

म. ग्रं. सं. ठाणे

सन

विषय

राजिप इत्यादि

लेखक भाषांतरकार

जा. सं. कुलकर्णी

संग्रहालय क्रमांक

३५ २५

२

पुस्तकाचे नांव ^५ हाअ बाइ. कुच्छेद

३५

श. ज्यो

क्षैत्र शङ्कुच्छेद

(दीर्घासहित) .

हे पुस्तक,

रेव्हॅरेंड् डब्ल्यू. एच्. ड्यू. साहेब एम्. ए.

यांच्या इंग्रजी पुस्तकाचें मराठी भाषान्तर.

नारायण सदाशिव कुळकर्णी,

एल्फिन्स्टन कालेजांतील माजी विद्यार्थी

हल्लीं कल्याण येथील इंग्रजी शाळेंतील संस्कृत शिक्षक

यानें केळें.

या पुस्तकाची मालकी सन १८६७ च्या

२५ व्या आक्टाप्रमाणें नोंदिली आहे.

मुंबईत

“जगदीश्वर” छापण्यांत छापिलें.

सन १८७९.

किंमत १॥१० रुपये.

Preface.



Several small treatises on Elementary Arithmetic and Algebra have appeared in Marāṭhī, which do not systematically treat of the principles but merely abound in examples the nature of which makes the work of translation so easy and safe. The translations of Euclid's elements, by messrs Nana' Sastri Apte and G. V. Karakare, are the only attempts worth noticing at rendering that branch of Mathematics into Marāṭhī. There is besides a small treat on Trigonometry with its 'co-भुजज्या', 'co-स्पर्श', and 'co-च्छेद'.

Now a work on Conic Sections in Marāṭhī is the only thing wanted to make up the course of pure Geometry in its widest sense; and the following translation is an attempt to fill up that want. The great difficulty of rendering a scientific work into Marāṭhī is to create technical equivalents, which will embrace the chief

properties of the idea denoted; and this in my opinion has deterred many learned men from rendering scientific works into this language. In this translation I have not kept a single English term or expression, and have given at the end a list of all the technical terms used, most of which I had to find out a-new. I have likewise endeavoured to make the original as simple as possible by quoting authorities of Euclid in the body of the book where they are not supplied in the original, and by giving notes on difficult propositions at the ends which, in my desire to simplify the propositions, may be liable to the censure of being somewhat superfluous, but this I am willing to submit to, if I have thereby made the subject clearer and simpler.

In conclusion I express my deep gratitude to The Reverend W. A. Drew, M.A., the author of the original for his having granted me permission to translate it.

Finally I am much obliged to my friends and

वा.ग.ज्यो ६१६१२

(3)

Subscribers who rendered valuable assistance to me
in publishing the present translation.

Kalyāna, 1879.

N.S. Kulkarni.

नमः परमात्मने.

प्रस्तावना.

शङ्कुच्छेद शब्द बहुतेक मराठी वाचकांच्या ऐकण्यांत असेलच. ह्या विषयाचें देशभाषेंत ज्ञान करून देण्याचा हा माझा पहिलाच यत्न आहे. हा ग्रन्थ रे० उळ्यू. एच्. ड्यू साहेबांच्या इंग्रजी पुस्तकाचें प्रतिबिम्ब आहे. हें पुस्तक हल्लीं सर्व कालेजांतील विद्यार्थी शिकत असतात; ह्यावरून ह्याचें श्रेष्ठत्व सहजच लक्षांत येईल. आपल्या इकडे साङ्ग व सोपपत्तिक गणित पुस्तकांची प्राचीन काळा पासून नष्ट झाल्यामुळे उणीव आहे. पैकीं गणित मूलतत्वांचीं सोपपत्तिक भाषान्तरें बरींच झालीं आहेत. यूक्लिडच्या भूमितीचें उत्कृष्ट भाषान्तर रा. रा. नाना शास्त्री आपटे यांनीं ६ पुस्तकांपर्यन्त, व तसेंच दुसरें एक मिस्टर-गोविन्द विठ्ठल करकरे यांनीं ४ पुस्तकांपर्यन्त केले आहे हें सर्वास विदित आहेच; ह्यांतील संज्ञा अन्वर्थ असून किता घेण्या सारख्या आहेत. शङ्कुच्छेद, त्रिकोणमिति, शून्यलब्धि ह्या गणित पुस्तकांची भाषान्तरें मराठींत झालीं नाहींत. ह्यांची भाषान्तरें गणितमूलतत्वांच्या भाषान्तरासारखीं झपाट्यानें न होण्याचीं कारणें दोन आहेत; एक, नवीन अन्वर्थ संज्ञा निर्माण करण्यास बरेच श्रम लागतात; दुसरें विषयही बराच कठीण असतो. शङ्कुच्छेदाचे दोन प्रकार आहेत; एक क्षेत्रशङ्कुच्छेद व दुसरा बेंजशङ्कुच्छेद; दोहोंचा विषय एकच परंतु सिद्धतेचा मार्ग निराळा. क्षेत्रशङ्कुच्छेदांत जे परिपाक उपलब्ध होताना तेच बेंजशङ्कुच्छेदांत सनीकरणद्वारा सिद्ध केले जातात.

ह्या पुस्तकाचे चार भाग आहेत. चौथ्या भागाचा विषय शङ्कुच्छेद आहे. हा शब्द लाक्षणिक आहे; शङ्कु व पातळी ह्यांच्या विप्रतिच्छेदावर लक्षणा करावयाची. शङ्कुच्छेद शब्द समापूर्णाकक्ष, ऊनसंपूर्णाकक्ष, विषमापूर्णाकक्ष, वर्तुळ, रेखाद्वय, रेखा, व बिन्दु ह्या सप्तकाचा ग्राहक

आहे. शङ्खु पातळीनें कोणत्या प्रकारानें कापिला ह्मणजे हें सप्तक निर्माण होतें हें ह्या भागांत दाखविलें आहे. हा भाग खरोखर आसेचनक आहे; जितका आसेचनक तितकाच गहनही आहे. एथें पाश्चात्यांची विषयवर्गीकरणाची शैली, कल्पना, व सिद्धान्त सिद्ध करण्याची युक्ति पाहून मनास साश्चर्यानन्द प्राप्त होतो. हा भाग पहिल्यानें असावा हें खरें; परंतु विषय गहन आहे; हा भाग पहिले तीन भाग वाचले ह्मणजे समजू लागतो; ह्यास्तव तो जेथें आहे ते त्याचें योग्यच स्थान आहे. वर्तुलादि चतुष्टयाचें धर्मपरीक्षण यूक्लिडच्या पुस्तकांत झालें आहे; अचशिश्ट समापूर्णाकक्षादि त्रितयाचें वा ग्रन्थांत केलेलें आहे.

ह्या छायेत सर्व नवीन व अन्वर्थ संज्ञा संस्कृत भाषेच्या द्वारे - निर्माण केल्या आहेत; इंग्रजी एक शब्द देखील ठेविला नाही. मूळ ग्रन्थांत परिपाकांच्या दृढीकरणार्थ ग्रन्थकारानें जे आधार द्यावयाचे गाळिले ते सर्व यांत दिले आहेत. पहिल्या तीन भागांतील सर्व सिद्धान्त व उपसिद्धान्त गुरूवांचून समजावे ह्मणून त्यांजवर वेगळ्या परिपूर्ण टीपा शोवटी दिल्या आहेत.

हें सर्व यथामति केले आहे. आतां छाया बरी आहे किंवा नाही ह्याचे निर्णायक विद्वज्जन होत. त्यांच्या पसंतीस येईपर्यंत माझ्यानें कांहींच ह्मणवत नाही.

हें पुस्तक तयार करण्याच्या व छापण्याच्या कामांत ज्या माझ्या कित्येक मित्रांनीं व आश्रयदात्यांनीं मला सहाय केले त्याजबद्दल मी त्यांचा फार आभारी आहे.

आतां दोन ओळी संज्ञेविषयीं लिहूं. नवीन अन्वर्थ संज्ञा रचण्याचें काम किती दुर्घट असतें हें ज्यांनीं शास्त्रग्रन्थांचीं भाषान्तरें केलीं आहेत त्यांसच किंवा विद्वज्जनांस माहित असणार. इतर जनांस तर गणित पुस्तकांचीं भाषान्तरें करण्यास बुद्धि व श्रम कांहींच लागत नाहींत. हें त्यांचें ह्मणणें जेव्हां स्वभाषेंत-

सर्व संज्ञाशब्द यथेच्छ उपलब्ध होत असतील तेव्हां मात्र कांहींसे योग्य असतें. असो; संज्ञेचे दोन प्रकार आहेत:— एक अर्थवत्संज्ञा व दुसरी केवलसंज्ञा.

१. अर्थवत्संज्ञा (संज्ञा ह्यणजे नांव ठेवणें व अर्थवत् ह्यणजे अन्यर्थ) निर्माण करणें झालें ह्यणजे

(१.) धर्मवाचकता,

(२.) प्रसिद्धता, व

(३.) वर्णलाघव

हे मुख्य गुण त्या संज्ञेंत अवश्य आणिले पाहिजेत. अति कोणतेच कामाचें नाही. अति धर्मवाचकतेनें दीर्घता उत्पन्न होते, अति प्रसिद्धतेनें ग्राम्यता उत्पन्न होते, अति वर्णलाघवानें क्लिष्टता उत्पन्न होते. जसें 'वर्तमानकालवाचक धातुसाधित विशेषण,' 'घोटाळा' व 'वीन' (स्वगेश). पहिली संज्ञा दीर्घतम आहे. दुसरी सर्व जातींतील आबाल वृद्धांच्या तोंडीं आहे. तिसरी संधिद्वारा क्लिष्ट झाली आहे (वि + ईन).

(४.) संज्ञा ज्यास दिली असेल तेवढ्याचीच मात्र ती ग्राहक असली पाहिजे.

(५.) ती मधुरवर्णात्मक असावी. अति वर्णमाधुर्यानें शिथिलता उत्पन्न होईल.

(६.) व्याकरणदृष्ट्या अगदी शुद्ध असावी. 'साम्यता' (साम्य).

(७.) तिजपासून भाववाचक नाम, विशेषण, क्रियाविशेषण व क्रियापदही करितां यावें. हें कधीं कधीं उपसर्ग, प्रत्यय, समासादिकानें साधावें.

(८.) सामान्य शब्द व संज्ञा इकडे ही दृष्टि असावी.

(९.) ज्यास संज्ञा देत आहों त्यापासून उत्पन्न होणाऱ्या सर्व संज्ञांत हिचा प्रयोग करित जावा. हें केवळ उपसर्गास उपसर्ग, व प्रत्ययास प्रत्यय देऊन करूं नये. मुख्य गुण जो धर्मवाचकता तिेकडे

सूक्ष्म दृष्टि ठेवावी. उ० *Centre, eccentric, concentric, eccentricity, central conic*. केन्द्र, केन्द्रच्युत, एक-केन्द्र अथवा समान केन्द्र, केन्द्रच्युति, केन्द्रल शङ्कु-च्छेद. अपकेन्द्र, अपकेन्द्रत्व उपयोगी नाहीत.

२. केवलसंज्ञा सादृश्यावरून देतात. सादृश्य अनेक प्रकारचे असते; क्रियासादृश्य, आकारसादृश्य इ०. उदाहरण- कर, करिन्. मनुष्य जसा आपल्या कराने दानादानादि क्रिया करितो तसा हत्तीही आपल्या कराने त्या क्रिया करितो. करिन् शब्द नियतवृत्तिक आहे. आकार सादृश्याचीं उदाहरणे गोमुखी (*Gnomon*), आकाशकटाह, खगोल, भूगोल इ०. *Focus, focal, confocal*, नाभि, सनाभ, एकनाभ अथवा समाननाभिक.

३. मूलशब्दाचा उच्चारणार्थ अपभ्रंश करावा. उ० कुरलरी, सेक्टर. उपसिद्धान्त व द्वैत्रिज्य ह्या संज्ञा एथें दिल्या आहेत.

नियम १, २, ३ एकाच्या अभावीं एक लागू समजावे.

*co-*भुजज्या, *co-*स्पर्श, *co-*छेद इ० सर्वथैव वर्ज करावे. ह्या प्रमाणाष्टकानें सर्व त्रिकोणमिति व्यापिली आहे. तेव्हां ह्या संज्ञा तर फार जपून निर्माण केल्या पाहिजेत. *Sine* ह्या शब्दास सूर्यसिद्धान्तांत 'भुजज्या' ही संज्ञा आहे. भुज = लम्ब, ज्या = त्रिज्या. भुजज्या = $\frac{\text{भुज}}{\text{ज्या}} = \text{sine}$. ह्यास्तव 'भुजज्या' संज्ञा, *Cosine* शब्दास 'कोटिज्या' संज्ञा देण्यास शिकवीत आहे. कोटि = भू = पाया, ज्या = त्रिज्या. कोटिज्या = $\frac{\text{कोटि}}{\text{ज्या}} = \text{Cosine}$. ह्या धोरणानें हे प्रमाणाष्टक निर्माण करितां येईल.

'पूर्व गाधिसुतेन सामि घटिता मुक्तानु मन्दाकिनी'

नैषधसर्ग २, श्लोक १०२.

हाही चरण एथें असू द्यावा.

कल्याण, सन १८७९.

ना. स. कुळकर्णी.

* हिला अर्थवत्संज्ञेतील धर्मवाचकता गुणखेरीज करून बाकीचे सर्वलागू आहेत.

अनुक्रमणिका.

	पृष्ठ.
आमुरव.	१.
भाग १.	
समापूर्णकक्षः	३.
समापूर्णकक्षावर प्रश्न.	२९.
भाग २.	
ऊनसंपूर्णकक्ष.	३४.
ऊनसंपूर्णकक्षावर प्रश्न.	७२.
भाग ३.	
विषमापूर्णकक्ष.	८०.
विषमापूर्णकक्षावर प्रश्न	१२२.
भाग ४.	
शङ्कुच्छेद.	१२९.
शङ्कुच्छेदावर प्रश्न.	१४१.
प्रश्नसमुदाय.	१४२.
दुसरी प्रत.	१६०.
परिशिष्ट.	१७७.

टीपा.

समापूर्णकक्षांतील सिद्धान्तांवर.	१८८.
ऊनसंपूर्णकक्षांतील सिद्धान्तांवर.	१९८.
विषमापूर्णकक्षांतील सिद्धान्तांवर.	२२७.
कठीण शब्दांचा कीश.	२४६.
वर्ण योजना.	२५५
आश्रयदात्यांचीं नांवे.	२५६
अवशिष्ट टीपा भाग ३ सिद्धान्त २० व २८.	२६१

३११
१

शङ्कुच्छेद.

आसुरव.

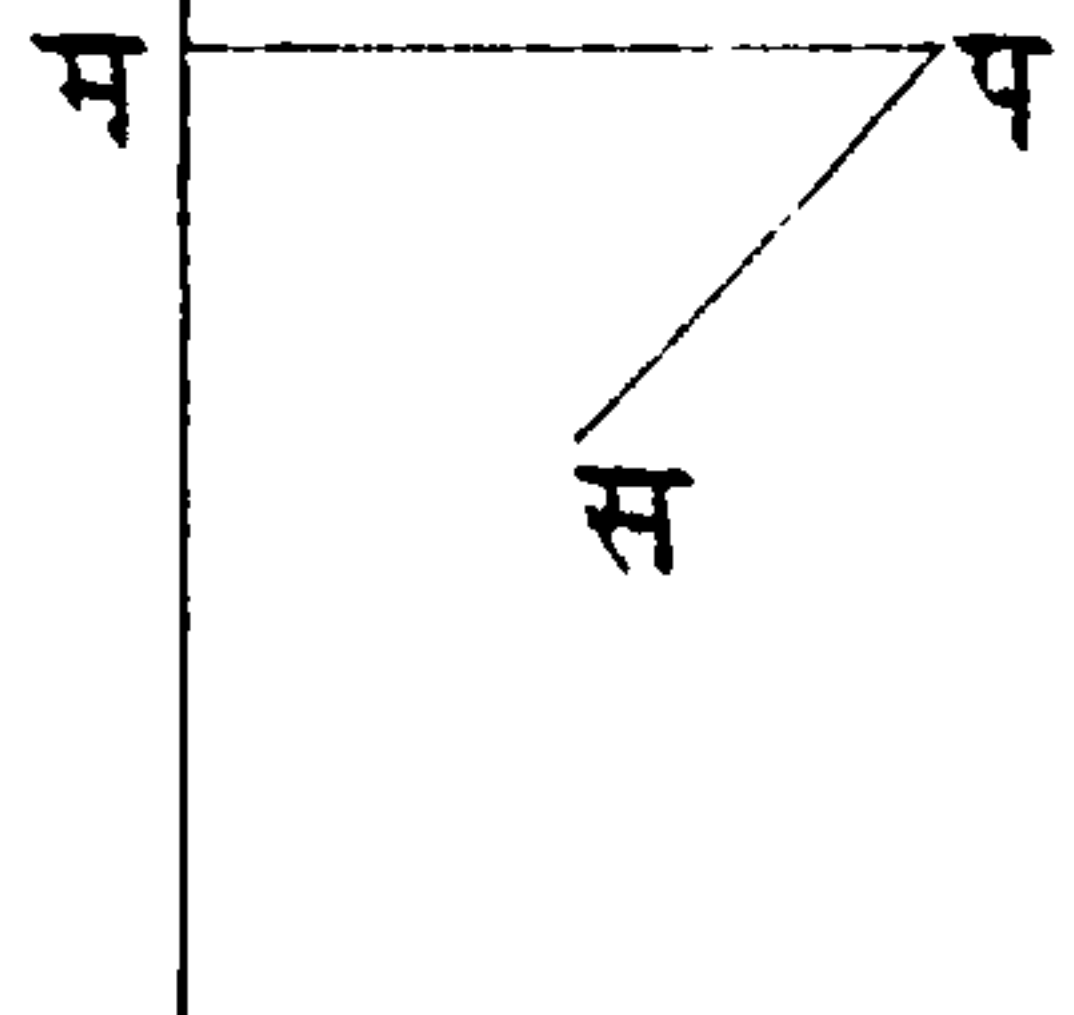
१. लक्षणा. जेव्हां एखादा बिन्दु अशा रीतीने फिरतो कीं, दिलेल्या स्थिर बिन्दूपासून त्याचें जें अन्तर असतें तें, दिलेल्या स्थिर रेघेपासून त्याच बिन्दूच्या अन्तराशीं सतत अभिन्न प्रमाणानें असतें, अशा वेळीं त्या चर बिन्दूनें वर्तविलेल्या वृत्तास शङ्कुच्छेद ह्मणतात.

स्थिर बिन्दूस नाभि व स्थिर रेघेस ज्ञापिका ह्मणतात.

जसें स ही नाभि, रव रव' [आहत]

रव

ही ज्ञापिका, व प हा एक बिन्दु असूंदे. प बिन्दूपासून ज्ञापिकेवर पम लम्बरूप काढ. सप सांध. आतां सप-चें पम-शीं नेहमीं अभिन्न प्रमाण कायम ठेवून जर प बिन्दु फिरेल व एखादें वृत्त वर्तवेल, तर तें एक शङ्कुच्छेद होईल.



(१.) जेव्हां नाभ्यन्तर ज्ञापिकान्तराबरोबर असतें ह्मणजे सप जेव्हां पम-बरोबर

रव'

असते तेव्हां पूर्वोक्त शङ्कुच्छेदास समापूर्णाकक्ष ह्मणतात.

(२.) जेव्हां नाभ्यन्तर ज्ञापिकान्तरापेक्षां कमी असतें ह्मणजे [सप जेव्हां पम-पेक्षां कमी असते] सप जेव्हां पम-शीं एकाङ्गापेक्षां कमी प्रमाणानें असते तेव्हां पूर्वोक्त शङ्कुच्छेदास ऊनसंपूर्णाकक्ष अथवा दीर्घवर्तुल ह्मणतात.

(३.) जेव्हां नाभ्यन्तर ज्ञापिकान्तरापेक्षां ज्यास्ती असतें ह्मणजे [सप जेव्हां पम-पेक्षां ज्यास्ती असते] सप जेव्हां पम-शीं एकाङ्गापेक्षां ज्यास्ती प्रमाणानें असते तेव्हां पूर्वोक्त शङ्कुच्छेदास विषमापूर्णाकक्ष ह्मणतात.

(२)

शङ्कुच्छेद.

२. ह्या वृत्तांस शङ्कुच्छेद नां व देण्याचें कारण असें कीं, जेव्हां शङ्कु पातळीनें कापाचा नेव्हां त्या कापिलेल्या छेदाची मर्यादा रूपा रेष पूर्वोक्त वृत्तांपैकीं कोणते तशीं एखादे वृत्त प्रायः होत असते.

वर सांगितलेल्या लक्षणांवरून शङ्कुच्छेदांच्या धर्माविषयीं विवेचन पहिल्यानें करूं; नंतर शङ्कु पातळीनें कोणत्या रीतीनें कापिला असतां छेदरूपा वृत्त समापूर्णाकक्ष, ऊनसंपूर्णाकक्ष, किंवा विषमापूर्णाकक्ष होईल हें सांगूं.

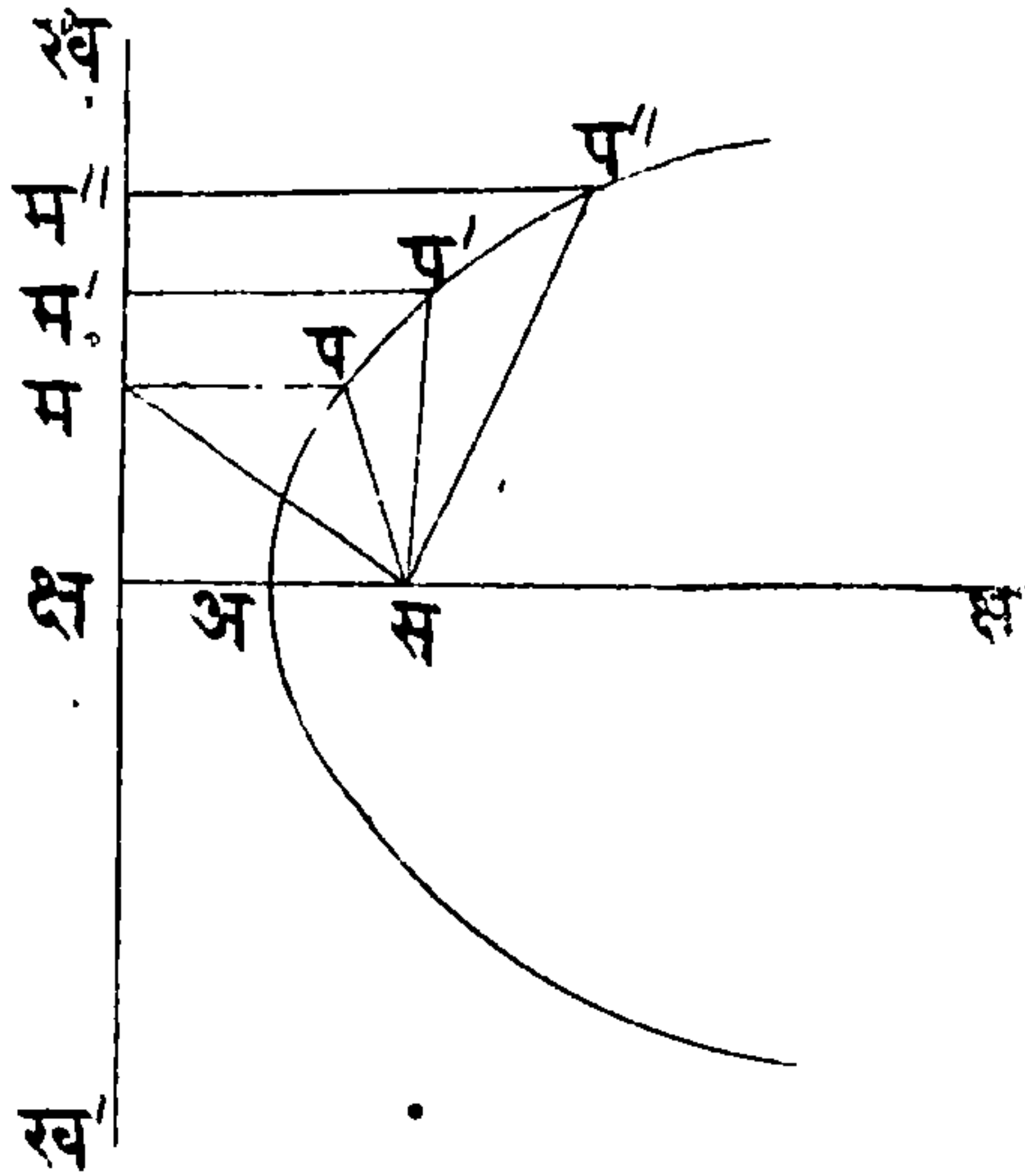
भाग १.

समापूर्णकक्ष.

[लक्षण. जेव्हां एखादा बिन्दु अशा रीतीने फिरतो कीं, दिलेल्या स्थिर बिन्दू पासून त्याचें जें अन्तर असतें तें, एखाद्या दिलेल्या स्थिर रेषे पासून त्याच बिन्दूच्या अन्तराशीं सतत अभिन्न परंतु एकाद्वाराशीं समान अशा प्रमाणानें असतें, अशा वेळीं त्या चर बिन्दूनें वर्तविलेल्या वृत्तास समापूर्णकक्ष म्हणतात.]

सिद्धान्त १.

३. समापूर्णकक्षाची नाभि व ज्ञापिका दिली असतां वृत्ताचरील पाहिजेत नितके बिन्दु काढावयाचे.



स नाभि व स्व स्व' [आहत] ज्ञापिका असूं दे.

ज्ञापिकेवर क्षसक्ष लम्बरूप काढ [यूक्लिड, १-१५-१]; व सक्ष-
चे अ बिन्दूंत दोन समान भाग कर [यूक्लिड, १-१०]. आतां
ज्याअर्थी अस = अक्ष,

∴ अ हा वृत्तावरील बिन्दु झाला. [लक्षण.]

अ बिन्दूस शिर ह्यणतात; व ज्या रेघेच्या सम्बन्धाने वृत्त स्पष्ट-पणे संमिताकार आहे त्या अक्ष रेघेस अक्ष ह्यणतात.

ज्ञापिकेवर पाहिजे तेथे म बिन्दु घे. सम सांध व ज्ञापिकेवर मप लम्बरूप काढ. [यूक्लिड, १.११.]

स नाभीजवळ मसप कोन समप कोनाबरोबर कर; - [यूक्लिड, १.२३] आतां, ज्या अर्थी

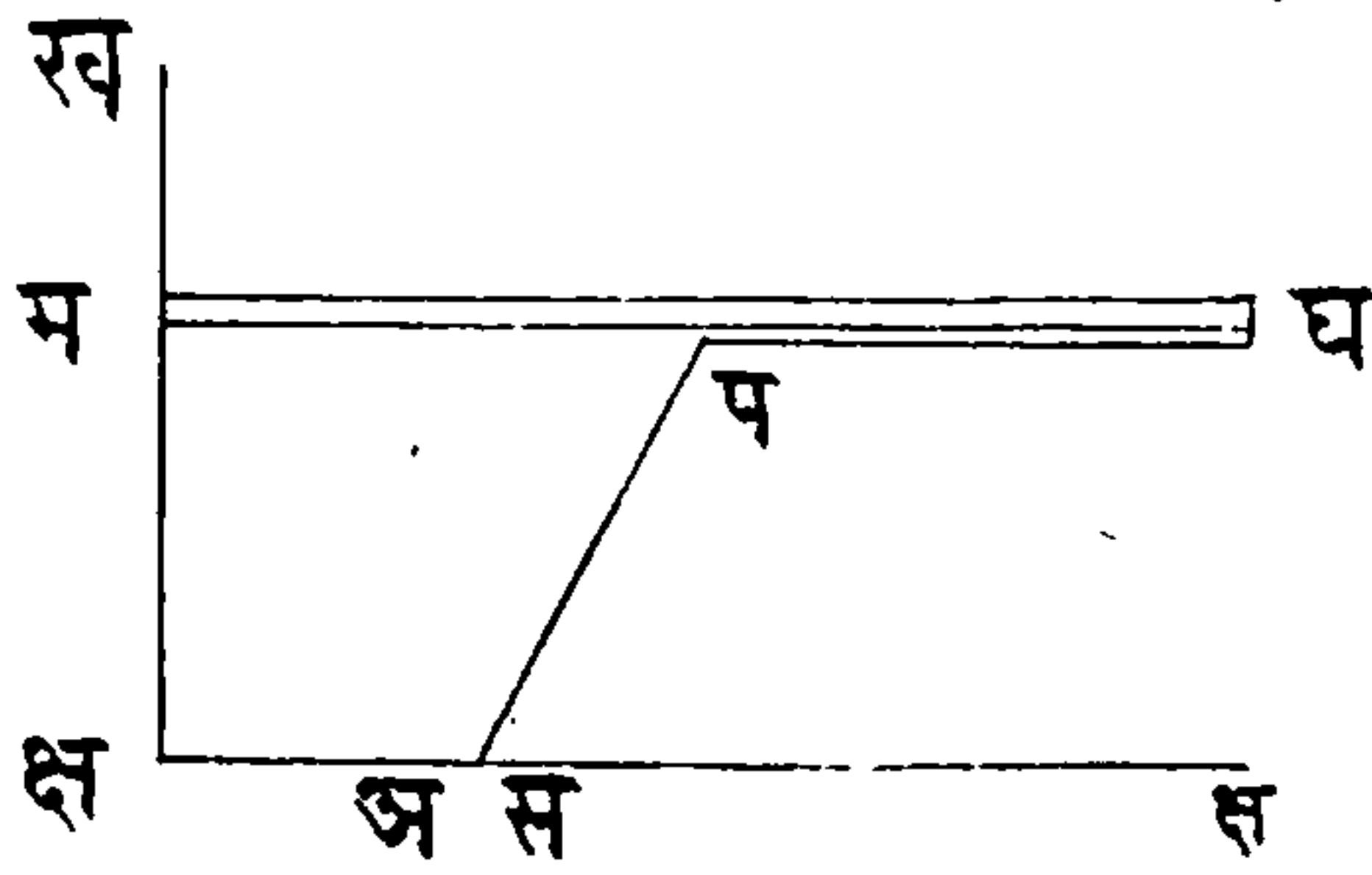
सप = पम, [यूक्लिड, १.६.]

∴ प हा वृत्तावरील दुसरा एक बिन्दु झाला. [लक्षण.]

त्या प्रमाणेच ज्ञापिकेवर म' [आहत], म'' [द्विराहत] असे पाहिजेत तितके बिन्दु घेतले असतां आपणास वृत्तावरील प', प'' ह्यां सासवे बिन्दु यथेच्छ उपलब्ध होतील. अ, प, प', प'' ह्या सर्व बिन्दूंतून जाणांरी रेघ समापूर्णकक्ष होईल, व त्यांची नाभि स व ज्ञापिका रव रव' होईल.

उपसिद्धान्त १. जों जों म बिन्दु क्ष बिन्दूपासून दूर घ्यावा तों तों सम रेघ व समप, मसप कोन सतत वाढत जातात; ह्या कारणास्तव सप व पम ह्या रेघा ही सतत वाढत जातील हें अर्थातच झालें. यास्तव, क्षम व मप बरोबरच वाढत गेल्यामुळे, वृत्त ही त्यांजबरोबरच अक्ष व ज्ञापिका ह्या दोहीं पासून परावृत्त होत जातें. समप कोन काटकोनापेक्षां कधीं ही ज्यास्त होणें नाहीं ह्यणून सप व मप रेघा एकमेकीस नेहमीं मिळाल्याच पाहिजेत; ह्यास्तव समापूर्णकक्ष अक्षाचे दोहीं बाजूंस किती अन्तरावर पसरले याचा अन्त नाहीं हें स्पष्टच आहे.

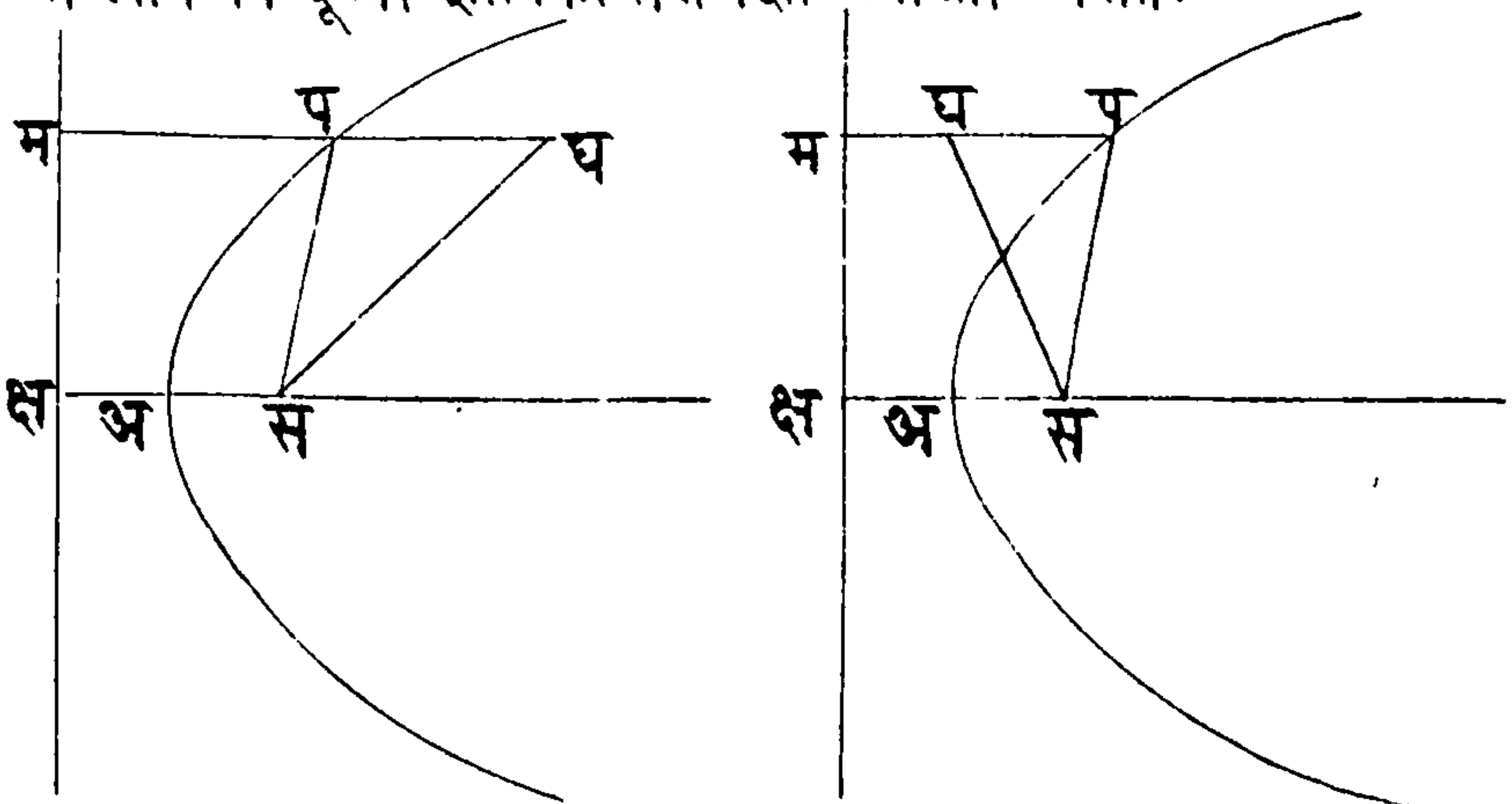
उपसिद्धान्त २. व्यवहारार्थ समापूर्णकक्ष काढणें झाल्यास खालीं लिहिलेल्या रीतीनें काढावें.



स ही नाभि व स्वक्ष ही ज्ञापिका असूं दे. घम एक ताठ गज घे व त्याच्याच लांबीची एक दोरी घेऊन तिचें एक टोंक गजाचे घ स्थानास, व दुसरें टोंक नाभीस घट्ट बांध. गजाचें म टोंक ज्ञापिकेवर सरकतें ठेव व त्या गजाला अक्षाशीं सदा समान्तर असूं दे. आतां हें स्पष्ट आहे कीं दोरी लेखणीनें प बिन्दू जवळ ताणून धरिली व त्या प बिन्दूला गजाशीं संपृक्त ठेविलें असतां तो समापूर्णकक्ष वर्तविल कारण सप रेघ पम रेघेबरोबर नेहमीं असणार आहे.

सिद्धान्त २.

४. समापूर्णकक्षाच्या आंतील बिन्दूचें नाभी पासून जें अन्तर असतें तें त्याच बिन्दूच्या ज्ञापिकान्तरापेक्षां कमी असतें; व समापूर्णकक्षाच्या बाहेरील बिन्दूचें नाभी पासून जें अन्तर असतें तें त्याच बिन्दूच्या ज्ञापिकान्तरापेक्षां ज्यास्ती असतें.



(६)

शङ्कुच्छेद.

(१.) समापूर्णाकक्षाच्या आंत घ बिन्दु असूंदे.

ज्ञापिकेवर घम लम्ब काढ [यूक्लिड, १.१२.], व त्याला समापूर्णाकक्षास प बिन्दूंत मिळूंदे; सप, सघ सांध; आतां,
ज्या अर्थी सप = पम, [सि. १.]

∴ सप + पघ = घम.

परंतु सप + पघ > सघ, [यूक्लिड, १.२०.]

∴ घम > सघ.

(२.) समापूर्णाकक्षाच्या बाहेर घ बिन्दु असूंदे.

