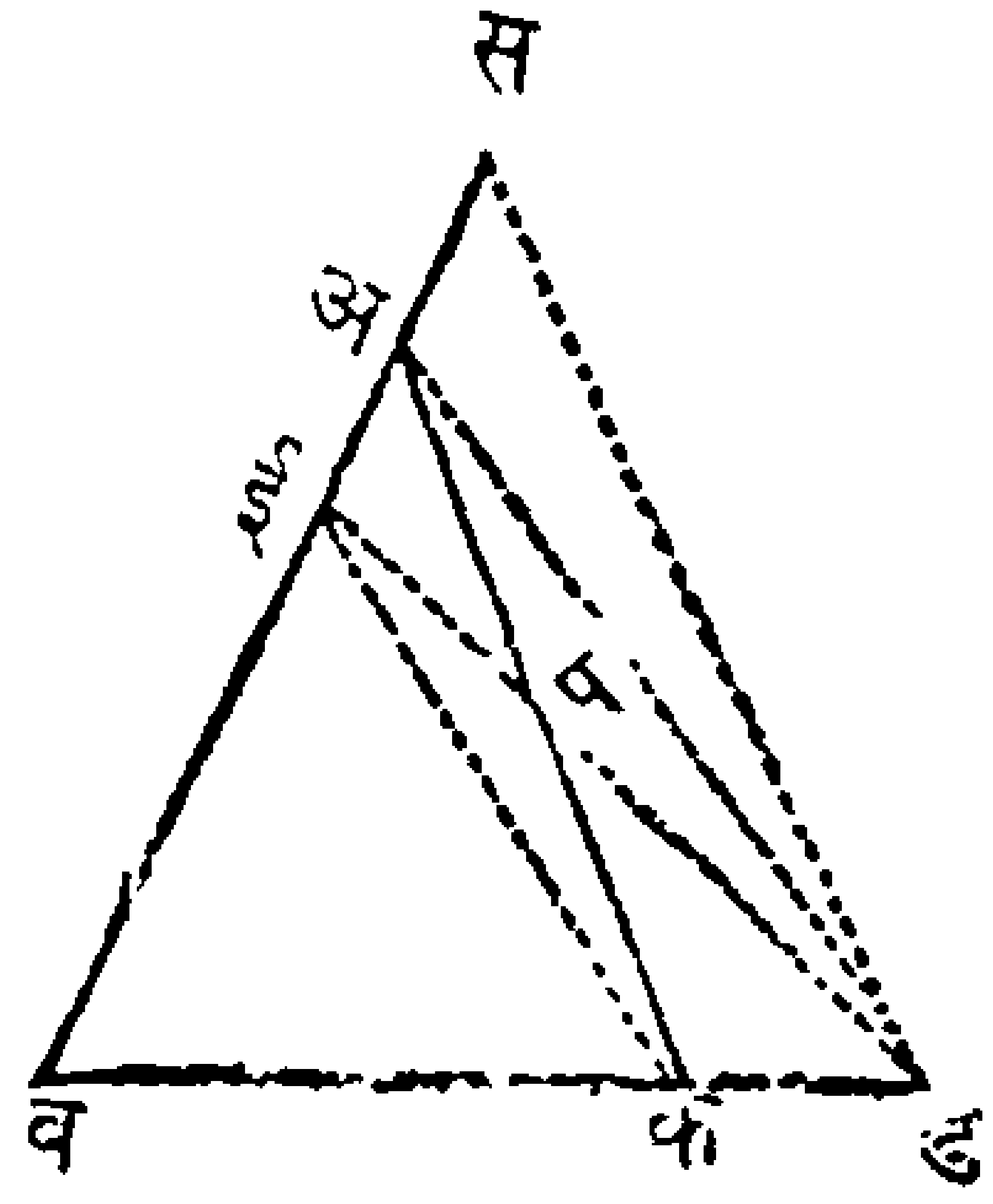
पृथक्करण.–आतां **अब** आणि **अड** ह्या **अबड** त्रिकोणाच्या दोन बाजू आहेत, आणि ज्यांत त्रिकोणाची एक बाजू दुसरीपेक्षां मोठी ठरली आहे असा (१.१९) हा सिद्धांत आहे; म्हणून ह्याची



योजना करितां येईल, तर इष्टसिद्धि होईल. ह्याच्या योजनेला **अडब** कोन **अबड** कोनापेक्षां मोठा ठरला पाहिजे. पण तो साक्षात् **अबड** कोनापेक्षां मोठा ठरविण्याची कांहीं युक्ति दिसत नाहीं. तथापि तो **अकड** कोनापेक्षां मात्र १.१६ ह्याच्या आधारानें मोठा ठरतो. आतां जरी तो **अडब** कोन **अकड** कोनापेक्षां मोठा ठरला तरी तो **अबड** कोनापेक्षां ही मोठा ठरण्यास **अबड** आणि **अकड** हे समान आहेत, असें सिद्ध झालें पाहिजे. हें सिद्ध झालें, तर मात्र प्र. प्र. अ.उप. ह्याच्या योजनेनें **अडब** कोन **अबड** कोनापेक्षां मोठा ठरेल. आतां **अबड** आणि **अकड** हे **अबक** ह्या एकाच त्रिकोणाचे कोन आहेत; म्हणून ते समान ठरण्यास (१.५) ह्याची योजना करितां येईल तर बरें. पण त्याची योजना करितां येण्यास **अब, अक** ह्या बाजू समान ठरल्या पाहिजेत. आतां ह्या समान आहेत, असें तर साध्यप्रतिज्ञेंत दिलें आहे; म्हणून इष्टसिद्धीची सामग्री जुळली.

संयोगीकरण.–आतां, "सिद्धता" ह्या प्रकरणाच्या दुसऱ्या उदाहरणांत दाखविल्याप्रमाणें, ह्या सामग्रीच्या योगानें प्रस्तुतप्रमेय सिद्ध करून दाखवावें.

कृत्याच्या पृथक्करणाचें व संयोगीकरणाचें भूमितीतलें उदाहरण.–**अबक** हा एक त्रिकोण दिलेला आहे; आणि **बक**पेक्षां मोठी असणारी **बड**रेषा ही ज्याची एक बाजू होईल, **अबक** हा ज्याचा एक कोन होईल व **अबक** त्रिकोणाबरोबर ज्याचें क्षेत्र होईल, असा एक त्रिकोण काढावयाचा आहे.



पृथक्करण–आतां **बड** ही इच्छिल्या त्रिकोणाची एक बाजू व्हावयाची आहे; म्हणून **ब** आणि **ड** हे त्याचे दोन कोणबिंदु असले पाहिजेत. फक्त तिसरा कोणबिंदु शोधावयाचा राहिला. ज्यापक्षीं **अबक** हा इष्ट त्रिकोणाचा एक कोन व्हावयाचा आहे; त्यापक्षीं तिसरा कोणबिंदु **बस** ह्या अमर्याद रेषेंतच कोठेंतरी असला पाहिजे. तो तिसरा कोणबिंदु **अ**च्या पलीकडचा **स** इत्यादिक एखादा किंवा **अ** हाच आहे असें जर मानिलें, तर होणारा **वडस** अथवा **बडअ** हा त्रिकोण **अबक** त्रिकोणापेक्षां मोठा होतो; म्हणून तो बिंदु **अब** रेषेंत **अ** आणि **ब** ह्यांच्यामध्येंच कोठेंतरी असला पाहिजे. तो तिसरा कोणबिंदु **ई** आहे असें मानूं. आतां हा बिंदु असा असला पाहिजे कीं, त्याच्या योगानें होणारा **ईबड** त्रिकोण **अबक** त्रिकोणाबरोबर होईल. आतां **ईक** रेषा काढिल्यानें स्पष्ट दिसेल कीं, **अबक** आणि **बडई** हे त्रिकोण समान होण्यास **अकई** आणि **डकई** हे त्रिकोण समान ठरले पाहिजेत; कांकीं, तसें झालें म्हणजे त्या प्रत्येकांत **बकई** त्रिकोण मिळविल्यानें इष्टसिद्धि होईल. हे त्रिकोण **ईक** ह्या एकाच पायावर होणार; म्हणून ते समान ठरण्यास **ईक** पाया **अड**शीं समांतर असला म्हणजे झालें. सारांश (१) **अड** रेषा काढणें, (२) तिच्याशीं समांतर अशी **क** बिंदूंतून **कई** रेषा काढणें व शेवटीं (३) **डई** रेषा काढणें ह्या तीन कृत्यांवर इष्टकृत्य अवलंबून राहिलें. ह्यांपैकीं (१) आणि (३) ह्यांतील "दोन बिंदु सांधणें" हें कृत्य करितां येतें असें मानिलें आहे, व (२) हें कृत्य करण्याची रीति (१.३१) ह्यांत ठरली आहे. ह्मणून इष्टकृत्याच्या रीतीची सामग्री जुळली.

संयोगीकरण.–रीति– **अ**, **ड** हे बिंदु सांधावे, (गृ. कृ. १) **क** बिंदूंतून **अड**शीं समांतर अशी **कई** रेषा काढावी, (१.३१) आणि **ई**, **ड** हे बिंदु सांधावे. (गृ. कृ. १)

इष्टप्राप्ति.–म्हणजे **बईड** हा इच्छिलेला त्रिकोण होईल.