ज्ञापिकेवर मघ लम्ब काढ [यूक्लिड, १.१२], व त्याला वाढवून समापूर्णाकक्षास प बिन्दूंत मिळूंदे; सप, सघ सांध; आतां,
ज्या अर्थी सघ + घप > सप [यूक्लिड, १.२०.]

व सप = पम [सि. १.]

∴ सघ + घप > पम.

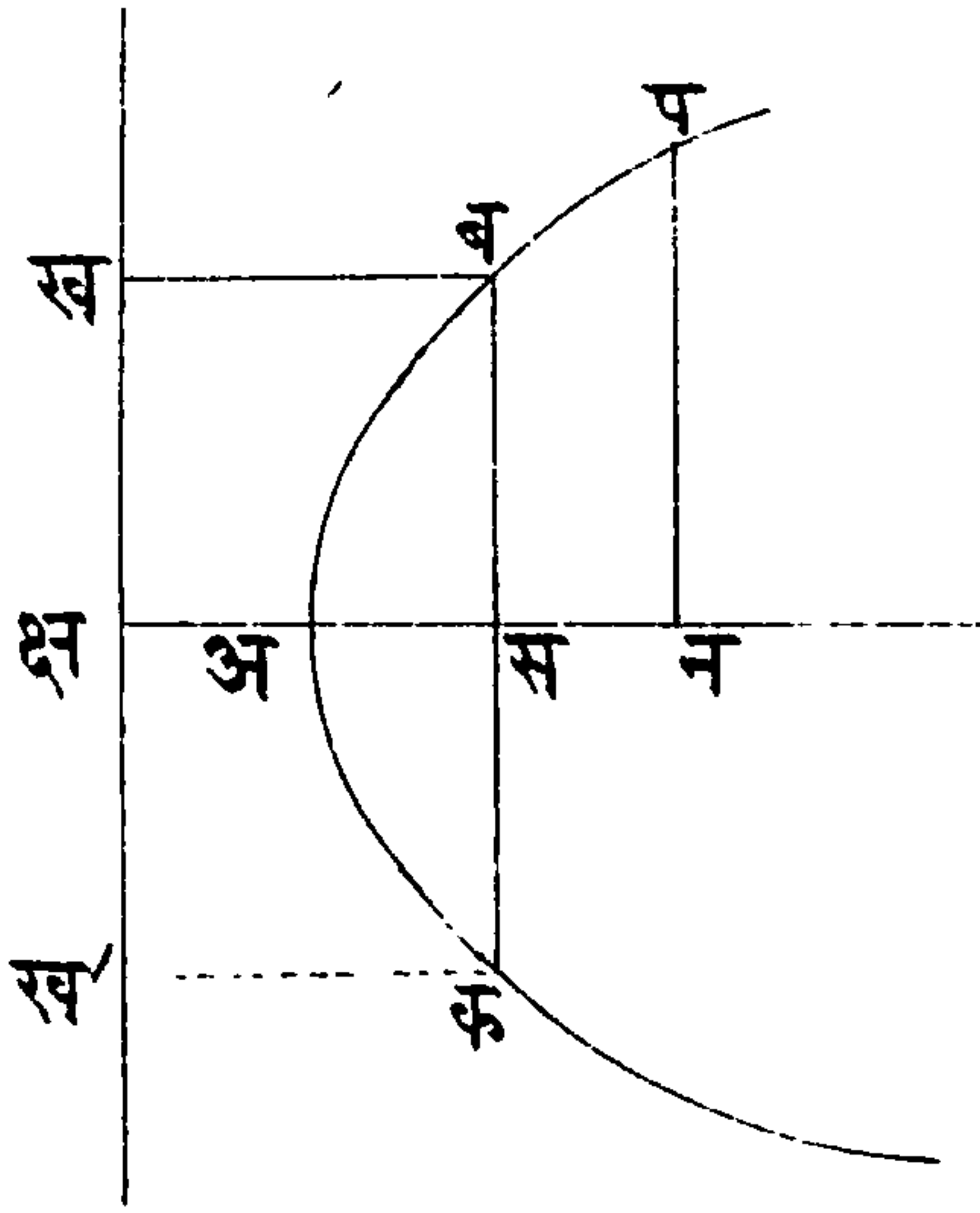
∴ सघ > घम.

उपसिद्धान्त. प्रत्यनुमानानें, जेव्हां एखाद्या बिन्दूचें नास्यन्तर त्याच बिन्दूच्या ज्ञापिकान्तरापेक्षां कमी अथवा ज्यास्ती असेल तेव्हां तो बिन्दु समापूर्णाकक्षाच्या आंत अथवा बाहेर असेल.

५. लक्षण- वृत्तावरील प बिन्दूपासून अक्षावर लम्बस्वरूप काढिलेल्या पन रेघेस प बिन्दूची निर्णायिका म्हणतात, व अन रेघेस त्याच बिन्दूचा निर्णायक म्हणतात. दोहों बाजूंनी वृत्तास मिळणारी व नाभींतून काढिलेली जी दुपट निर्णायिका बक तिला ऊर्ध्वमात्रा म्हणतात. (सि. ३. आकृति पहा.)

सिद्धान्त ३.

बक ऊर्ध्वमात्रा = ४ अस.



ज्ञापिकेवर बरख लम्ब काढ.

आतां सब = बरख = सक्ष = २अस,

∴ बक = ४अस.

६. लक्षणा. जर समापूर्णाकक्षावर प बिन्दूच्या जवळ एक प' बिन्दु घेतला व पप' सांधले तर प'-स प बिन्दूच्या इतकें जवळ ने- लें कीं. तीं (प') तन्मयदशा पावतो इतक्यांत वाढविलेल्या पप' रेघेस समापूर्णाकक्षाची प- बिन्दुस्थ स्पृक् ह्मणतात. (सि. ४. आकृति पहा.)

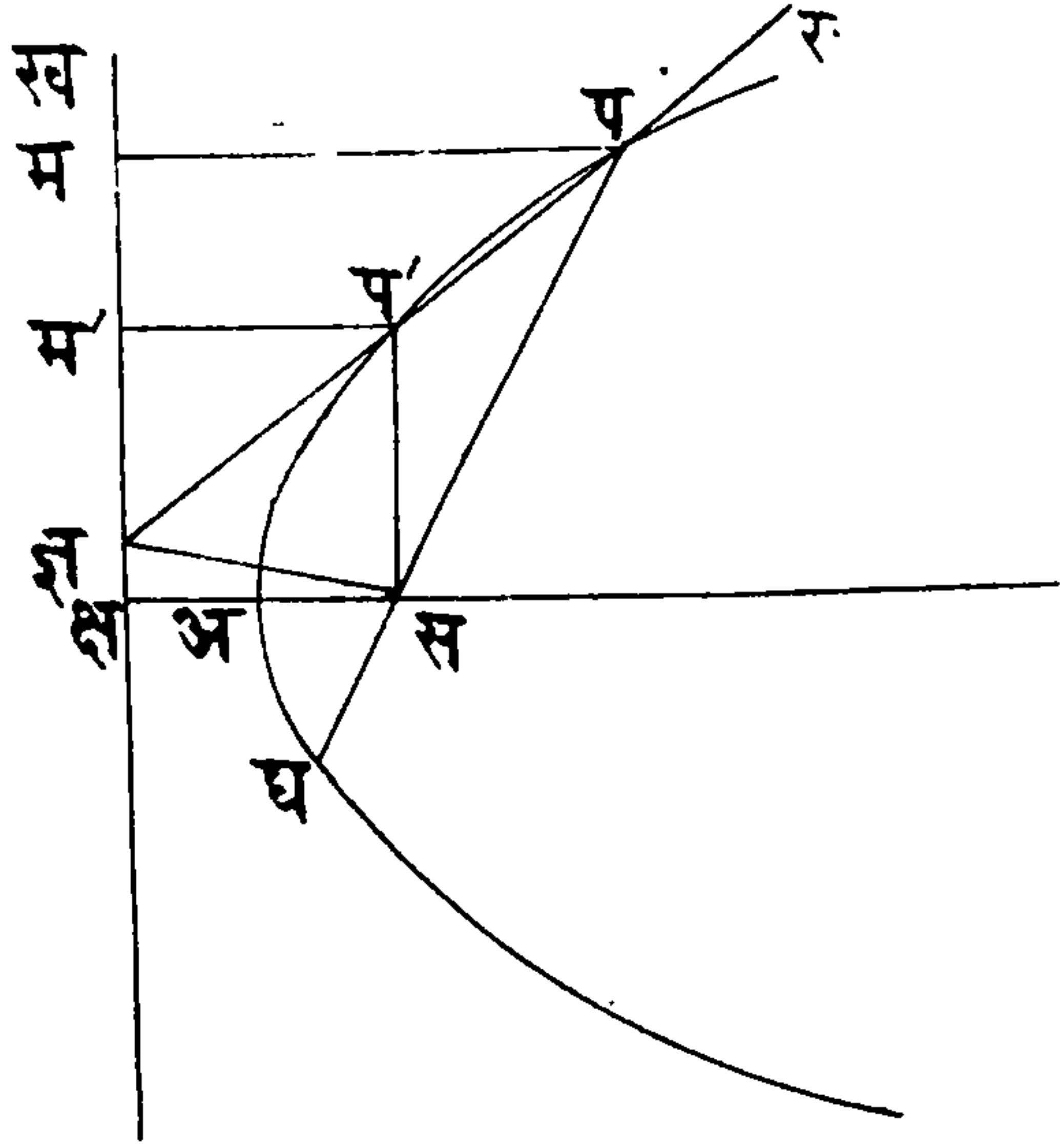
सिद्धान्त. ४.

जर समापूर्णाकक्षाची प- बिन्दुस्थ स्पृक् ज्ञापिकेस ज्ञ बि- न्दूंत छेदील; तर सज्ञ सप- वर लम्बरूपानें पडेल.

समापूर्णाकक्षावर प बिन्दूजवळ एक प' बिन्दु असूं दे.

(८)

शङ्कुच्छेद.



पप' ज्या काढ; तिला वाढीव व क्षापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळूंदे; सज्ञ सांध.

क्षापिकेवर पम, प'म' लम्बकाढ [यूक्लिड, १.१२]; सप, सप' सांध; पस वाढीव व तिला समापूर्णकक्षास घ बिन्दूंत - मिळूंदे.

आतां, ज्या अर्थी ज्ञमप, ज्ञम'प' त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ ज्ञप : ज्ञप' :: मप : म'प', [यूक्लिड, ६.४.]

:: सप : सप', [यूक्लिड, ५.७.]

∴ प'सघ कोनाचे सज्ञ दोन समान भाग करिते.

(यूक्लिड, ६ सि. अ.)

आतां प' जेव्हां प बिन्दूच्या अमर्याद जवळ असतो, व पप' प-बिन्दुस्थ स्पृक हीते, तेव्हां पसप' कोन अमर्याद लहान होतो व घसप' कोन दोन काटकोनांच्या जवळ जवळ येतो यास्तव प' सज्ञ कोन जो हल्लीं प'सघ कोनाचा अर्धा भाग आहे, तो शे-वटीं काटकोन होतो.

(१०)

शङ्कुच्छेद.

∴ ज्ञस = ज्ञम.

आतां ज्ञपस व ज्ञपम ह्या त्रिकोणांन

∴ ज्ञप, पंस = ज्ञप, पम, अनुक्रमे, [सि. १.]

व ज्ञस = ज्ञम,

∴ सपज्ञकोन = मपज्ञकोन; [यूक्लिड, १.८.]

ह्यणजे पज्ञ सपम कोनाचे दोन समान भाग करिते.

उपसि. १. जर ज्ञप र बिन्दूपर्यंत वाढविली, तर सपर कोन = मपर कोन.

उपसि. २. अ-शिरस्थ स्पृक अक्षावर लम्बरूपाने पडते हे स्पष्टच आहे.

सिद्धान्त ६.

८. सनाभ ज्येच्या अन्त्यस्थ स्पृशा ज्ञापिकेन एकमेकीस लम्बरूपाने छेदितान. [सि. ५. आकृ. पहा.]

पसघ ही सनाभ ज्या असू दे, व प-बिन्दुस्थ स्पृशीला ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळू दे.

सज्ञ सांध; आतां

ज्ञसप कोन काटकोन आहे, (सि. ४)

∴ ज्ञसघ कोन ही काटकोन आहे,

∴ ज्ञघ ही घ-बिन्दुस्थ स्पृक झाली, (सि. ४. उपसि.)

ह्यणजे पसघ ह्या सनाभ ज्येच्या अन्त्यस्थ स्पृशा एकमेकीस ज्ञापिकेन छेदितान.

पुनः, ज्ञापिकेवर पम, घर्म लम्बकाढ. [यूक्लिड, १.१२]; आतां

ज्या अर्थी मप, पज्ञ = सप, पज्ञ, अनुक्रमे,

व मपज्ञकोन = सपज्ञकोन, [सि. ५.]

∴ मज्ञपकोन = सज्ञपकोन, [यूक्लिड, १.४.]

∴ सज्ञपकोन सज्ञम कोनाचा अर्धा भाग आहे.

वा.ग.ज्यो
५५२

समापूर्णकक्ष.

(११)

ह्याप्रमाणेच सज्ञघ कोन सज्ञम कोनाचा अर्द्ध भाग आहे,

$$\therefore \text{पज्ञघ कोन} = \frac{1}{2} (\text{सज्ञम} + \text{सज्ञम}).$$

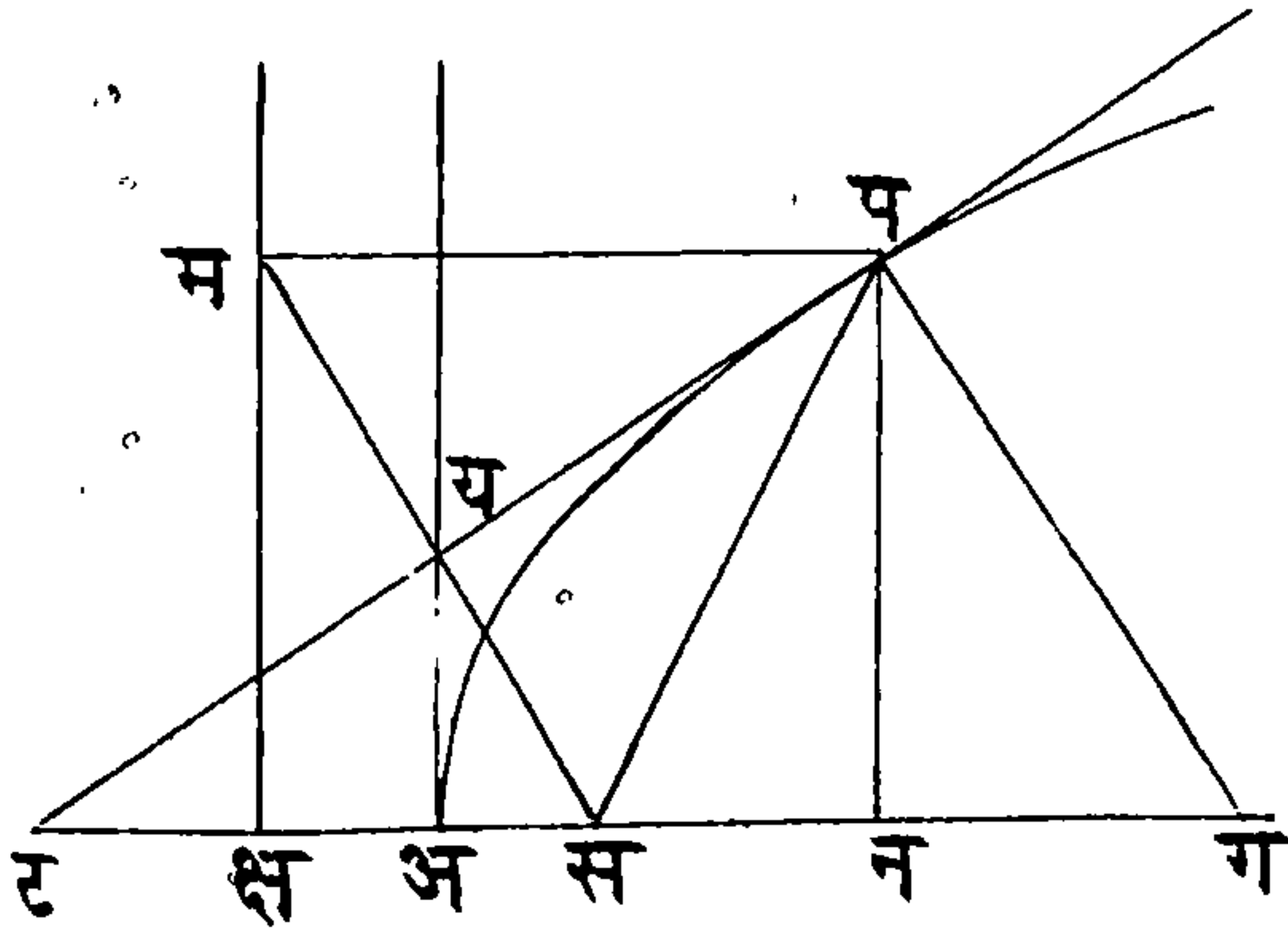
$$\text{परंतु सज्ञम} + \text{सज्ञम} = 2 \text{ काटकोन},$$

$$\therefore \text{पज्ञघ कोन काटकोन आहे},$$

ह्याप्रमाणे सनाभ ज्येच्या अन्त्यस्थ स्पृशा ज्ञापिकेन एकमेकीस छेदितात त्या लम्बरूपाने छेदितात.

सिद्धान्त ७.

१. जर समापूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृकू अक्षास वाढविल्यावर ट बिन्दून मिळेल, व पन ही प-बिन्दूची निर्णायिका असेल, तर नट = २ अन.



सप सांध, व ज्ञापिकेवर पम लम्ब काढ. [यूक्लिड, १.१२.];

आनां

$$\therefore \text{सपट कोन} = \text{मपट कोन} = \text{सटप कोन},$$

[सि. ५. व व्युत्क्रमकोन]

$$\therefore \text{सट} = \text{सप}. \text{ [यूक्लिड, १.६.]}$$

$$\text{परंतु सप} = \text{पम} = \text{क्षन}, \text{ [सि. १. व समान्तरता.]}$$

$$\therefore \text{सट} = \text{क्षन}.$$

$$\text{परंतु अस} = \text{अक्ष}, \text{ [लक्ष.]}$$

(१२)

शङ्कुच्छेद.

∴ अवशिष्ट अट = अवशिष्ट अन,

∴ नट = २ अन.

लक्षण- नट रेघेस उपस्पृक्क ह्यणतात.

१०. लक्षण- पट- वर लम्बरूप काढिलेल्या पग रेघेस प-
बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब ह्यणतात, व नग रेघेस उपसंपर्कलम्ब
ह्यणतात.

सिद्धान्त ८.

जर समापूर्णकक्षाचा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब अक्षास ग बिन्दूत
मिळेल, तर नग = २ अस. [सि. ७ आकृ. पहा.]

ज्या अर्धी सपग कोन = सपट कोनाचा प्रपूरक,

व सगप कोन = सटप कोनाचा प्रपूरक,

आणखी सपट कोन ही = सटप कोन, (सि. ७)

∴ सपग कोन = सगप कोन,

∴ सग = सप. [यूक्लिड, १.६.]

परंतु सप = पम = क्षन, [सि. १. व समान्तरता]

∴ सग = क्षन.

सन हा उभय साधारण भाग काढून घेतल्यावर,

अवशिष्ट नग = सक्ष = २ अस.

सिद्धान्त ९.

११. जर समापूर्णकक्षाच्या प-बिन्दूची निर्णायिका पन असे-
ल, तर पन^३ = ४ अस. अन. [सि. ७ आकृ. पहा.]

ज्या अर्धी टपग कोन कारकोन [१०. लक्षण.] आहे, व पन
टग-वर लम्बरूपानें पडते,

∴ पन ही टन व नग ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद आहे;
ह्यणजे पन^३ = टन. नग. (यूक्लिड, ६. ८ उपसि.)

परंतु टन = २ अन, (सि. ७.)

व नग = २ अस, (सि. ८.)

∴ पन = ४ अस. अन.

सिद्धान्त १०.

१२. जर प-बिन्दुस्थ स्पृक् शिरस्थ स्पृशेस च बिन्दूंत छेदील, तर सय पट-वर लम्बरूपानें पडेल व तिचे दोन समान भाग करील, व सअ व सप ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद होईल. [सि. ७ आ-क.पहा.]

अक्षावर पन लम्ब काढ; आतां

ज्या अर्थी अय पन-शीं समान्तर आहे

∴ टय : यप :: टअ : अन. [यूक्लिड, ६.२.]

परंतु अट = अन, (सि. ७.)

∴ टय = पय; [प्रमाणसाम्य]

यास्तव सय, यप = सय, यट, अनुक्रमे

व सप = सट, (सि. ७.)

∴ सयपकोन = सयटकोन, [यूक्लिड, १.८.]

∴ सय पट-वर लम्बरूपानें पडते.

पुनः, ज्या अर्थी टयस कोन काटकोन आहे, व सअ सट-वर लम्बरूपानें पडते,

∴ सय ही सट व सअ ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद झाली, ह्यणजे सय = सट. सअ. (यूक्लिड, ६.८ उपसि.)

परंतु सट = सप, (सि. ७.)

∴ सय = सप. सअ.

उपसि० - जर शापिकेवर पम लम्ब काढिला व सय सांधले, तर

ज्या अर्थी सप, पय = सप, पय, अनुक्रमे, [लक्ष.]

क्षास घ व घ बिन्दूंत मिळूं दे.

ओघ, ओर्घ सांध; आतां, ह्या इष्ट स्पृशा होतील.

सघ, सर्घ सांध; आतां

∴ ओघ, घस = ओघ, घम, अनुक्रमे, [सि. १.]

व ओस = ओम, [त्रिज्या.]

∴ ओघस कोन = ओघम कोन, [यूक्लिड, १.८.]

∴ ओघ ही घ-बिन्दुस्थ स्पृक झाली. (सि. ५.)

ह्याप्रमाणेच ओर्घ ही घ-बिन्दुस्थ स्पृक होईल.

सिद्धान्त १२.

१४. जर ओ बिन्दूपासून ओघ व ओर्घ हे स्पृग्द्वय समापूर्णकक्षास काढिले, तर ओसघ व ओसर्घ त्रिकोण सरूप होतील, व ओस ही सघ व सर्घ ह्यांजमधील अनुपातमध्यमपद होईल. [सि. ११ आकृ. पहा.]

सम सांध, व सम-ला ओघ-स, य बिन्दूंत लम्बरूपाने (सि. १०. उपसि.) छेदूं दे. आतां

ज्या अर्थां सघओ कोन = मघओ कोन (सि. ५.)

व मघओ कोन = समर्म कोन,

कारण हा प्रत्येक कोन घमय कोनाचा प्रपूरक आहे,

∴ सघओ कोन = समर्म कोन.

परंतु समर्म हा परिघस्थ कोन सओम ह्या केन्द्रस्थ कोनाच्या अर्द्धा बरोबर आहे [यूक्लिड, ३. २०.], यास्तव तो सओर्घ-कोना बरोबर आहे;

∴ सघओ कोन = सओर्घ कोन,

ह्याप्रमाणेच सओघकोन = सर्घओ कोन,

∴ अवशिष्ट ओसघ कोन = अवशिष्ट ओसर्घकोन; [यूक्लिड, १. ३२.]

यास्तव ओसघ त्रिकोण ओसर्घ त्रिकोणाशीं सरूप आहे.

(१४)

शङ्कुच्छेद.

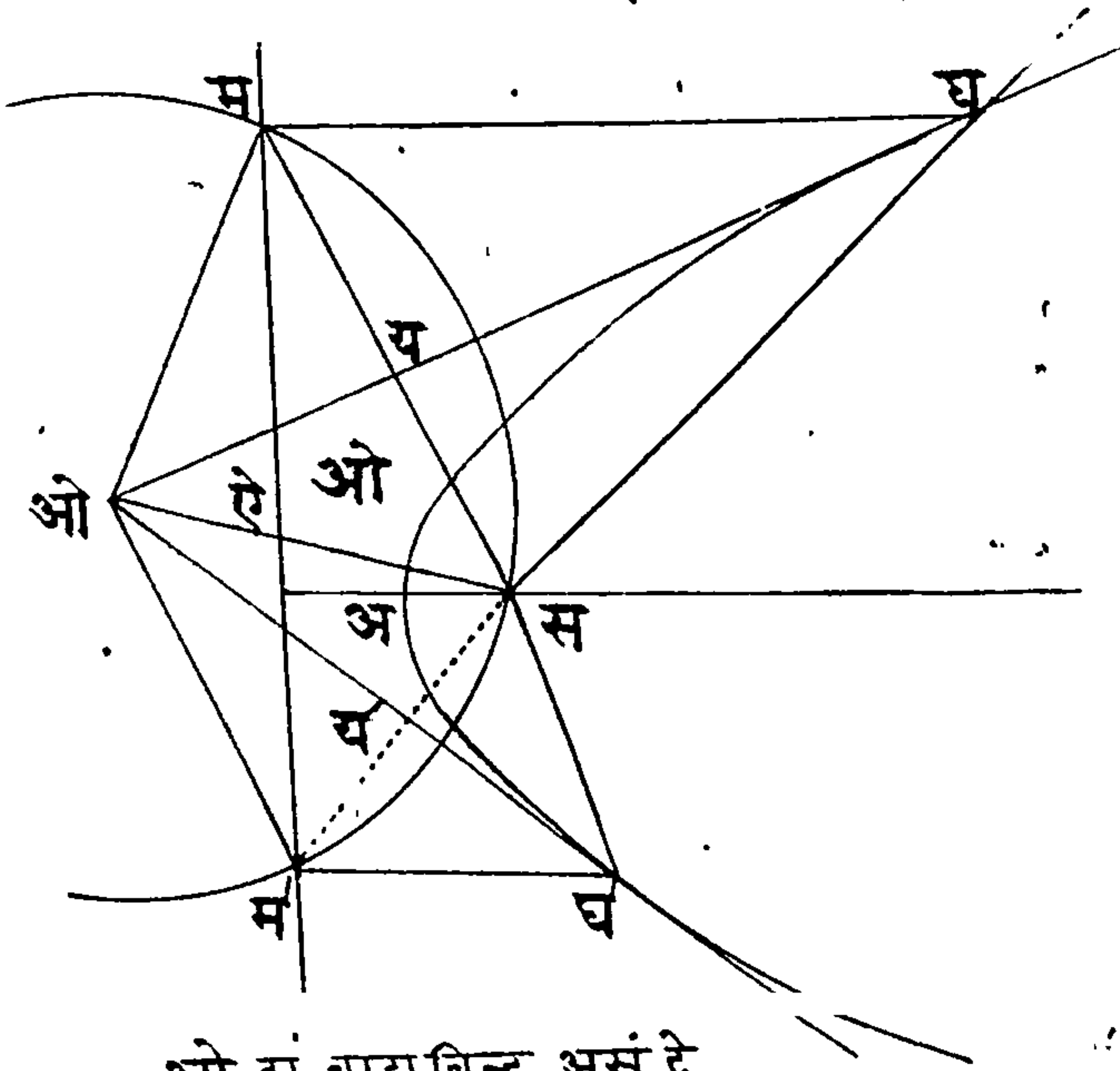
व सपद्यकोन = मपद्यकोन, (सि. ५.)

∴ सयपकोन = मयपकोन, [यूक्लिड, १.४.]

∴ सय व यम ह्या एकाच सरळ रेषेत आहेत. [यू-
क्लिड, १.१४.]

सिद्धान्त ११.

१३. एका बाह्य बिन्दूपासून समापूर्णकक्षास स्पृग्द्वय काढावयाचे.



ओ हां बाह्य बिन्दु असूं दे.

ओस सांध; ओ केन्द्र व ओस त्रिज्या कल्पून एक वर्तुळ काढ, व त्याला ज्ञापिकेस म, म बिन्दूंत छेदूं दे; ज्ञापिकेच्या कोणत्याही बाजूस जरी ओ बिन्दु असेल तथापि वर्तुळ ज्ञापिकेस नेहमी छेदीलच कारण ओ हा नाभीपेक्षां ज्ञापिकेच्या अधिक जवळ असतो. (सि. २)

मघ व मघ अक्षाशीं समान्तर काढ, व त्यांनां समापूर्णक-

क्षास घ व घ बिन्दूत मिळूंदे.

ओघ, ओर्घ सांध; आतां, ह्या इष्ट स्पृशा होतील.

सघ, सर्घ सांध; आतां

∴ ओघ, घस = ओघ, घम, अनुक्रमे, [सि. १०.]

व ओस = ओम, [त्रिज्या.]

∴ ओघस कोन = ओघम कोन, [यूक्लिड, १.८.]

∴ ओघ ही घ-बिन्दुस्थ स्पृक झाली. (सि. ५.)

ह्याप्रमाणेच ओर्घ ही घ-बिन्दुस्थ स्पृक होईल.

सिद्धान्त १२.

१४. जर ओ बिन्दूपासून ओघ व ओर्घ हे स्पृग्द्वय समापूर्णकक्षास काढिले, तर ओसघ व ओसर्घ त्रिकोण सरूप होतील, व ओस ही सघ व सर्घ ह्यांजमधील अनुपातमध्यमपद होईल. [सि. ११ आकृ. पहा.]

सम सांध व सम-ला ओघ-स य बिन्दूत लम्बरूपाने (सि. १०. उपसि.) छेदूंदे. आतां

ज्या अर्थी सघओ कोन = मघओ कोन (सि. ५.)

व मघओ कोन = समर्म कोन,

कारण हा प्रत्येक कोन घमय कोनाचा प्रपूरक आहे,

∴ सघओ कोन = समर्म कोन.

परंतु समर्म हा परिघस्थ कोन सओम ह्या केन्द्रस्थ कोनाच्या अर्द्धी बरोबर आहे [यूक्लिड, ३. २०.], यास्तव तो सओर्घ-कोना बरोबर आहे;

∴ सघओ कोन = सओर्घ कोन,

ह्याप्रमाणेच सओघकोन = सर्घओ कोन,

∴ अवशिष्ट ओसघ कोन = अवशिष्ट ओसर्घकोन; [यूक्लिड, १. ३२.]

यास्तव ओसघ त्रिकोण ओसर्घ त्रिकोणाशीं सरूप आहे.

(१८)

शङ्कुच्छेद.

रपरं स्पृक काठ व तिला ओघ, ओघ' ह्या स्पृग्द्वयासर, रं
बिन्दूत मिळूं दे.

पघ सांध; रउ अक्षाशीं समान्तर काठ, व तिला पघ-स उ
बिन्दूत मिळूं दे; आतां अन्तिमसिद्धान्तावरून,

पउ = उघ. [सि. १३.]

आणि, ज्या कारणास्तव रउ ओप-शीं समान्तर आहं;

∴ ओर : रघ :: पउ : उघ. [यूक्लिड, ६.२.]

परंतु पउ = उघ, [सि. १३.]

∴ ओर = रघ,

ह्याप्रमाणेच ओर' = रघ'

∴ ओर : रघ :: ओर' : रघ', [प्रमाणसाम्य.]

∴ रर' घघ-शीं समान्तर झाली. [यूक्लिड, ६.२.]

पुनः, ज्या कारणास्तव पर घघ-शीं समान्तर आहे,

∴ ओप : पव :: ओर : रघ. [यूक्लिड, ६.२.]

परंतु ओर = रघ,

∴ ओप = पव.

उपसि. जर समापूर्णकक्षांत पाहिजेत तितक्या समान्तर ज्या
काढिल्या तर त्या सर्व ज्यांचे मध्यबिन्दु अक्षाशीं समान्तर असणा-
या रेघेंत येतील, व ही रेघ अन्यतम ज्येशीं समान्तर काढिलेली स्पृक
समापूर्णकक्षास ज्या बिन्दूत स्पर्श करिते त्या बिन्दूतून जाईल; हे
ह्या सिद्धान्तावरून स्पष्ट आहे.

लक्षणा. समापूर्णकक्षाच्या प बिन्दूपासून अक्षाशीं समान्त-
र काढिलेल्या पव रेघेस व्यास ह्मणतात.

प बिन्दूस पव व्यासाचे शिर ह्मणतात, व प-बिन्दुस्थ स्पृशेस
शिरस्थ स्पृक ह्मणतात.

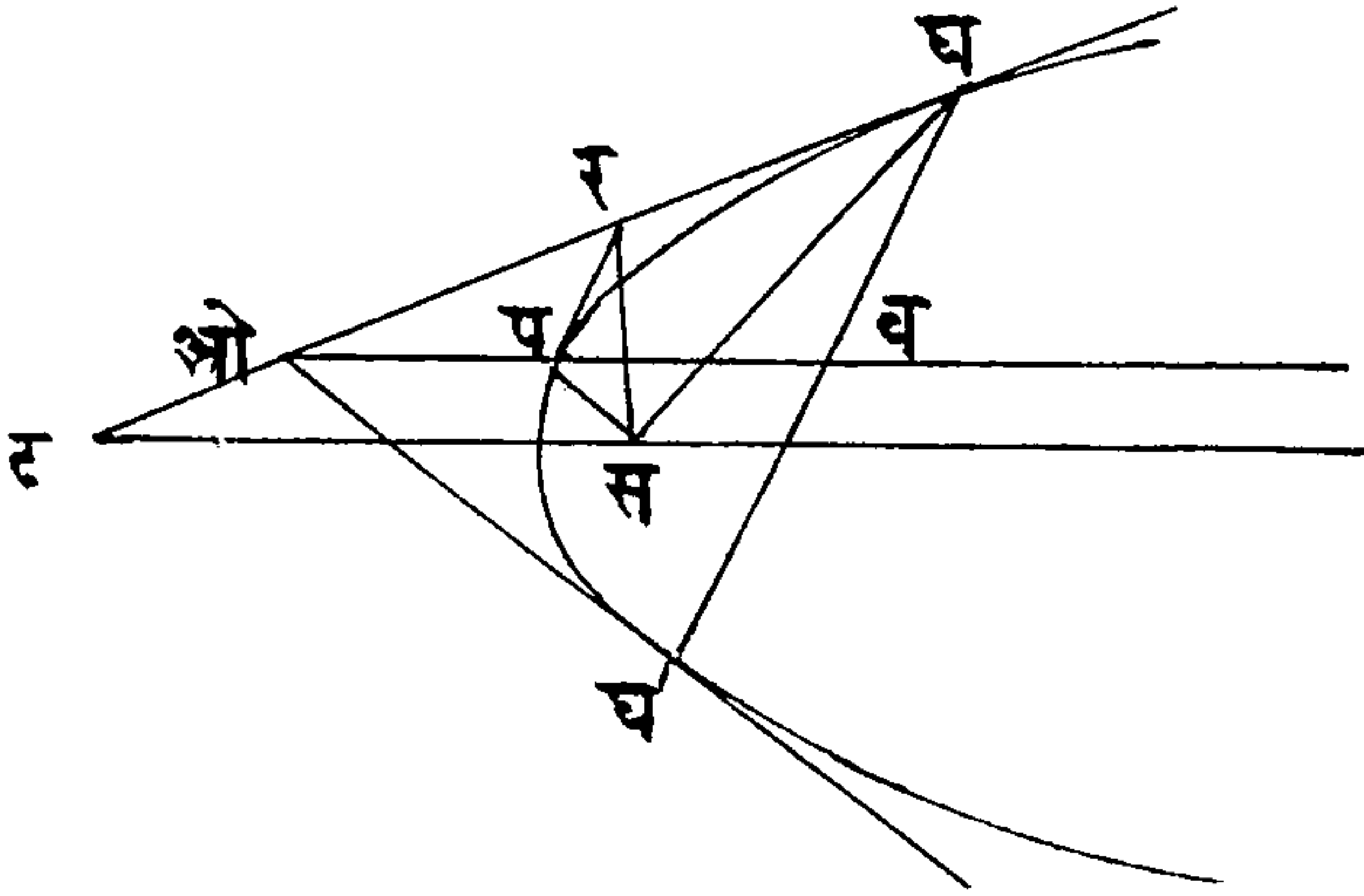
हा व्यास शिरस्थ स्पृशेशीं समान्तर असणाऱ्या सर्व ज्यांचे दो-
न समान भाग करितो, व ज्येच्या अन्यस्थ स्पृशा एकमेकीस तज्ज्या-

रुद्रूप व्यासांत कापतील हें अर्थात्च झालें.

लक्षणा. वृत्तावरील घ बिन्दूपासून प-बिन्दुस्थ स्पृशीशीं समान्तर काढिलेल्या घव रेघेस पव व्यासाची निर्णायिका ह्यणतात.

सिद्धान्त १५.

१७°. जर घव ही पव व्यासाची निर्णायिका असेल, तर
घव^२ = ४ सप.पव.



घव वाढीव, वतिला समापूर्णकक्षास घ बिन्दूंत मिळूं दे,
घओ, घओ ह्या स्पृशा काढ व त्यांना वाढविलेल्या वप-स ओ
बिन्दूंत मिळूं दे. (सि. १४.)

आणखी, प-बिन्दुस्थ स्पृशेला ओघ-स र बिन्दूंत मिळूं
दे; सप, सर व सघ सांध. आतां ज्या अर्थी र बिन्दूपासून
रप व रघ ह्या स्पृशा समापूर्णकक्षास काढिल्या आहेत त्या अर्थी
रपस त्रिकोण रसघ त्रिकोणाशीं सरूप आहे, (सि. १२.)

∴ सरपकोन = सघरकोन.

(२०)

शङ्कुच्छेद.

परंतु सघरकोन = सरघकोन, (सि. ७.)
= पओरकोन, [यूक्लिड, १. २९.]

∴ सरपकोन = पओरकोन,

व सपरकोन = ओपरकोन, (सि. ५. उपसि. १.)

∴ अवशिष्ट रसपकोन = अवशिष्ट ओरपकोन, [यूक्लिड, १. २२.]