(आतां तो इच्छिलेला त्रिकोण आहे असें ठरण्यास त्याच्यामध्यें पूर्वोक्त इष्टगुण आहेत असें सिद्ध केलें पाहिजे. त्या इष्टगुणांपैकीं **बड**

ही त्याची एक बाजू असणें व **अबक** हा त्याचा एक कोन असणें, हे दोन गुण त्याच्यामध्यें आहेत, हें प्रत्यक्षच आहे. तिसरा गुण जो त्याची **अबक** त्रिकोणाशीं समानता, ही मात्र सिद्ध करणें राहिलें. त्या गुणाची सिद्धता अशी:–)

सिद्धता.–**अकई** आणि **डईक** हे त्रिकोण समान आहेत. (१.३७)

∴ **अबक** आणि **बडई** हे त्रिकोण समान आहेत. (प्र. प्र. २)

∴ **बडई** हा इच्छिलेला त्रिकोण झाला. (इष्टसि.)

हें सारें प्रस्तुत कृत्याचें संयोगीकरण झालें.

प्रमेयाच्या पृथक्करणाचें व संयोगीकरणाचें संख्यागणितांतलें उदाहरण:–"ज्या संख्येंतला एकंस्थानचा अंक दोहोंनीं विभाज्य असतो, ती सारी संख्या दोहोंनीं विभाज्य असते." हें प्रमेय सिद्ध करण्याची सामग्री शोधावयाची आहे, असें समजा.

पृथक्करण.–ह्या प्रतिज्ञेमध्यें भाज्याचें जें स्वरूप सांगितलें आहे, त्यावरून एकंस्थानची संख्या व बाकीची संख्या हेच कायते दिलेल्या भाज्याचे भाग दिसून येतात; म्हणून त्या दोहोंविषयींच कायतो विचार करावयाचा. आतां (१) "भाज्याचे सारे भाग भाजकानें विभाज्य असल्यास तो भाज्य त्या भाजकानें विभाज्य असतो" असें ठरलें आहे; म्हणून प्रस्तुत भाज्याचे दोन्ही भाग जर दोहोंनीं विभाज्य आहेत असें दाखवितां येईल, तर इष्टसिद्धि होईल. आतां ह्या दोन भागांपैकीं एकंस्थानचा अंक हा भाग दोहोंनीं विभाज्य आहे, हें तर साध्यप्रतिज्ञेंत दिलेलेंच आहे; म्हणून राहिलेला भाग दोहोंनीं विभाज्य आहे असें दाखविलें, म्हणजे इष्टसिद्धि होईल. आतां हा राहिलेला भाग ही दशकांची संख्या म्हणजे दहांची कोणतीतरी पूर्णपट आहे, ह्या गोष्टीखेरीज त्या भागाविषयीं आपणास कांहीं माहीत नाहीं; म्हणून त्याची दोहोंनीं विभाज्यता ह्या गोष्टीच्याच आधारानें ठरविली पाहिजे. आतां (२) "एका संख्येनें दुसरी संख्या विभाज्य असल्यास दुसरीची कोणतीही पूर्णपट पहिलीनें विभाज्य असते;" म्हणून दहा ही संख्या दोहोंनीं विभाज्य आहे असें ठरल्यास, तो राहिलेला भागही दोहोंनीं विभाज्य ठरेल. (३) "दहा

ही संख्या दोहोंनीं विभाज्य आहे," असें सिद्ध झालेलें आहे. ह्याप्रमाणें इष्टसिद्धि (१), (२), (३), ह्या पूर्वी सिद्ध झालेल्या गोष्टींवर अवलंबून आहे, असें दाखवितां आलें; ह्मणून इष्टसिद्धीची सामग्री जुळली.

संयोगीकरण.—आतां ह्या सामग्रीच्या योगानें इष्टप्रमेय सिद्ध करितां येईल. तें असें:—

सिद्धता.-एका संख्येनें दुसरी संख्या विभाज्य असली, तर दुसरीची कोणतीही पूर्णपट पहिलीनें विभाज्य असते,

१० ही संख्या दोहोंनीं विभाज्य आहे;

∴ दहांची कोणतीही पूर्णपट दोहोंनीं विभाज्य असते.

दिलेल्या संख्येचा एकंस्थानचा अंक खेरीज करून तिचा राहिलेला भाग १० ची कोणती तरी पूर्णपट आहे;

∴ तो राहिलेला भाग दोहोंनीं विभाज्य आहे.

आणि तो एकंस्थानचा एक दोहोंनीं विभाज्य आहे असें दिलेलेंच आहे.

ह्मणजे दिलेल्या संख्येचे दोन्ही भाग दोहोंनीं विभाज्य आहेत, असें सिद्ध झालें.

आतां भाज्याचे सर्व भाग भाजकानें विभाज्य असले, तर तो भाज्य त्या भाजकानें विभाज्य असतो,

प्रस्तुत संख्येचे सारे भाग दोहोंनीं विभाज्य आहेत;

∴ प्रस्तुत संख्या दोहोंनीं विभाज्य आहे. इष्टसिद्धि.

कृत्याच्या पृथक्करणाचें व संयोगीकरणाचें संख्यागणितांतलें उदाहरण.- " $\frac{५}{४८}$ व $\frac{११}{६०}$ ह्या दोन अपूर्णांकांस समच्छेदरूपें देण्याची रीति शोधून काढावयाची.

पृथक्करण.-आतां ह्यांस समच्छेदरूपें द्यावयाचीं ह्याचा अर्थ, त्या अपूर्णांकांच्या किंमती न बदलूं देतां त्यांचे छेद सारखे होतील अशी तजवीज करावयाची. छेद सारखे होण्यास दोन्ही अपूर्णांकांचे, किंवा निदान एकाचा तरी, छेद बदलणें आवश्यक आहे. पण अपूर्णांकाची किंमत न बदलूं देतां त्याचा छेद बदलण्यास, त्या अपू-

र्णांकाच्या अंशच्छेदांस कोणत्या तरी एकाच संख्येनें गुणणें व भागणें ह्यांखेरीज तिसरा मार्गच नाहीं. आतां प्रस्तुत अपूर्णांक अतिसंक्षिप्त असल्यामुळें त्यांपैकीं एकाच्याही अंशच्छेदांस एकाच संख्येनें भागण्याची सोयच नाहीं. म्हणून एकेकाच्या अंशच्छेदांस कोणत्या तरी एकेक संख्येनें गुणणें हाच कायतो त्यांना समच्छेदरूप देण्याचा मार्ग राहिला. ह्यावरून स्पष्ट आहे कीं, प्रस्तुत अपूर्णांकांना समच्छेदरूप दिल्यानंतर जो त्यांचा छेद येणार, तो, मूळचे छेद ४८ व ६० ह्यांना कोणत्या तरी एकेक संख्येनें गुणूनच यावयाचा. म्हणजे त्या येणाऱ्या छेदाला ४८ व ६० ह्या प्रत्येक संख्येनें भाग तुटला पाहिजे. म्हणून "४८ व ६० ह्या प्रत्येक संख्येनें विभाज्य अशी एक संख्या शोधून काढावयाची" असें नवीन एक कृत्य उत्पन्न झालें. आतां अशा संख्या (४८×६० व हिची कोणतीही पूर्ण पट इत्यादि) अनंत सांपडतील, त्यांपैकीं कोणती तरी एक घेऊन ती प्रत्येकाच्या छेदस्थळीं येईल अशी तजवीज केल्यानें इष्टप्राप्ति होईल; परंतु सर्वांत लहान संख्या त्यांच्या छेदस्थळीं आणणें हें फार सोईचें आहे. म्हणून ४८ व ६० ह्यांनीं निःशेष भागिली जाणारी व सर्वांत लहान अशी संख्या शोधिली पाहिजे. अशी संख्या हा (ल. सा. भाज्याच्या व्याख्येप्रमाणें) ४८ व ६० ह्यांचा ल. सा. भाज्य होईल. म्हणून (१) "४८ व ६० ह्यांचा ल. सा. भा. काढिला पाहिजे." तो काढण्याची रीति ठरलेली आहेच. आतां तो ल. सा. भा. प्रत्येक अपूर्णांकाच्या छेदस्थानीं येण्यास त्याच्या अंशच्छेदांना कोणत्या संख्येनें गुणिलें पाहिजे हें ठरवावयाचें राहिलें. हें ठरविण्यास अर्थात् (२) "त्या ल. सा. भाज्याला ४८ व ६० ह्या प्रत्येक संख्येनें भागिलें पाहिजे." आतां ह्या भागाकारांनीं छेदांस गुणिलें असतां तो ल. सा. भा. हाच गुणाकार यावयाचा; म्हणून त्यांनीं छेदांस गुणण्याचें कारण नाहीं. (३) "त्या भागाकारांनीं फक्त अंशांस गुणिलें" म्हणजे ते इच्छिलेल्या समच्छेदरूपांचे अंश होतील. ह्याप्रमाणें इच्छिलेल्या कृत्याची रीति (१), (२) व (३) ह्या कृत्यांच्या रीतींवर अवलंबून आहे असें दाखवितां आलें;

व ह्या कृत्यांच्या रीति ठरल्या आहेत. म्हणून इच्छिलेल्या कृत्याची रीतिही ठरवितां येईल. हें प्रस्तुत कृत्याचें पृथक्करण झालें. ह्यालाच " अपूर्णांकास समच्छेदरूप देण्याच्या रीतीची उत्पत्ति " असेंही म्हणतात.