∴ सपरत्रिकोण पओर त्रिकोणाशीं सरूप आहे,

∴ सपः परः :: परः पओ, [यूक्लिड, ६. ४.]

∴ परै = सप. पओ, [यूक्लिड, ६. १७.]
= सप. पव. (सि. १४.)

पुनः ज्याकारणास्तव घव पर-शीं समान्तर आहे, [सि. १४.]

∴ घवः परः :: ओवः ओप. [यूक्लिड, ६. २.]

परंतु ओव = २ ओप, (सि. १४.)

∴ घव = २ पर,

∴ घवै = ४ परै,

= ४ सप. पव.

१८. लक्षण. नाभींतून जाणाऱ्या, व प-बिन्दुस्थ स्पृशेशीं समान्तर काढिलेल्या, पव व्यासाच्या दुपट निर्णायिकेस पव व्यासाची परिमात्रा ह्मणतात.

सिद्धान्त १६.

पव व्यासाची परिमात्रा = ४ सप.

∴

१

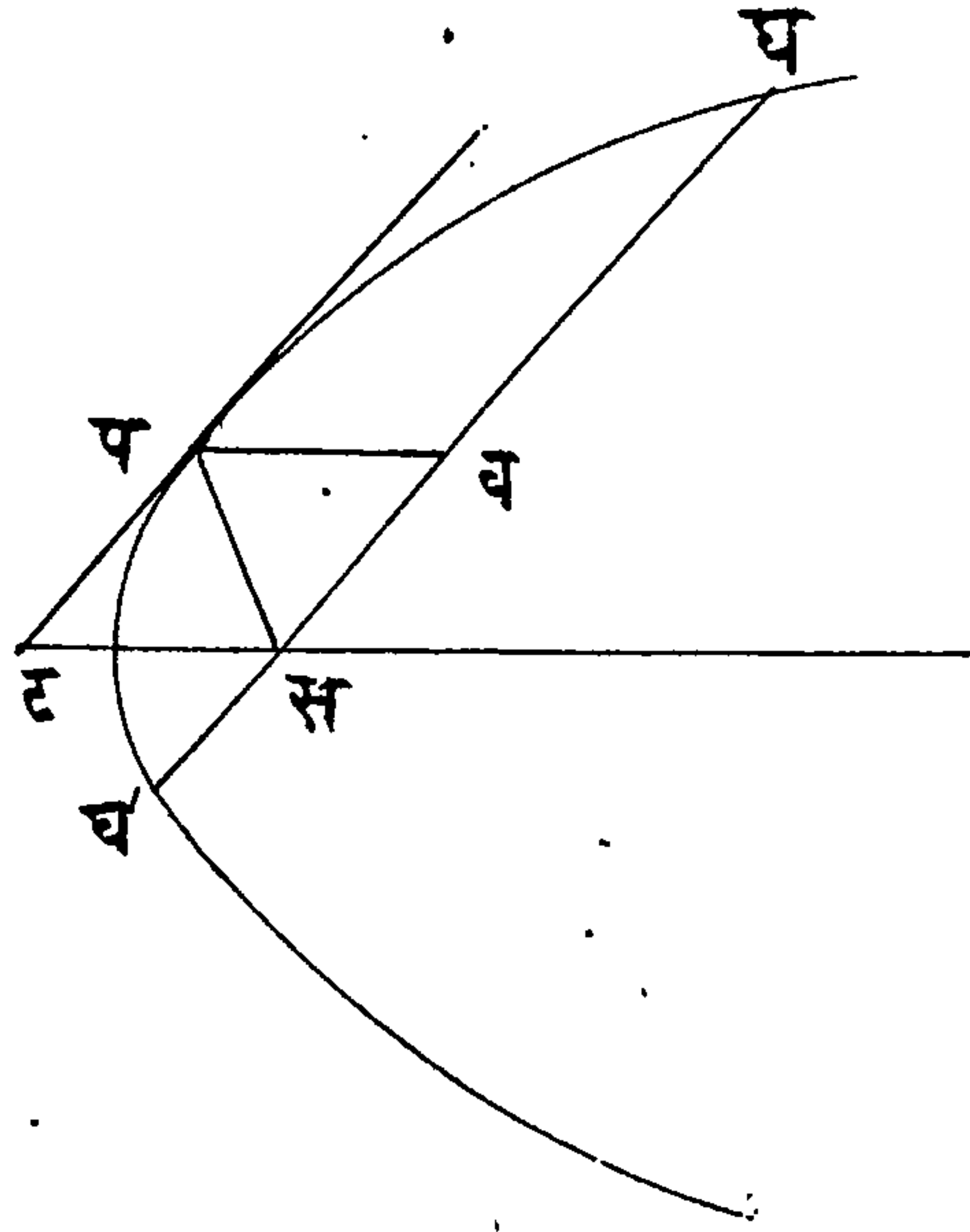
१ ४ १ ४ १ ४ १ ४

१ ४ १ ४ १ ४ १ ४

१

१

१



प-बिन्दुस्थ स्पृशोशीं समान्तर व नाभींतून जाणारी घसघ ज्या काढ; व प-बिन्दुस्थ स्पृशोला वाढविलेल्या अक्षास ट बिन्दूंत मिळू दे; आतां,

$$घव^3 = ४ सप. पव. \text{ (सि. १५.)}$$

$$\text{परंतु } पव = सट = सप, \text{ (सि. ७.)}$$

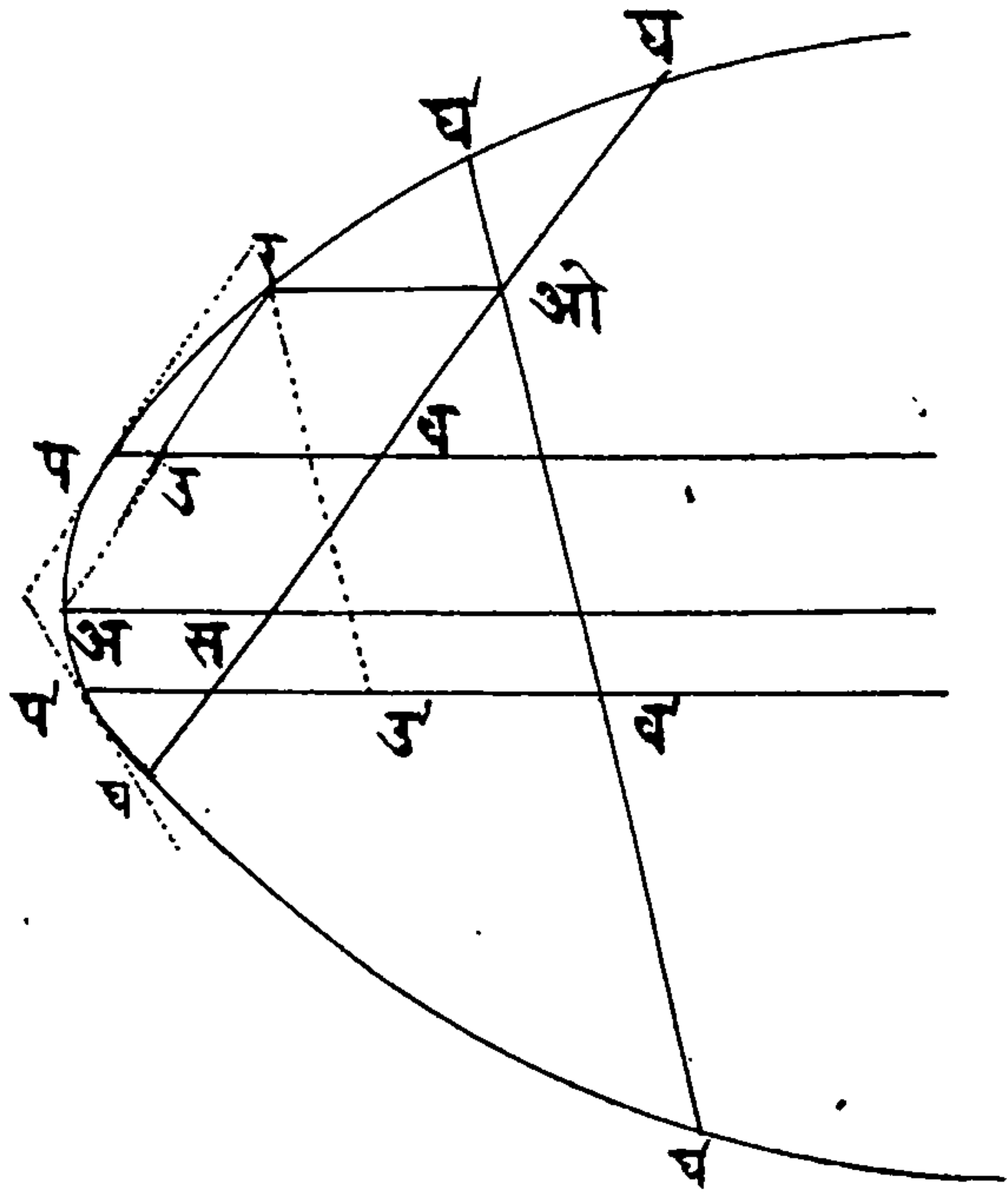
$$\therefore घव^3 = ४ सप^3;$$

$$\text{ह्मणजे } घव = २ सप,$$

$$\therefore घघ = ४ सप. \text{ [सि. १३.]}$$

सिद्धान्त १७.

१९. जर समापूर्णाकक्षाच्या दोन ज्या एकमेकीस छेदितील, तर त्यांच्या स्वण्डांनीं झालेले काटकोनचौकोन त्या ज्यांचे दोन समान भाग पाडणाऱ्या त्या त्या व्यासांच्या परिमात्रांच्या प्रमाणाशीं समप्रमाण होतील.



घघ, घ'घ ह्या ज्यांस एकमेकीस ओ बिन्दूंत छेदूंदे.

घघ, घ'घ ह्यांचे व, व' बिन्दूंत क्रमानें दोन समान भाग पाड,
[ज्यासधर्म], व पव, प'व हे व्यास अक्षाशीं समान्तर काढ.

आणखी ओ बिन्दूंतून और पव-शीं समान्तर काढ; व र बि-
न्दूंतून रउ घव-शीं समान्तर काढ.

आतां, ज्या अर्थी घघ-चे व बिन्दूंत सम व ओ बिन्दूंत विषम
भाग पडले आहेत,

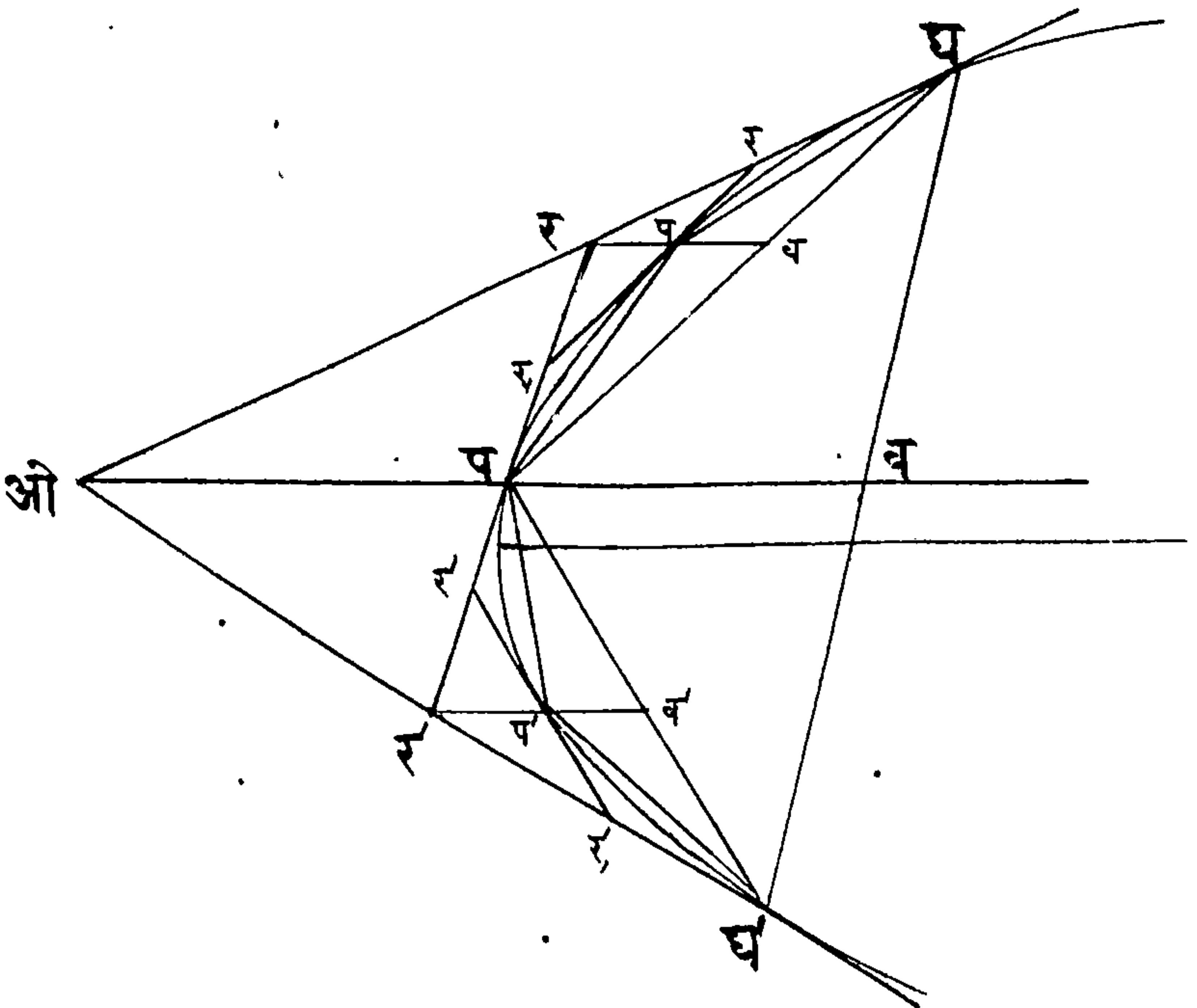
$$\begin{aligned} \therefore \text{घओ.ओप} &= \text{घव' - ओव'}, (\text{यूक्लिड, २.५.}) \\ &= \text{घव' - रउ'}, [\text{समान्तरता.}] \\ &= ४ \text{ सप.पव} - ४ \text{ सप.पउ}, (\text{सि.१५.}) \\ &= ४ \text{ सप.रओ.} \end{aligned}$$

ह्याप्रमाणेंच घ'ओ.ओप' = ४ सप. रओ.
ह्यामुळे घओ.ओप : घ'ओ.ओप' :: ४ सप. : ४ सप.

जरी ओ बिन्दु समापूर्णाकक्षाच्या बहिः प्रदेशीं असेल तथापि सू-
क्लिड, २.६ वरून हाच परिपाक यथार्थ आहे हे सिद्ध करून दाखवि-
तां येईल.

सिद्धान्त १८.

२०. जर ओ ह्या बाह्य बिन्दूपासून ओघ, ओघ स्पृग्द्वय स-
मापूर्णाकक्षास काढिलें, व घघ ज्या सांधली, तर घघ व वृत्त ह्यांनीं
मर्यादित जी आकृति तिचें क्षेत्र घओघ त्रिकोणाच्या दोन-तृतीयां-
शा बरोबर होईल.



ओघ व्यास काढ व त्याला वृत्तास प बिन्दूंत मिळूं दे; व प-बि-
न्दुस्थ स्पृशीला ओघ, ओघ ह्या स्पृशांस र, र बिन्दूंत मिळूं दे.

घप, घप सांधः आतां

ज्याअर्थां ओर = रघ, [सि. १४.]

∴ ओपरत्रिकोण = ३ ओपघत्रिकोण, [यूक्लिड, १.३८.]
= ३ वपघत्रिकोण. [सि. १४.] व [यू-
क्लिड, १.३८.]

ह्याप्रमाणेच ओपरत्रिकोण = ३ वपघत्रिकोण,

∴ ओररत्रिकोण = ३ पघघत्रिकोण.

पुनः, जर र व र बिन्दूतून र प, र प व्यास काढिले, व प, प बि-
न्दूतून र पर, [अधराहत], र प र [ऊर्ध्वाधराहत], ह्या स्पृशा काढिल्या,
तर आपणास ह्याच रीतीनें पूर्वचतु सिद्ध करितां येईल कीं

ररर, त्रिकोण = ३ घपप त्रिकोण,

व ररर, त्रिकोण = ३ र्घर्घ त्रिकोण.

ह्याच रीतीनें नवीन त्रिकोण होण्याकरितां र, र, व र, र, बिन्दूतू-
न व्यास काढीत चाललों व घत्तास ज्या बिन्दूतू हे व्यास मिळतात त्या
बिन्दूतून स्पृशा काढीत चाललों तर स्पृशांच्या योगाने झालेले बाह्य त्रि-
कोण, ज्यांच्या अन्त्यांशीं संपर्क बिन्दु सांधून झालेल्या आन्तर त्रिको-
णांच्या निमपटी बरोबर होतील हें आपणांस सिद्ध करून दारववितां
येईल.

आणखी किती ही असंख्य त्रिकोण काढिले तरी हेंच अनुभवाने
स येईल.

ह्यास्तव सर्व बाह्य त्रिकोणांची बेरीज सर्व आन्तर त्रिकोणांच्या बे-
रजेच्या निमपटी बरोबर होईल.

आतां आपण असंख्य त्रिकोण जरी काढिले तथापि ओघपघ
ही बाह्यरूति सर्व बाह्य त्रिकोणांची बेरीज दर्शवील, व घपघ हा आ-
न्तर त्रिकोण सर्व आन्तर त्रिकोणांची बेरीज दर्शवील. ह्यास्तव ओघ-
पघ आकृतीचें क्षेत्र = ३ घपघ आकृतीचें क्षेत्र,

∴ ओघपघ आकृतीचें क्षेत्र = ३ घओघ आकृतीचें क्षेत्र,

∴ घपघ आकृतीचें क्षेत्र = ३ घओघ त्रिकोणाचें क्षेत्र.

(२६)

शङ्कु-च्छेद.

रघक्ष अक्षाशीं समान्तर काढ व तिला वर्तुळास क्ष बिन्दू
त व प-बिन्दुस्थ स्पृशेस र बिन्दूंत मिळूं दे.

घव पर-शीं समान्तर काढ; व पउ अक्षाशीं समान्तर काढ;
आतां

ज्या अर्धी रप वर्तुळास प बिन्दूंत स्पर्श करिते,

∴ रघ. रक्ष = परं. (यूक्लिड, ३. ३६.)

परंतु परं = घव = ४ सप. पव, (सि. १५.)

∴ रघ. रक्ष = ४ सप. पव.

परंतु रघ = पव, [समान्तरता]

∴ रक्ष = ४ सप.

आतां वर्तुळ जेव्हां प-बिन्दुस्थ चलमानवर्तुळ होते तेव्हां र, घ
बिन्दु प बिन्दू पर्यंत येऊन तद्रूप (प) होतात, व रक्ष पउ-बरोबर
होते,

त्यास्तव अक्षाशीं समान्तर काढिलेली चलमानवर्तुळाची ज्या =
४ सप.

उपसि. १. जर पयु चलमानवर्तुळाचा व्यास असेल व पफ
ही त्याची नाभींतून जाणारी ज्या असेल, तर

ज्या अर्धी फपयु कोन = उपयु कोन, (सि. ८.)

∴ पफ = पउ = ४ सप. [यूक्लिड, ३. ३१, व १. २६.]

उपसि. २. जर सय पट-वर लम्बरूप काढिली, तर

∴ पफयु त्रिकोण सयप त्रिकोणाशीं सरूप आहे

∴ पयु : पफ :: सप : सय, [यूक्लिड, ६. ४.]

ह्मणजे पयु : ४ सप :: सप : सय.

सिद्धान्त २०.

जर घवघ ही पव व्यासाची निर्णायिका असेल, तर प, घ, घ
ह्या तीन बिन्दूंतून काढिलेले वर्तुळ समापूर्णाकक्षास चौथ्या बिन्दूंत

उपसि. १. ज्या अर्थी टप, टर्प ह्या स्पृशा अक्षाशीं समान-
कोन करितात त्या अर्थी त्यांच्याशीं अनुक्रमें समान्तर असणाऱ्या घ-
घ, पर ह्या रेखा ही अक्षाशीं समान कोन करितील.

उपसि. २. जेव्हां व बिन्दूला प बिन्दूच्या अमर्याद जवळ
आणावे तेव्हां घ घ समापूर्णकक्षाच्या प-बिन्दुस्थ स्पृशीं एकरूप
होते व वर्तुळाची प-बिन्दुस्थ स्पृक् ही होते, कारण घ, घ बिन्दु एक-
मेकाच्या अमर्याद जवळ येतात. यास्तव वर्तुळ प-बिन्दुस्थ वलमा-
नवर्तुल होते.

यास्तव, जर पर प-बिन्दुस्थ स्पृशीं समान्तर काढिली, अ-
थवा तिला पट-प्रमाणेंच अक्षाशीं समान कोन करूं दिला, तर ती,
प-बिन्दुस्थ वलमानवर्तुल समापूर्णकक्षास ज्या बिन्दूत छेदिते, त्याच
बिन्दूत समापूर्णकक्षास मिळेल.

समापूर्णकक्षाचर प्रश्न.

१. व अक त्रिकोणासभोवतीं काढिलेल्या वर्तुळाचा व्यास = ५ अस. (सि. ३. आक. पहा.)
२. जर ग बिन्दूपासून गरव सप-वर लम्बरूप काढिली, तर परव = २ अस. (सि. ७. आक. पहा.)
३. जर सपग त्रिकोण समफज असेल तर सप ऊर्ध्वमात्रे बरोबर होईल. (सि. ७ आक. पहा.)
४. ऊर्ध्वमात्रेस व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळास व समापूर्णकक्षास एकच पद्य स्पृक आहे; तेव्हां सप व सघ ह्या रेघा ऊर्ध्वमात्रेशीं समानकोन करितात हें सिद्ध कर.
५. पय.पज्ञ = सप, व पय.यज्ञ = अस. सप हें सिद्ध कर. (सि. ७. आक. पहा.)
६. जर पल अप-वर लम्बरूप काढिली व तिला अक्षास ल बिन्दूत मिळू दिलें व पन ही प बिन्दूची निर्णायिका घेतली तर नल = ४ अस.
७. समापूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृक ज्ञापिकेस व वाढविलेल्या ऊर्ध्वमात्रेस नाभीपासून सारख्या अन्तरावर असणाऱ्या बिन्दूत मिळते.
८. नय = टय, व टप. टय = टस. टन, हें सिद्ध कर. (सि. ७ आक. पहा.)
९. सपन त्रिकोणासभोवतीं जर एरवादे वर्तुळ काढिलें, तर त्याची अ बिन्दूपासून काढिलेली स्पृक = ३ पन. (सि. ७. आक. पहा.)
१०. जर प बिन्दूची निर्णायिका प'-बिन्दुस्थ उपसंपर्कलम्बाचे दोन समान भाग करील, तर प बिन्दूची निर्णायिका प'-बिन्दुस्थ संपर्कलम्बा बरोबर होईल.

११. जर समापूर्णकक्षाच्या स्पृशोवरील एखाद्या बिन्दूपासून त्या-
ला स्पर्श करणारी रेघ काढिली, तर ही रेघ व त्याच बिन्दूपासून
नाभीपर्यंत काढिलेली रेघ, ह्यांजमधील कोन अभिन्न असतो.

१२. वर्तुळ व समापूर्णकक्ष ह्या उभयतांस एकच शिर व अक्ष
आहे. बअक ही त्या समापूर्णकक्षाची दुपट निर्णायिका आहे. स-
मापूर्णकक्ष त्या वर्तुळास अ' बिन्दूत स्पर्श करिते. अशिरापासून-
काढिलेली अअ' त्या वर्तुळाचा व्यास आहे. पप' ही त्या समापूर्ण-
कक्षाची दुसरी निर्णायिका आहे. ही पहिलीशीं समान्तर आहे. पप'
अक्षास न बिन्दूत व अब-स वाढविल्यावर र बिन्दूत मिळते. आ-
तां रप. रप' काटकोन चौकोन वर्तुळास न बिन्दूपासून काढिलेल्या
स्पृशोच्या चौरसाशीं समप्रमाण असतो हें सिद्ध कर.

१३. दिलेल्या वर्तुळास दिलेल्या बिन्दूत स्पर्श करील व त्याचा
अक्ष त्या वर्तुळास दुसऱ्या एका दिलेल्या बिन्दूत स्पर्श करील असें एक
समापूर्णकक्ष काढ.

१४. जर समापूर्णकक्ष व त्याची स्पृक ह्यांच्या संपर्क बिन्दूपा-
सून एखादी ज्या काढिली व अक्षाशीं समान्तर दुसरी एक रेघ का-
ढिली व हिला त्या ज्येस, स्पृशोस व वृत्तास मिळूं दिलें, तर ही रेघ
त्या ज्येचे ज्या प्रमाणानें भाग करिते त्याच अभिन्न प्रमाणानें आ-
पले ही भाग करून घेईल.

१५. जर पच व्यास ज्ञापिकेस ओ बिन्दूत व प-बिन्दुस्थ
स्पृशोशीं नाभींतून समान्तर काढिलेल्या ज्येस व बिन्दूत मिळेल, तर
वप = पओ हें सिद्ध कर.

१६. पच व्यास व प-बिन्दुस्थ स्पृशोशीं नाभींतून समान्तर
काढिलेली ज्या ह्यांच्या छेदबिन्दूची संस्था समापूर्णकक्ष असते हें
सिद्ध कर.

१७. जर वर्तुळ व समापूर्णकक्ष ह्या उभयतांस प-बिन्दुस्थ
एकच स्पृक असेल, व तीं एकमेकास घ, र बिन्दूत छेदतील; व-

घव, युर ह्यारेषा समापूर्णकक्षान्या अक्षाशीं समान्तर काढिल्या व ह्यांना वर्तुळास व, यु बिन्दूंत क्रमानें मिळूं दिलें; तर वयु प-बिन्दुस्थ स्पृशोशीं समान्तर होईल.

१८. अब व अक ह्यारेषा एकमेकीवर लम्बरूपानें पडतात. अकच्या क स्थिर बिन्दूपासून कर अब-शीं समान्तर काढिली आहे. अर-स जरूर असल्यास वाढवून तिजवर एक प बिन्दु घे, तो अ-सा कीं अब-वरील पन-लम्ब कर बरोबर होईल. आतां प बिन्दूनें वर्तविलेले वृत्त समापूर्णकक्ष होईल हें सिद्ध कर.

१९. जर वर्तुळान्या प बिन्दूपासून केन्द्रापर्यंत पक काढिली; व अकब स्थिर व्यासाशीं समान्तर काढिलेल्या पघ ज्येचा र मध्यबिन्दु घेतला; तर कप, अर ह्यांच्या छेदबिन्दूनें वर्तविलेले वृत्त समापूर्णकक्ष होईल.

२०. जर ओघ, ओघ ह्या दोहों समान स्पृशांस तिसरी एक स्पृक् छेदील, तर त्यांचे व्युत्क्रम खण्ड संमान होतील.

२१. ओघर्घ त्रिकोणा सप्तोवतीं काढिलेल्या वर्तुळाचा केन्द्र ई आहे. आतां घईर्घ त्रिकोणा सप्तोवतीं काढिलेले वर्तुळ नाभीतून जाईल हें सिद्ध कर. (सि. १३ आक. पहा.)

२२. पसप ही एक समापूर्णकक्षाची सनाप्त ज्या आहे. आतां अप, अप रेषा ऊर्ध्वमात्रेस घ, घ बिन्दूंत मिळतील, व ह्या बिन्दूंचीं नाभ्यन्तरें प, प बिन्दूंच्या निर्णायिका बरोबर होतील हें सिद्ध कर.

२३. पसप ही एक समापूर्णकक्षाची सनाप्त ज्या आहे; रडर ही क्षापिका अक्षास ड बिन्दूंत मिळते; घहा वृत्तावर एक बिन्दु आहे. आतां घप, घप जर क्षापिकेस र, र बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढविल्या, तर अर्धी ऊर्ध्वमात्रा, डर, डर ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद होईल हें सिद्ध कर.

२४. ओप, ओघ ह्या समापूर्णकक्षान्या स्पृशा आहेत. घओ वाढवून तिजवर ओघ = ओघ; आतां ओस. पघ = ओप.

ओघ, हे सिद्ध कर.

२५. जर घड ही रेघ पव व्यासावर लम्बरूप काढिली, तर घडै = ४ अस. पव.

२६. जर समापूर्णकक्षाच्या अक्षावरील ओ बिन्दूतून पओ-घ ज्या काढिली, व पम, घन ह्या प, घ बिन्दूच्या निर्णायिका घेतल्या; तर अम. अन = अओ^३ हे सिद्ध कर.

२७. जर अप, अघ ह्या रेघा समापूर्णकक्षाच्या शिरापासून एकमेकींवर लम्बरूप काढिल्या, व पम, घन ह्या प, घ बिन्दूच्या निर्णायिका घेतल्या, तर ऊर्ध्वमात्रा, अम, अन ह्यांजमधील अनुपात-मध्यमपद होईल.

२८. एका वर्तुळाचा द्वैत्रिज्य ओअप आहे; ओ त्या वर्तुळाचा केन्द्र आहे. जर ओ अ त्रिज्या स्थिर ठेविली व अओप कोन द्वैत्रिज्यांत काढिलेल्या वर्तुळाचा केन्द्र फिरविले, तर अओप समापूर्णकक्षा वर्तवील.

२९. अप-शीं समान्तर घसर्घ ही सनाप्प ज्या आहे; पन, घम, घर्म ह्या प, घ, घ बिन्दूच्या निर्णायिका आहेत. सम^३ = अम. अन, व मर्म = अप, हे सिद्ध कर.

३०. पघ, पघ ह्या रेघा प बिन्दूपासून काढिल्या आहेत; त्या घव, घव ह्या निर्णायिकांस र, र बिन्दूत छेदितात. तेव्हां
वर : वर :: घव^३ : घव^३
हे सिद्ध कर.

३१. समापूर्णकक्षाच्या ज्यास व्यास कल्पून एक वर्तुळ काढिले आहे; ते वर्तुळ समापूर्णकक्षास पुनः दोन बिन्दूत छेदिते. जर हे बिन्दु सांधले, तर ज्याद्वयामधील अक्षखण्ड ऊर्ध्वमात्रे बरोबर होईल.

३२. जर ओघ, ओघ हे समापूर्णकक्षाचे स्पृग्द्वय असेल, व घघ ही ज्या वृत्ताचा घ-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब असेल, तर ओघ-चे दोन समान भाग करील.

३३. समान समापूर्णकक्षद्वयास एकच नाभि आहे व त्यांचे अक्ष विरुद्ध दिग्गामी आहेत; तेव्हां तीं एकमेकास लम्बरूप असतात हे सिद्ध कर.

३४. चलमान वर्तुळाची ऊर्ध्वमात्रान्त्यस्थ त्रिज्या संपर्कलम्बाच्या दुपट असते.

३५. जर पग-संपर्कलम्बाशीं समान कोन करणाऱ्या पफ, पह, समापूर्णकक्षांच्या पबिन्दूपासून काढिल्या, तर सग^३ = सफ. सह.

३६. जर समापूर्णकक्षांत एखादा त्रिकोण काढिला, तर त्याच्या बाजू, वाढविल्यावर, अभिसुरवकोणस्थ स्पृशांस ज्या बिन्दूंत मिळतील ते बिन्दु एकाच सरळरेषेत येतील.

३७. जर ओघ, ओघ स्पृशांस तिसरी एक स्पृक र, र बिन्दूंत छेदील, तर

ओर : रघ :: रघ : ओर,

हे सिद्ध कर.

३८. जर समापूर्णकक्षांच्या त्रिरापासून परस्परास लम्बरूप ज्या काढिल्या व त्यांजवर काटकोन चौकोन काढिला, तर दूरच्या कोनानें वर्तविलेले चतुर्भुज समापूर्णकक्ष होईल.

३९. २ पय, अप व शिरांतून काढिलेली समापूर्णकक्षांच्या पबिन्दुस्थ चलमान वर्तुळाची ज्या, त्यांजमधील अनुपातमध्यमपद असते हे सिद्ध कर. (सि. ७ आक. पहा.)

४०. जर एखादे वर्तुळ समापूर्णकक्षांच्या ज्यास व्यास कल्पून काढिले, व ते ज्ञापिकेला जर मिळेल तर ते तिला स्पर्शही करील; व हे जेव्हां संभवनीय असेल तेव्हां सर्व ज्या एकमेकीस एका बिन्दूंत छेदितील.

४१. जर दोहोंचीं शिरे एकावर एक ठेवून एक समापूर्णकक्ष दुसऱ्या समान समापूर्णकक्षावरून गुंडाळिले, तर नाभि ज्ञापिका वर्तवील.

४२. ऊर्ध्वमात्रान्त्यस्थ चलमानवर्तुळ समापूर्णकक्षास, संपर्कबिन्दूंतून जाणारा जो चलमानवर्तुळाचा व्यास, त्यांत छेदील.

ऊनसंपूर्णकक्ष.

२२. लक्षण. जेव्हां एखादा बिन्दु अशा रीतीनें फिरतो कीं दिले-
ल्या स्थिर बिन्दूपासून त्याचें जें अन्तर असतें तें, एखाद्या दिलेल्या स्थिर
रेषेपासून त्याच बिन्दूच्या अन्तराशीं सतत अभिन्न परंतु एकाङ्गापेक्षां
कमी प्रमाणानें असतें अशावेळीं त्या चरबिन्दूनें वर्तविलेल्या वृत्तास -
ऊनसंपूर्णकक्ष म्हणतात. (आसुरव पहा.)

सिद्धान्त १.

ऊनसंपूर्णकक्षाची नाभि व ज्ञापिका दिली असतां, वृत्तावरील पाहिजे-
त तिनके बिन्दु काढावयाचे.

स नाभि व मक्ष ज्ञापिका असूं दे.

ज्ञापिकेवर सक्ष लम्ब काढ, व सक्ष-चे अ बिन्दूत [यूक्लिड, ६.
१०.] असे दोन भाग पाड कीं, सअ-चें अक्ष-शीं दिलेले स्थिर परंतु ए-
काङ्गापेक्षां कमी प्रमाण कायम राहिल; आतां

अ हा वृत्तावरील बिन्दु झाला. (लक्ष.)

क्षस वाढीव व तिजमध्ये अ बिन्दु घे, तो असा कीं

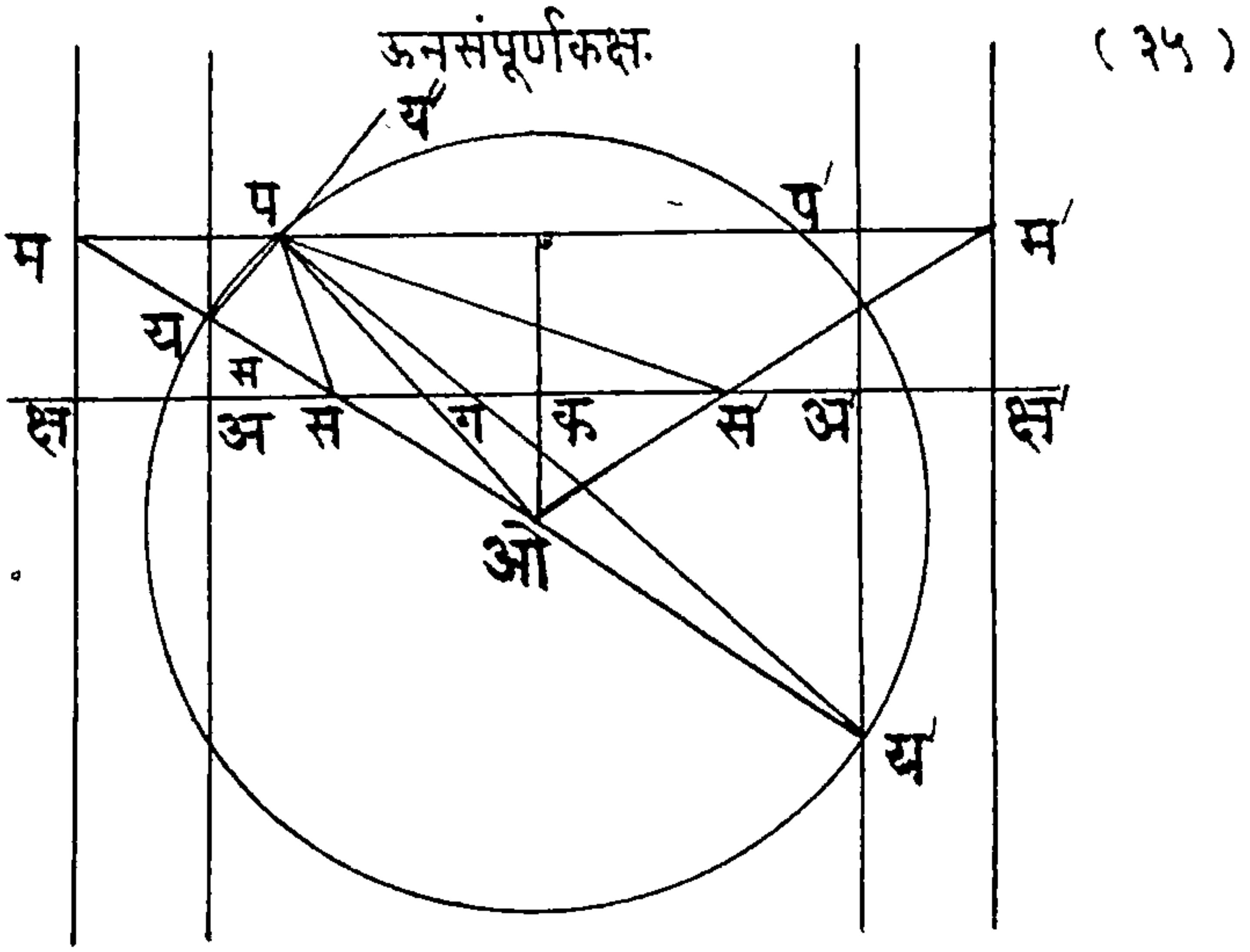
सअ : अक्ष : : सअ : अक्ष;

आतां अ ही वृत्तावरील बिन्दु होईल.

ज्ञापिकेवर पाहिजे तेथें म बिन्दु घे; म व स ह्या दोहीं बिन्दूतून
मयसय रेषा काढ, व तिला अअ-वर लम्बरूप काढिलेल्या अय, अय
ह्यांस य. य बिन्दूत मिळूं दे.

यय-स व्यास कल्पून वर्तुळ काढ; मपप अअ-शीं समान्तर का-
ढ, व तिला वर्तुळास प, प बिन्दूत छेदूं दे; आतां

प, प हे ऊनसंपूर्णकक्षावरील बिन्दु होतील
पय, पय, सप सांध; आतां



ज्याअर्थी सयः यमः :: सअः अक्ष, (यूक्लिड, ६.२.)

व सयः यमः :: सअः अक्ष, (यूक्लिड, ६.२.)

∴ सयः यमः :: सयः यमः;

अथवा विनिमयाने, सयः सयः :: यमः यम,

व यपय हा सामि वर्तुळांतील कोन असल्यामुळे तो काटकोन आहे,

(यूक्लिड, ३-३१.)

∴ यय सपम कोनाचे दोन समान भाग पाडिते, *

* जर यय सपम कोनाचे दोन समान भाग करीत नसेल, तर यय कोन यपम कोनाबरोबर कर [यूक्लिड, १.२३.]. आतां

सयः यम :: सपः पम. (यूक्लिड, ६.३.)

आणखी, ज्याअर्थी यय सपम कोनाचे दोन समान भाग करिते [रचना.], त्या अर्थी यय-वर लम्बरूपाने पडणारी जी यय तीही सपम कोनाचे दोन समान भाग करिते,

∴ सयः यम :: सपः पम. (यूक्लिड, ६.सि.अ.)

त्यास्तव सयः यम :: सयः यम,

अथवा सयः सयः :: यमः यम,

∴ स, स बिन्दु एकरूप होतात.

∴ सपः पमः ∴ सयः यम,
∴ सअः अक्ष.

ह्याप्रमाणेच आपणास असें दाखवितां घेईल कीं

सपः पमः ∴ सयः यम, [यूक्लिड, ६.३.]
∴ सअः अक्ष.

∴ प, प हे वृत्तावरील बिन्दु झाले.

ह्याच रीतीनें ज्ञापिकेवर दुसरे बिन्दु घेऊन आपणास वृत्तावरील आपणरवी पाहिजेत तिनके बिन्दु काढितां येतील.

उपसिद्धान्त. १. वृत्तावर प बिन्दु जसा आहे तसाच त्याचे समोर प बिन्दुही आहे, व प जसा अय-च्या संबन्धानें स्थित आहे तसाच हुबेहुब प ही अय-च्या संबन्धानें आहे यास्तव आपण जर अस, व अक्ष ह्या रेखा क्रमानें अस व अक्ष ह्यांजबरोबर केल्या व अक्ष-वर क्षम लम्ब काढिला तर आपणांस पूर्वीप्रमाणें एकसारखें वृत्त काढितां घेईल, व त्या वृत्ताची स ही नाभि होईल व मक्ष ही ज्ञापिका होईल, हें स्पष्ट आहे.

ह्या कारणास्तव ऊनसंपूर्णकक्ष संमिताकार आहे, व तें केवळ अ-अ-च्याच संबन्धानें संमिताकार आहे असें नाही, तर अअ-वर लम्ब रूप काढिलेली व तिचेच दोन समान भाग पाडणारी जी अय-हिच्या मध्यबिन्दूपासून काढिलेली जी ओक तिच्याही संबन्धानें संमिताकार आहे.

उपसिद्धान्त. २. ओप ही रेखा सपस कोनाचे दोन समान भाग करील.

ओप-ला सस-स ग बिन्दून मिळूंदे. सप वाढीव व तिला क्षम-स म बिन्दून मिळूंदे; स नाभीतून ओम काढ; आतां

सपः पमः ∴ सपः पम,
अथवा, विनिमयानें, सपः सपः ∴ पमः पम. (१)
पुनः, सगः पमः ∴ संगः पम,

अथवा, विनिमयाने, सगः सर्गः : पमः पर्म. (२.)

∴ (१) व (२) ह्यांजपासून

सपः सपः : सगः सर्ग,

∴ पग सपर्स कोनाचे दोन समान भाग पाडिते. (यूक्लिड, ६-३)

ऊनसंपूर्णकक्षाचा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब ही सपर्स कोनाचे दोन समान भाग करितो हे पुढे (सि. ११) दाखविण्यांत येईल. ह्यास्तव ऊनसंपूर्णकक्ष व वर्तुळ ह्या उभयतांस प-बिन्दुस्थ एकच स्पृक असते.

ह्मणूनच अनन्तवर्तुळमालेंतील प्रत्येक वर्तुळास ऊनसंपूर्णकक्ष अर्थात् स्पर्श करील. आकृतींत ज्या रीतीने वर्तुळ काढिले आहे त्याच रीतीने ही सर्व अनन्तवर्तुळमाला ज्ञापिकेवर निरनिराळे बिन्दु घेऊन काढितां येईल.

सिद्धान्त २.

२३. जर क हा अअ-चा मध्यबिन्दु असेल, तर कअही कस कक्ष ह्यांजमधील अनुपातमध्यमपद होईल,

ह्मणजे कस. कक्ष = कअ. (सि. ३ आकृ. पहा.)

ज्या अर्थी सअः अक्षः : सअः अक्ष. [सि. १.]

विनिमयाने, सअः सअः : अक्षः अक्ष,

∴ सअ + सअ : सअः : अक्ष + अक्ष : अक्ष;

ह्मणजे, अअः सअः : क्षक्ष : अक्ष,

∴ अअः क्षक्षः : सअः अक्ष,

ह्मणजे, कअः कक्षः : सअः अक्ष. (१.)[‡]

पुनः, सअः सअः : अक्षः अक्ष,

∴ सअ - सअ : सअः : अक्ष - अक्ष : अक्ष;

‡ टीप- (१), (२), (३) ह्यांतील परिपाक चांगले लक्षांत ठेविले पाहिजेत, कारण त्यांचा वारंवार पुढे उल्लेख करण्यांत येईल.

ह्यणजे सस : सअ : : अअ : अक्ष.
 विनिमयाने, सस : अअ : : सअ : अक्ष,
 ह्यणजे, कस : कअ : : सअ : अक्ष. (२०)

ह्यास्तव (१) व (२) ह्यांजपासून

कअ : कक्ष : : कस : कअ, [यूक्लिड, ५.७.]

∴ कअ^२ = कक्ष · कस, [यूक्लिड, ६.१७.]

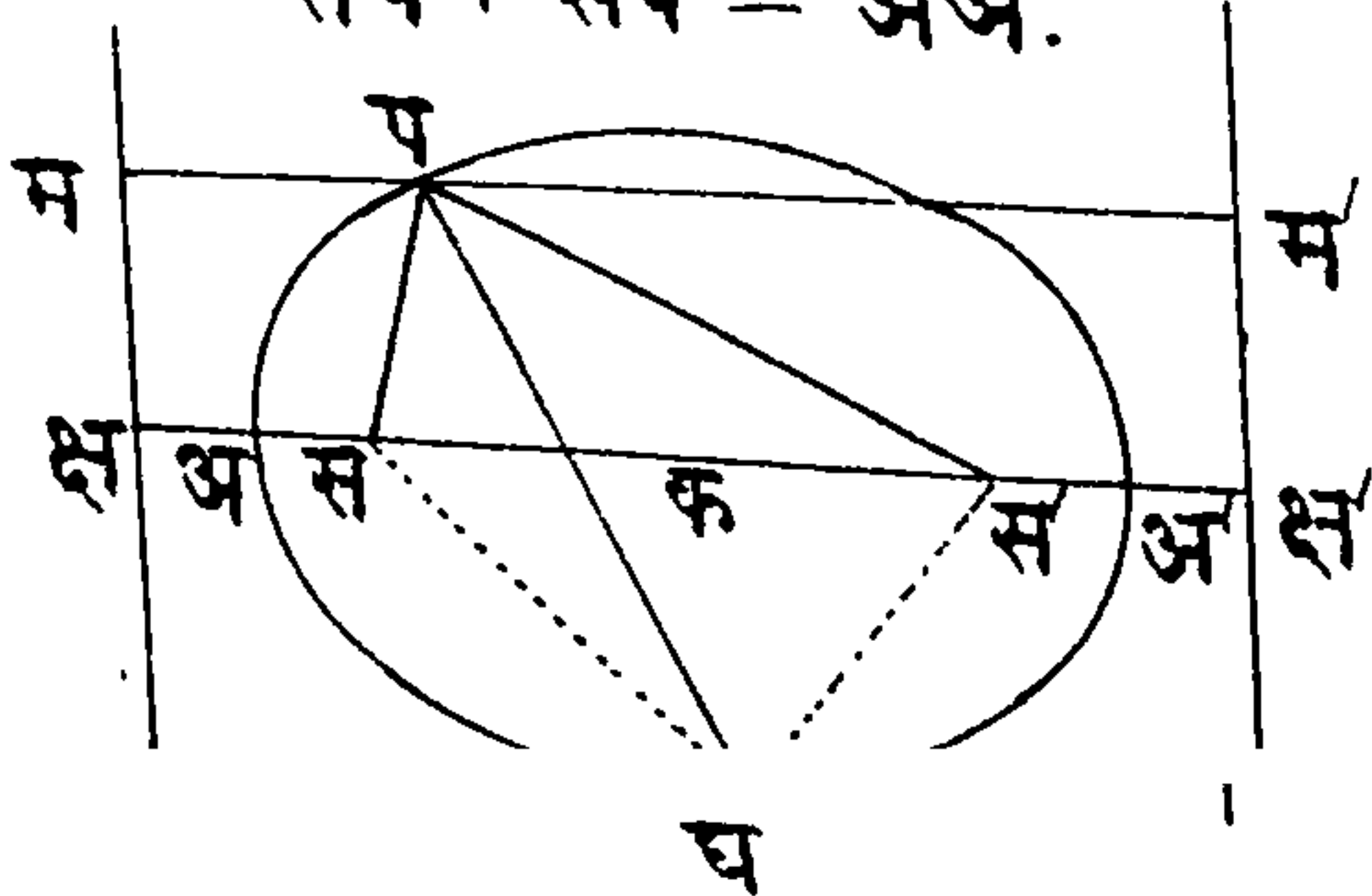
ह्यणजे कअ ही रेघ कस, कक्ष ह्यांजमधील अनुपातमध्यमपद झाली.

उपसिद्धान्त. कस, कअ, कक्ष ह्या तीन रेघा अनुपातपदे आहेत ह्यणून, व वर्गप्रमाणाचें लक्षण व यूक्लिड, ६.२०. उपसिद्धान्त ह्या दोहोंवरून

कस : कक्ष : : कस^२ : कअ. (३)

सिद्धान्त ३.

२४. जर ऊनसंपूर्णकक्षावर एखादा प बिन्दु असेल, तर
 सप + सप = अअ.



ज्या अर्थी, सप : पम : : सअ : अक्ष, [सि.१.]

व सअ : अक्ष : : अअ : क्षक्ष, (सि.२.)

∴ सप : पम : : अअ : क्षक्ष,

ह्याप्रमाणेच सप : पम : : अअ : क्षक्ष,

∴ सप + सप : पम + पम : : अअ : क्षक्ष.

परंतु पम + पम = पम = क्षक्ष,

∴ सप + सप = अर्ज.

उपसि. १. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या ह्या धर्मावस्थेन व्यवहारांत त्याची आकृति काढितां येईल व तिचे नियमनही करितां येईल.

अर्ज लांबीची एक दोरी घे, व तिचीं दोन्हीं टोके स, स ह्यांस घट्ट बांध. ती दोरी प बिन्दूजवळ लेखणीनें ताणून धर; आतां प बिन्दु ऊनसंपूर्णकक्षाची आकृति वर्तवील, कारण सप + सप नेहमीं अर्ज-च्या बरोबर असते.

उपसि. २. ऊनसंपूर्णकक्षांत काढिलेल्या सर्व रेखांत अर्ज द्राघिष्ठ असते.

जर अर्ज द्राघिष्ठ नसेल तर पघ द्राघिष्ठमान; आतां

सप + सघ > पघ, [यूक्लिड, १. २०.]

व संप + सघ > पघ, [यूक्लिड, १. २०.]

∴ संप + सप + सघ + सघ > २ पघ,

ह्यणजे अर्ज > पघ.

२५. लक्षणा. जर बकब अकअ-वर लम्बरूप काढिली, व तिला ऊनसंपूर्णकक्षास ब, ब बिन्दूंत मिळूं दिलें, तर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या केन्द्रांतून काढिलेल्या सर्व ज्यांमध्ये बकब हसिष्ठ ज्या होईल, हें पुढें (सि. १३. उपसि. २.) ह्यांत दाखविण्यांत येईल. (सि. ४. आकृ. पहा.)

अर्ज, बब ह्यांस ऊनसंपूर्णकक्षाचे महत्तराक्ष व लघुतराक्ष ह्या क्रमानें संज्ञा आहेत.

जेव्हां एखादा बिन्दु अशा रीतीनें फिरतो कीं दोन स्थिर बिन्दूपासून त्याचीं जीं अन्तरे असतात त्यांची बेरीज सदैव अपिन्न असते अशा वेळीं त्या बिन्दूनें वर्तविलेल्या वृत्तास ऊनसंपूर्णकक्ष ह्यणावें असें बहुतेक भूमितीच्या पुस्तकांत लक्षणा दिलें आहे; परंतु समापूर्णाकक्षाप्रमाणें ह्या वृत्ताचें लक्षणा दिलें ह्यणजे ह्याचे धर्म अधिक स्पष्ट दिसून येतात; व ह्या धर्माचा ही त्यांत अन्तर्भाव होतो, असें मला वाटते.

एका लक्षणांत दुसऱ्या लक्षणाचा अन्तर्भाव अनिवार्यपणे होतो हें आतां दाखविलेंच आहे, तेव्हां जें लक्षण आपणास अत्युपयोगी पडेल त्याचा आपण पुढील विवेचनांत उपयोग केला असतां कांहीं हरकत नाही.

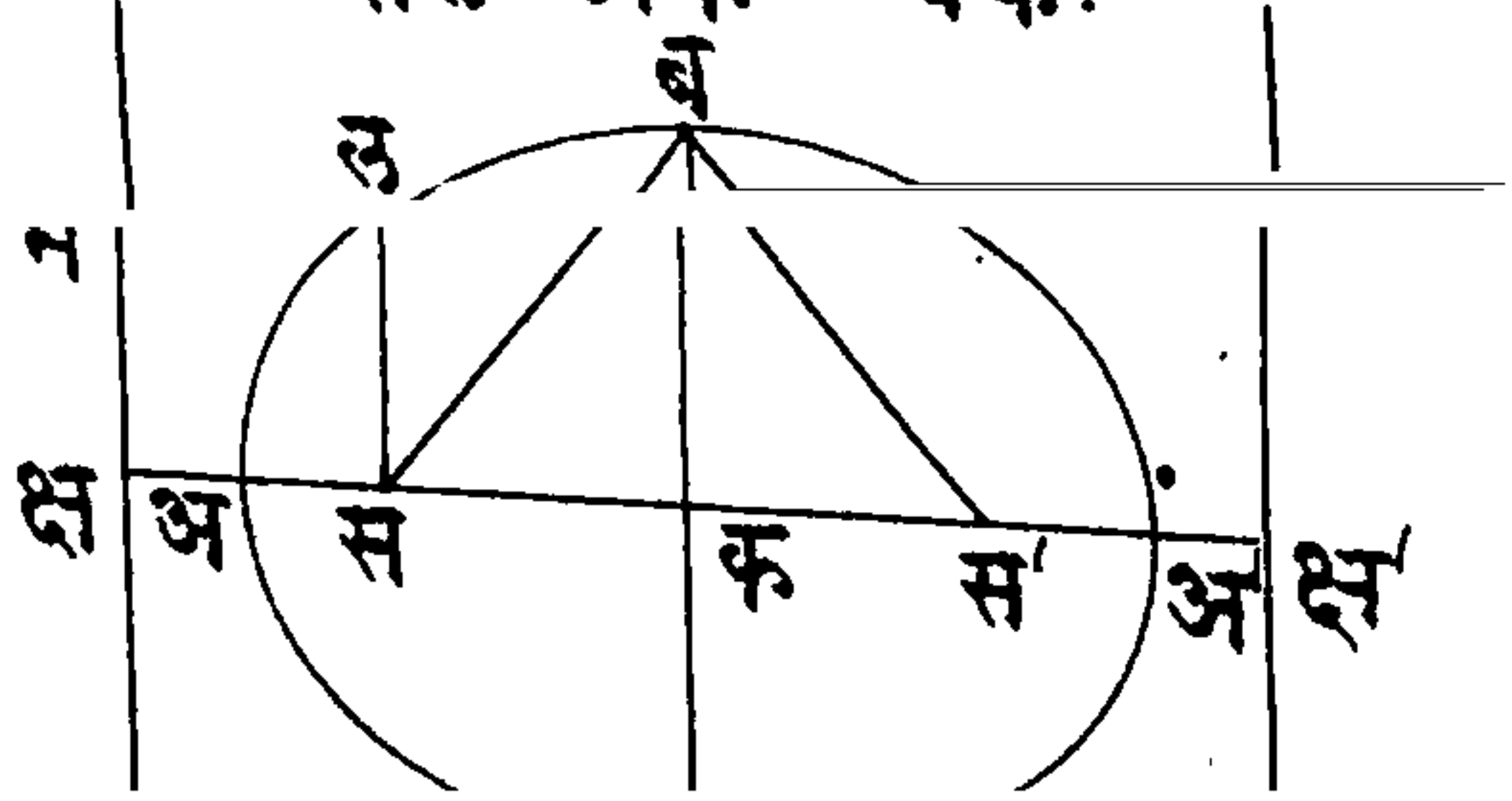
सिद्धान्त ४.

२६. जर बक ऊनसंपूर्णकक्षाचा सामिलघुतराक्ष होईल, तर

$$\text{बक} = \text{कअ} - \text{कस},$$

व, जर सल अर्धी ऊर्ध्वमात्रा होईल, तर

$$\text{सल} \cdot \text{अक} = \text{बक}.$$



सब, सब सांध; आतां

$$\text{ज्या अर्थां सब + सब} = \text{अअ}, \text{ (सि. ३.)}$$

$$\text{व सब} = \text{सब} \text{ [यूक्लिड, १.४.]}$$

$$\therefore \text{सब} = \text{अक}.$$

$$\text{परंतु बक} = \text{सब} - \text{कस}, \text{ [यूक्लिड, १.४७.]}$$

$$\therefore \text{बक} = \text{कअ} - \text{कस}.$$

$$\text{पुनः, सल : सक्ष} :: \text{सअ} : \text{अक्ष},$$

$$:: \text{कस} : \text{कअ}, \text{ (सि. २.)}$$

$$\therefore \text{सल} \cdot \text{अक} = \text{कस} \cdot \text{सक्ष}, \text{ [यूक्लिड, ६.१६.]}$$

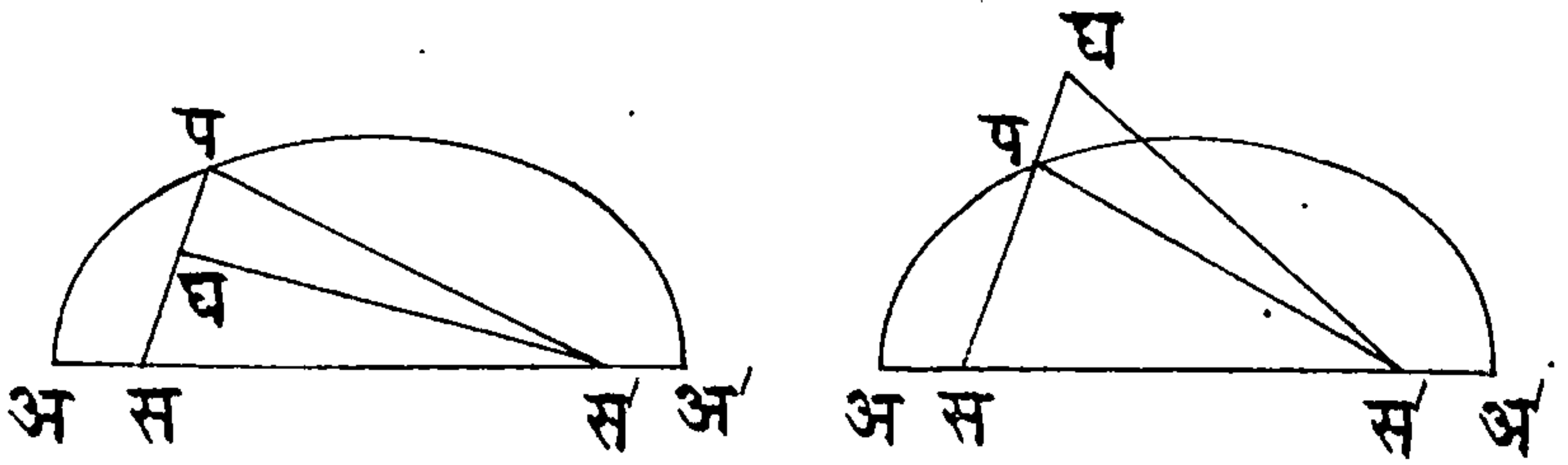
$$= \text{कस} \cdot \text{कक्ष} - \text{कस}, \text{ [यूक्लिड, २.३.]}$$

$$= \text{कअ} - \text{कस}, \text{ (सि. २.)}$$

$$= \text{बक}.$$

सिद्धान्त ५.

२७. जर एखादा बिन्दु ऊनसंपूर्णकक्षाच्या आंत अथवा-
बाहेर असेल, तर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या नाभीपासून असणाऱ्या त्या
बिन्दूच्या अन्तरांची बेरीज क्रमाने अर्ज-पेक्षांकमी अथवा ज्या-
स्ती होईल.



(१) ऊनसंपूर्णकक्षाच्या आंत घ बिन्दु असूंदे.

सघ, सघ सांध; व सघ-ला ऊनसंपूर्णकक्षास प बिन्दूत
मिळे पर्यंत वाढील; सप सांध; आतां

ज्या अर्थी सप + घप > सघ, [यूक्लिड, १.२०.]

∴ सप + सप > सघ + सघ.

परंतु सप + सप = अर्ज, (सि. ३.)

∴ सघ + सघ < अर्ज.

(२) ऊनसंपूर्णकक्षाच्या बाहेर घ बिन्दु असूंदे.

सघ, सघ सांध; व सघ-ला ऊनसंपूर्णकक्षास प बिन्दूत
मिळूंदे; सप सांध; आतां,

ज्या अर्थी सघ + घप > सप, [यूक्लिड, १.२०.]

∴ सघ + सघ > सप + सप,

परंतु सप + सप = अर्ज, (सि. ३.)

∴ सघ + सघ > अर्ज.

उपसि. प्रत्यनुमानाने, ऊनसंपूर्णकक्षाच्या नाभीपासून जीं

एखाद्या बिन्दूचीं अन्तरें असतात त्यांची बेरीज जर अर्ध-पेक्षांक-
मी अथवा ज्यास्ती असेल, तर तो बिन्दु त्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या आं-
त अथवा बाहेर क्रमानें होईल.

२८. लक्षण. ऊनसंपूर्णकक्षावर, प बिन्दूच्या जवळ एक प
बिन्दु घेतला व पर्प सांधले, तर प-स प बिन्दूच्या इतकें जवळ नेले
कीं तो (प) तन्मयदशा पावतो इतक्यांत वाढविलेल्या पर्प रेघेस त्या
वृत्ताची प-बिन्दुस्थ स्पृकृ ह्मणतात.

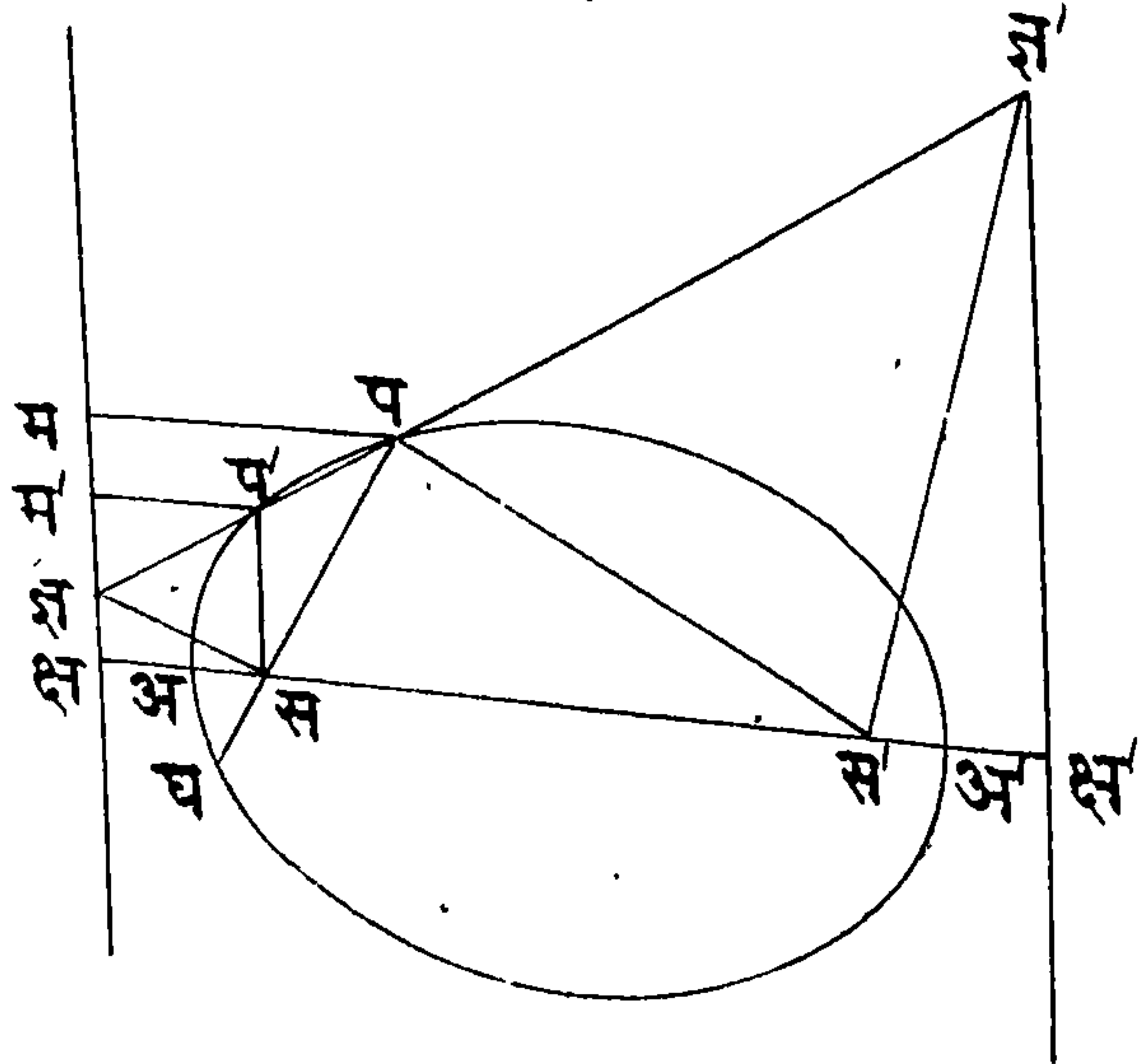
सिद्धान्त ६.

जर ऊनसंपूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृकृ ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत छे-
दील व ज्या ज्ञापिकेंत ज्ञ असतो त्या ज्ञापिकेस समीपतर जर स नाभि
असेल, तर सज्ञ सप-वर लम्बरूपानें पडेल.

ऊनसंपूर्णकक्षावर प बिन्दूजवळ एक प बिन्दु असूं दे.

पर्प ज्या काढ, व तिला ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढीव,
सज्ञ सांध.

ज्ञापिकेवर पम, पर्म लम्ब काढ; सप, सप सांध.



पस वाढीच व तिला ऊनसंपूर्णकक्षास घ बिन्दूंत मिळूं दे; आतां ज्या अर्थां ज्ञमपः ज्ञमपः त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ ज्ञपः ज्ञपः ; मपः मपः, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ सपः सपः,

∴ सज्ञ, पसघ कोनाचे दोन समान भाग करिते. (यूक्लिड, ६.सि.अ.)

आतां, प जेव्हां प-बिन्दूच्या अमर्याद जवळ असतो व पप प-बिन्दुस्थ स्पृक होते, तेव्हां पसप कोन अमर्याद लहान होतो व घसप कोन दोन काटकोनांच्या जवळ जवळ येतो ह्मणून ज्ञसप कोन शेषी काटकोन होतो कारण तो पसघ कोनाचा अर्धा भाग आहे.

ह्यास्तव पज्ञ जेव्हां प-बिन्दुस्थ स्पृक होते, तेव्हां

ज्ञसप कोन काटकोन होतो,

ह्मणजे सज्ञ सप-वर लम्बरूपानें पडते.

उपसि. १. प्रत्यनुमानानें, जर सज्ञ सप-वर लम्बरूप काढिली, तिला ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळूं दिलें व पज्ञ सांधले, तर पज्ञ प-बिन्दुस्थ स्पृक होईल.

उपसि. २. जर ज्ञप दुसऱ्या ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळेपर्यंत वाढविली व सज्ञ सांधले, तर

सज्ञ सप-वर लम्बरूपानें पडेल.

उपसि. ३. ऊर्ध्वमात्रेच्या ह्मणजे नाभींतून जाणाऱ्या दुपट निर्णायिकेच्या अन्यस्थ स्पृशा अक्षास, वाढविलें असतां, क्ष बिन्दूंत मिळतील.

सिद्धान्त ७.

ऊनसंपूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृक सप, सप ह्या नाभ्यन्तरांशीं समानकोन करिते.

प-बिन्दुस्थ स्पृशला ज्ञापिकांस ज्ञ, ज्ञ बिन्दूंत मिळूं दे.

ज्ञापिकांवर मपम लम्ब काढ; त्याला ज्ञापिकांस क्रमानें म, म बिन्दूंत मिळूं दे; सज्ञ, सज्ञ सांध; आतां

[सि.७. आकृ.पहा.]

पसघ ही सनाप्त ज्या असूं दे; प-बिन्दुस्थ स्पृशेला ज्ञापिकेस
ज्ञ बिन्दूंत मिळूं दे;

सज्ञ सांध; आतां

ज्ञसप कोन काटकोन आहे, (सि.६.)

∴ ज्ञसघ कोन ही काटकोन आहे, [यूक्लिड, १.१३.]

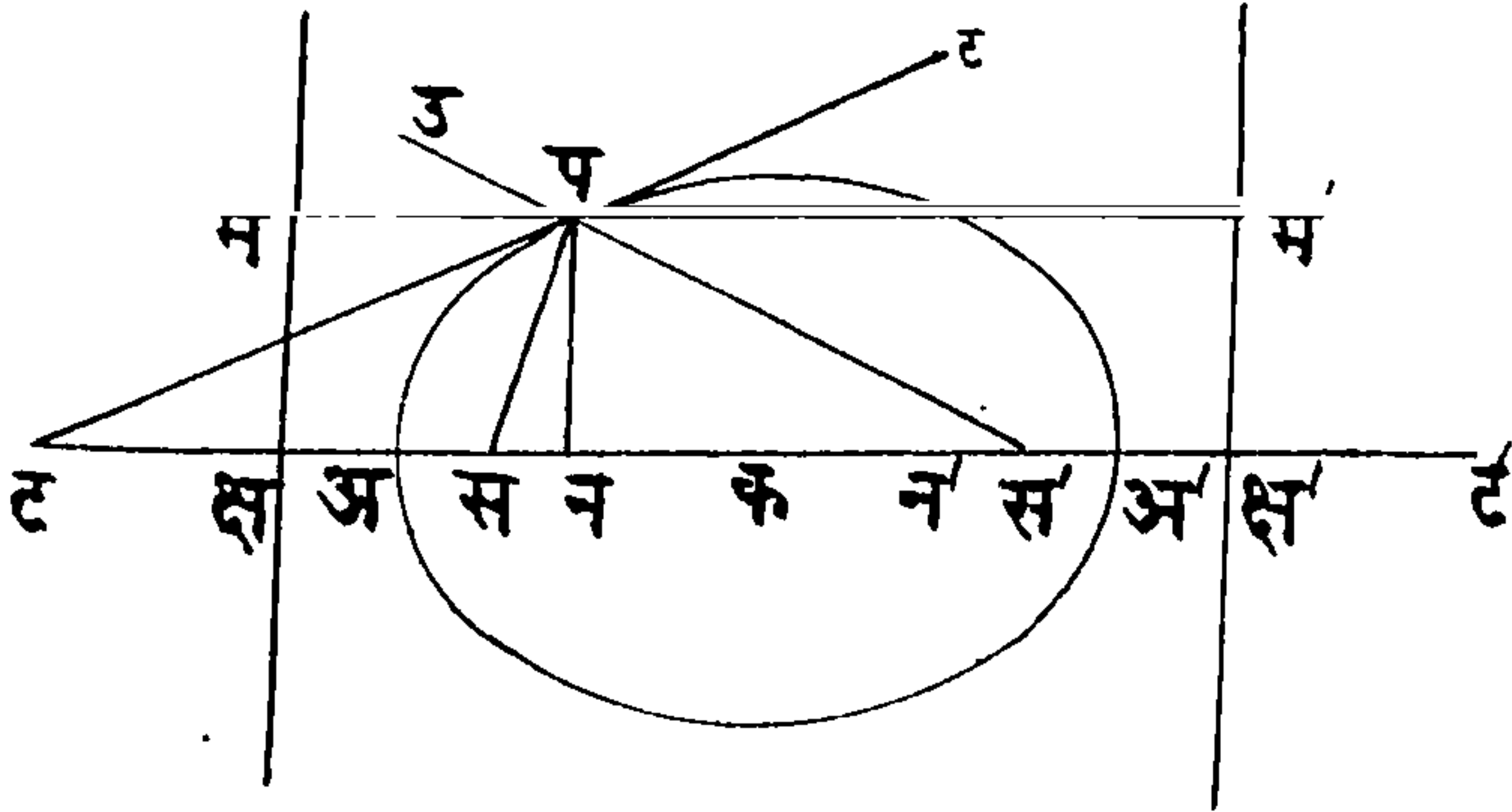
∴ ज्ञघ ही घ-बिन्दुस्थ स्पृक् झाली; (सि.६.उपसि.)

ह्मणजे सनाप्त ज्येच्या अन्यस्थ स्पृशा एकमेकीस ज्ञापिकेंत छेदितात.

सिद्धान्त ९.

२९. जर प-बिन्दुस्थ स्पृक् महत्तराक्षास, वाढविलें असतां, ट बि-
न्दूंत मिळेल व पन ही प बिन्दूची निर्णायिका असेल, तर

∴ कट.कन = कअ^३.



मपम ही महत्तराक्षाशीं समान्तर काढ, व तिला ज्ञापिकांस म,
म बिन्दूंत अनुक्रमें मिळूं दे. सप उ-पर्यंत वाढीव; आतां, ज्याअर्थां
पट सपउ कोनाचे दोन समान भाग करिते, (सि.७.उपसि.)

∴ सट : सट :: सप : सप, (यूक्लिड, ६.सि.अ.)

:: पम : पम, [सि.१.]

:: क्षन : क्षन, [समान्तरता.]

∴ सट + सट : सट - सट :: क्षन + क्षन : क्षन - क्षन;

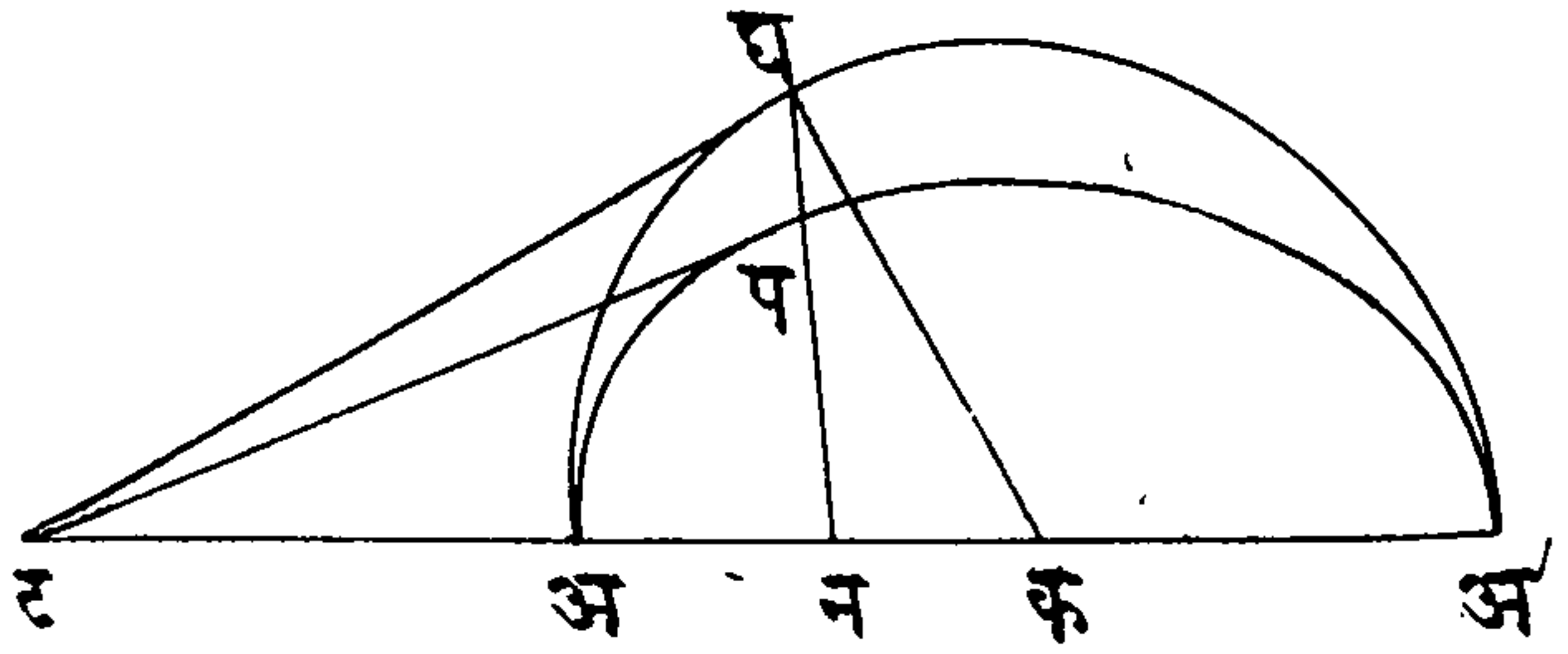
(४६)

शाङ्ख्येद.