संयोगीकरण.–

रीति–दिलेल्या अपूर्णांकांच्या छेदांचा ल. सा. भा. काढून त्याला प्रत्येकाच्या छेदानें भागावें; व त्या भागाकारांनीं त्या त्या अपूर्णांकांच्या अंशांस गुणून आलेले गुणाकार त्यांच्या त्यांच्या अंशस्थानीं मांडावे, आणि तो ल. सा. भा. प्रत्येकाच्या छेदस्थानीं लिहावा.

इष्टप्राप्ति.–अशा कृतीनें उत्पन्न होणारीं $\frac{२५}{२४०}$ व $\frac{४४}{२४०}$ हीं दिलेल्या अपूर्णांकांचीं समच्छेदरूपें होत.

सिद्धता.–आतां हीं रूपें इच्छिल्या प्रकारचीं आहेत, असें सिद्ध करावयाचें राहिलें; म्हणजे ह्यांचे छेद सारखे असणें व ह्यांच्या किमती मूळच्या अपूर्णांकांच्या किमतींबरोबर असणें हे दोन धर्म ह्यांच्यामध्यें आहेत, असें सिद्ध केलें पाहिजे. त्यांपैकीं पहिला धर्म त्यांच्यामध्यें आहे, असें प्रत्यक्ष दिसतेंच आहे. आतां अपूर्णांकाच्या अंशच्छेदांस एकाच संख्येनें गुणिलें असतां होणारा अपूर्णांक मूळच्या अपूर्णांकाबरोबर असतो, व हे अपूर्णांक मूळच्या अपूर्णांकांच्या अंशच्छेदांस एकेका संख्येनें गुणूनच आले आहेत; म्हणून ह्या अपूर्णांकांच्या किमतीही मूळच्या अपूर्णांकाच्या किमतींबरोबर आहेत. ह्यास्तव ह्या अपूर्णांकांमध्यें दुसरा धर्मही आहे.

$\therefore$ $\frac{२५}{२४०}$ व $\frac{४४}{२४०}$ हे इच्छिलेले अपूर्णांक होत. इष्टसिद्धि.

हें सारें प्रस्तुत कृत्याचें संयोगीकरण झालें.

(हें पृथक्करण व संयोगीकरण अशा प्रकारच्या प्रत्येक उदाहरणास लागू पडेल.)

कृत्याच्या पृथक्करणाचें व संयोगीकरणाचें संख्यागणितांतलें दुसरें उदाहरण.–एका सभेंतल्या सभासदांनीं वर्गणी केली; त्या वेळीं सभासदांचे संख्येइतके आणे प्रत्येक सभासदानें देण्याचें कबूल केलें. पुढें ती सारी वर्गणी जमली, तेव्हां तींतून खर्चाबद्दल १॥ रुपया वजा करून बाकीची रक्कम द. सा. द. शें. ४ प्रमाणें व्याजीं

लाविली. तिचें एक वर्षाचें व्याज २॥ रु. झालें. इतकें सर्व दिलें आहे; आणि सभासदांची संख्या शोधून काढावयाची आहे.

पृथक्करण.— उदाहरणाच्या स्वरूपावरून दिसतें कीं, इष्टसंख्या (म्हणजे वर्गणीदारांची संख्या) सांपडली असें मानिलें असतां, तिला तिनेंच गुणिल्यानें म्हणजे तिचा वर्ग केल्यानें साऱ्या वर्गणीच्या आण्यांची संख्या येईल; ∴ (१) तिचें वर्गमूळ काढिल्यानें इष्ट संख्या येईल. ह्याकरितां वर्गणीच्या आण्यांची संख्या काढितां आली म्हणजे झालें.

वर्गणीच्या आण्यांच्या संख्येला १६ नीं भागून भागाकारांत १॥ वजा केल्यानें व्याजीं लाविलेल्या रुपयांची संख्या निघेल; ∴ (२) व्याजीं लाविलेल्या रुपयांच्या संख्येमध्यें १॥ मिळवून बेरजेला १६ नीं गुणिल्यानें वर्गणीच्या आण्यांची संख्या येईल. ह्याकरितां व्याजीं लाविलेल्या रुपयांची संख्या सांपडली म्हणजे झालें.

व्याजीं लाविलेल्या रुपयांच्या संख्येला $\frac{४}{१००}$ नीं गुणिल्यानें तिचें एका वर्षाचें व्याज येईल; ∴ (३) त्या व्याजाला $\frac{४}{१००}$ नीं भागिल्यानें ती व्याजीं लाविलेली रुपयांची संख्या निघेल. ह्याकरितां तें व्याज समजलें म्हणजे झालें.

आतां तें व्याज २॥ रुपये आहे, असें दिलें आहे; व त्याला लक्षून अनुक्रमें (३), (२), (१) ह्या कृति करण्याच्या रीतीही ठरल्या आहेत. म्हणून इष्टकृत्याच्या रीतीची सामग्री जुळली.

संयोगीकरण.—

रीति,— २॥ ह्या संख्येला $\frac{४}{१००}$ नीं भागावें, भागाकारांत १॥ मिळवून बेरजेला १६ नीं गुणावें, आणि गुणाकाराचें वर्गमूळ काढावें.

इष्टप्राप्ति.—ह्या कृतीनें उत्पन्न होणारी ३२ हीच इच्छिलेली संख्या होय. (कारण कीं, हिला उदाहरणांत सांगितलेली सारी कृति केली असतां २॥ ही संख्या उत्पन्न होणें, हा इष्टधर्म हिजमध्यें उत्पन्न झालेला असलाच पाहिजे, असें सिद्ध करून दाखवितां येतें. तें असें:—)

सिद्धता.—२॥ ह्या संख्येला $\frac{४}{१००}$ नीं भागणें, भागाकारांत १॥

मिळवून बेरजेला १६ नीं गुणणें, व गुणाकाराचें वर्गमूळ काढणें; ह्या कृतीनें ३२ ही संख्या उत्पन्न झाली आहे; ∴ ३२ चा वर्ग करणें, त्याला १६ नीं भागून भागाकारांत १॥ वजा करणें, व बाकीला $\frac{४}{१००}$ नीं गुणणें, ह्या (उदाहरणांत सांगितलेल्या) कृतीनें (वर्गमूळ, गुणाकार, बेरीज, भागाकार, ह्या शब्दांच्या व्याख्यांप्रमाणें) २॥ ही संख्या उत्पन्न झालीच पाहिजे.

∴ ३२ ही इच्छिलेली संख्या होय. इष्टसिद्धि.

(हें पृथक्करण व संयोगीकरण अशा प्रकारच्या प्रत्येक उदाहरणास लागू पडेल.)

ह्या उदाहरणाचें पृथक्करण बीजगणिताच्या अतिसंक्षिप्त भाषेनें लिहिलें असतां त्याचें स्वरूप असें होईल:–

क्ष ही इच्छिलेली सभासदांची संख्या सांपडली असें मानूं.

आतां $\text{क्ष}^{२}$ ही वर्गणीच्या आण्यांची संख्या आहे;

∴ $\frac{\text{क्ष}^{२}}{१६}$ ही " रुपयांची " "

∴ $\frac{\text{क्ष}^{२}}{१६}-१॥$ ही व्याजीं लाविलेल्या रुपयांची संख्या होय;

∴ $\left(\frac{\text{क्ष}^{२}}{१६}-१॥\right)\times\frac{४}{१००}$ ही तिचें एका वर्षाचें व्याज दाखविणारी रुपयांची संख्या होय;

आणि ती संख्या २॥ आहे असें दिलें आहे.

(∴ ह्या पृथक्करणावरून प्रस्तुत उदाहरणाचें सामान्यस्वरूप असें झालें कीं, " एका संख्येच्या वर्गाला १६ नीं भागून आलेल्या भागाकारांतून १॥ वजा केला आणि बाकीला $\frac{४}{१००}$ नीं गुणिलें, तर गुणाकार २॥ येतो, हें दिलें आहे; आणि ती संख्या काढावयाची आहे. " उदाहरणाचें असलें सामान्यस्वरूप येथें दाखविल्याप्रमाणें सविस्तर लिहिण्याची वहिवाट नाहीं; ($\frac{\text{क्ष}^{२}}{१६}-१॥$)$\times\frac{४}{१००}=२॥$ असें बीजगणिताच्याच भाषेनें लिहितात. तथापि अशा सविस्तर भाषेनें उदाहरणाचें सामान्यस्वरूप ह्मणण्याची वहिवाट ठेवणें, हें विद्यार्थ्यांच्या फार उपयोगाचें आहे.)

∴ $\left(\frac{\text{क्ष}^{२}}{१६}-१॥\right)\times\frac{४}{१००}=२॥$

ह्या दोन समान संख्यांस $\frac{४}{१००}$ ह्या एकाच संख्येनें भागिलें असतां भागाकार समान येतील;

$$\therefore \frac{क्ष^{२}}{१६} - १\text{॥} = २\text{॥} \div \frac{४}{१००}$$

ह्या दोन समान संख्यांमध्यें १॥ ही एकच संख्या मिळविली असतां बेरजा समान येतील;

$$\therefore \frac{क्ष^{२}}{१६} = २\text{॥} \div \frac{४}{१००} + १\text{॥}$$

ह्या दोन समान संख्यांस १६ ह्या एकाच संख्येनें गुणिलें असतां गुणाकार समान येतील;

$$\therefore क्ष^{२} = \left(२\text{॥} \div \frac{४}{१००} + १\text{॥}\right) \times १६$$

ह्या दोन समान संख्यांचीं वर्गमूळें काढिलीं असतां उत्पन्न होणाऱ्या (केवल) संख्या समान येतील;

$$\therefore क्ष = \sqrt{\left(२\text{॥} \div \frac{४}{१००}\right) \times १\text{॥} \times १६}$$

ह्या उजव्या पेटऱ्याची कृति प्रत्यक्ष केली असतां ३२ ही (केवल) संख्या उत्पन्न होते; ∴ ३२ ही इच्छिलेली संख्या होय.

असल्या पृथक्करणाला "समीकरणपद्धति" अथवा "समीकरण" ह्मणतात.

ह्या पृथक्करणांत दाखविल्या प्रकारची अतिसंक्षिप्त अशी बीजपरिभाषा, व "समान संख्यांमध्यें समान संख्या मिळविल्या असतां येणाऱ्या बेरजा समान असतात" इत्यादिक सामान्य सिद्धांत, ह्यांचा पूर्ण परिचय झाल्याखेरीज असलें पृथक्करण तयार करितां येत नाहीं; इतकेंच नाहीं, तर कोणीं आयतें तयार करून सांगितलें असतां तें समजण्यास देखील फार कठीण पडतें, हें अनुभवसिद्ध आहे. म्हणून गणितकारांचा असा संकेत ठरलेला आहे कीं, अंकगणिताचें अध्ययन करणारांसाठीं एखाद्या उदाहरणाचें पृथक्करण तयार केलेलें असलें, अथवा त्यांच्याकडून तयार करविलेलें असलें, तर तें असंक्षिप्त आणि व्यावहारिक अशाच भाषेनें लिहिलेलें असावें. "कोणत्याही संख्येच्या वर्गाचें वर्गमूळ काढिलें म्हणजे तीच संख्या

उत्पन्न होते" "भागाकाराला भाजकानें गुणिलें म्हणजे भाज्य येतो" इत्यादिक जे सिद्धांत अंकगणित शिकणारांच्या पूर्ण परिचयाचे असतील, त्यांच्याच योजनेनें तें पृथक्करण तयार केलेलें असावें; आणि ह्या सामान्य सिद्धांतांचाही प्रत्यक्ष उच्चार न करितां, (पूर्वोक्त सविस्तर पृथक्करणांत दाखविल्याप्रमाणें) ज्या उदाहरणांच्या पृथक्करणांत त्यांची योजना करावयाची, त्यांतल्या विशेष संख्यांना मात्र ते सिद्धांत लागू करून दाखवावे, म्हणजे झालें. एकंदरींत तें पृथक्करण असें असलें पाहिजे कीं, ज्याला अंकगणित समजतें, पण बीजगणितांत ज्याचा प्रवेश नाहीं, अशा मनुष्याला तें पृथक्करण अल्पायासानें समजेल. असल्या ह्या अटीमुळें अर्थात् बहुतेक उदाहरणांचें पृथक्करण समीकरणपद्धतीनें लिहिण्यापेक्षां ह्या अंकगणितपद्धतीनें लिहिणें फार कठीण पडतें.

कोणत्याही उदाहरणाचें हें अंकगणितपद्धतीनें पृथक्करण लिहीत असतां पृथक्करणाच्या व्याख्येप्रमाणें "इच्छिलेली संख्या सांपडली असें मानणें" एथपासूनच आरंभ करितात, असें नाहीं; आणि पूर्वी प्रत्येक उदाहरणांत दाखविल्याप्रमाणें पृथक्करण व संयोगीकरण हीं निरनिराळीं लिहितात, असेंही नाहीं. हीं दोन्ही बहुधा एकत्र करून लिहितात व हीं एकत्र करण्याच्या सोयीकरितां योग्य वाटेल तेथून आरंभ करितात. जसें, शेवटच्या उदाहरणाचें पृथक्करण व संयोगीकरण हीं एकत्र करून लिहावयाचीं, तर बहुधा अशीं लिहितातः—

प्रथमतः व्याजीं लाविलेली रकम काढूं.

द. सा. द. शें. चार रु. प्रमाणें अडीच रु. हें ज्या रकमेचें एका वर्षाचें व्याज आहे, ती रकम (४:२॥:: १००:$\frac{१००\times२॥}{४}$ म्हणजे) ६२॥ रु. ही आहे, असें त्रैराशिक रीतीवरून ठरतें; ∴ हीच रकम व्याजीं लाविली होती.

ही व्याजीं लाविलेली रकम वर्गणीच्या रुपयांत १॥ रुपया वजा करून आलेली आहे, ∴ ६२॥ व तो १॥ मिळून ६४ हे वर्गणीचे रुपये झाले; आणि ह्यांस १६ नीं गुणल्यानें १०२४ हे वर्गणीचे आणे झाले.

आतां ही आण्यांची संख्या सभासदांच्या संख्येला तिनेंच गुणून आलेली, म्हणजे तिच्या वर्गाबरोबर आहे; ∴ १०२४ह्या आण्यांच्या संख्येचें वर्गमूळ काढिल्यानें सभासदांची संख्या येईल.

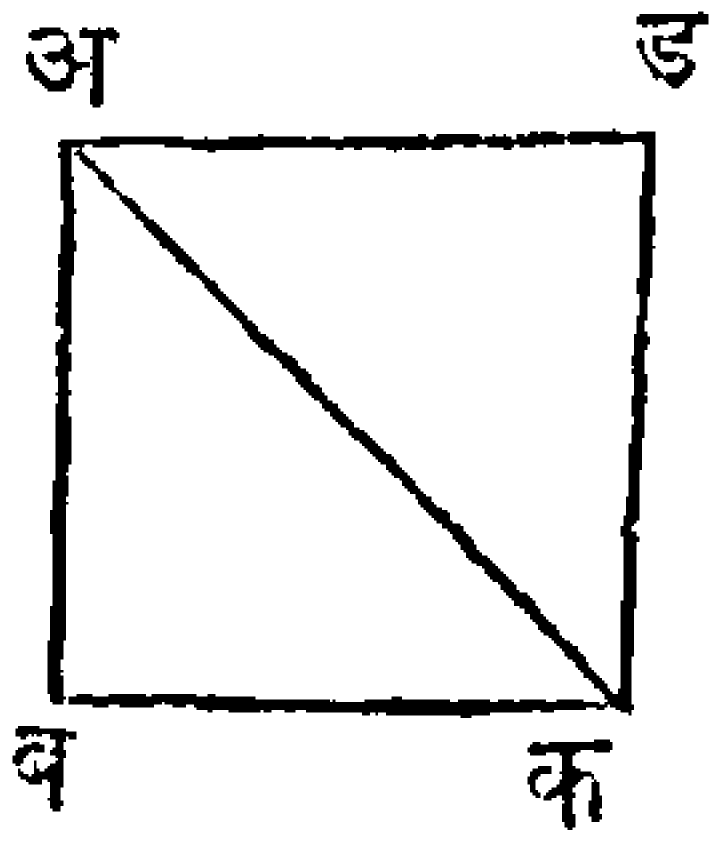
१०२४ ह्या संख्येचें वर्गमूळ ३२ येतें; म्हणून ३२ ही सभासदांची संख्या होय.

कृत्याचें पृथक्करण व संयोगीकरण ह्यांविषयीं ध्यानांत ठेवण्याजोगी एक गोष्ट आहे. ती ही कीं,—विवक्षित कृत्य भूमितींतलें असो किंवा संख्यागणितांतलें असो, त्याचें पृथक्करण हें संयोगीकरणापेक्षां कठिण असावयाचेंच. कृत्याचें पृथक्करण (येथें दाखविल्या प्रकारचें) करितां आलें, तर संयोगीकरण करितां येतेंच. म्हणून संख्यागणितांतलें एखादें कृत्य परीक्षकानें विद्यार्थ्यास विचारिलें, तर तें विचारण्यांत परीक्षकाचा हाच उद्देश असतो कीं, विचारिलेल्या कृत्याचें उत्तर काढण्यास जी कृति करण्याचें विद्यार्थ्यानीं योजिलें असेल, ती कृति केल्यानें इष्टप्राप्ति होईल, हें कसकसें शोधून काढिलें, ही गोष्ट विद्यार्थ्यानीं मुख्यत्वेंकरून सांगावी. म्हणजे त्यांनीं विचारिलेल्या कृत्याचें मुख्यत्वेंकरून (येथें दाखविल्याप्रकारचें) पृथक्करण करून दाखवावें, आणि त्या पृथक्करणावरून ठरलेल्या रीतीच्या योजनेनें उत्तर काढून दाखवावें; मग नुकतेंच दाखविल्याप्रमाणें पृथक्करण व संयोगीकरण हीं जोडून लिहिलीं तरी चिंता नाहीं. परंतु नुसती कांहींतरी कृति करून त्यानें उत्तर काढिलें, आणि तें इच्छिलेलें उत्तर आहे असें ताळा मिळवून अथवा दुसऱ्या कोणत्यातरी रीतीनें प्रत्यास आणून दिलें, म्हणजे एकंदरींत पूर्वीं दाखविल्या प्रकारचें नुसतें संयोगीकरण केलें, तर बहुधा तें एक देखील परीक्षक कबूल करणार नाहीं. ही संख्यागणितांतल्या कृत्यांची गोष्ट झाली. आतां भूमितींतलें एखादें कृत्य परीक्षकानें विचारिलें आणि विद्यार्थ्यानें त्याचें नुसतें एथें दाखविल्याप्रकारचें संयोगीकरण केलें, तर तें बहुधा बिनतक्रार कबूल करण्याची वहिवाट आहे. परंतु येथेंही "अमुक कृतीनें उत्पन्न होणाऱ्या प्रत्येक गोष्टीमध्यें इष्टधर्म असावयाचेच" ही जातिप्रतिज्ञा स्थापित केलेली असली पाहिजे; "त्या कृतीनें उत्पन्न

झालेल्या अमुक विशेष गोष्टीमध्यें इष्टधर्म आहेत " ही व्यक्तिप्रतिज्ञा मात्र ज्या संयोगीकरणामध्यें (रेषा, क्षेत्रें इत्यादिक प्रत्यक्ष मोजून दाखवून) प्रत्ययास आणून दिलेली असेल, तें संयोगीकरण कोणी कबूल करणार नाहीं.