अथवा २ कटः २ कसः :: २ कक्षः २ कन,
ह्यणजे कटः कसः :: कक्षः कन,
∴ कट. कन = कस. कक्ष, [यूक्लिड, ६.५६.]
= कअ. (सि.२.)

सिद्धान्त १०.

जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या महत्तराक्षास व्यास कल्पून एरवादे वरुळ-
काढिलें व नपघ ही उभय साधारण निर्णायिका काढिली व तिला ऊन-
संपूर्णकक्षास प बिन्दूंत व वरुळास घ बिन्दूंत मिळूं दिलें, तर त्यांच्या प,
घ बिन्दुस्थ स्पृशा महत्तराक्षास, वाढविलें असतां, एकाच बिन्दूंत मिळतील.



ऊनसंपूर्णकक्षाच्या प-बिन्दुस्थ स्पृशीला महत्तराक्षास, वाढविलें अ-
सतां ट बिन्दूंत मिळूं दे; कघ, घट सांध; आतां अन्तिम सिद्धान्तावरून

कट. कन = कअ = कघ, [त्रिज्या.]

∴ कघट कोन काटकोन आहे, [यूक्लिड, ६.६ किंवा ६.८. उपसि.]
ह्यणून घट ही वरुळाची घ-बिन्दुस्थ स्पृशाली; ह्यणजे प, घ बिन्दुस्थ स्पृ-
शा महत्तराक्षास, वाढविलें असतां, एकाच ट बिन्दूंत मिळतात.

अअ-स व्यास कल्पून काढिलेल्या वरुळास उपकारक वरुळ
ह्यणतात, कारण त्याची ऊनसंपूर्णकक्षाच्या धर्मपरीक्षास मोठी मदत
आहे.

३०. लक्षणा. पट स्पृशेवर लम्बरूप काढिलेल्या पग रेघेस ऊन-
संपूर्णकक्षाच, प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब ह्यणतात.

(४८)

शङ्कुच्छेद.

नगः नकः :: बकैः अकैः.

अक्षाशीं मपर्म समान्तर काढ; तिला ज्ञापिकांस म, म् बिन्दूत मि-
ल्लं दे; सप, सप सांध; आतां, ज्याकारणास्तव पग सपर्स कोना-
चे दोन समान भाग करितो, (सि. १५)

∴ संगः सगः :: सपः सप, [यूक्लिड, ६.३.]

:: पर्मः पम,

:: क्षनः क्षन, [समान्तरता.]

∴ संग-सगः संग+सगः :: क्षन-क्षनः क्षन+क्षन;

अथवा, २ कगः सर्सः :: २ कनः क्षक्ष.

विनिमयानें, २ कगः २ कनः :: सर्सः क्षक्ष;

ह्यणजे, कगः कनः :: सर्सः क्षक्ष,

:: कसः कक्ष,

:: कर्सः कर्ष, (सि. २. उपसि.)

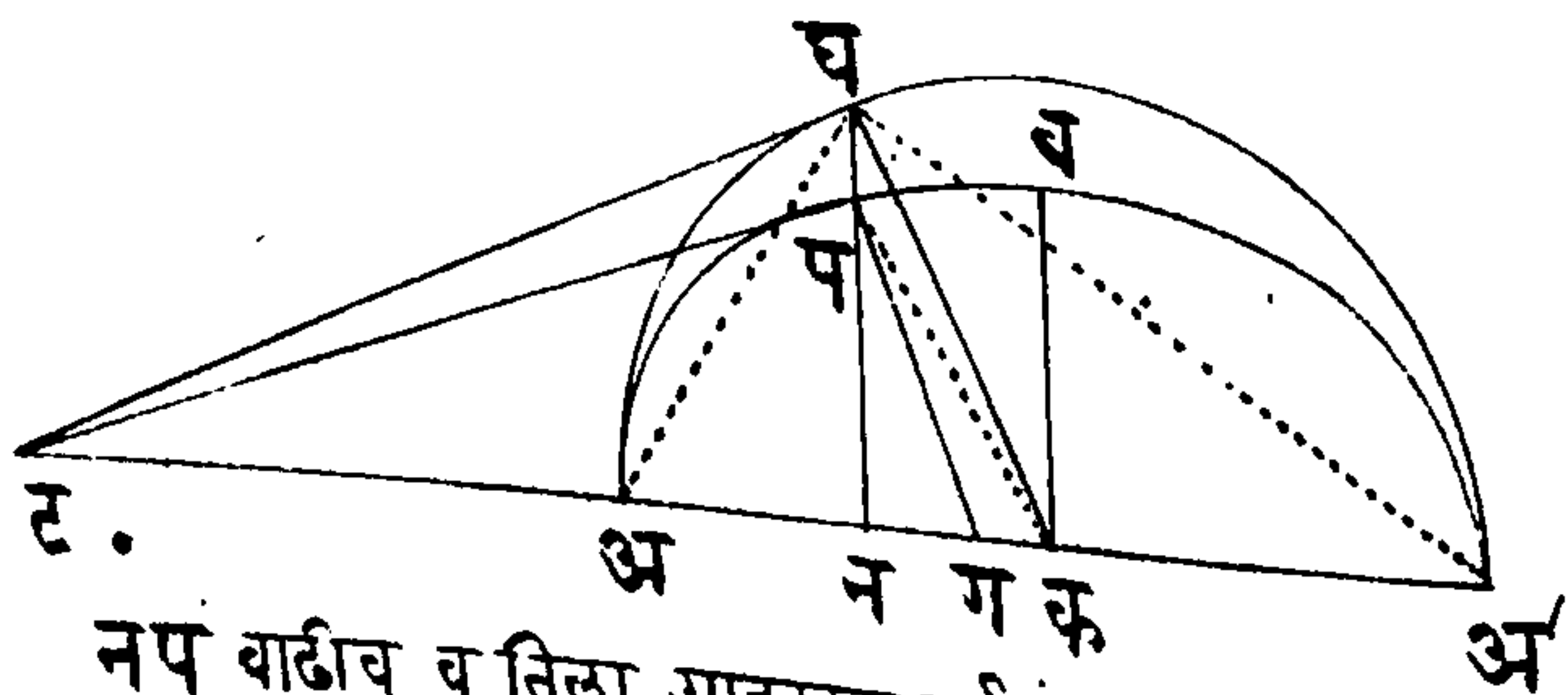
∴ कन-कगः कनः :: कर्ष-कर्सः कर्ष;

ह्यणजे, नगः कनः :: बकैः अकैः [सि. ४.]

सिद्धान्त १३.

३२. जर ऊनसंपूर्णकक्षावरील प बिन्दूची पन निर्णायिका अ-
सेल, तर

पनैः अन-अनः :: बकैः अकैः.



नप वाढीव व तिला उपकारक वर्तुळांस घ बिन्दूत मिळूंदे; पट,

घट स्पृशा काढ व त्यांना वाढविलेल्या महत्तराक्षास ट विन्दूंत मिळूंदे.
(सि. १०)

कघ सांध व प-विन्दुस्थ संपर्कलम्बाला महत्तराक्षास ग विन्दूंत
मिळूंदे; आतां, अन्तिमसिद्धान्ता वरून,

नगः कन :: बकैः अकै. [सि. १२.]

एकाचं उंचीचे काटकोन चौकोन एकमेकाशीं आपआपल्या पायां-
च्या प्रमाणानें असतात,

∴ टन.नगः टन.कन :: बकैः अकै; [यूक्लिड, ६.१.]

अथवा, पनैः घनैः :: बकैः अकै. (यूक्लिड, ६.८.उपसि.)

परंतु, घनैः = अन.अन, [यूक्लिड, ६.८.उपसि.]

व अघर्भ हा सामिवर्तुळांतील कोन आहे ह्मणून तो काटकोन आहे
[यूक्लिड, ३.३१.]

∴ पनैः अन.अन :: बकैः अकै.

उपसि. १. आणखी पनः घनः :: बकः अक.

हा परिपाक ऊनसंपूर्णकक्षाच्या पुढील बहुतेक सिद्धान्तांचा पाया
आहे.

उपसि. २. ज्याअर्धी पनैः घनैः :: बकैः अकै,

∴ पनैः अकै-कनैः :: बकैः अकै,

∴ पनैः अकै-कनै-पनैः :: बकैः अकै-बकै,

अथवा, पनैः अकै-कपैः :: बकैः अकै-बकै.

पनै बकै-पेक्षां नेहमीं कमी असतो.

∴ कपै बकै-पेक्षां ज्यास्ती असतो,

∴ बक ही ऊनसंपूर्णकक्षाच्या केन्द्रापासून काढिलेल्या सर्व रेघांत
ह्रसिष्ठ रेघ असते.

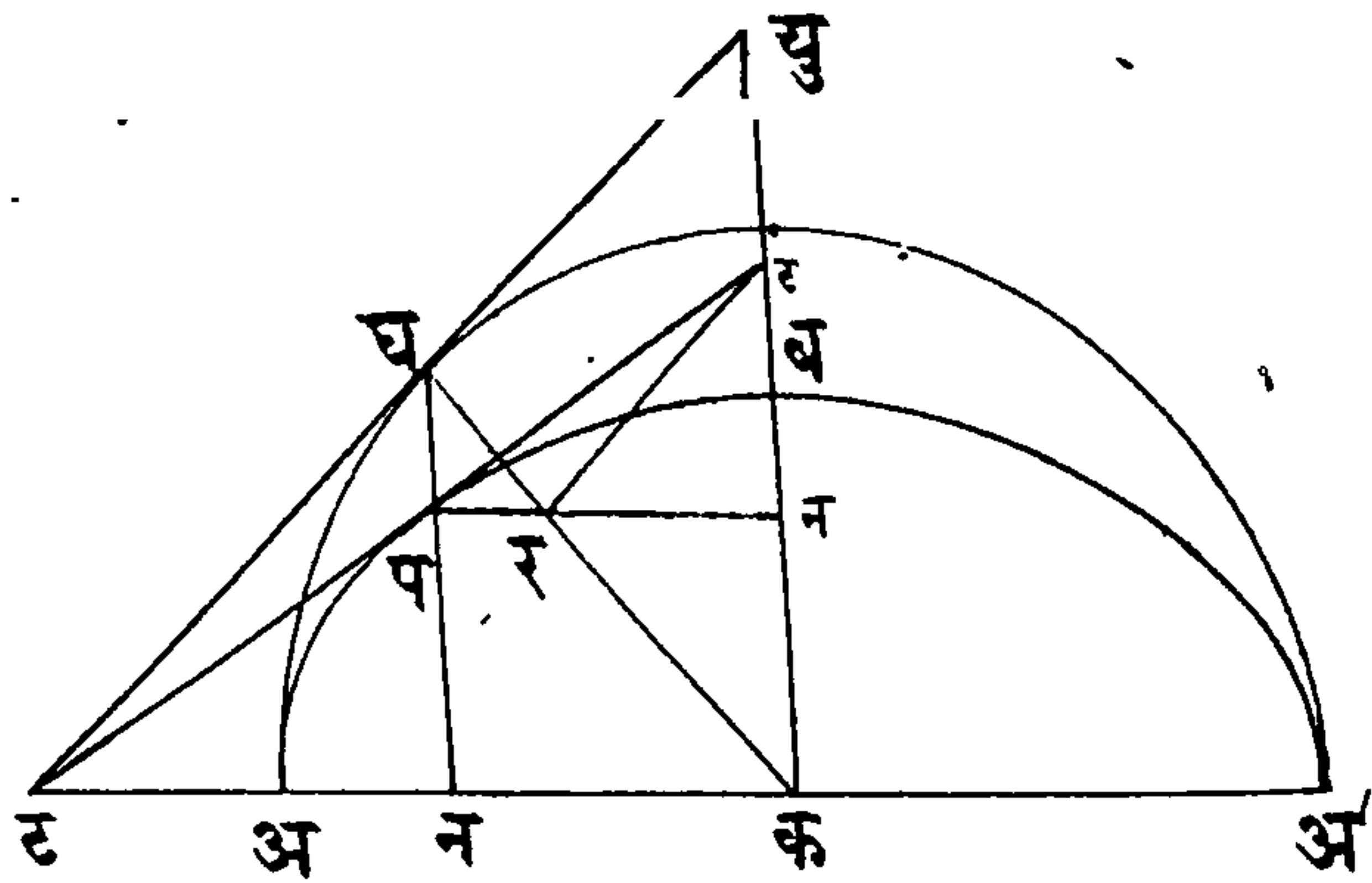
सिद्धान्त १४.

जर ऊनसंपूर्णकक्षाची प-विन्दुस्थ स्पृक वाढविलेल्या कब लघु-

(१०)

शङ्कुच्छेद.

तराक्षास ट बिन्दूत मिळेल, व पन कब-वर लम्बरूप काढिली, तर
कर. कन = बक.



ऊनसंपूर्णकक्षास व उपकारकवर्तुळास उभयसाधारण एकच नपघ
निर्णायिका काढ; व त्यांच्या प, घ बिन्दुस्थ स्पृशांस अनुक्रमे वाढविले-
ल्या महत्तराक्षास ट बिन्दूत (सि. १०) व वाढविलेल्या लघुतराक्षास
र, यु बिन्दूत मिळू दे.

कघ सांध व तिला पन-स र बिन्दूत मिळू दे; आतां ज्या अर्थां
पर कन-शीं समान्तर आहे,

∴ कर : कघ :: पन : घन, [यूक्लिड, ६.२०]

∴ बक : अक. (सि. १३. उपसि. १०)

परंतु कघ = अक, [त्रिज्या]

∴ कर = बक. (१०)

पुनः रर सांधले असतां,

कर : कयु :: पन : घन,

∴ कर : कघ,

∴ रर घयु-शीं समान्तर आहे, [यूक्लिड, ६.२०]

∴ करर कोन कारकोन आहे,

∴ कर. कन = करे. (यूक्लिड, ६.८. उपसि.)

परंतु कर = बक, (१)

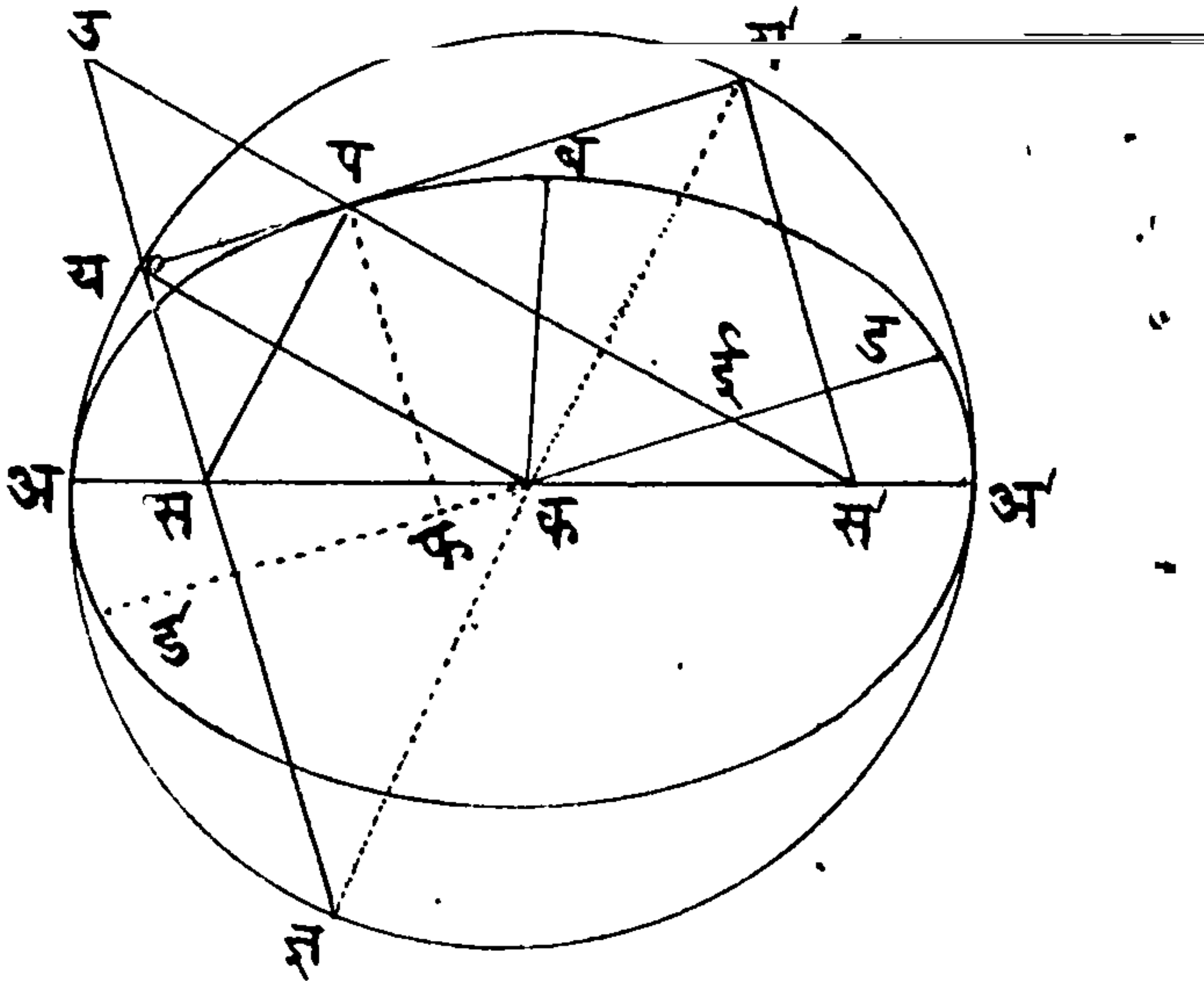
∴ कट. कन = बकै.

विषमापूर्णकक्षाच्या अशाच धर्माविषयी जी सिद्धता दिली आहे ती ह्या सिद्धान्तास ही देतां येईल.

सिद्धान्त १५.

३३. जर स, स नाभीपासून सय सय प-बिन्दुस्थ स्पृ-
शेवर लम्बरूप काढिल्या, तर य, य बिन्दु उपकारक वर्तुळाच्या प-
रिघावर येतील, व

सय. सय = बकै.



सप, सप सांध; सय, सय उ बिन्दूत मिळे पर्यंत वाढीव;
कय सांध; आतां,

सपय कोन = उपय कोन (सि. ७. उपसि.)

सयप कोन = उयप कोन,

व पय बाजू सपय, उपय त्रिकोणांस साधारण आहे,

∴ सपय त्रिकोण = उपय त्रिकोण, सर्वांशीं, [यूक्लिड, १.२६.]

∴ सप = पउ,

∴ सप + सप = संउ.

परंतु सप + सप = अअ, (सि. ३.)

∴ संउ = अअ.

पुनः, ∴ सक = सक, व, सय = यउ, [यूक्लिड, १.२६.]

∴ सक : सक :: सय : यउ, [प्रमाणसाम्य.]

∴ कय संउ-शीं समान्तर आहे, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ कय : संउ :: कस : सस, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ कय = ३ संउ = कअ.

ह्या प्रमाणेच कय = कअ,

∴ य, य हे उपकारक वर्तुळावरील बिन्दु झाले.

आणखी, यस उपकारक वर्तुळास ज्ञ बिन्दूत मिळे पर्यंत वा-
टीव; ज्ञय सांध; आतां

ज्या अर्थी ज्ञयय कोन काटकोन आहे [रचना.]

∴ ज्ञय वर्तुळाच्या केन्द्रांतून जाते,

∴ सकज्ञ कोन = सकय कोन, [यूक्लिड, १.१५.]

∴ सज्ञ = संय, [यूक्लिड, १.४.]

∴ सय.संय = सय.सज्ञ, [सय-नें गुणून]

= अस.अस, (यूक्लिड, ३.३५.)

= कअ- कस, (यूक्लिड, २.५.)

= कअ. (सि. ४.)

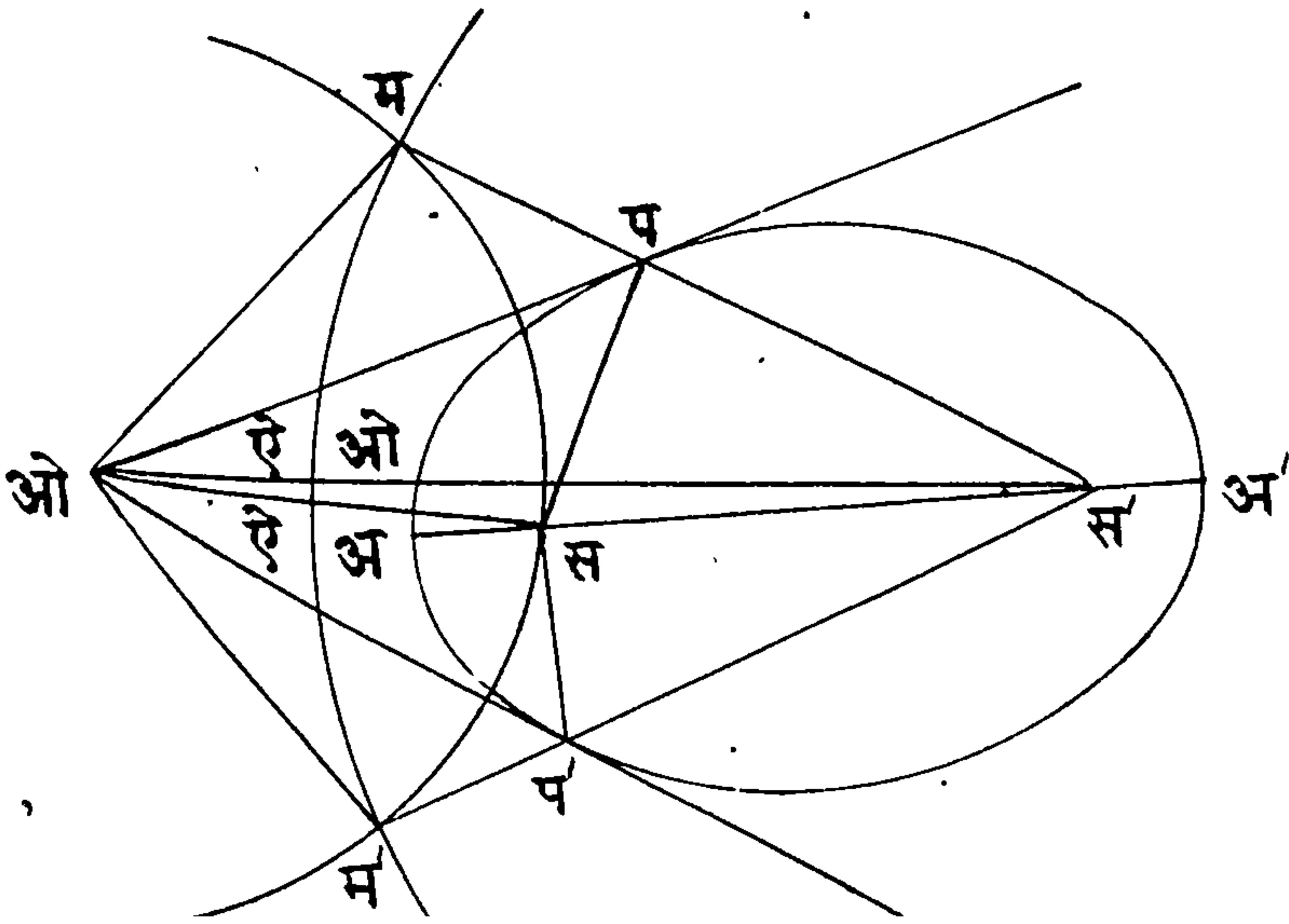
उपसि. जर कड प-बिन्दुस्थ स्पृशेशीं समान्तर काटिली व
तिला सप-स ई बिन्दूत मिळू दिलें, तर

ज्या अर्थी कय पई ही आकृति समान्तरभुज चौकोन आहे.

∴ पई = कय = अक.

सिद्धान्त १६.

३४. ओ ह्या बाह्य बिन्दू पासून ऊनसंपूर्ण कक्षास स्पृग्द्वय काढावयाचे.



स केन्द्र व अअ लांबीची त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढ.

ओस, ओस सांध; व सओ-ला अथवा वाढविलेल्या सओ-ला वर्तुळास ऐ बिन्दूत मिळू दे.

आतां, जर ओ बिन्दु मऐम ह्या वर्तुळाच्या बाहेर असेल, तर ओ-स ओऐ-पेक्षां मोठी होईल हें स्पष्टच आहे; व, ओ जर वर्तुळाच्या-आंत असेल, तरी [देखील ओस > ओऐ.]

ज्याअर्थी ओस + ओस > अअ अथवा सऐ, (सि. ५.)

∴ ओस > ओऐ.

ओ केन्द्र व ओस त्रिज्या कल्पून दुसरें एक वर्तुळ काढ; ह्या वर्तुळाला पहिल्या वर्तुळास म, म बिन्दूत छेदू दे; दुसरें वर्तुळ पहिल्या वर्तुळास नेहमीं छेदीलच कारण ओस ओऐ-पेक्षां मोठी आहे.

सम, सम सांध; ह्यांना ऊनसंपूर्णकक्षास प, प बिन्दूत छेदू दे.

ओप, ओप सांध; आतां ह्या इष्टस्पृशा होतील.

सप, सप सांध; आतां, ज्याअर्थी

सप + सप = अअ = सम, [सि. ३. व त्रिज्या.]

∴ सप = पम.

∴ सप, पओ = मप, पओ, अनुक्रमे,

व ओस = ओम, [त्रिज्या]

∴ ओपस कोन = ओपम कोन, [यूक्लिड, १.८.]

∴ ओप ही प-विन्दुस्थ स्पृक् झाली. (सि. ७. उपसि.)

ह्याप्रमाणेच ओष ही प-विन्दुस्थ स्पृक् होईल.

सिद्धान्त १७.

जर ओ विन्दूपासून ओप, ओष हे ऊनसंपूर्णकक्षास स्पृग्द्वय काढिले, तर ओप, ओष ह्यांच्या समोरील अन्यतरनाभिस्थ कोन - समान होतील. [सि. १६. आकृ. पहा.]

सप, सप, व सर्प, सर्प सांध; सप, सर्प ह्यांस म, म विन्दूपर्यंत वाढीव; व पम सप-बरोबर कर, व तसेच पम सर्प-बरोबर कर.

ओम, ओम, व ओस, ओस सांध.

आतां ज्या अर्थी ओप, पस = ओप, पम, क्रमाने,

व ओपस कोन = ओपम कोन, (सि. ७. उपसि.)

∴ ओस = ओम, [यूक्लिड, १.४.]

व ओसप कोन = ओमप कोन.

ह्याप्रमाणेच ओस = ओम,

व ओसप कोन = ओमप कोन, [यूक्लिड, १.४.]

∴ ओम = ओम

पुनः, ज्या अर्थी सम = सप + सप = अअ, [सि. ३.]

∴ सम = सम;

आणखी, ज्या अर्थी ओस, सम = ओस, सम, अनुक्रमे,

व ओम = ओम,

∴ ओसम कोन = ओसम कोन, [यूक्लिड, १.८.]

(५६)

शङ्कुच्छेद.

ओघ, ओर्घ वाढीव; ह्यांना महत्तराक्षार वाढवून ट, ट् बिन्दू-
त मिळू दे.

नघ, नर्घ निर्णायिका काढ; ह्यांना वाढवून वर्तुळासघ, घ बिन्दू-
त मिळू दे.

आतां टघ, टर्घ ह्या उपकारक वर्तुळाच्या स्पृशा होतील. (सि. १०.)

टघ, टर्घ ह्या ओ बिन्दूत मिळेपर्यंत वाढीव; कओ सांध व तिला
घघ ज्येस व बिन्दूत व वर्तुळास घ बिन्दूत मिळू दे.

आतां, बक-चे अक-शीं जें अभिन्न प्रमाण असतें त्याच प्रमा-
णानें ऊनसंपूर्णकक्षाच्या व उपकारकवर्तुळाच्या अनुगुण निर्णायिका अ-
सतात; ह्मणून अर्अ-वर लम्बरूप काढिलेल्या ज्या ओळ, पम, वन तीन
रेषा त्या अनुक्रमानें ओ, प, घ. बिन्दूतून जातील.

ओळ ही टघ-स अथवा टर्घ-स ज्या बिन्दूत मिळते तो बिन्दु
जर ओ असेल, तर आपणास रवालीं लिहिलेले अनुपात अनुक्रमानें
उपलब्ध होतील,

कओ : कओ :: नघ : नघ,

:: बक : अक,

अथवा कओ : कओ :: नर्घ : नर्घ,

:: बक : अक,

∴ ओओ अर्अ-वर लम्बरूपानें पडते.

ह्याप्रमाणेंच पप, व व अर्अ-वर लम्बरूपानें पडतील.

∴ ओओ, पप, व व समान्तर आहेत.

ह्यास्तव (१) घघ : वघ :: घघ : वघ.

परंतु घघ = वघ, वर्तुळामुळे,

∴ घघ = वघ;

ह्मणजे घघ-चे व बिन्दूत दोन समान भाग झाले.

(२.) ज्याअर्थी नघ : नघ :: नर्घ : नर्घ;

त्या अर्थी घघ, वघ अक्षास, वाढविलें असतां, एकाच बिन्दूत मिळतील

हें स्पष्ट आहे.

ऊनसंपूर्णकक्ष व वर्तुळ ह्यांच्या प, प बिन्दुस्थ स्पृशाही अक्षास एकाच बिन्दूत मिळतील.

आतां वर्तुळाची प-बिन्दुस्थ स्पृक् घर्ष-शीं स्पष्टपणे समान्तर आहे,
व

नघ : नप :: मप : मप ,

∴ प-बिन्दुस्थ स्पृक् घर्ष-शीं समान्तर आहे.

(३.) जर कष सांधले, तर, ज्याअर्थी कषओ कोन काटकोन आहे व कओ घर्ष-वर लम्बरूपानें पडते,

∴ कव : कष :: कष : कओ, (यूक्लिड, ६. ८. उपसि.)

अथवा, ज्याअर्थी कष = कप,

∴ कव : कप :: कष : कओ.

परंतु कव : कष :: कव : कप,

व कष : कओ :: कष : कओ,

∴ कव : कप :: कष : कओ,

∴ कओ. कव = कप.

उपसि. जर ऊनसंपूर्णकक्षांत परस्परांशीं समान्तर पाहिजेत तितक्या ज्या काढिल्या, तर त्या सर्व ज्यांचे मध्यबिन्दु ज्येशीं समान्तर काढिलेली स्पृक् ज्या बिन्दूत ऊनसंपूर्णकक्षास स्पर्श करिते त्या बिन्दू पर्यंत केन्द्रा पासून काढिलेल्या रेषेत येतील हें स्पष्टच आहे.

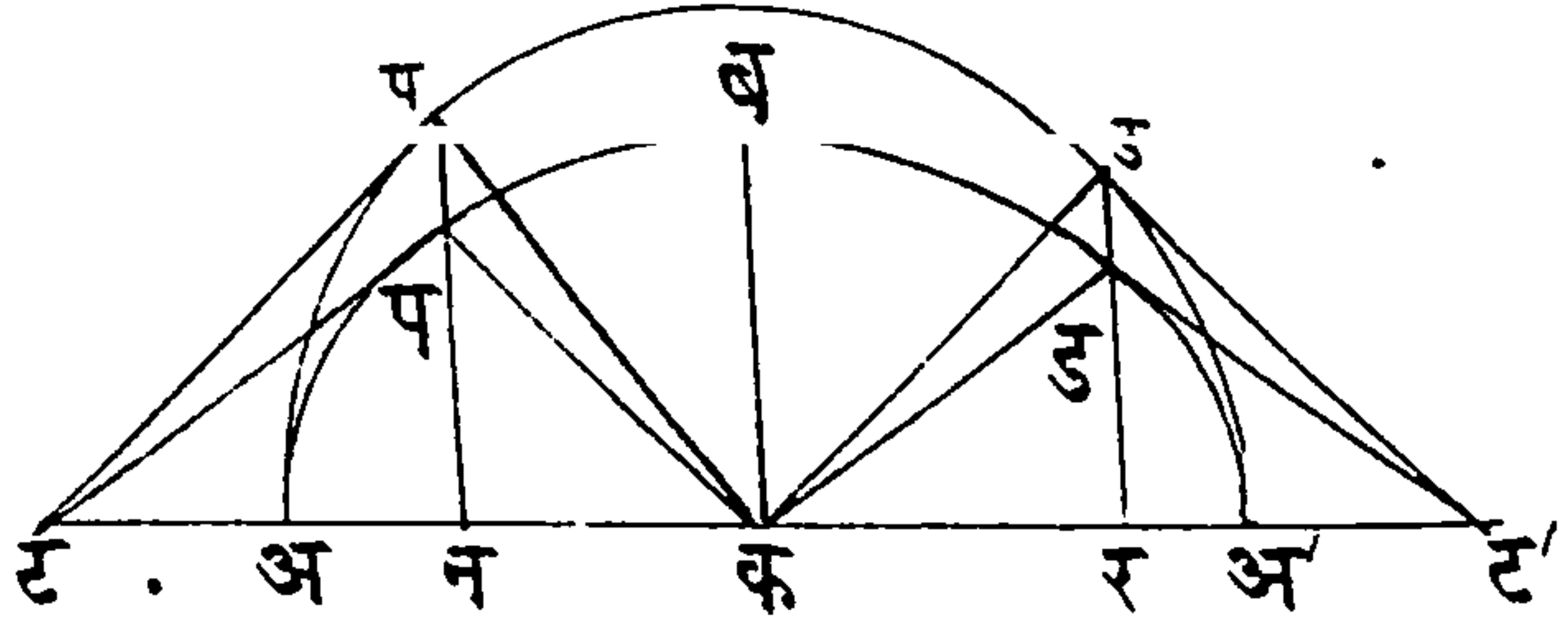
लक्षणा. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या केन्द्रांतून काढिलेल्या व त्याला प,प बिन्दूत मिळणाऱ्या पकप रेषेस व्यास म्हणतात.

हा व्यास स्वान्त्यस्थ स्पृशांशीं समान्तर ज्या ज्या असतात त्या सर्वांचे दोन समान भाग करितो; व ज्यान्त्यस्थ स्पृशा एकमेकीस त-ज्यांनु रूप व्यासांत एकाच बिन्दूत छेदितील, हें अर्थातच झालें.

३६. लक्षणा. जर कड प-बिन्दुस्थ स्पृशीं समान्तर काढिली, तर कड कप-शीं सहचरित असें म्हणतात.

सिद्धान्त १९.

ऊनसंपूर्णकक्षांत जर कड कप-शीं सहचरित असेल, तर कप कड-शीं सहचरित होईल.



पन, डर निर्णायिका काढ; त्यांना उपकारक वर्तुळास प, ड बिन्दूंत मिळेपर्यंत वाढीच.

कप, कप व कड, कड.सांध; टप, टप, टड, टड स्पृशा काढ. [सि. १०.]

आतां, ज्याअर्थी कड पट-शीं समान्तर आहे,

∴ पनट त्रिकोण डरक त्रिकोणाशीं सरूप आहे;

∴ टन : कर :: पन : डर, [यूक्लिड, ६.४.]

:: नप : रड, (सि. १३. उपसि.)

∴ टप कड-शीं समान्तर आहे, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ पकड कोन काटकोन आहे,

∴ कप टड-शीं समान्तर आहे,

∴ पकन त्रिकोण डरट त्रिकोणाशीं सरूप आहे,

∴ नक : रट :: नप : रड, [यूक्लिड, ६.४.]

:: नप : रड,

∴ कप डट-शीं समान्तर आहे

∴ कप कड-शीं सहचरित झाला.

उपसि. ज्याअर्थी करड व कनप हे त्रिकोण डरट त्रिकोणाशीं सरूप आहेत, (यूक्लिड, ६.८.)

∴ करड त्रिकोण कनप त्रिकोणाशीं सरूप आहे,

व कड = कप, [त्रिज्या.]

∴ करड त्रिकोण = कनप त्रिकोण, सर्वाशीं, [यूक्लिड. १.२६.]

∴ कन = रड व कर = नप

व्यास्तव डर : कन :: डर : रड,

:: बक : अक;

आणखी पन : कर :: पन : नप,

:: बक : अक.