प्रमेयाच्या पृथक्करणाचें स्वरूप कोणी असें सांगतात कीं, " प्रथम साध्यप्रतिज्ञा खरी मानून ती व इतर कांहीं सिद्ध झालेल्या गोष्टी ह्यांच्या आधारानें दुसरी कोणती गोष्ट सिद्ध होते, हें शोधावें. ही नवी गोष्ट व इतर कांहीं सिद्ध झालेल्या गोष्टी यांच्या आधारानें आणखी कोणती गोष्ट सिद्ध होते, हें शोधावें. ह्याप्रमाणें पूर्वी सिद्ध झालेली अथवा सत्य मानिलेली किंवा साध्यप्रतिज्ञेंत दिलेली एखादी गोष्ट उत्पन्न होई तोंपर्यंत शोध करावा. म्हणजे इष्टसिद्धीची सामग्री जुळते." परंतु असल्या पृथक्करणानें इष्टसिद्धीची सामग्री जुळेल असा नियम नाहीं; इतकेंच नाहीं, तर सिद्ध करावयाची गोष्ट वस्तुतः खोटी असली, तरी देखील प्रसंगविशेषीं असल्या पृथक्करणानें पूर्वी सिद्ध झालेली एखादी गोष्ट उत्पन्न होईल (हें २६ साव्या नियमावरून सिद्ध आहे.) मग अशा प्रसंगीं असल्या पृथक्करणानें इष्टसिद्धीची सामग्री कशी जुळणार ?

उदाहरण–" **अबकड** ह्या चौरसाचा **अक** हा कर्ण **अब**च्या दुपटीबरोबर आहे" हें प्रमेय सिद्ध करावयाचें आहे. आतां ह्याचें वर सांगितल्या प्रकारचें पृथक्करण करूं. " प्रथम **अक**, **अब**च्या दुपटीबरा-



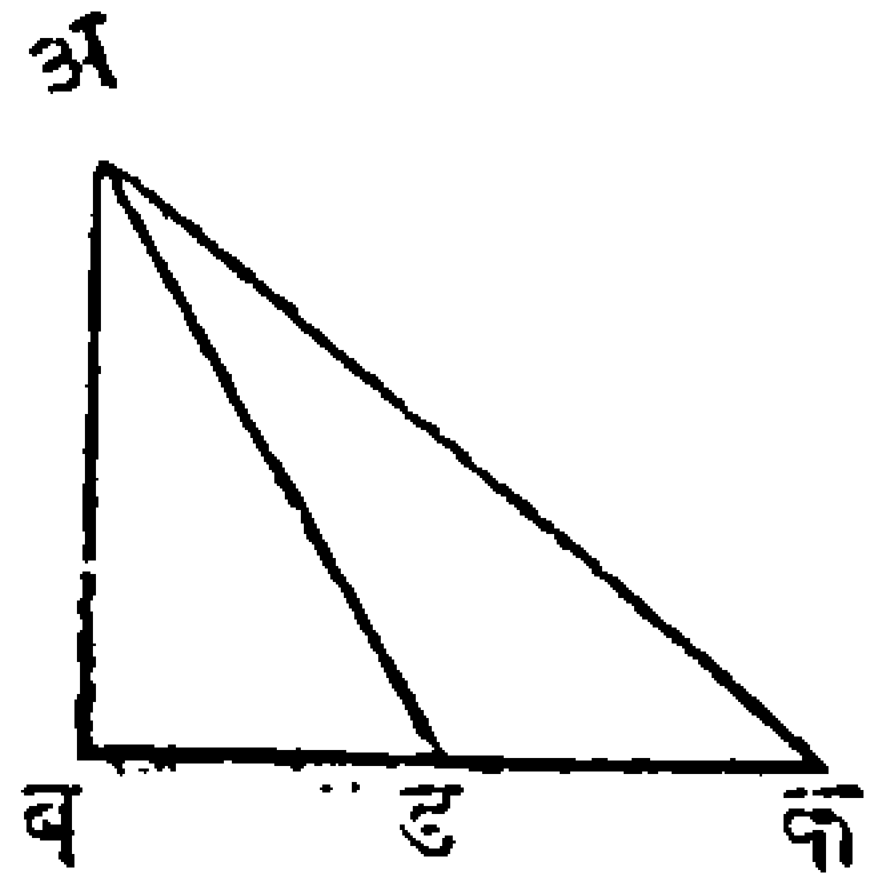
वर आहे, असें मानिलें, तर कोणत्याही पदार्थाच्या दुपटीपेक्षां तो पदार्थ लहान असतो; ∴ **अक** पेक्षां **अब** लहान आहे; ∴ (१.१८ प्र.) **अबक** कोनापेक्षां **अकब** कोन लहान आहे. **अबक** कोन काटकोन आहे; ∴ (त्यापेक्षां कमी असणारा) **अकब** हा लघुकोण आहे. आतां ही शेवटीं उत्पन्न झालेली गोष्ट खरी आहे; परंतु साध्यप्रतिज्ञा खोटी आहे, हें (१ २०) या सिद्धांताच्या आधारानें

सहज सिद्ध होतें. मग असल्या पृथक्करणानें तिच्या सिद्धतेची साम-ग्री जुळावयाची नाहीं, हें उघड आहे.

असल्या पृथक्करणाचा एवढा मात्र उपयोग आहे कीं, हें पृथक्करण करीत असतां पूर्वीं खोटी ठरलेली एखादी गोष्ट उत्पन्न झाली (आणि पद्धति निर्दोष असली), तर (२६ साव्या नियमाप्रमाणें) साध्यप्रतिज्ञाच खोटी ठरते. मग तिच्या सिद्धतेचा यत्न करण्याचें कारण राहत नाहीं. जसें वरच्या उदाहरणांतील साध्यप्रतिज्ञा खरी मानिल्यानें **अब** आणि **बक** ह्यांची बेरीज **अक** बरावर आहे, असें (प्र. प्र. २) व (प्र. प्र. १) ह्यांच्या आधारानें सिद्ध होतें. पण ही गोष्ट खोटी. म्हणून (नि. २६ प्र.) साध्यप्रतिज्ञाही खोटी आहे. ह्याकरितां तिच्या सिद्धतेची सामग्री जुळविण्याचा यत्नच करावयास नको.

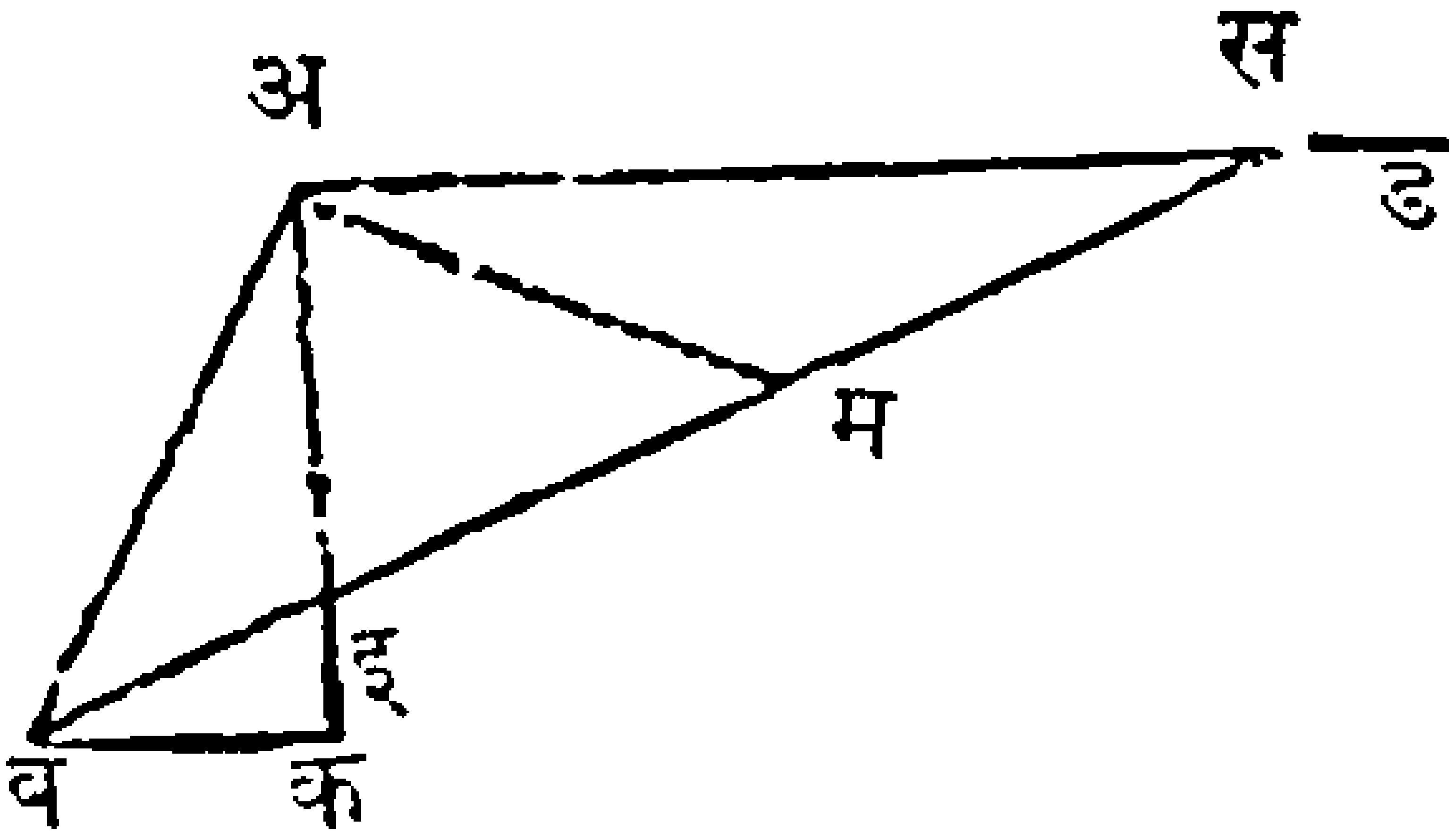
ही शेवटची गोष्ट कृत्याच्या पृथक्करणासही लागू आहे. कृत्याचें पृथक्करण करीत असतां पूर्वीं सत्य ठरलेल्या अथवा प्रतिज्ञेंत दिलेल्या अशा एखाद्या गोष्टीशीं विरुद्ध गोष्ट उत्पन्न झाली, किंवा पूर्वीं अशक्य ठरलेलें असें एखादें कृत्य करितां आलें पाहिजे असें दिसून आलें, तर इष्टकृत्यही अशक्य आहे, असें समजावें.

पहिलें उदाहरणः—"**अबक** त्रिकोणाची **अक** बाजू **अब** पेक्षां मोठी आहे. तर **अ** बिंदूपासून अशी एक रेषा काढावयाची आहे कीं, ती **बअक** कोनास दुभागील, व **बक** बाजूवर लंब होईल."



पृथक्करण.-**अड** ही इष्टरेषा काढितां आली असें मानिलें, तर (१.२६ प्र.) **अब** आणि **अक** ह्या समान ठरतील. ही दिलेल्या गोष्टीशीं विरुद्ध अशी गोष्ट उत्पन्न झाली. ह्मणून इष्टकृत्य अशक्य ठरलें.

दुसरें उदाहरण–" **अबक** त्रिकोणाचा **अकब** कोन काटकोन आहे, आणि **अड** ही **बक**शीं समांतर काढिली आहे. तर **ब** बिंदूतून अशी एक रेषा काढावयाची आहे कीं, ती **अ**-



कला छेदून **अड**ला मिळेल, आणि तिचा **अक** व **अड** ह्यांमधील भाग **अब** कर्णाच्या दुपटीबरोबर होईल. "

पृथक्करण.–आतां **बस** ही इष्टरेषा काढितां आली असें मानून **इस**चा **म** हा मध्य व **अ** हे बिंदु सांधले. आतां **अम**च्या दुपटीबरोबर **सइ** आहे (असें सिद्ध होतें); ∴ **अब**, **अम** ह्या समान आहेत; ∴ **अबम** कोन **अमब** कोनाबरोबर होतो. आणि **अमब** कोन **असम** कोनाच्या दुपटीबरोबर होतो; ∴ **अबम** कोनही **असम** कोनाच्या दुपटीबरोबर होतो; ∴ **अबम** कोन **सबक** कोनाच्या दुपटीबरोबर होतो; ∴ **अबक** कोन **सबक** कोनाच्या तिपटीबरोबर होतो. यावरून इष्टप्राप्तीला **अबक** कोनाचे तीन समान भाग करितां आले पाहिजेत. हें (निर्दोष पद्धतीनें) सिद्ध झालें. परंतु काटकोनाखेरीज कोणत्याही कोनाचे तीन समान भाग भूमितीच्याच योगानें करितां येणें हें अशक्य ठरलें आहे. ∴ इष्टकृत्यही अशक्य होय.

पृथक्करण व संयोगीकरण ह्या संज्ञांचे व्यावहारिक अर्थही येथें वर्णिलेल्या अर्थांपासून फारसे भिन्न आहेत, असें नाहीं. व्यवहारांत कोणत्याही कार्याचे अवयव निराळे करून त्याचें मूळ शोधून काढणें ह्या कृतीला त्या "कार्याचें पृथक्करण" म्हणतात, व त्या अवयवांपासून तें कार्य उत्पन्न करून दाखविणें, ह्या कृतीला त्या "कार्याचें संयोगीकरण" म्हणतात.

पृथक्करण व संयोगीकरण ह्यांविषयीं एथवर जें लिहिलें आहे, त्याचें चांगलें मनन केलें असतां त्या पद्धतींचीं स्वरूपें बरींच ध्यानांत

येतील असें वाटतें; परंतु ही गोष्ट पक्की ध्यानांत ठेविली पाहिजे कीं, ह्या पद्धतींच्या वर्णनाचें कितीही चांगलें अध्ययन केलें, तरी त्यांचीं स्वरूपें ध्यानांत येणें एवढेंच कायतें त्या अध्ययनाचें फळ होय; नुसत्या वर्णनाच्या अध्ययनानें पाहिजे त्या प्रमेयाचें अथवा कृत्याचें पृथक्करण करितां येईल असें मुळींच समजूं नये. कोणत्याही विषयांतल्या प्रमेयाचें अथवा कृत्याचें पृथक्करण करितां येण्यास कल्पनाशक्तीचें प्राबल्य आवश्यक आहे हें तर खरेंच; पण त्या विषयांतील पूर्वीं सिद्ध झालेलीं प्रमेयें व कृत्यें ठाऊक नसतील, व ठाऊक असूनही समयीं न स्मरतील, तर पृथक्करण करीत असतां जें सुचावयास पाहिजे, तें नुसतें कल्पनेच्या प्राबल्यानें कसें सुचणार? पहा कीं, मागें ह्या पद्धतींच्या स्पष्टीकरणार्थ जीं उदाहरणें लिहिलीं आहेत, तीं अगदीं सरल अशीं मुद्दाम निवडून काढिलेलीं आहेत, तथापि ज्याला (१.१६) हा सिद्धांत स्मरत नाहीं, त्याला पहिल्या उदाहरणाच्या पृथक्करणांतलें "तथापि तो (**अडब** कोन) **अकड** कोनापेक्षां मात्र मोठा ठरतो." हें वाक्य कसें सुचावें? भूमितींतल्या कृत्याच्या पृथक्करणामध्यें "आतां **इफ** रेषा काढल्यानें स्पष्ट दिसेल कीं" इ० वाक्य लिहिलें आहे. पण (१.३७) ह्याची आकृति ज्याच्या डोळ्यांपुढें उभी राहत नाहीं, त्याला **ईफ** रेषा काढणें सुचावें कसें? व पुढची गोष्ट स्पष्ट दिसावी कशी? सारांश कोणत्याही विषयांतल्या सरल गोष्टींचें देखील पृथक्करण करितां येणें हें मुख्यत्वेंकरून त्या विषयाची चांगली माहिती व त्यांतील गोष्टींचें पृथक्करण करण्याचा पुष्कळसा अभ्यास ह्यांवर अवलंबून आहे.

संयोगीकरणाचे भाग.–प्रमेयाच्या संयोगीकरणाचें लक्षण व उदाहरणें ह्यावरून उघड आहे कीं, "जातिप्रतिज्ञा", "व्यक्तिप्रतिज्ञा", "सिद्धता" व "इष्टसिद्धिकथन" हे जे सिद्धतेच्या तिसऱ्या कलमांत चार भाग सांगितले, ते वस्तुतः प्रमेयाच्या संयोगीकरणाचेच भाग होत. सिद्धतेच्या पहिल्या उदाहरणांत दाखविल्याप्रमाणें क्वचित् प्रमेयाच्या संयोगीकरणामध्यें "व्यक्तिप्रतिज्ञा" नसते. तसेंच एखाद्या प्रमेयाच्या सिद्धतेकरितां कांहीं कृति करावी लागते, तथापि ती कृति हा सिद्धतेचाच भाग समजावा; कां कीं,

कोणतीही कृति करणें हा प्रमेयाचा उद्देश नसतो. कृत्याच्या संयोगीकरणाचें लक्षण व उदाहरणें ह्यांवरून दिसेल कीं, " जातिप्रतिज्ञा," "व्यक्तिप्रतिज्ञा," " कृति " (हिलाच भूमितीमध्यें रचना म्हणतात व तिच्या सामान्यरूपाला रीति म्हणतात) " इष्टप्राप्तिकथन," " सिद्धता " व " इष्टसिद्धिकथन " असे पांच भाग होतात.