सिद्धान्त २०.

३७. जर कप व कड हे सामिसहचरित व्यास असतील, व पन, डर व्हा प, ड बिन्दूंच्या निर्णायिका असतील, तर

(१.) कन^३ + कर^३ = अक^३.

(२.) पन^३ + डर^३ = बक^३.

(३.) कप^३ + कड^३ = अक^३ + बक^३.

नप, रड त्यांना उपकारक वर्तुळास प, ड बिन्दूंत मिळेपर्यंत वा-
ढीच; आतां

कन = रड, (सि. १९. उपसि.)

∴ कन^३ + कर^३ = रड^३ + कर^३,

= कड^३, [यूक्लिड, १.४७.]

= कअ^३, [त्रिज्या.]

पुनः, पन : नप :: बक : अक, [सि. १३. उपसि. १.]

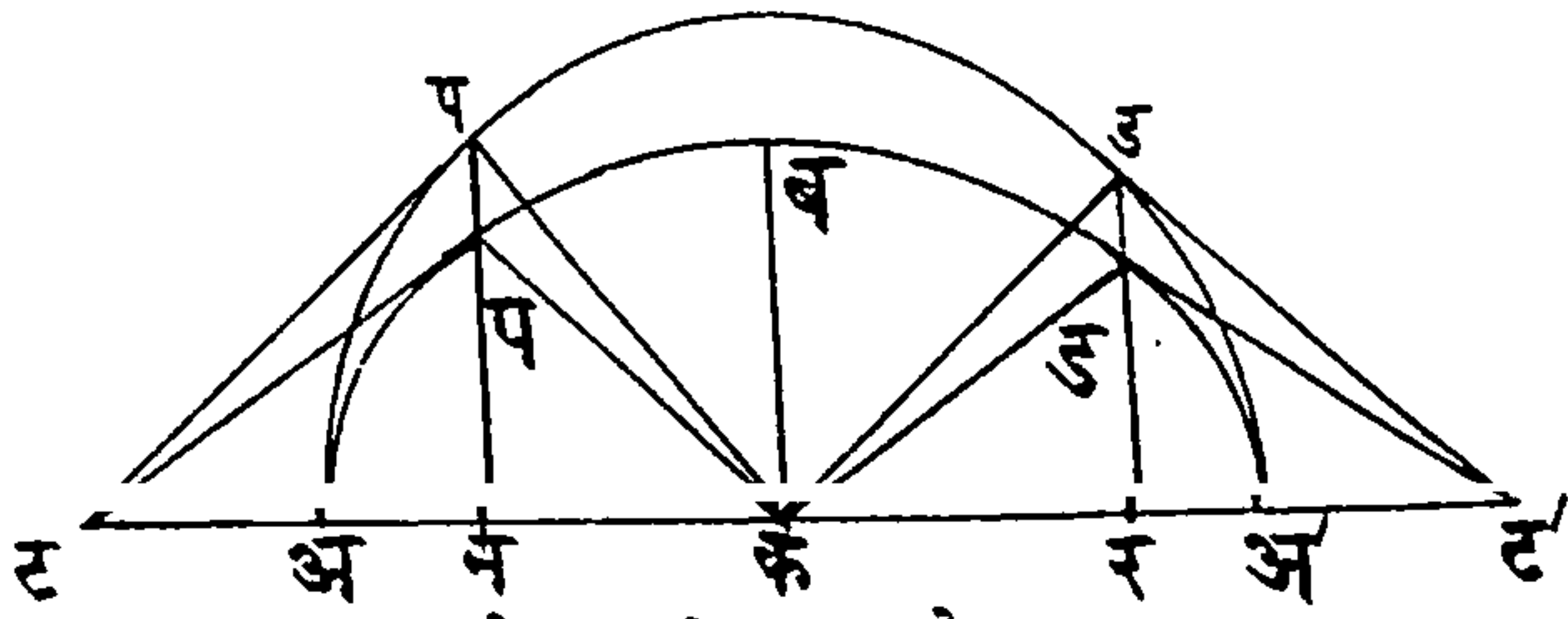
∴ पन^३ : नप^३ :: बक^३ : अक^३.

व्याप्रमाणेंच डर^३ : रड^३ :: बक^३ : अक^३,

∴ पन^३ + डर^३ : नप^३ + रड^३ :: बक^३ : अक^३;

परंतु नप^३ + रड^३ = कर^३ + कन^३, [सि. १९. उपसि.]

= अक^३,



$$\therefore \text{पनै} + \text{डरै} = \text{बकै},$$

$$\text{व कनै} + \text{करै} = \text{अकै},$$

$$\therefore \text{कपै} + \text{कडै} = \text{अकै} + \text{बकै}.$$

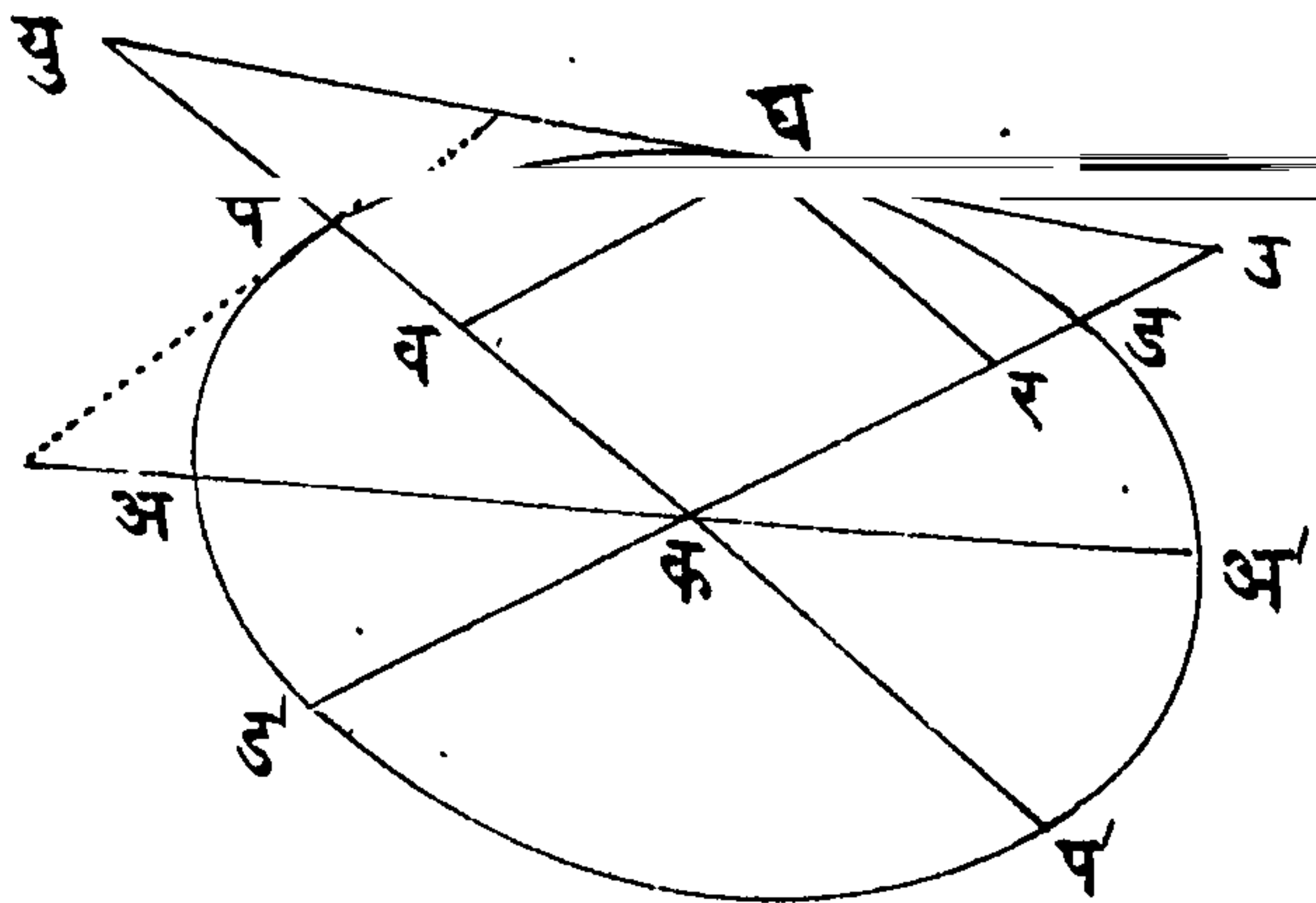
३८. लक्षणा. प-बिन्दुस्थ स्पृशोशीं समान्तर काढिलेल्या व क-प-स व बिन्दूंत मिळणाऱ्या घव रेघेस कप व्यासाची निर्णायिका लक्षणानात.

सिद्धान्त २१.

जर घव ही पकप व्यासाची निर्णायिका असेल, व कड कप शीं सहचरित असेल, तर

$$\text{घवै} : \text{पव.पव} :: \text{कडै} : \text{कपै}.$$

युघउ स्पृक काढ; तिला वाढविलेल्या कप, कड ह्यांस युउ बिन्दूंत मिळूंदे; घर कप-शीं समान्तर काढ, व तिला कड-सरबिन्दूंत मिळूंदे.



आतां, ज्या अर्धीं करः कडः :: कडः कउ, (सि. १८.)

∴ करैः कडैः :: करः कउ, (यूक्लिड, ६.२०. उपसि.)

अथवा घवैः कडैः :: युवः कयु. [यूक्लिड, ६.२०.]

पुनः, ज्या अर्धीं कयुः कपः :: कपः कव, (सि. १८.)

∴ कयुः कवः :: कपैः कवै, [यूक्लिड, ६.२०. उपसि.]

∴ कयु-कवः कयुः कपै-कवैः कपै,

अथवा युवः कयुः :: पव.पवः कपै. [यूक्लिड, २.५]

ह्यास्तव घवैः कडैः :: पव.पवः कपै,

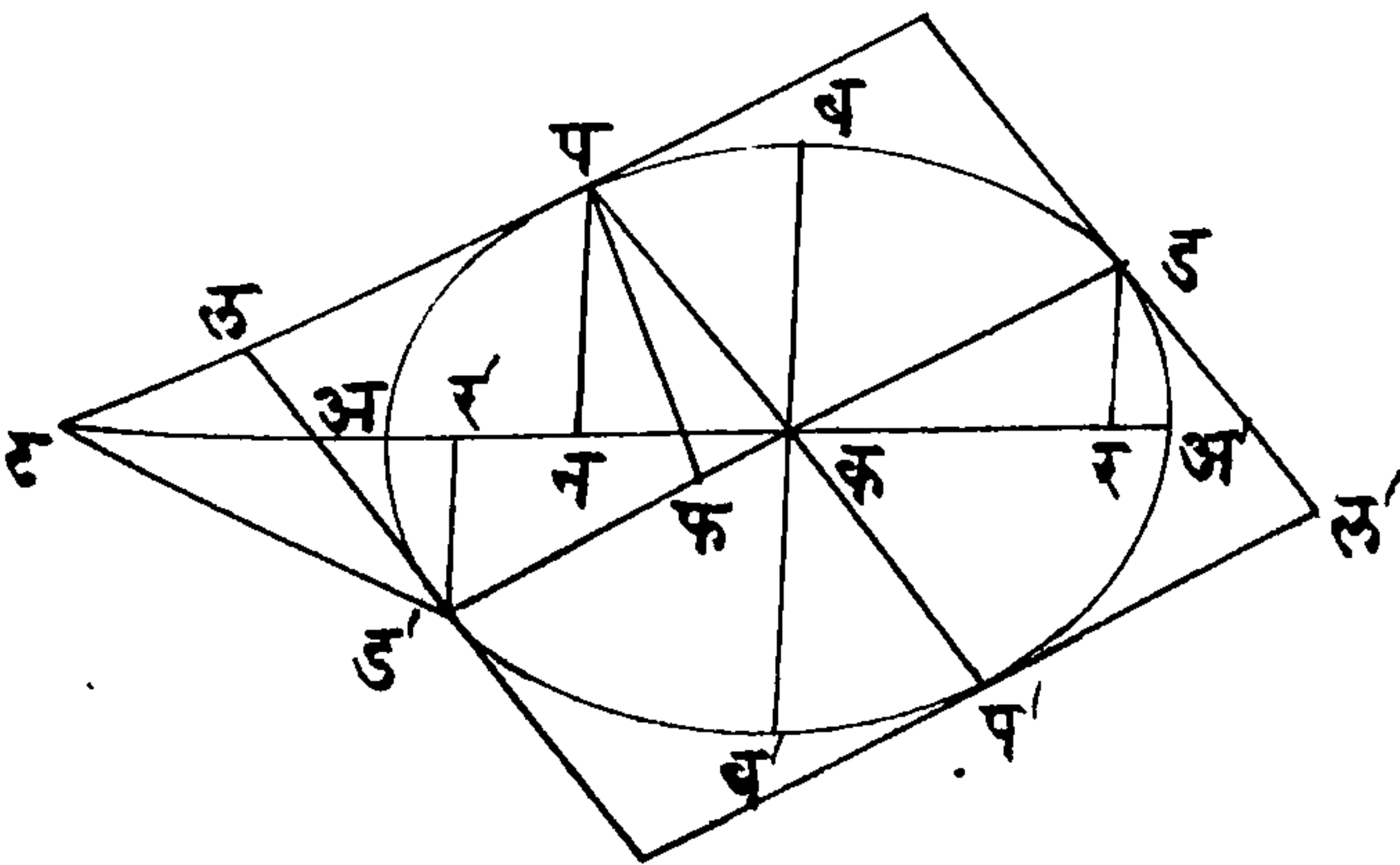
ह्मणजे घवैः पव.पवः :: कडैः कपै.

सिद्धान्त २२.

३९. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या सहचरित व्यास युग्मान्त्रस्थ स्पृशांनीं-
रचिलेल्या समान्तरभुज चौकोनार्धे क्षेत्र ऊनसंपूर्णकक्षाच्या अक्षांनीं
रचलेल्या काटकोन चौकोना बरोबर असते.

पकप, डकड हे सहचरित व्यास युग्म असूंदे; व प, प, ड, ड
बिन्दुस्थ स्पृशांना एक समान्तरभुज चौकोन रचूंदे.

प- बिन्दुस्थ स्पृशेला वाढविलेल्या कअ-स ट बिन्दूंत मिळूंदे;
ड ट सांध.



पन, डर, डर निर्णायिका काट; आतां, ज्याअर्थीं पट कड-
शीं समान्तर आहे, त्या अर्थीं पड समान्तरभुज चौकोन कट ड
त्रिकोणाच्या दुपट आहे [यूक्लिड, १.४१.]; म्हणून तो कट, डर
ह्यांनीं रचलेल्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे.

आतां डर : कन :: बक : अक, (सि. १९. उपसि.)

∴ कट. डर : कट. कन :: बक : अक, (यूक्लिड, ६.१०)

:: बक : अक : अक. (यूक्लिड, ६.१०)

परंतु कट. कन = अक, [सि. ९.]

∴ कट. डर = अक. बक,

∴ लल समान्तरभुजचौकोन = ४ पड समान्तरभुज चौकोन,
= ४ अक. बक,
= अअ. बब.

उपसि. जर पफ. डकड-वर लम्बरूप काटिली व तिला क-
ड-स फ बिन्दूत मिळू दिलें, तर

पफ. कड = पड समान्तरभुज चौकोनाचें क्षेत्र,
= अक. बक.

सिद्धान्त २३.

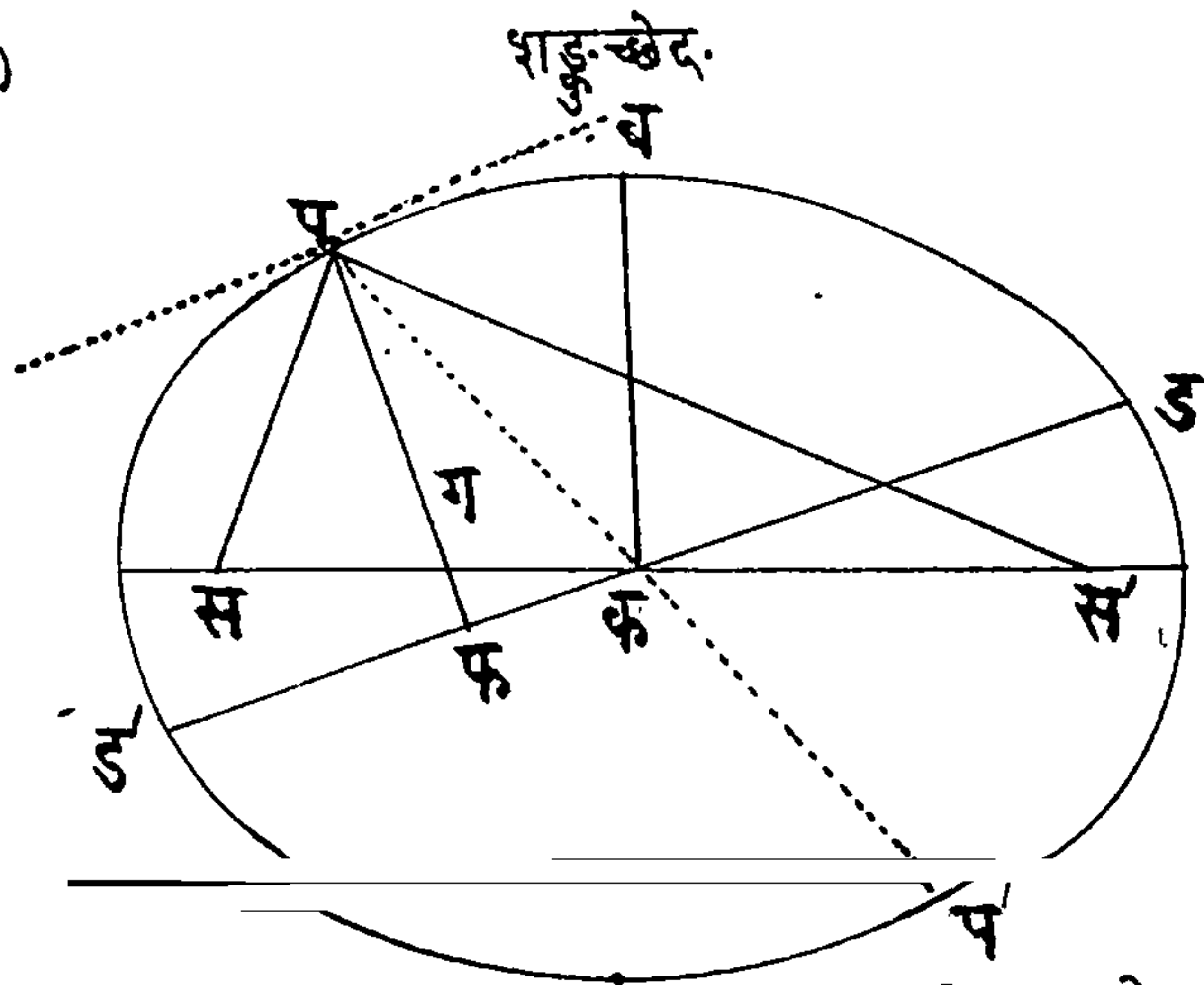
४०. जर कप, कड सहचरित व्यास असतील, व पफ कड-वर
लम्बरूप काटिली व तिला कअ-स ग बिन्दूत मिळू दिलें, तर

पफ. पग = बक.

पन निर्णायिका काट; तिला कड-स रच बिन्दूत मिळे पर्य-
त वाढीव.

पन कब-वर लम्बरूप काट; प- बिन्दुस्थ स्पृशीला वाढवि-
लेल्या कब-स र बिन्दूत मिळू दे.

आतां, न, फ बिन्दुस्थ कोन काटकोन आहेत यास्तव नरच-
फग ह्या चतुर्भुजाकृति सभोचतीं वर्तुळ [यूक्लिड, ३.२२. चा



गुणून, सप.सप : सग.सग :: कअः कसै,
 सप.सप : सप.सप-सग.सग :: कअः कअ-कसै.
 परंतु सप.सप-सग.सग = पगै, [सि. ११] व (यूक्लि-
 ड; ६. सि. ब.)

∴ सप.सप : पगै :: कअः बकै. [सि. ४.]
 परंतु (१) पासून कडै : पगै :: कअः बकै,
 ∴ सप.सप = कडै.

ह्या सिद्धान्तांतील परिपाक सि. १५ पासून ही सहज काटि-
 तां घेईल.

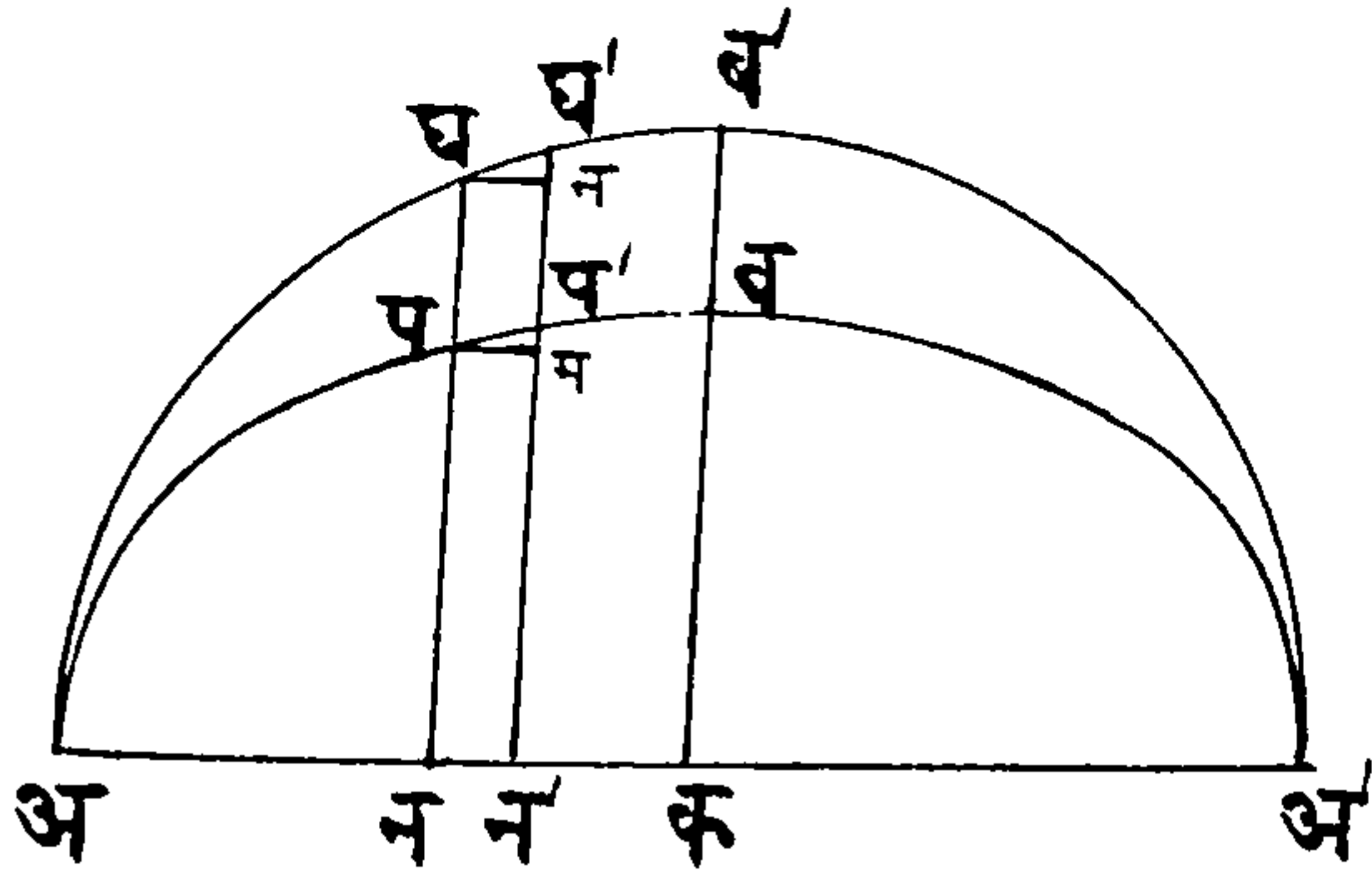
सिद्धान्त २५.

४२. बक : अक :: ऊनसंपूर्णकक्षाचें क्षेत्र : उपकारक वर्तु-
 ळाचें क्षेत्र.

पन, पन ह्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या दोन निर्णायिका एकमेकी
 जवळ आहेत असें मान.

नप, नप ह्यांना उपकारक वर्तुळास घ, घ बिन्दूंत मिळे प-
 र्यंत वाढीव.

पम, घन ह्या घर्न-वर लम्बरूप काढ.



आतां,

[यूक्लिड, ६.१.]

पन समान्तरभुजचौकोन : घन समान्तरभुजचौकोन :: पन : घन,
:: बक : अक.

[सि. १३. उपसि.]

ऊनसंपूर्णकक्षांत व उपकारकवर्तुळांत जे सरूप समान्तरभुजचौकोन काढूं त्या सर्गींविषयीं हाच परिपाक यथार्थ असतो.

ह्यास्तव ऊनसंपूर्णकक्षांतील सर्व समान्तरभुजचौकोनांची बेरीज : उपकारकवर्तुळांतील सर्व समान्तरभुजचौकोनांची बेरीज :: बक : अक.

असंख्य समान्तरभुजचौकोन काढिले तरी हेंच अनुभवास येईल.

परंतु, असंख्य समान्तरभुजचौकोन काढिले व प्रत्येकाची रुंदी अमर्याद कमी केली, तर ऊनसंपूर्णकक्षांतील सर्व समान्तरभुजचौकोनांची बेरीज ऊनसंपूर्णकक्षाचे क्षेत्रा बरोबर होईल, व उपकारकवर्तुळांतील सर्व समान्तरभुजचौकोनांची बेरीज उपकारकवर्तुळाचे क्षेत्रा बरोबर होईल.

ह्यास्तव

ऊनसंपूर्णकक्षाचें क्षेत्र : उपकारकवर्तुळाचें क्षेत्र :: बक : अक.

४३. लक्षणा. जर प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्बावरील ओ बिन्दूस केन्द्र व ओप-स त्रिज्या कल्पून ऊनसंपूर्णकक्षास प बिन्दूंत स्पर्श करणारें व त्यालाच घ बिन्दूंत छेदणारें वर्तुळ काढिलें, तर घ बिन्दूस प बिन्दूच्या अमर्याद जवळ आणिलें असतां त्या वर्तुळास प-बिन्दुस्थ चलमान वर्तुळ ह्णतात.

परंतु घर्षः : पव.पव :: कडै : कर्प, (सि.२१.)

∴ पव.रउ : पव.पव :: कडै : कर्प,

अथवा रउ : पव :: कडै : कर्प.

आतां वर्तुळ जेव्हां प-बिन्दुस्थ बलमान वर्तुळ होते, तेव्हां र, घ बिन्दु प बिन्दूपर्यंत येऊन तद्रूप (प) होतात, व रउ रेघ पह रेघेबरोबर होते, व

पव पर्प-बरोबर अथवा २ कप बरोबर होते.

व्यास्तव, पह : २ कप :: कडै : कर्प,

∴ पह.कप : २ कर्प :: २ कडै : २ कर्प, [समच्छेद.]

∴ पह.कप = २ कडै.

सिद्धान्त २७.

जर पयु ही ऊनसंपूर्णकक्षाच्या प-बिन्दुस्थ बलमान वर्तुळाचा व्यास असेल, व पफ कड-वर लम्बरूप काढिली, तर [सि.२६. आकृ.पहा.]

पयु.पफ = २ कडै.

ज्या अर्थां पहयु त्रिकोण पफक त्रिकोणाशीं सरूप आहे,

∴ पयु : पह :: कप : पफ, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ पयु.पफ = पह.कप, [यूक्लिड, ६.१६.]

= २ कडै. (सि.२६.)

सिद्धान्त २८.

जर पऐ ही ऊनसंपूर्णकक्षाच्या नाभींतून जाणारी बलमान वर्तुळाची व्या असेल, तर [सि.२६. आकृ.पहा.]

पऐ.अक = २ कडै.

पऐ-ला कड-स ई बिन्दूंत मिळूंदे; आतां, ज्या अर्थां पऐयु, पईफ त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ पऐ : पयु :: पफ : पई. [यूक्लिड, ६.४.]

f)

शङ्कुच्छेद.

परंतु पई = अक, (सि. १५. उपसि.)

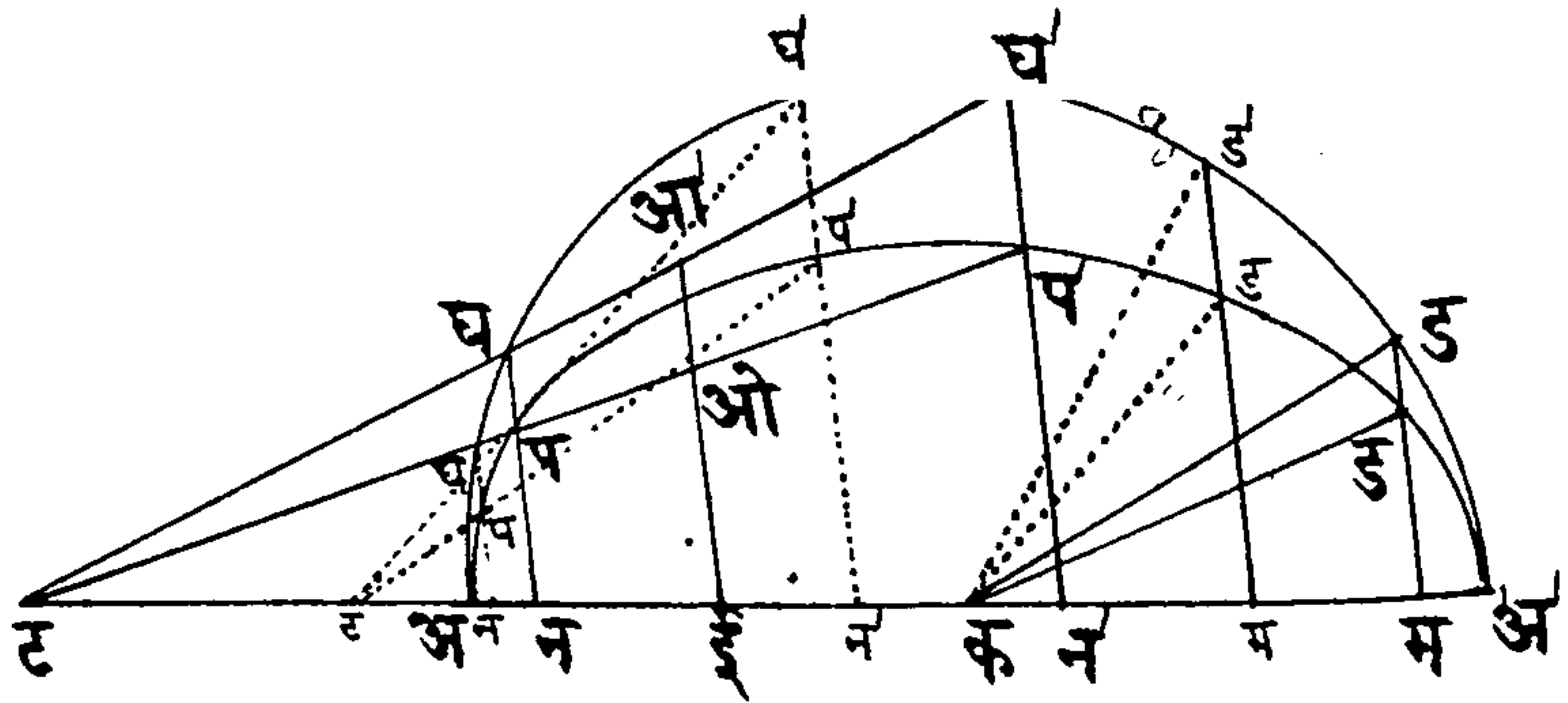
∴ पऐ : पद्यु :: पफ : अक,

∴ पऐ.अक = पद्यु.पफ, [यूक्लिड, ६-^{१६.}
= २ कडै. (सि. २७.)

सिद्धान्त २९.

४४. जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या दोन ज्या एकमेकीस छेदितील, तर त्यांच्या खण्डांनीं स्वलेले काटकोन चौकोन त्या ज्यांशीं समान्तर असणाऱ्या व्यासांच्या वर्गाशीं समप्रमाण होतील.

पओप ही ओ बिन्दूतून काढिलेली ज्या असूंदे; व कड ही सामिव्यास निचेशीं समान्तर काट.



नप, नर्प, मड निर्णायिका काट; त्यांना उपकारक वर्तुळास घ, घ, ड बिन्दूत पिळे पर्यंत वाढीव; आतां,

ज्याअर्थी नप : नघ :: नर्प : नर्घ, (सि. १३. उपसि. १.)

∴ पप, घघ वाढविलेल्या अक्षास एकाच ट बिन्दूत मिळतील हे स्पष्ट आहे.

ज्याअर्थी नप : नघ :: मड : मड (सि. १३. उपसि. १.)

व टपप कड-शीं समान्तर आहे,

∴ टघघ कड-शीं समान्तर आहे.

ईओ नघ-शीं अथवा नर्घ-शीं समान्तर काट; तिला घघ-स

ओ बिन्दूत मिळेपर्यंत वाढीव; आतां

पओः घओः : टओः टओ, [यूक्लिड, ६.२.]

व पओः घओः : टओः टओ, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ पओ.पओः घओ.घओः : टओ, : टओ,

:: कडै : कडै,

:: कडै : अकै. [त्रिज्या]

विनिमयाने, पओ.पओः कडै : : घओ.घओः : अकै.

पुनः, जर पओप ही दुसरी एक ज्या ओ बिन्दूतून काढिली,

तर

ज्याअर्धी ईओः ईओः : : बक : अक, [सि.१३.उपसि.३]

∴ पओप-शीं अनुरूप असणारी उपकारक वर्तुळांतील घघ ज्या ओ

बिन्दूतून जाईल हें स्पष्टच आहे; व, जर कड हा सामिच्यास पप-शीं

समान्तर असेल, तर आपणास पूर्वी प्रमाणेच खालील अनुपात उपल-

ब्ध होईल.

पओ.पओः कडै : : पओ.घओः : अकै.

परंतु घओ.घओः = घओ.घओ, (यूक्लिड, ३.२५.)

∴ पओ.पओः कडै : : पओ.पओः कडै,

अथवा पओ.पओः पओ.पओः : : कडै : कडै.

ओ हा बिन्दु ऊनसंपूर्णकक्षाच्या बाहेर जरी असेल तथापि हाच

परिपाक यथार्थ असतो हें सिद्ध करून दाखवितां येईल.

सिद्धान्त ३०.

जर घघ ही कप ज्यासाची निर्णायिका असेल, व प, घ, घ

त्या तीन बिन्दूतून जाणारे एखादे वर्तुळ काढिलें, तर तें ऊनसंपूर्णक-

क्षास चौथ्या एका बिन्दूत छेदील व तो बिन्दु प बिन्दूच्या स्थानावर

मात्र अवलम्बून राहील.

पन निर्णायिका काढ; तिला ऊनसंपूर्णकक्षास प बिन्दूत -

(७०)

शङ्कुच्छेद.

मिळेपर्यंत वाढीव; आतां, ज्या अर्थी नट ही प अथवा प ह्या अन्य-
तर बिन्दूची उपस्पृक आहे,

त्या अर्थी कट. कन = अक, (सि. ९.)

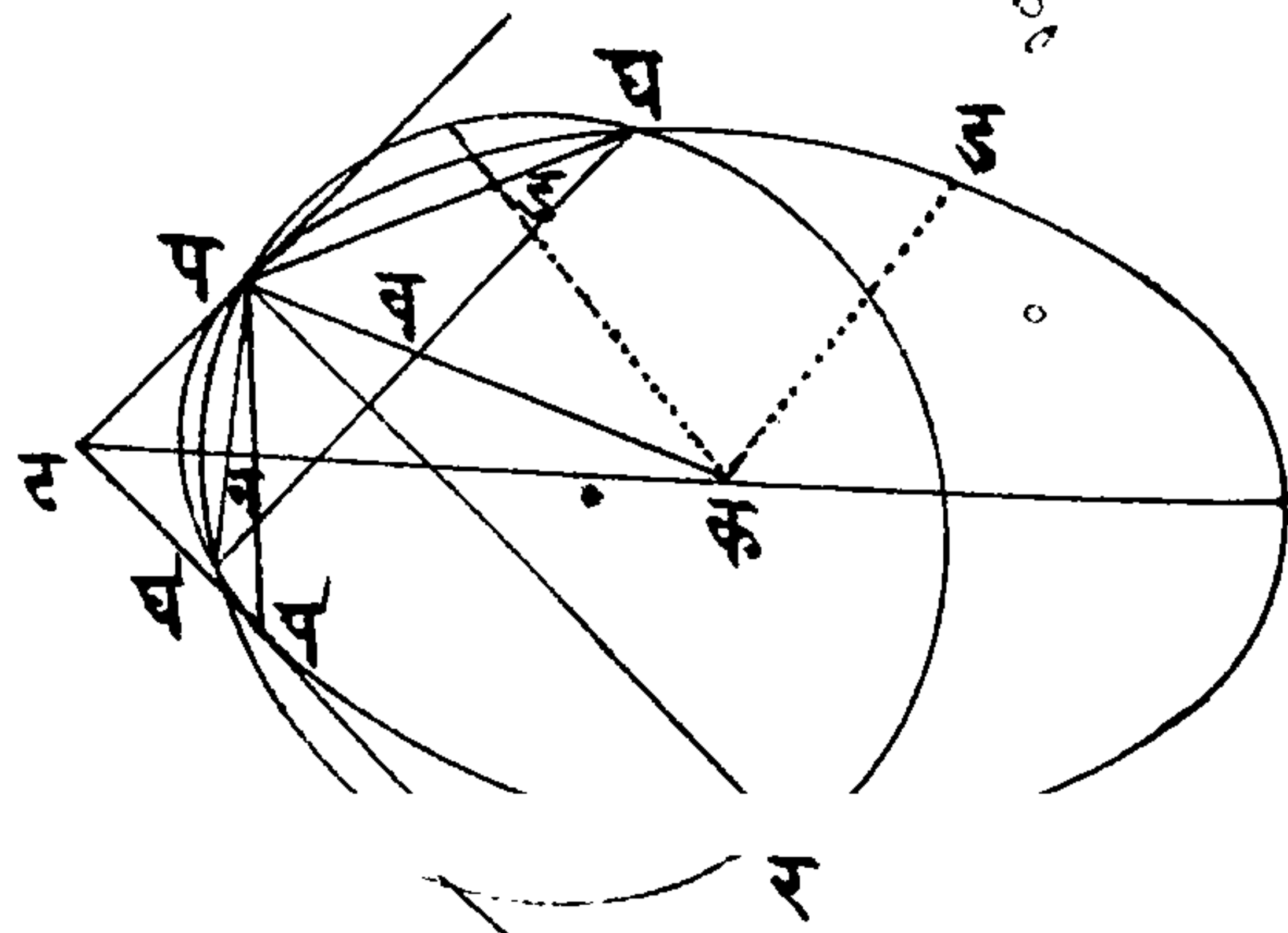
ह्मणूनच प, प बिन्दुस्थ स्पृशा वाढविलेल्या महत्तराक्षास एकाचट
बिन्दूंत मिळतील. [सि. १०.]