शास्त्र व कला.–अमुक विषयाच्या संबंधानें अमुक कार्यांचीं अमुकच कारणें आहेत, व अमुक कारणांपासून अमुकच कार्यें होतात, असें ठरवून तें सुबोध रीतीनें सांगणें, व त्या कार्यकारण विचाराच्या योगानें त्या विषयाच्या संबंधाचीं कृत्यें करण्यास उपयोगीं पडणारे नियम तयार करणें, ह्या सर्व गोष्टींना त्या विषयाचें सोपपत्तिक विवेचन म्हणतात. कोणत्याही विषयाच्या सोपपत्तिक विवेचनाला त्या " विषयाचें शास्त्र " म्हणावें; आणि कोणत्याही विषयाच्या संबंधाचीं कृत्यें करण्याचे जे नियम त्या विषयाच्या शास्त्रावरून अथवा नुसत्या वहिवाटीवरून ठरले असतील, त्यांची योजना करून तीं कृत्यें प्रत्यक्ष करणें, ह्याला त्या " विषयाची कला " म्हणावें. जसें, " एखाद्या लहानशा नळीचें एक शेवट पाण्यांत बुडवून दुसरें तोंडांत धरलें आणि तींतील हवा वर ओढिली, तर पाणी तोंडांत चढतें." इत्यादिक प्रवाही-पदार्थ-विषयक गोष्टींची उपपत्ति ठरविणें, म्हणजे प्रवाहीपदार्थांच्या व प्रेरणांच्या अमुक धर्मांचीं हीं कार्यें आहेत असें शोधून काढणें, व त्या धर्मांवरून (विहिरींतलें पाणी बंबानें काढण्याचा नियम विद्वानांनीं शोधून काढिला आहे, तसले) नवीन व्यवहारोपयोगी नियम शोधून काढून त्यांची सत्यता सुबोध पद्धतीनें सांगणें, हें प्रवाहीपदार्थविषयक शास्त्र झालें. आणि नुसते ते नियम पाठ करून त्यांत सांगितल्याप्रमाणें बंब इत्यादिक यंत्रें तयार करणें व त्या त्या कार्यांकडे त्यांची प्रत्यक्ष योजना करणें, ही प्रवाहीपदार्थविषयक कला होय. संख्यांच्या धर्मांवरून बेरीज, वजाबाकी इत्यादिक कृत्यांचे नियम शोधून काढणें व ते सुबोध रीतीनें सिद्ध करून दाखविणें, हें (म्हणजे ज्याला

सोपपत्तिक अंकगणित व सोपपत्तिक बीजगणित म्हणतात तें) संख्याशास्त्र होय; व नुसते ते नियम पाठ करून त्यांच्या प्रत्यक्ष योजनेनें तीं कृत्यें करणें ही संख्याविषयक कला होय. विद्यार्थ्यांना आरंभीं जें अंकगणित व बीजगणित (उपपत्तीवांचून) शिकवितात, ती संख्याविषयक कलाच होय. पूर्वी जे अनुमानादिकांविषयीं नियम लिहिले आहेत, ते व तसले अनुमानादिकांचे सर्व नियम कार्यकारणविचारानें शोधून काढून ते सिद्ध करून दाखविणें, हें अनुमानादिकांचें शास्त्र होय (ह्याचेंच नांव न्यायशास्त्र); आणि नुसते ते नियम पाठ करून कोणत्याही गोष्टीची सत्यता स्थापित करण्याचे कामीं त्यांची योजना करणें, ही अनुमानकला होय.

कोणत्याही विषयाची नुसती कला अवगत असणें ह्यापेक्षां त्याचें शास्त्र व कला हीं दोन्ही अवगत असणें, हें किती जास्त उपयोगी आहे, ही गोष्ट उदाहरणांनीं स्पष्ट करीत बसावयास नको.

आतां अमुक विषयाचा अमुक नियम निरपवाद आहे, असें ठरविण्याकरितां शास्त्रकार बहुधा कोणत्या पद्धति योजितात हें थोडक्यांत दाखवितों. अमुक गोष्ट सत्य आहे असें जेव्हां नवीनच ठरवावयाचें, तेव्हां तें प्रत्यक्ष किंवा अनुमान ह्याच पद्धतीनें ठरवावें लागतें. कां कीं, तें नवीनच ठरवावयाचें, ह्मणून येथें शाब्दपद्धतीची योजना संभवतच नाहीं; व उपमानपद्धतीनें ठरलेली गोष्ट हा तर नुसता अदमास होय; म्हणून तिचाही उपयोग नाहीं.

कोणतीही व्यक्तिविषयक गोष्ट (म्हणजे व्यक्तिप्रतिज्ञा) खरी ठरविण्याकरितां प्रत्यक्ष पद्धतीची योजना करितां येईल तर करण्याविषयीं मनुष्याचा सहजच फार यत्न असतो; आणि व्यक्तिविषयक गोष्टीच्या संबंधानें मनुष्याची खातरी होण्याला प्रत्यक्ष पद्धतीचीच योजना फार सोईची, हेंही खरें आहे. परंतु हिची योजना ज्यांत संभवत नाहीं (निदान महाप्रयासाची असते) असे प्रसंग मनुष्याला पदोपदीं येतात, हें अनुभवसिद्ध आहे.

ही प्रत्यक्षपद्धतीच्या योजनेची गैरसोय व्यक्तिविषयक गोष्ट खरी ठरविण्याच्या संबंधानें सांगितली; पण कोणतही सामान्य नियम

(म्हणजे व्यापकजातिप्रतिज्ञा) प्रत्यक्ष पद्धतीनें निरपवाद ठरणें संभवतच नाहीं. कारण कीं, त्या नियमाच्या उद्देश्यजातींतल्या सर्व (आणि विशेषेंकरून भविष्यकालिक) व्यक्तींविषयीं प्रत्यक्ष अनुभव कसा घेतां यावा? "मनुष्याला दोहोंपेक्षां जास्त डोळे नसतात" ह्या नियमाचा प्रत्यक्ष अनुभव पुढें उत्पन्न होणाऱ्या मनुष्यांच्या संबंधानें आज कसा घेतां येईल?

सारांश अमुक सामान्य नियम निरपवाद आहे, असें ठरविण्याला अनुमानपद्धतीचीच व त्यांत मुख्यत्वेंकरून व्याप्यानुमानाचीच योजना करणें आवश्यक आहे. परंतु कोणताही नियम व्याप्यानुमानानें स्थापित करितां येण्यास त्याच्या बरोबरीचे अथवा त्याच्यापेक्षां व्यापक असे दुसरे नियम पूर्वी स्थापित झालेले असले पाहिजेत, हें व्याप्यानुमानाच्या लक्षणावरून उघड आहे. ते आधारभूत नियम व्याप्यानुमानानें स्थापित होण्यास दुसरे व्यापकनियम स्थापित झालेले असले पाहिजेत. ह्याप्रमाणें शोध करितां करितां शेवटीं अशा नियमांवर येऊन पोंचावें लागेल कीं, त्यांना आधारभूत असे दुसरे व्यापक नियम न सांपडल्यामुळें ते व्याप्यानुमानानें स्थापित करण्याची सोयच नसावी. मग ते नियम सिद्धतेवांचून स्वीकारण्याची पाळी येते. आतां "कोणताही पदार्थ आपल्या भागापेक्षां मोठा असतो" ह्या नियमाच्या सत्यतेविषयीं जसा मनुष्यजातीचा अनुभव इतका दृढ आहे कीं, हा नियम सिद्ध करावयास पाहिजे असें कधीं कोणाच्या मनांत देखील यावयाचें नाहीं; तसा त्या शेवटल्या नियमांच्या सत्यतेविषयीं जर मनुष्यजातीचा अनुभव दृढ असेल, तर ते सिद्धतेवांचून स्वीकारणें प्रशस्तच आहे; परंतु ते जर असे असतील कीं, प्रत्यक्ष त्यांच्याच सत्यतेविषयीं तसा दृढानुभव प्राप्त होणें जरी असंभाव्य असलें, तरी ते खरे मानून त्यांच्या आधारावर सिद्ध केलेल्या दुसऱ्या गोष्टी निरपवाद आहेत असा अनुभव येतो (म्हणजे त्या गोष्टींचा नेहमीं ताळा जमतो), तर ते नियमही निरपवाद असण्याचा संभव पुष्कळ आहे, असें समजून ते सिद्धतेवांचून स्वीकारण्यास चिंता नाहीं. न्यूटनच्या पहिल्या (म्हणजे ज्यांत द्रव्याचें ज-

ठत्व सांगितलें आहे, त्या) नियमाची गोष्ट अशीच आहे. तथापि असले सर्व नियम निरपवाद ठरले असें मात्र मानितां कामा नये, हें २६ व्या नियमावरून उघड आहे.

असले (म्हणजे सिद्धतेवांचून स्वीकारिलेले) नियम प्रत्येक शास्त्रामध्यें थोडे तरी असावयाचेच; पण कोणत्याही शास्त्रांत असले नियम जितके थोडे असतील तितके चांगले व त्यांची सत्यता जितकी लोकांच्या सहज अनुभवास येईल तितकी चांगली, हें वरच्या लेखावरून उघड आहे. कोणत्याही शास्त्रांतल्या अशा (ह्मणजे सिद्धतेवांचून स्वीकारिलेल्या) गोष्टींस बहुधा त्या त्या शास्त्रांचीं मूलतत्त्वें अथवा (मुख्यत्वेंकरून गणितशास्त्रांत) प्रत्यक्षप्रमाणें व गृहीतकृत्यें म्हणतात.

अनुमानावलंबिशास्त्र व अनुभवावलंबिशास्त्र.—ज्या शास्त्रांमध्यें फार थोडीं व लोकांस सहज कबूल होण्याजोगीं प्रत्यक्षप्रमाणें स्वीकारिलेलीं असतात, आणि त्यांच्या (व इतर कांहीं शास्त्रांतील निर्विवाद ठरलेल्या नियमांच्या) आधारावर त्या शास्त्रांतले इतर सारे नियम व्याप्यानुमानानें स्थापित केलेले असतात, त्याला " अनुमानावलंबिशास्त्र " ह्मणावें. ज्या शास्त्रांत अशी व्यवस्था केलेली नसते अथवा करणें असंभाव्य असतें, (म्हणजे ज्या शास्त्रांतले बहुतेक नियम असे असतात, कीं त्यांपैकीं कोणताही नियम इतरांच्या आधारावर व्याप्यानुमानानें स्थापित करूं म्हटलें तर साधतच नाहीं, तथापि त्यांच्याविषयीं आलेल्या प्रत्यक्ष अनुभवावरून ते निरपवाद ठरण्याचा संभव दिसतो, एवढ्याच आधारावर ते स्वीकारिलेले असतात,) त्या शास्त्राला " अनुभवावलंबिशास्त्र " म्हणावें. संख्यागणित, भूमिति, स्थैर्योत्पादकप्रेरणाशास्त्र, गत्युत्पादकप्रेरणाशास्त्र, प्रवाहीपदार्थशास्त्र, दर्शनानुशासनशास्त्र, ज्योतिःशास्त्र, हीं अनुमानावलंबिशास्त्रें होत. त्यांपैकीं संख्यागणित, भूमिति इत्यादिक शुद्धगणिताचे भाग तर अगदीं पूर्णावस्थेस पोंचलेलीं अनुमानावलंबि शास्त्रें आहेत; व बाकीच्या शास्त्रांत त्यांची मदत घेतां आल्यामुळें तींही अनुमानावलंबि झालीं आहेत. ह्याप्रमाणेंच कोणत्याही शास्त्रामध्यें संख्यागणित व भूमिति

ह्यांची मदत घेण्याची जितकी जास्त सोय असते, तितकें तें जास्त अनुमानावलंबि बनतें. रसायनशास्त्र, मानसशास्त्र, शारीरशास्त्र, नीतिशास्त्र, हीं (सध्यां) अनुभवावलंबिशास्त्रें आहेत.

अनुभवावलंबिशास्त्राच्या बहुतेक नियमांस कांहीं व्यक्तींच्या प्रत्यक्ष अनुभवाचाच कायतो आधार असतो, ह्यामुळे ते नियम खोटे पडण्याचा संभव फार असतो. किंबहुना असल्या शास्त्रांतल्या कित्येक नियमांस नियम ही संज्ञाच शोभत नाहीं, हें वैद्यक व नीतिशास्त्र ह्यांच्या संबंधानें सर्वांच्या अनुभवास येत आहेच. आतां अनुमानावलंबिशास्त्राचा एखादा नियम खोटा पडलाच, तर त्याचें कारण दोहोंपैकीं एक असावयाचें; मूळच्या ज्या प्रत्यक्षप्रमाणांवर तो अवलंबून असेल, त्यांपैकीं एखादें खोटें पडणें हें, अथवा ज्या पद्धतीनें तो सिद्ध केला असेल, त्या पद्धतींत चूक होणें हें. आतां प्रत्यक्षप्रमाणें हीं बहुधा अनंतव्यक्तींच्या दीर्घ-कालिक अनुभवावरून सत्य मानिलेलीं असतात; ह्मणून तीं खोटीं पडण्याचा संभव फार कमी असतो. सिद्ध करण्याच्या पद्धतींत चुका होण्याचा संभव पुष्कळ आहे खरा, परंतु त्या चुका टाळण्याकरितां विद्वानांनीं न्यायशास्त्र तयार करून ठेविलें आहे, त्याच्या नियमांप्रमाणें अनुमानें केलीं असतां त्यांत चुका पडण्याची फारशी भीति नाहीं. सारांश अनुमानावलंबिशास्त्राचे नियम खोटे पडण्याचा संभव फार कमी असतो; म्हणूनच शास्त्रकार कोणत्याही विषयाच्या शास्त्राला असलें (म्हणजे अनुमानावलंबि) रूप देण्याविषयीं करवेल तितका यत्न करितात.

भूमितीची पूरणिका समाप्त.

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ.	पंक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
१	९	त्यांचे	त्याचे
५	७	त्यांसंबंधीं	त्यांसंबंधी
”	२६	नांवाचें	नांवांचे
१३	३	ते	तें
”	४	समजृतात	समजतात
१५	१८	त्यांचीं	ह्यांचीं
१६	४	कोणबिंदूस	कोणबिंदूस
२१	२८	बाज	बाजू
२२	२०	अंतरावर	अंतरांवर
”	२८	बिंदू	बिंदु
२८	१९	कशा	कशो
४२	२५	बाजूशीं	बाजूंशीं
४३	५	लब	लंब
४४	५	लब	लंब
५३	२२	बाजूपैकीं	बाजूंपैकीं
५७	२९	तें	त्यांचे
५८	२२	वर्तुळांचें	वर्तुळांचे
६०	६	सांगां	सांगा
”	२३	त्रिकोणांपैकीं	त्रिकोणांपैकीं
”	२३	बाजू-	बाजूं-
६८	२४	सिद्ध	सिद्ध
७३	१	रेघा	रेघ
७७	७	साह्यावरून	साह्यावांचून
८१	१०	सलग्न	संलग्न
”	१६	त्यांशीं सलग्न	त्याशीं संलग्न

पृष्ठ.	पंक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
८४	२१	त्रिकोणाच्या	आकृतीच्या
८६	१२	र्थांबरोबर	र्धांबरोबर
”	१४	ज्यां	ज्या
८८	१२	चौकोनांच्या	चौकोनाच्या
९२	११	बफ्र	वक्र
९३	२७	त,	ती
९४	१५	त्याचीं	त्यांचीं
९८	१७	तें	ते
१००	२९	समातर	समांतर
१०१	१७	सांधिलेल्यानें	सांधिल्यानें
१०२	१	चोकोन	चौकोन
”	२३	समान पायावर	समान पायांवर
१०३	१४	त्यामध्यें	त्यांमध्यें
११६	१९	काने	कोन
११७	३	रेषनें	रेषेनें

११८ २२व्या ओळीच्या पुढें “४. दोहोंपेक्षां जास्त पदार्थांची समानता ठरविण्याची सामान्य रीति सांगा” असें वाक्य पाहिजे.

११९	२२	चौरसापैकीं	चौरसांपैकीं
१२८	२१	मोजिले	योजिले

१४३ २१व्या ओळीच्या पुढें “६. (२.७) ह्याच्या सिद्धते-करितां कोणतीही रचना केल्यावांचून तो सिद्ध करून दाखवा” असें वाक्य पाहिजे.

१५५	२	दिलेला	दिलेली

१६२ दुसऱ्या ओळींत “दाखवा” ह्याचे पुढें “धनर्णसंज्ञांविषयींचे सारे संकेत रेषांस लागू केले असतां, दुसऱ्या पुस्तकांतील कोणकोणत्या सिद्धांतांचें ऐक्य आहे असें दाखवितां येईल?” हा प्रश्न पाहिजे.

पृष्ठ.	पंक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
१६२	८	भागस-	भागसं-
१७४	२३	बाजूशीं	बाजूंशीं
१८९	२१	ह्यात	ह्यांत
१९२	१२	परतु	परंतु
२२७	३	बाजूशीं	बाजूंशीं
२३५	२१	बिंदूतून	बिंदूंतून
२३९	२३	बिंदूतन	बिंदूंतून
२५७	१६	वर्तुलांभोंवतीं	वर्तुलाभोंवतीं
२६२	१५	वर्तुलांचे	वर्तुलाचे
२७५	११	वर्तुलांत	वर्तुलाभोंवतीं
२८४	८	भोंातीं	भोंवतीं
"	२१	दान	दोन
२८६	११	बिंदूतून	बिंदूंतून
२९१	२६	मळणाऱ्या	मिळणाऱ्या
२९९	११	अवकाशा-	अवकाशां-
"	२६	भूमिता-	भूमितीं-
३०१	१४	पदापदीं	पदोपदीं
३२८	५	तर त्यांची	तर त्यांचीं
३३२	२३	आण	आणि
३४८	१४	अशी अी	अशी अ-
"	१५	नसणारा	नसणारी
"	१८	तुकड-	तुकडा
३५१	२१	वाशीं	वांशीं
३५६	१४	कोणबिंदूपर्यंत	कोणबिंदूंपर्यंत
३६९	२	ह्यास	ह्यांस
३७०	२	सिद्धांतामध्यें	सिद्धतांमध्यें
३७३	५	करावे	करावें
३७४	७	चार	तीन

पृष्ठ.	पंक्ति.	अशुद्ध.	शुद्ध.
३७७	२८	रीतींतले	रीतींतलें
३८०	१	ह्यांताल	ह्यांतील
३९०	१८व्या ओळीच्या आरंभीं "२.७ प्रश्न ६" असें पाहिजे.		
४००	८	∵	∴
४१७	२०	लघुत्तम	लघुतम
४२३	१३	अर्थ	अर्ध
४२७	९	व्यासांची	व्यासांचीं
४३२	२६	परिघाच	परिघाचे
४४२	२०	प्रतिज्ञेत	प्रतिज्ञेंत
"	२१	लोक-	लोंक-
४६४	३	लोकरीची	लोंकरीची
४६९	२१	हेत्वाभासातली	हेत्वाभासांतली
४७८	२	बरच्या	वरच्या