पर टप-शीं समान्तर काढ; तिला ऊनसंपूर्णकक्षास र बि-
न्दूंत व घघ-स ओ बिन्दूंत मिळू दे. आतां, जर कड, कड ह्या टप,
टप स्पृशांशीं अनुक्रमे समान्तर काढिल्या व त्यांना ऊनसंपूर्णकक्षा-
स ड, ड बिन्दूंत मिळू दिले, तर

पओ.ओर : घओ.ओघ :: कडै : कडै. (सि. २९.)

परंतु कडै = कड, कारण कप = कप,

∴ पओ.ओर = घओ.ओघ.



ह्यास्तव, यूक्लिड, ३. सि. ३५ च्या प्रतिसिद्धान्तावरून र बिन्दु
प, घ, घ बिन्दूंतून जाणाऱ्या वर्तुळावर आहे.

उपसि. जेव्हां व बिन्दूस प बिन्दूच्या अमर्याद जवळ आणावे
तेव्हां घ घ ही ऊनसंपूर्णकक्षाच्या प बिन्दुस्थ स्पृशांशीं तन्मय दशा
पावून वर्तुळाची ही प बिन्दुस्थ स्पृक होते, कारण घ, घ बिन्दु ए-
कमेकांच्या अमर्याद जवळ येतात. ह्या कारणास्तव वर्तुळ प बिन्दु-
स्थ वळमान वर्तुळ होते.

द्यास्तव, जर पर प-बिन्दुस्थ स्पृशीं समान्तर काढिली, अथवा तिला पट-प्रमाणेंच अक्षशीं समान कोन करूं दिला, तर ती, प-बिन्दुस्थ बलमानवर्तुल ऊनसंपूर्णकक्षास ज्या बिन्दूंत छेदितें, त्याच बिन्दूंत ऊनसंपूर्णकक्षास मिळेल.

ऊनसंपूर्णकक्षावर प्रश्न.

१. प बिन्दु कोणत्या स्थितीं असला क्षणजे सपर्स कोन महत्तम होईल.

२. ऊर्ध्वमात्रा, महत्तराक्ष व लघुतराक्ष ह्यांजमधील अनुपात तृतीयपद असते.

३. लघुतराक्ष पाया कल्पून एक कारकोन चौकोन असा काढ कीं त्याचें सलर्स त्रिकोणाशीं, महत्तराक्ष व लघुतराक्ष ह्यांच्या वर्गप्रमाणासमान प्रमाण राहिल; एथें ल हा ऊर्ध्वमात्रेचा अन्त्य आहे.

४. जर एकाच महत्तराक्षावर ऊनसंपूर्णकक्षमाला काढिली, तर तिच्या ऊर्ध्वमात्रेच्या अन्त्यस्थ सर्व स्पृशा लघुतराक्षास एकाच बिन्दूत मिळतील.

५. जीं दिलेल्या रेघेस स्पर्श करितात व ज्यांचे अक्षसारख्याच लांबीचे आहेत व ज्यांची नाभि एकच आहे अशा सर्व ऊनसंपूर्ण कक्षांच्या केन्द्रांची संस्था काढ.

६. नाभि दिल्या आहेत, ह्यांजपासून दिलेल्या रेघेस स्पर्श करणारे ऊनसंपूर्णकक्ष काढावयाचे.

७. जर ऊनसंपूर्णकक्षाची पट स्पृक् अक्षासट बिन्दूत मिळेल व अप, अ'प ह्यांना ट बिन्दूतून महत्तराक्षावर लम्बस्वरूप काढिलेल्या रेघेस घ, घ' बिन्दूत मिळेपर्यंत वाढविलें; तर

$$\text{घट} = \text{घ'ट}.$$

८. जर सवर्स कोन कारकोन असेल, तर कअ^३ = २ कब^३ हें सिद्ध कर.

९. जर कप हा सामिज्यास असेल व अघओ कप-शीं समान्तर काढिली व तिला चत्तास घ बिन्दूत मिळूं दिलें, व कब ओ बिन्दू पर्यंत वाढविली; तर

$$२ \text{ कप} = \text{अओ. अघ}.$$

१०. जर अब, कड ह्या असमान्तर रेघा एकतर अक्षाशीं समान कोन करतील; तर अक, बड व तशाच अड, बक ह्या रेघाही अन्यतर अक्षाशीं समान कोन करतील.

११. पस्प ही सनाप्त ज्या आहे. पअ, पअ ह्यांना ज्ञापिकेस घ, घ बिन्दूंत मिळेपर्यंत वाढविलें आहे. घस्प कोन काटकोन होईल हें सिद्ध कर.

१२. जर महत्तराक्षास एका नाभींत स्पर्श करणारे व लघुतराक्षाचे एका अन्यांतून जाणारे एखादे वर्तुळ काढिलें; तर अक ही ह्या वर्तुळाचा व्यास व बक ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद होईल.

१३. जर पघ घर्ष ही उपकारक वर्तुळाची ज्या असेल व लघुतराक्षास व्यास कल्पून एखादे वर्तुळ काढिलें व ह्या वर्तुळाला त्या ज्येस घ, घ बिन्दूंत छेद दिलें; तर

$$\text{पघ. पघ} = \text{कस}^2$$

१४. जर पग हा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब असेल, व गल स-प-वर लम्बरूप काढिली; तर

$$\text{पल} = ३ \text{ अर्द्ध ऊर्ध्वमात्रा.}$$

१५. सहचरित व्यासांच्या अन्यां पासून काढिलेल्या संपर्कलम्बांच्या वर्गाची बेरीज अभिन्न असते.

१६. जर प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्बावर पघ ही कड ह्या सामिसहचरित व्यासाबरोबर घेतली; तर घ बिन्दूची संस्था वर्तुळ होईल व त्या वर्तुळाची त्रिज्या = अक — बक.

१७. एकमेकास लम्बरूप असणाऱ्या स्पृग्घ्याच्या छेदबिन्दूची संस्था काढ.

१८. प हा एक ऊनसंपूर्णकक्षावर बिन्दु आहे. अघ, अघ ह्या रेघा ऊनसंपूर्णकक्षावरील घ बिन्दूपर्यंत काढ. त्यांना नप-स र, सां बिन्दूंत मिळू दे. आतां

$$\text{नर. नस} = \text{नप}^2,$$

हे सिद्ध कर.

१९. जर पंग हा संपर्कलम्ब असेल, व गल ही सप-वर लम्ब-रूप काढिली; तर गल-चे पन-शीं अभिन्नप्रमाण राहिल.

२०. जर वाढविलेली नप ऊर्ध्वमात्रेच्या एका अन्यापासून काढिलेल्या स्पृशेस घ बिन्दून मिळेल; तर

घन = पस.

२१. ऊन संपूर्णकक्षाची अविशेष बिन्दुस्थ स्पृक् शपिकेवर काढिलेल्या लम्बाशीं जो.कोन करिते त्यापेक्षां महत्तरकोन ती नाभ्यन्तराशीं करिते. असें ऊनसंपूर्णकक्षांत घडते.

२२. अविशेष बिन्दुस्थ स्पृशेशीं समान्तर काढिलेला ऊनसंपूर्ण कक्षाचा व्यास त्या बिन्दूच्या नाभ्यन्तरांस मिळत आहे. छेदबिन्दूपासून नाभ्यन्तरांवर लम्बरूप रेषा काढिल्या आहेत. आतां ह्या रेषा लघुतराक्षावर एकमेकींस छेदितील हे सिद्ध कर.

२३. उपसंपर्कलम्ब कट व बक ह्यांचें अनुपात तृतीयपद असतो.

२४. जर पन ही प बिन्दूची निर्णायिका असेल; तर

नय : नर्घ :: पय : पर्य,

हे सिद्ध कर. (सि. ५५. आकृ. पहा.)

२५. जर प-बिन्दुस्थ स्पृशेशीं समान्तर व तिजवर लम्बरूप अशा रेषा क बिन्दूपासून काढिल्या; तर त्या, त्या बिन्दूच्या एकतर नाभ्यन्तराचा एकदेश अन्यतरासमान अवरोधितील.

२६. जर प हा एक ऊनसंपूर्णकक्षावर स्थिर बिन्दु असेल व घर्घ ही कप-ची निर्णायिका असेल; तर घपर्घ वर्तुळ ऊनसंपूर्णकक्षास एका स्थिरबिन्दून मिळेल.

२७. प हा एक ऊनसंपूर्णकक्षावर बिन्दु आहे. पर्य ही महत्तराक्षाशीं समान्तर काढ. प बिन्दूनून पघ, पर्य रेषा काढ. त्यांना महत्तराक्षाशीं समान कोन कसं दे. घर्घ सांध. आतां -

घघ प-बिन्दुस्थ स्पृशीं समान्तर होईल हें सिद्ध कर.

२८. ऊनसंपूर्णकक्षास परिवेष्टिणाऱ्या कोणत्या समान्तरभुज चौकोनाचें क्षेत्र लघुतम असतें ?

२९. सहचरित व्यासांच्या बेरजेचा वर्ग केव्हां लघुतम असतो ?

३०. ऊनसंपूर्णकक्षाचे अक्ष, एका नाभीचें व वृत्तावरील एका बिन्दूचें स्थान, हीं दिलीं आहेत. आतां केन्द्र काढण्याकरितां क्षेत्रकल्पन कर.

३१. जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या एकाद्या बिन्दूपासून व्यासाच्या-अन्त्यापर्यंत रेखा काढिल्या व त्यांना सहचरित कड-स म, न बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर

कम. कन = कड.

३२. जर कप व कड ह्या सहचरित असतील, तर
(सप^२-अक^२) + (सड-अक^२) = सक^२,
हें सिद्ध कर.

३३. जर कप व कड सहचरित असतील, व बप, बड सांधल्या व तशाच अड, अ'प सांधल्या, व अड, अ'प ह्यांना ओ बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर बडओप हा समान्तरभुज चौकोन होईल. ह्याचें क्षेत्र महत्तम केव्हां होईल ?

३४. जर पसप व घकष ह्या समान्तर असून ऊनसंपूर्णकक्षाच्या नाभींतून व केन्द्रांतून जाणाऱ्या ज्या अनुक्रमें असतील; तर

सप.सप : कघ.कष :: बकै : अकै,
हें सिद्ध कर.

३५. जर अ-द्विरस्थ स्पृकू सहचरित व्यास युग्मास ट, र बिन्दूंत छेदील, तर

अट.अर = बकै.

३६. जर प, घ, र बिन्दुस्थ स्पृशा. र_१, घ_१, प_१ बिन्दूंत एक-कीस छेदितील, तर

पर. प, घ. घ, र = पघ, र, घ. प, र,
हैं सिद्ध कर.

३७. जर सप व सप ह्यांस, वाढवित्यावर स्पर्शकरणारे, व ऊ-
नसंपूर्णकक्षाच्या महत्तराक्षासही स्पर्श करणारे एखादे वर्तुळ काढिले,
तर त्याच्या केन्द्राची संस्था काढ.

३८. जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या अक्षांच्या अन्यांपासून चार समा-
न्तर रेघा काढिल्या; तर त्या रेघा वृत्तास ज्या बिन्दूत छेदितील ते बि-
न्दु सहचरित व्यासांचे अन्य होतील.

३९. जर दोन समान व सरूप ऊनसंपूर्णकक्षांस उपय साधा-
रण एकच केन्द्र असेल; तर छेदबिन्दु एकमेकास लम्बरूप अस-
णाऱ्या व्यासांचे अन्य होतील.

४०. जर पसघ ही सनाप्त ज्या असेल व क्ष हे ज्ञापिकेचे तळ
असेल; तर क्षप, क्षघ ह्या रेघा अक्षार्शां समान कोन करतील.

४१. ओप, ओघ ह्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या स्पृशा आहेत. पघ
ही ज्ञापिकांस र, र बिन्दूत मिळेपर्यंत वाढविली आहे आतां
रप. रप : रघ. रघ :: ओप : ओघ,
हैं सिद्ध कर.

४२. नपघ ही ऊनसंपूर्णकक्ष व उपकारक वर्तुळ ह्यांची उपय सा-
धारण निर्णायिका आहे. पर, घर हे प, घ बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब आहे-
त. ते एकमेकास र बिन्दूत छेदितात. आतां र बिन्दूची संस्था वर्तुळ
हीईल व त्या वर्तुळाची त्रिज्या = अक + बक हैं सिद्ध कर.

४३. जर कप-चा सहचरित, सप, सप ह्यांना अथवा ह्यांना वा-
ढवित्यावर ई, ई बिन्दूत मिळेल; तर सई = सई, व सकई, सकई
ह्यांस परिवेष्टणारीं वर्तुळे समान होतील.

४४. ऊनसंपूर्णकक्षांतील सर्व सनाप्त ज्यांच्या मध्यबिन्दूची संस्था
सरूप ऊनसंपूर्णकक्ष असते.

४५. सबस त्रिकोणासभोवतीं काढिलेले वर्तुळ लघुतराक्षास

ब बिन्दुस्थ वलमान वर्तुळाच्या केन्द्रांत छेदील.

४६. सपस त्रिकोणांत काढिलेल्या वर्तुळाच्या केन्द्राची संस्था ऊनसंपूर्णकक्ष असते.

४७. जर ऊनसंपूर्णकक्षास चौहों बिन्दूंत छेदणारें वर्तुळ काढिलें व छेदबिन्दूंतून ज्या काढिल्या, तर ज्यांशीं समान्तर असणारे व्यास समान होतील.

४९. जर स नाभी पासून कप, कड ह्या सहचरित व्यासांवरं लम्ब काढिले; तर ह्या लम्बांस पाठीमार्गे वाढविले असतां हे लम्ब कड, कप ह्यांना ज्ञापिकेंत छेदितील.

५०. वलमान वर्तुळाचा व्यास कोणत्या बिन्दूंत असला ह्मणजे ती महत्तराक्ष व लघुतराक्ष ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद होईल.

५२. अ, अ बिन्दू पासून अप, अप ह्यांजवर लम्बरूप काढिलेल्या रेखांच्या छेदबिन्दूची संस्था ऊनसंपूर्णकक्ष असते.

५३. ज्या दोन ऊनसंपूर्णकक्षांचे महत्तराक्ष समान्तर अथवा लम्बरूप आहेत त्या दोहों ऊनसंपूर्णकक्षांत जर एखादी चतुर्भुजाकृति काढितां येईल; तर तिचे दोन समोरील कोन दोन काटकोना बरोबर होतील.

५४. एक वर्तुळ आहे त्याचा केन्द्र क आहे. त्यावरील प बिन्दूचा निर्णायक कन व निर्णायिका नप. आतां नघ जर नप बरोबर घेतली व तिला तिचेशीं अभिन्नकोन करूं दिला; तर घ बिन्दूची संस्था ऊनसंपूर्णकक्ष होईल.

५५. जर अभिन्न महत्तराक्षांच्या ऊनसंपूर्णकक्षद्वयांत एखादा समान्तर भुज चौकोन काढितां येईल; तर नाभि समानकोण समान्तर भुज चौकोनाच्या कोपऱ्यांवर येतील.

५६. दोन ऊनसंपूर्णकक्षांचे महत्तराक्ष समान आहेत. त्यांना - एक उभयसाधारण नाभि आहे. आतां तीं एकमेकांस दोनच बिन्दूंत छेदितील हें सिद्ध कर.

(७८)

शङ्कुच्छेद.

५८. जर र, र ह्या सपर्स त्रिकोणाच्या आंत व बाहेर काढिलेल्या वर्तुळांच्या विज्या असतील, तर र.र, सप. सप क्रमाने अनुपात पदे होतील.

५९. पग-स व्यास कल्पून काढिलेले वर्तुळ सप, सप ह्यांना रव, ल बिन्दूत छेदिते. आतां पग रवलचे दोन समान भाग करील व तिजवर लम्बरूपाने पडेल हे सिद्ध कर.

६०. जर स बिन्दूपासून सप-शीं समान्तर एखादी रेघ काढिली, तर ती सय-स वर्तुळांच्या परिघावर मिळेल.

६१. प-बिन्दुस्थ स्पृक् अक्षांस ज्या बिन्दूत मिळते ते बिन्दु ट, ट आहेत. कप वाढविली आहे. ती टकट त्रिकोणासभोवतीं काढिलेल्या वर्तुळास ल बिन्दूत मिळते. आतां पल ही क-च्या दिशेस प-बिन्दुस्थ चलमान वर्तुळाच्या ज्यार्द्दा बरोबर होईल व कप-कल अ-भिन्न राहिल हे सिद्ध कर.

६२. पघर त्रिकोणासभोवतीं एक ऊनसंपूर्णकक्ष काढिले आहे प, घ, र बिन्दूपासून अभिमुखभुजांच्या मध्यबिन्दूपर्यंत काढिलेल्या रेघा ज्या बिन्दूत मिळतात तो त्याचा केन्द्र आहे. कप, कघ, कर ह्यांना ऊनसंपूर्णकक्षास प, घ, र बिन्दूत मिळे पर्यंत वाढविले आहे. आतां प, घ, र बिन्दुस्थ स्पृशा एक त्रिकोण करतील व ती त्रिकोण पघर-शीं सरूप होऊन त्याच्या चौपट होईल हे सिद्ध कर.

६३. य, य बिन्दूपासून महत्तराक्षावर लम्बरूप काढिलेल्या रेघा, सप, सप ह्यांस व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळांस ऐ, ज बिन्दूत कापितात. आतां ऐस व जर्स ह्या वाढविल्या असतां बक-स एकाच बिन्दूत छेदितात हे सिद्ध कर.

६४. जर व्यासाच्या अन्यांपासून ऊनसंपूर्णकक्षांतील बिन्दूपर्यंत ज्या काढिल्या, तर ह्या ज्यांशीं समान्तर असणारे व्यास सहचरित होतील.

६५. जर ट ह्या नाभींतून जाणाऱ्या ज्येच्या अन्यस्थ स्पृशांमधी-

ल कोन असेल व ओ हा त्या ज्ये समोरील अन्यनाभिस्थ कोन असेल;
तर

$$२ ट + ओ = २ काटकोन.$$

६६. सप, सघ ह्या रेघा जे लघुकोन स्पृशांशीं करतात ते प्रपूरकरूपी आहेत. आतां बक सपस, सघस ह्या त्रिकोण-क्षेत्रांमधील अनुपातमध्यमपद होईल हें सिद्ध कर. बक \angle कस नसेल तर हा प्रश्न अयथार्थ होईल हें ही सिद्ध कर.

६७. ऊनसंपूर्णकक्षमालेचे समान सहचरित व्यास सौररव्याच लांबीचे आहेत. अन्यतम व्यास स्थिर असून सर्व साधारण आहे. - दुसरा अन्यतम व्यास चर आहे. आतां वाढविलेल्या स्थिर व्यासांतील अविशेष बिन्दूपासून काढिलेल्या स्पृशा ऊनसंपूर्णकक्षांस वर्तुळावरील बिन्दूंत स्पर्श करतील.

६८. जर एखाद्या काटकोन चौकोनाच्या दीर्घतरभुजास महत्तराक्ष कल्पून ऊनसंपूर्णकक्ष काढिले व त्याला कर्णाच्या छेदबिन्दूतून जाऊ दिले, व काटकोनचौकोनाच्या बाहेर असणाऱ्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या बिन्दूपासून दूरस्थ भुजाच्या अन्यांपर्यंत रेघा काढिल्या; तर त्या रेघा महत्तराक्षाचे समप्रमाणश्रेढींत खणड पाडतील हें सिद्ध कर.

६९. पघ ऊनसंपूर्णकक्षाच्या पबिन्दूपासून सप-वर लम्बरूप काढिली आहे. ती कप-च्या सहचरित व्यासास घ बिन्दूंत मिळते. आतां पघ ही महत्तराक्षावर प बिन्दूपासून काढिलेल्या लम्बाशीं व्यस्त प्रमाणानें असते हें सिद्ध कर.

७०. ऊनसंपूर्णकक्षांत सहचरित व्यासयुग्मावर लम्बरूप काढिलेल्या सघ, सघ रेघा एकमेकीस घ बिन्दूंत छेदितात. आतां घ बिन्दूची संस्था एककेन्द्र ऊनसंपूर्णकक्ष असते हें सिद्ध कर.

भाग ३.

विषमापूर्णकक्ष.

४५. लक्षणा. जेव्हां एखादा बिन्दु अशा रीतीने फिरतो की त्याचे दिलेल्या स्थिर बिन्दू पासून जें अन्तर असतें तें, एखाद्या दिलेल्या स्थिर रेघेपासून त्याच बिन्दूच्या अन्तराशीं सतत अभिन्न परंतु एकाङ्गापेक्षां अधिक प्रमाणानें असतें अशा वेळीं त्या चर बिन्दूनें वर्तविलेल्या वृत्तास विषमापूर्णकक्ष म्हणतात. (आ-मुरव पहा.)

सिद्धान्त १.

विषमापूर्णकक्षाची नाभि व ज्ञापिका दिली असतां वृत्तावरील पाहिजेत तितके बिन्दु काढावयाचे.

स नाभि व मक्ष ज्ञापिका असूंदे.

ज्ञापिकेवर सक्ष लम्बरूप काढ; व सक्ष-चे अ-बिन्दूत [यू-क्लिड, ६.१९.] असे दोन भाग पाड कीं सअ-चे अक्ष-शीं दिलेले स्थिर परंतु एकाङ्गापेक्षां अधिक प्रमाण कायम राहिल; आतां

अ हा वृत्तावरील बिन्दु झाला.

सक्ष वाढीव व तिजमध्ये अ-बिन्दु घे, तो असा कीं

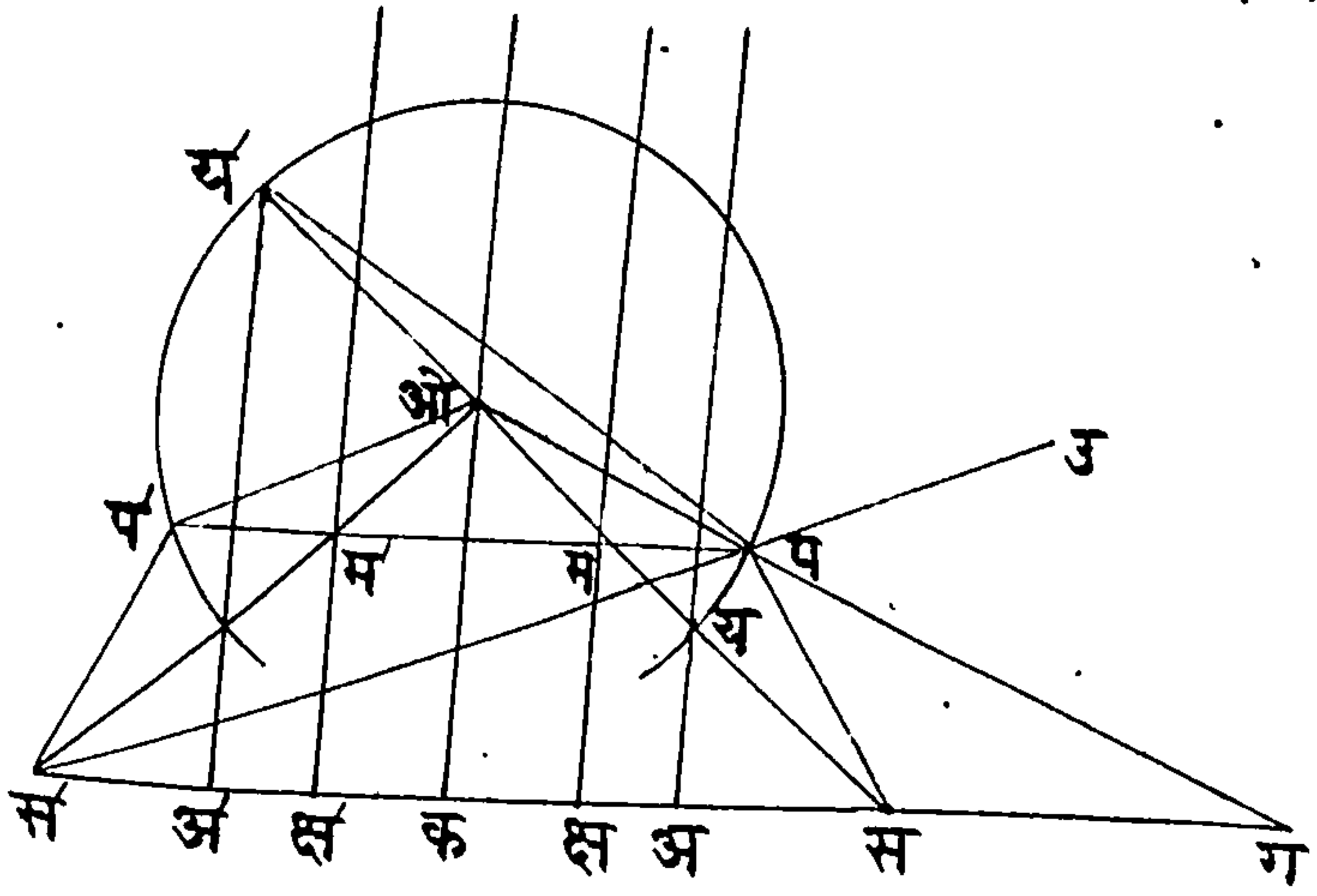
सअ : अक्ष : : सअ : अक्ष;

आतां अ ही वृत्तावरील बिन्दु होईल.

ज्ञापिकेवर पाहिजे तेथें म बिन्दु घे; म व स ह्या दोहों बिन्दूतून मयसय रेघ काढ, व तिला अअ-वर लम्बरूप काढिलेल्या अय, अय ह्यांस य, य बिन्दूत मिळूंदे.

य य-स व्यासकल्पून वर्तुळ काढ; पमप अअ-शीं समान्तर काढ, व तिला वर्तुळास प, प बिन्दूत छेदूंदे; आतां

प, प हे विषमापूर्णकक्षावरील बिन्दु होतील.



पय, पर्य, सप सांध; आतां

ज्याअर्थी सयः यमः :: सअः अक्ष, (यूक्लिड, ६.२.)

व सयः यमः :: सअः अक्ष, (यूक्लिड, ६.२.)

सयः यमः :: सयः यम;

अथवा, विनिमयाने, सयः सयः :: यमः यम,

व यपर्य हा सामिवर्तुळांतील कोन असल्यामुळे तो काटकोन आहे.

[यूक्लिड, ३.३१.]

∴ पय सपम-कोनाचे दोन समान भाग करिते,*

∴ सप : पम :: सय : यम,

:: सअ : अक्ष.

* जर पय सपम कोनाचे दोन समानभाग करीत नसेल, तर यपम कोन यपस कोनाबरोबर कर; आतां

सयः यम :: सपः पम; (यूक्लिड, ६.३.)

आतां, ज्याअर्थी पय सपम कोनाचे दोन समान भाग करिते, त्या अर्थी पय-वर लम्बरूपाने पडणारी जी पर्य ती ही सप व वाढविलेली सप ह्यांजमधील कोनाचे दोन समान भाग करिते;

(८२)

शङ्कुच्छेदः

ह्या प्रमाणेन आपणास असें दाखवितां येईल कीं

सपः पमः :: सयः यम,
:: सअः अक्ष,

∴ प,प हे वृत्तावरील बिन्दु झाले.

ह्याच रीतीनें ज्ञापिकेवर दुसरे बिन्दु घेऊन आपणास वृत्ता-
वरील आणखी पाहिजेत तितके बिन्दु काढितां येतील.

उपसिद्धान्त १. वृत्तावर प बिन्दु जसा आहे तसाच त्याचे
समोर प बिन्दु ही आहे, व प जसा अय-च्या संबन्धानें स्थित आ-
हे तसाच हुबेहुब प ही अय-च्या संबन्धानें आहे, यास्तव आपण
जर अस, व अक्ष ह्या रेखा क्रमानें अस व अक्ष ह्यांजबरोबर
केल्या व अक्ष-वर क्षर्म लम्ब काढिला तर आपणास पूर्वी प्रमाणेच
एकसारखें वृत्त काढितां येईल, व त्या वृत्ताची स ही नाप्ति होईल, व
क्षर्म ही ज्ञापिका होईल, हें स्पष्ट आहे.

ह्या कारणास्तव विषमापूर्णकक्ष संमिताकार आहे, व तें केवळ
अअ-च्याच संबन्धानें संमिताकार आहे असें नाही, तर अअ-वर
लम्बरूप काढिलेली व तिचेच दोन समान भाग पाडणारी जी यय
हिच्या मध्यबिन्दूपासून काढिलेली जी ओक तिच्या ही संबन्धानें
संमिताकार आहे.

उपसि. २. ओप रेघेस वाढविलें असतां ती सप व वृद्धिंग-
त सप ह्यांजमधील सपउ कोनाचे दोन समान भाग करील.

ओप, सस ह्यांस ग बिन्दूंत मिळेपर्यंत वाढीव. पम वाढीव व
तिला क्षर्म-स म बिन्दूंत मिळूंदे, व म बिन्दूंतून जाणारी ओस काढ;
आतां

∴ सयः यम :: सपः पम, (यूक्लिड, ६. सि. अ.)

ह्या कारणास्तव सयः यम :: सयः यम,

अथवा सयः सयः :: यम : यम, .

∴ म, म बिन्दु एकरूप होतात.

सपः पमः :: सपः पर्म,
अथवा, विनिमयाने, सपः सपः :: पमः पर्म. (१.)
पुनः, सगः पमः :: सगः पर्म,
अथवा, विनिमयाने, सगः सगः :: पमः पर्म. (२.)
∴ (१.) व (२.) पासून

सपः सपः :: सगः सगः,
∴ पग सपउ कोनाचे दोन समान भाग करिते. (यूक्लिड, ६.सि.अ.)
विषमापूर्णकक्षाचा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब ही सपउ कोनाचे-
दोन समान भाग करितो हे पुढे (सि.९.) दारवविषयांत येईल. ह्या-
स्तव विषमापूर्णकक्षास व वर्तुळास प-बिन्दुस्थ एकच स्पृक असते.
सपूनच अनन्तवर्तुलमालेंतील प्रत्येक वर्तुळास विषमापूर्णकक्ष-
अर्थातच स्पर्श करील; आकृतींत ज्या रीतीने वर्तुळ काढिले आहे
त्याच रीतीने ही सर्व अनन्तवर्तुलमाला ज्ञापिकेवर निरनिराळे बि-
न्दु घेऊन काढितां येईल.

सिद्धान्त २.

४६. जर क हा अअ-चा मध्यबिन्दु असेल, तर कअ ही,
कस कक्ष ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद होईल,

सपजे कस. कक्ष = कअ. (सि. ३. आक. पहा.)

ज्याअर्थी सअः अक्षः :: सअः अक्ष. [सि. १.]

विनिमयाने, सअः सअः :: अक्षः अक्ष,

∴ सअ-सअः सअः :: अक्ष-अक्षः अक्ष;

सपजे, अअः सअः :: क्षक्षः अक्ष,

∴ अअः क्षक्षः :: सअः अक्ष,

सपजे, कअः कक्षः :: सअः अक्ष. (१.)^१

१. टीप. (१.), (२.), (३.) ह्यांतील परिपाक चांगले लक्षांत ठेविले पाहिजेत,
कारण त्यांचा वारंवार पुढे उल्लेख करण्यांत येईल.

पुनः, सअः सअ :: अक्षः अक्ष,
 ∴ सअ + सअ : सअ :: अक्ष + अक्ष : अक्ष,
 ह्यणजे, ससः सअ :: अअः अक्ष.
 विनिमयाने, ससः अअ :: सअ : अक्ष,
 ह्यणजे, कसः कअ :: सअ : अक्ष. (२०)
 ह्यास्तव (१०) व (२०) ह्यांजपासून

कअ : कक्ष :: कस : कअ, [यूक्लिड, ५.७.]

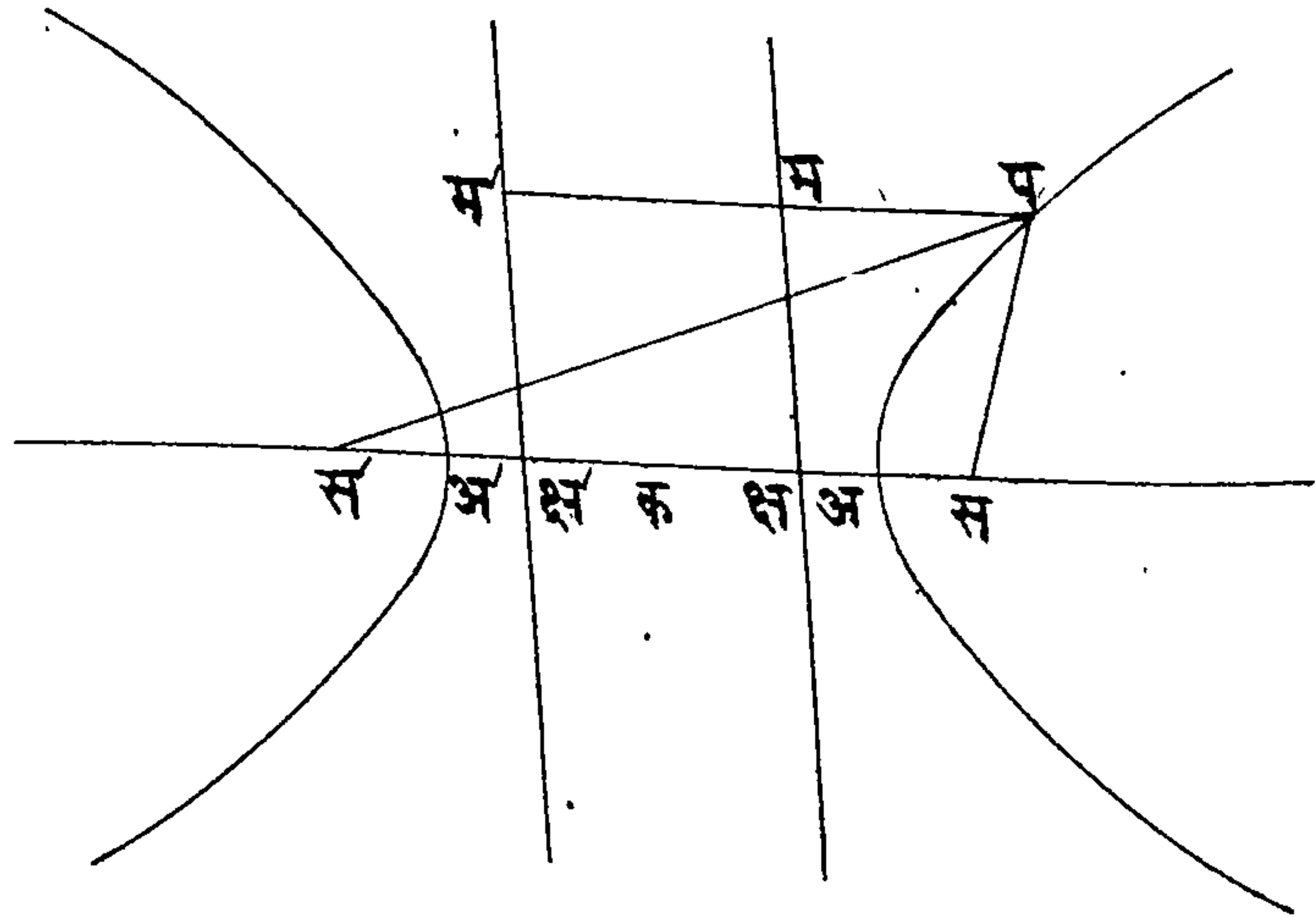
∴ कअ = कक्ष. कस, [यूक्लिड, ६.१७.]

ह्यणजे कअ ही रेघ कस, कक्ष ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद झाली.
 उपसि. कस, कअ, कक्ष ह्या तीन रेघा अनुपात पदे आहे-
 त, ह्यणून व वर्गप्रमाणाचे लक्षण व यूक्लिड, ६.२०. उपसिद्धान्त
 ह्या दोही वस्तुन

कस : कक्ष :: कस : कअ. (३०)

सिद्धान्त ३.

४७. जर प हा विषमापूर्णकक्षावरील बिन्दु असेल, व स ही प
 बिन्दूला समीपतर नाभि असेल, तर



दोरीचें सुटें शेंवट आतां स नाभीस घट्ट बांध; व गजाला आरं-
भापासून सस स्थानीं ठेवून स-सभोंवतीं फिरीव; व दोरीला गजाशीं
संपृक्त असणाऱ्या प बिन्दूजवळ लेखणीच्या टोंकानें सतत ताणून धर .
आतां प बिन्दूचीं कोणतींही दोन स्थाने घेतलीं असतां, त्यांजमधील,
गजापासून सुटत जाणाऱ्या दोरीच्या भागाची लांबी हीच एक अभि-
न्न राशि ह्या अभिन्नराशीनें सप व सप सतत वाढत जात अस-
ल्यामुळे, सप व सप ह्यांजमधील अन्तर सतत अभिन्न राहणार
आहे; ह्या कारणास्तव प बिन्दु विषमापूर्णकक्ष वर्तवील.

स केन्द्र कल्पून जर गजाला पूर्वोक्त रीतीनें फिरविलें तर विषमा-
पूर्णकक्षाची दुसरी एक सर्वांशीं सरूप शारवा काढितां घेईल.

ह्यापक्षां सप - सप = अअ होईल.

ह्यास्तव ह्या वृत्तास दोन सरूप शारवा असतात व त्या अअ
रेघे पासून व अअ-वर लम्बरूप काढिलेली व तिचेच दोन समान
भाग पाडणारी जी बकब रेघ ह्या उभयतां पासून अमर्याद परावृत्त
होत जातात. (सि. ४. आकृ. पहा.)

४८. जेव्हां बक अशा लांबीची घेतात कीं,

बक = कस - कअ,

व कब कब-बरोबर करितात, तेव्हां अअ-स व्यतिक्रान्ताक्ष व
बब-स सहचरिताक्ष झणतात.

बकब रेघ विषमापूर्णकक्षास मिळत नाहीं; व ती घेथें घेण्याचें
कारण पुढें समजेल.

जेव्हां सहचरिताक्ष व्यतिक्रान्ताक्षाबरोबर असतो तेव्हां त्या विषमा-
पूर्णकक्षास समकोणायत विषमापूर्णकक्ष अथवा समभुज विषमा-
पूर्णकक्ष झणतात.

विषमापूर्णकक्षाच्या ज्या धर्माविषयीं आपण नुकतेच विवेचन केले,
(झणजे सप व सप ह्यांचे अन्तर सदैव अभिन्न असतें) ती धर्मच कधीं
कधीं ह्या वृत्ताचें लक्षण मानतात. (भाग २. क. २५. पहा.)

ऊनसंपूर्णाकक्षांत सिद्ध केलेले त्याप्रमाणेच, जर सल अर्धी ऊर्धी मात्रा असेल, तर

$$\text{सल.अक} = \text{बकै,}$$

हे सिद्ध करितां येईल.

सिद्धान्त ४.

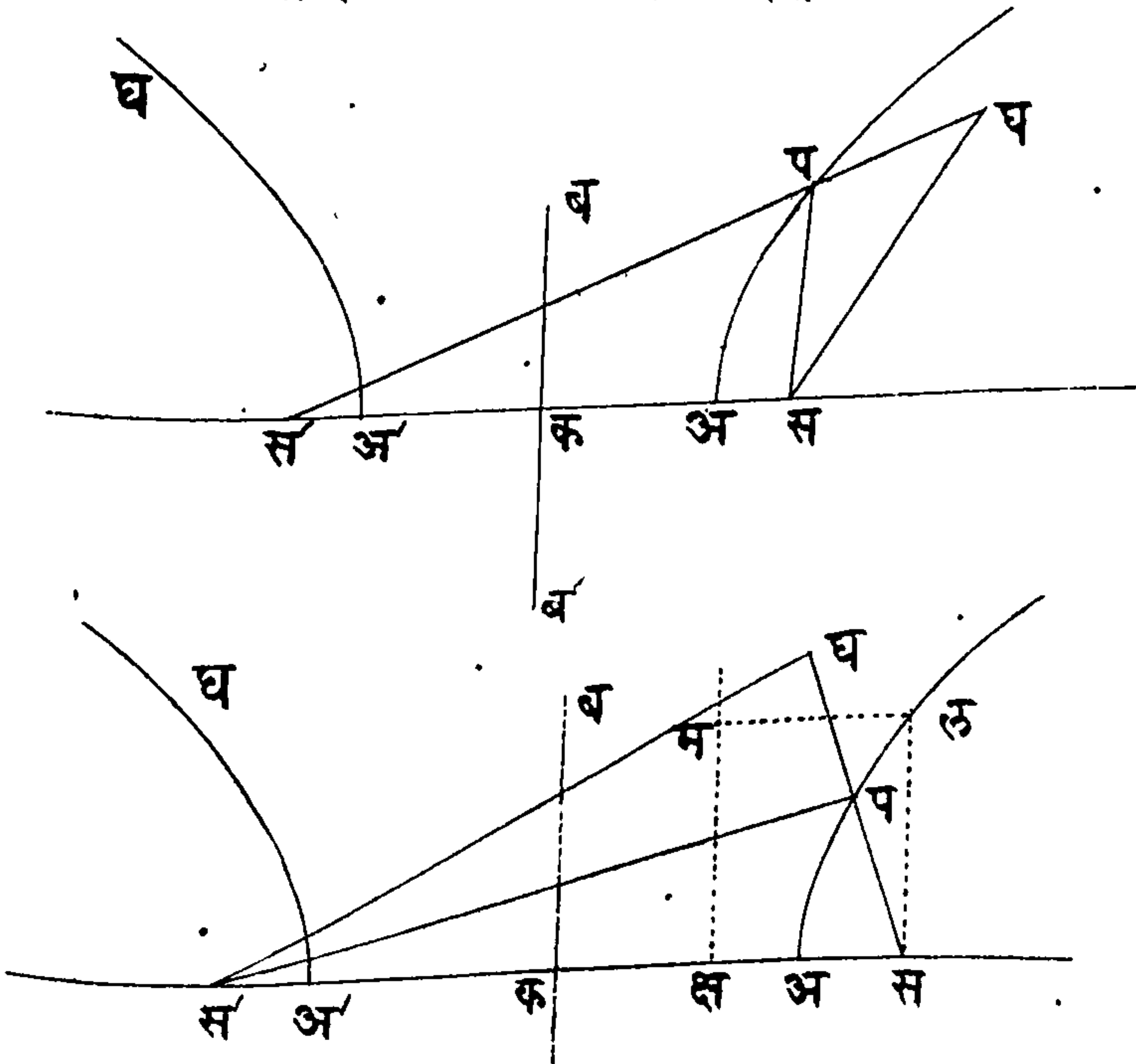
४९. जर एखादा बिन्दु विषमापूर्णाकक्षाच्या अन्तर्वृत्तभागांत अथवा बहिर्गोल भागांत असेल, तर त्या बिन्दूच्या नाभ्यन्तरांचे व्यवकलन अर्ध-पेक्षां गुरुतर अथवा अल्पतर होईल.

(१.) विषमापूर्णाकक्षाच्या अन्तर्वृत्त भागांत घ बिन्दु असूंदे.

सघ, सघ सांध; सघ-ला वृत्तास प बिन्दूंत मिळूंदे; सप सांध; आतां

$$\text{ज्या अर्थी सघ} = \text{सप} + \text{पघ,}$$

$$\text{व सघ} < \text{सप} + \text{पघ, [यूक्लिड, १.२०.]}$$



(८८)

शङ्कुच्छेद.

∴ सघ-सघ > संप-सप.

परंतु संप-सप = अर्अ, [सि. ३.]

∴ सघ-सघ > अर्अ.

(२.) विषमापूर्णकक्षाच्या बहिर्गोल भागांत घ बिन्दु स-पेक्षां स-च्या समीपतर असूं दे. सघ, सघ सांध; सघ-ला वृत्तास प बिन्दूंत मिळूं दे; संप सांध; आतां,

सघ < संप + पघ, [यूक्लिड, १.२०.]

व सघ = सप + पघ,

∴ सघ-सघ < संप-सप;

परंतु संप-सप = अर्अ, [सि. ३.]

∴ सघ-सघ < अर्अ.

ह्या प्रमाणेच, जर घ बिन्दु स-पेक्षां स-च्या अधिक जवळ असेल, तर आपणास सिद्ध करितां येईल कीं,

सघ-सघ < अर्अ.

उपसि. प्रत्यनुमानानें, जर एखाद्या बिन्दूच्या नाभ्यन्तरांचे-
व्यवकलन अर्अ-पेक्षां गुरुतर अथवा अल्पतर असेल, तर तो बिन्दु
विषमापूर्णकक्षाच्या अन्तर्गत भागांत अथवा बहिर्गोल भागांत असेल.

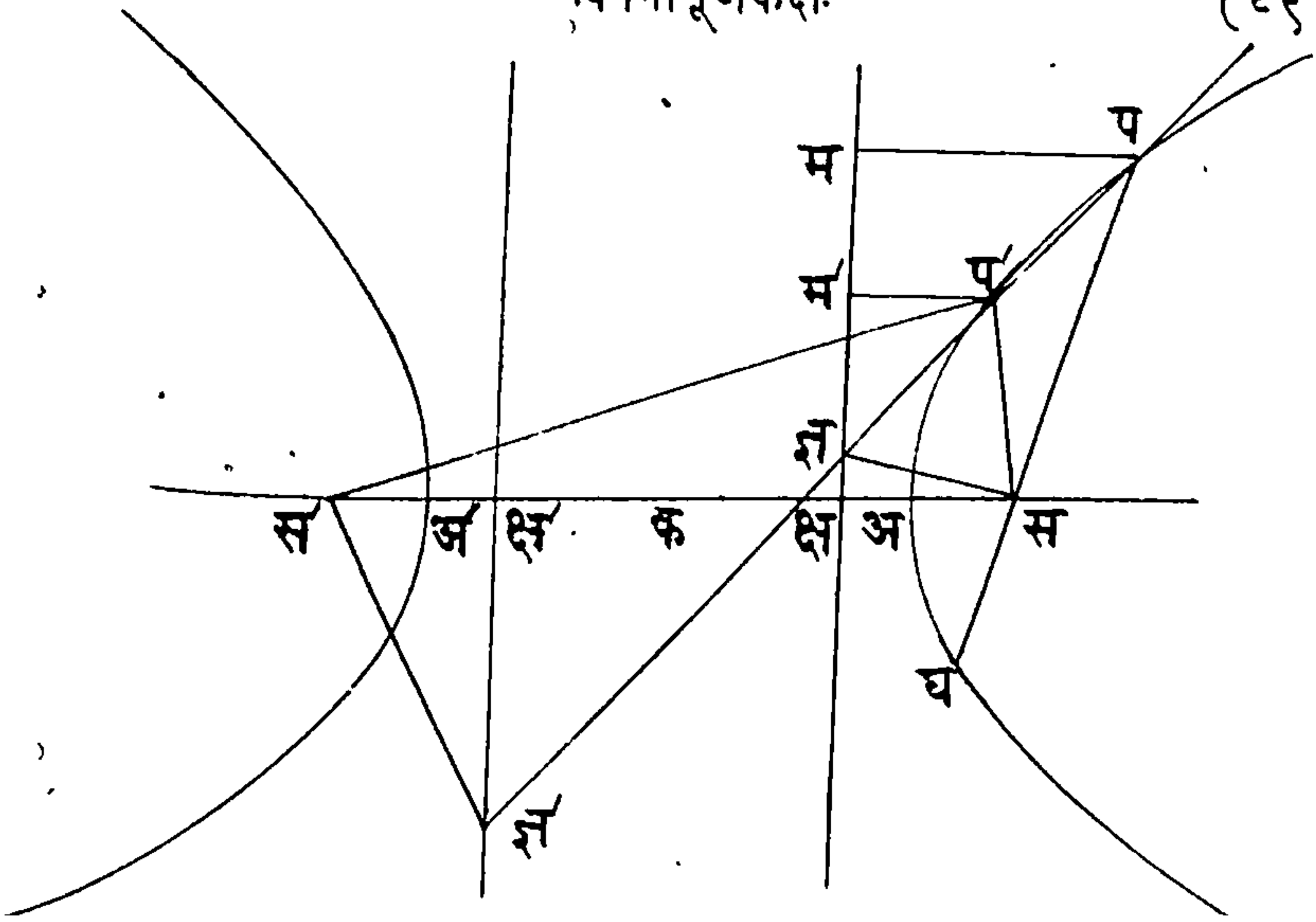
५०. लक्षणा. जर विषमापूर्णकक्षावर प बिन्दूच्या जवळ एक
प बिन्दु घेतला, व पप सांधले, तर प-स प बिन्दूच्या इतके जव-
ळ नेले कीं तो (प) तन्मध्यदशा पावतो इतक्यांत वाढविलेल्या पप
रेघेस विषमापूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृकृ ह्मणतात. (सि. ५.
आकृ. पहा.)

सिद्धान्त ५.

जर विषमापूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृकृ ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मि-
ळेल, व ज्या ज्ञापिकेस ज्ञ असतो त्या ज्ञापिकेस समीपतर जर स ना-
भि असेल, तर सज्ञ सप-वर उभयरूपानें पडेल.

विषमापूर्णकक्षः

(८९)



विषमापूर्णकक्षावर प बिन्दूजवळ एक प बिन्दु असूंदे.

पप ज्या काढ, व तिला ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढीव; सज्ञ सांध.

• पम, पम हे ज्ञापिकेवर लम्ब काढ व सप, सप सांध.

पस वाढीव, व तिला विषमापूर्णकक्षास घ बिन्दूंत मिळूंदे; आतां, ज्याअर्थी ज्ञमप, ज्ञसप त्रिकोण सरूप आहेत,

$$\therefore \text{ज्ञप} : \text{ज्ञप} :: \text{मप} : \text{मप}, \text{ [यूक्लिड, ६.४.]}$$

$$:: \text{सप} : \text{सप},$$

• सज्ञ पसघ कोनाचे दोन समान भाग करिते. (यूक्लिड, ६.सि.अ)

आतां, प जेव्हां प बिन्दूच्या अमर्याद जवळ असतो, व पप प बिन्दुस्थ स्पृक होते, तेव्हां पसप कोन अमर्याद लहान होतो व घसप कोन दोन काटकोनांच्या जवळ जवळ येतो म्हणून ज्ञसप कोन शीवटीं काटकोन होतो कारण तो पसघ कोनाचा अर्द्धभाग आहे.

म्हणून, पज्ञ जेव्हां प-बिन्दुस्थ स्पृक होते, तेव्हां

ज्ञसप कोन काटकोन होतो,

ह्रणजे सज्ञ सप-वर लम्बरूपानें पडते.

उपसि. १. प्रत्यनुमानानें, जर सज्ञ सप-वर लम्बरूप काढिली व तिला ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळूं दिलें व पज्ञ सांधले, तर पज्ञ प-बिन्दुस्थ स्पृक होईल.

उपसि. २. जर पज्ञ दुसऱ्या ज्ञापिकेस ज्ञ बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढविली, व सज्ञ सांधले, तर

सज्ञ सप-वर लम्बरूपानें पडेल.

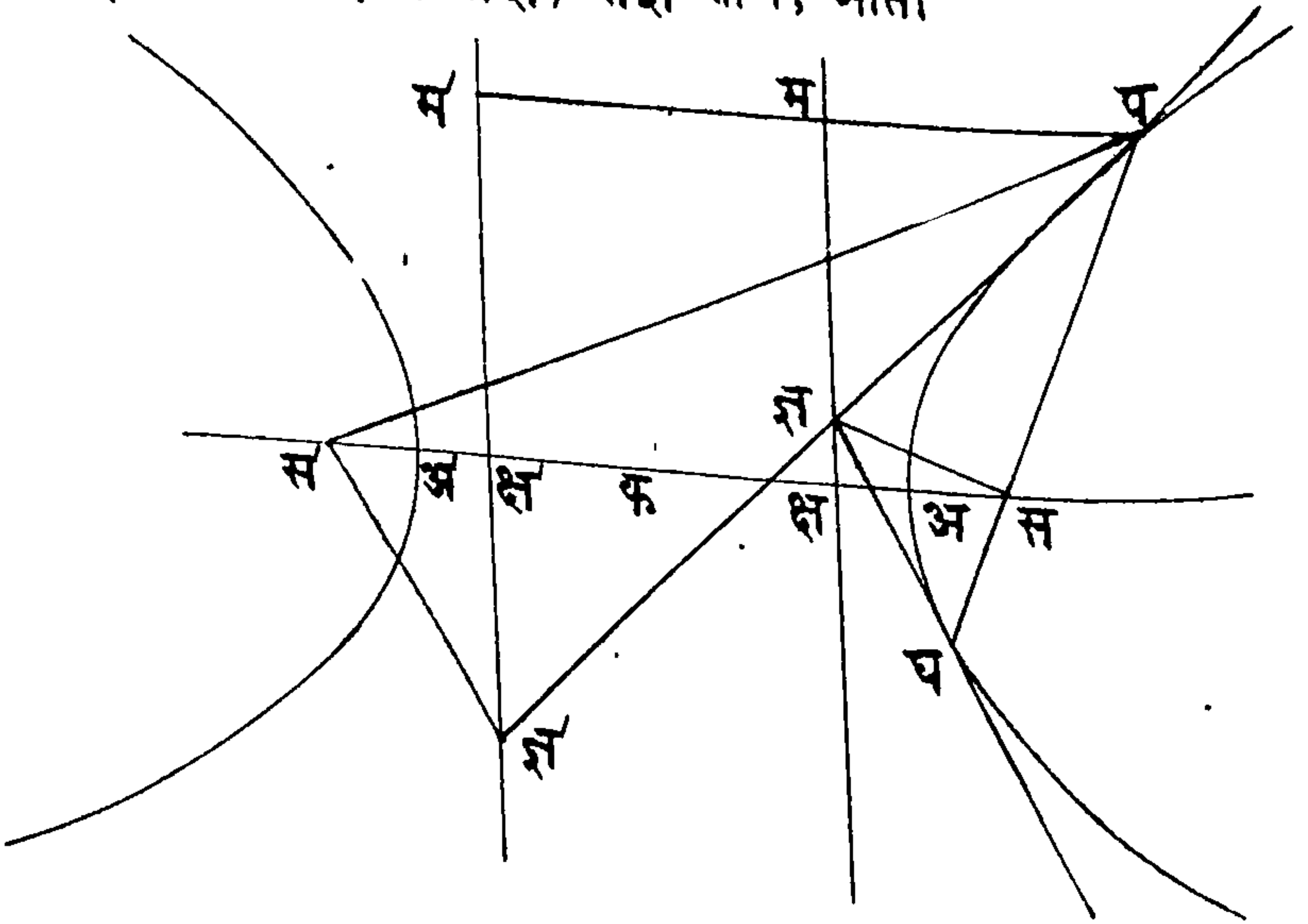
उपसि. ३. ऊर्ध्वमात्रेच्या ह्रणजे नाभींतून जाणाऱ्या दुपट निर्णाधिकेच्या अन्त्यस्थ स्पृशा अक्षास क्ष बिन्दूंत मिळतात.

सिद्धान्त ६.

विषमापूर्णाकक्षाची प बिन्दुस्थ स्पृक सप, सप ह्या नाभ्यन्त-रांशीं समान कोन करिते.

प-बिन्दुस्थ स्पृशीला ज्ञापिकांस ज्ञ, ज्ञ बिन्दूंत मिळूं दे.

पमर्म ज्ञापिकांवर लम्बरूप काढ; तिला ज्ञापिकांस म, म बिन्दूंत क्रमानें मिळूं दे; सज्ञ, सज्ञ सांध; आतां



सपः पमः :: सपः पमः, [सि.१०.]

व, ज्याअर्थां ज्ञमप, ज्ञमप त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ पमः पज्ञः :: पमः पज्ञ, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ सपः पज्ञः :: सपः पज्ञ. (अन्तरसाम्य.)

आतां सपज्ञ, सपज्ञ त्रिकोणांत सपज्ञ, सपज्ञ कोनांजव-
ळ्या बाजू अनुपात पदे आहेत व पसज्ञ कोन पसज्ञ कोना बरो-
बर आहे, कारण ते काटकोन आहेत, व सज्ञप, सज्ञप कोन पृथ-
क् पृथक् एका काटकोनापेक्षां कमी आहेत,

∴ सपज्ञ, सपज्ञ त्रिकोण सरूप आहेत, (यूक्लिड, ६.७.)

∴ सपज्ञ कोन = सपज्ञ कोन.

सिद्धान्त ७.

सनाभ ज्यांच्या अन्त्यस्थ स्पृशा एकमेकीस ज्ञापिकेंत छेदि-
तात. [सि. ६. आक.पहा.]

पसघ ही सनाभ ज्या असूं दे, व प-बिन्दुस्थ स्पृशेला ज्ञापि-
केस ज्ञ बिन्दूंत मिळूं दे. सज्ञ सांध; आतां

ज्ञसप कोन काटकोन आहे, (सि.५.)

∴ ज्ञसघ कोन ही काटकोन आहे,

∴ ज्ञघ ही घ-बिन्दुस्थ स्पृक् झाली. (सि.५. उपसि.१०.)

सपज्ञे सनाभ ज्यांच्या अन्त्यस्थ स्पृशा एकमेकीस ज्ञापिकेंत छेदितात.

सिद्धान्त ८.

५१. जर प-बिन्दुस्थ स्पृक् व्यतिक्रान्ताक्षास ट बिन्दूंत मिळेल,
व पन ही प बिन्दूची निर्णायिका असेल, तर

कट.कन = कअ.

ज्ञापिकांवर पमर्म लम्बरूप काढ; तिला ज्ञापिकांस म,र्म बि-
न्दूंत मिळूं दे. सप, सप सांध; आतां,

नगः नकः :: बकैः अकैः.

ज्ञापिकांवर पमर्म लम्बरूप काट; तिला ज्ञापिकांस म,र्म बि-
न्दूत मिळूं दे; सप उ बिन्दूपर्यंत वाढीव; आतां,

ज्याअर्थी टपग कोन काटकोन आहे,

∴ उपग कोन = सपट कोनाचा प्रपूरक,

व सपग कोन = सपट कोनाचा प्रपूरक;

परंतु सपट कोन = सपट कोन, [सि.६.]

∴ उपग कोन = सपग कोन,

∴ पग सपट कोनाचे दोन समान भाग करितो,

∴ सगः सगः :: सपः सप, (यूक्लिड, ६. सि. अ.)

:: पर्मः पम, [सि. १.]

:: क्षनः क्षन, [समान्तरता.]

∴ सग + सगैः सग - सगः :: क्षन + क्षनः क्षन - क्षन;

अथवा, २ कगः ससः :: २ कनः क्षक्ष.

विनिमयानें, २ कगः २ कनः :: ससः क्षक्ष,

ह्मणजे, कगः कनः :: ससः क्षक्ष,

:: कसः कक्ष,

:: कसैः कअै. (सि. २. उपसि.)

∴ कग - कनः कनः :: कसै - कअैः कअै;

ह्मणजे नगः कनः :: बकैः अकै. [सि. ३. क. ४८.]

सिद्धान्त १०.

जर पन ही विषमापूर्णाक्षवरील प बिन्दूची निर्णायिका असे-
ल, तर [सि. ८. आकृ. पहा.]

पनैः अन. अनः :: बकैः अकै.

कारण नगः नकः :: बकैः अकै; [सि. ९.]

व एकाच उंचीचे काटकोन चौकोन परस्परांशीं आपआपल्या पा-

(९४)

शङ्कुच्छेद.

यांच्या प्रमाणानें असतात, (यूक्लिड, ६.१.)

∴ टन. नग : टन. नक :: बकै : अकै,
अथवा, पनै : टन. नक :: बकै : अकै. [यूक्लिड ६.८. उपसि.]
परंतु टन. कन = कनै - कट. कन, (यूक्लिड, २.२.२.)
= कनै - कअ, (सि. ८.)
= अन. अन, (यूक्लिड, २.६.)
∴ पनै : अन. अन :: बकै : अकै.

सिद्धान्त ११.

जर विषमापूर्णकक्षाचा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब व्यतिक्रान्ताक्षा
स ग बिन्दूत मिळेल, तर [सि. ८. आकृ. पहा.]

सग : सप :: कस : कअ.

सप उ बिन्दू पर्यंत वाढीव; आतां,
ज्याअर्थी पग सपउ कोनाचे दोन समान भाग करितो, (सि. ९.)

∴ सग : संग :: सप : सप, [यूक्लिड, ६. सि. अ.]

∴ सग : संग - संग :: सप : सप - सप,

परंतु सप - सप = अअ, (सि. ३.)

व संग - संग = सस,

∴ सग : सस :: सप : अअ,

अथवा, सग : सप :: सस : अअ,

हणजे सग : सप :: कस : कअ.

उपसि. ह्यास्तव,

सग : सप :: कस : कअ.

सिद्धान्त १२.

५३. जर विषमापूर्णकक्षाच्या स, स नाभी पासून प-बिन्दु
स्थ स्पृशेवर सय, सय लम्बरूप काढिल्या, तर य, र्य बिन्दु अ-

अ-स व्यास कल्पून काढिलेल्या चतुर्थाच्या परिघावर येतील, व
सय.सय = चकै.

सप, सप सांध; सय सप-स उ बिन्दून मिळे पर्यंत वाढीव;
कय सांध; आतां,

ज्या अर्थी सपय कोन = उपय कोन, (सि. ६.)

व सयप कोन = उयप कोन, [समकोणात्.]

व पय ही बाजू सपय, उपय त्रिकोणांस साधारण आहे,

∴ सपय त्रिकोण = उपय त्रिकोण, सर्वांशीं, [यूक्लिड, १. २६.]

∴ सप = पउ, व, सय = उय,

∴ सप - सप = सउ,

परंतु, सप - सप = अअ, (सि. ३.)

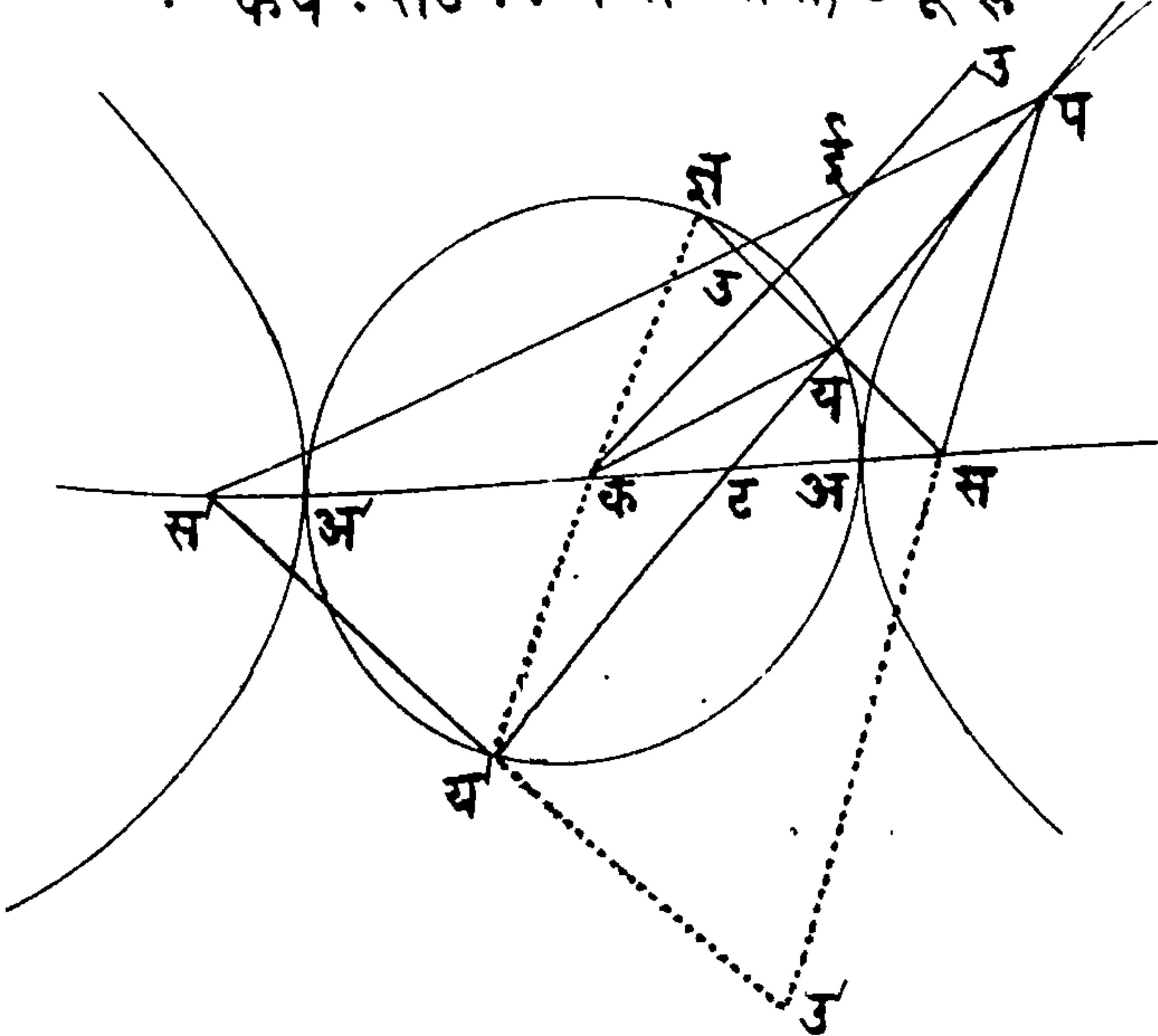
∴ सउ = अअ.

पुनः ज्या अर्थी सक = कस, व सय = उय,

∴ सक : कस :: सय : यउ, [प्रमाणसाम्य.]

∴ कय सउ-शीं समान्तर आहे, [यूक्लिड, ६. २.]

∴ कय : सउ :: कस : सस, [यूक्लिड. ६. ४.]



(१६)

शङ्कुच्छेद.

∴ कय = ३ संउ = कअ;

ह्याप्रमाणेच कय = कअ.

स्मणून य, य बिन्दु अअ- स व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळाच्या :
परिघावर आले.

दुसऱ्यानें, सय ह्या वर्तुळास ज्ञ बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढीव,
ज्ञय सांध; आतां

ज्याअर्थी ज्ञयय कोन काटकोन आहे [रचना.]

∴ ज्ञय, क केन्द्रांतून जाते,

∴ सकज्ञ कोन = सकय कोन, [यूक्लिड, १.१५.]

∴ सज्ञ = सय, [यूक्लिड, १.४.]

∴ सय. सय = सय. सज्ञ, [सय-नें गुणून.]

= सअ. सअ, (यूक्लिड, ३.३६. उपसि.)

= कसै - कअ, (यूक्लिड, २.६.)

= बकै. [सि. ३. क. ४८.]

उपसि. जर कड प बिन्दुस्थ स्पृशेरीं समान्तर काढिली व
तिला सप-स ई बिन्दूंत मिळूं दिलें, तर

ज्याअर्थी कईपय हा समान्तर षुज चौकोन आहे,

∴ पई = कय = अक.

सिद्धान्त १३.

५४. ओ ह्या बाह्य बिन्दूपासून विषमापूर्णकक्षास स्पृग्द्वय
काढायचें.

स, स नाभीं पैकीं स नाभि ओ बिन्दूच्या अधिक जवळ असूंदे.

स केन्द्र व अअ लांबीची त्रिज्या कल्पून एक वर्तुळ काढ.

ओस, ओस सांध; सओ- ला अथवा वाढविलेल्या सओ-
ला वर्तुळास ऐ बिन्दूंत मिळूं दे.

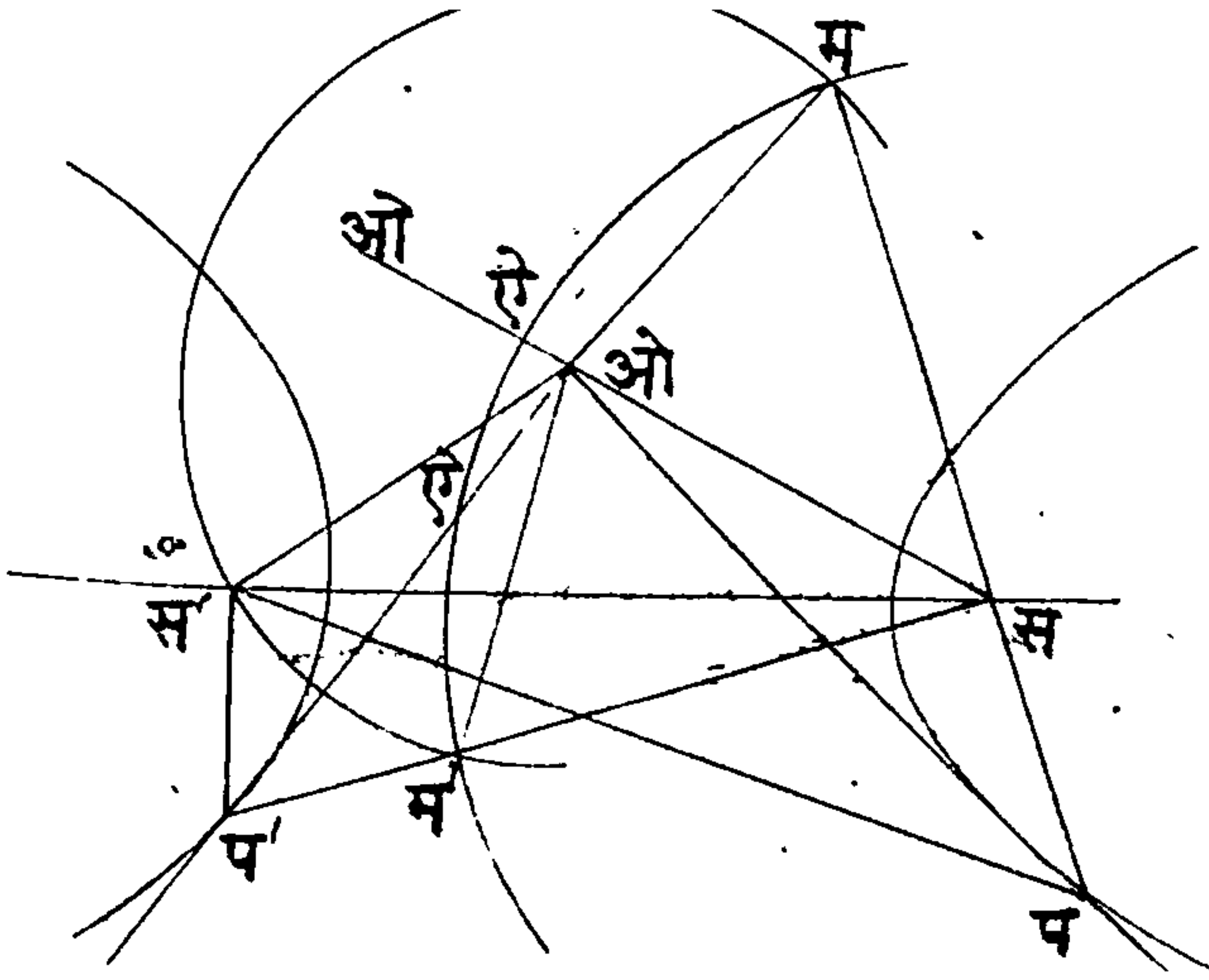
आतां, ओ बिन्दु जर मऐर्म वर्तुळाच्या आंत असेल तर ओस

ओऐ-पेक्षां मोठी होईल हें स्पष्टच आहे; व ओ जर वर्तुळाच्या-बाहेर असेल, तरी [देखील ओस ओऐ-पेक्षां मोठी होईल, कारण,]

ज्याअर्थी ओस-ओस < अअ अथवा सऐ, (सि.४.)

∴ ओस-ओस < ओस-ओऐ,

∴ ओस > ओऐ.



ओ केन्द्र व ओस त्रिज्या कल्पून दुसरें एक वर्तुळ काढ; ह्या वर्तुळाचा पहिल्या वर्तुळास म, म बिन्दूंत छेदूं दे. दुसरें वर्तुळ पहिल्या वर्तुळास नेहमीं छेदीलच कारण ओऐ-पेक्षां ओस मोठी आहे.

सम, सम सांध; त्यांना वाढीव व विषमापूर्णकक्षास प,प बिन्दूंत मिळूं दे.

ओप, ओप सांध; ह्या इष्टस्पृशा होतील.

सप, सप सांध; आतां

ज्याअर्थी सप-सप = अअ = सऐ, [सि.४. व रचना.]

= सम, [त्रिज्या.]

$$\therefore \text{सप} = \text{सम} + \text{सप} \\ = \text{पम}.$$

आतां सप, पओ = मप, पओ, अनुक्रमे,

व ओस = ओम, [त्रिज्या.]

$$\therefore \text{ओपस कोन} = \text{ओपम कोन}, [\text{यूक्लिड}, १.८.]$$

$$\therefore \text{ओप ही प बिन्दुस्थ स्पृक् झाली. (सि. ६.)}$$

ह्याप्रमाणेच ओप ही प बिन्दुस्थ स्पृक् होईल.

जेव्हां विषमापूर्णकक्षच्छेदनार्थ सम, सम ह्यांना स-च्या एकाच अथवा अभिमुख दिशांस वाढविणे भाग पडत असेल तेव्हां प, प संपर्क बिन्दु विषमापूर्णकक्षाच्या एकाच अथवा अभिमुख दिशांस असणाऱ्या शारवांवर येतील.

सिद्धान्त १४.

जेव्हां संपर्क बिन्दु विषमापूर्णकक्षाच्या एकाच अथवा अभिमुख शारवांवर असतील, तेव्हां जर ओ बिन्दू गासून ओप, ओप हे स्पृग्द्वय विषमापूर्णकक्षास काढिले, तर ह्या स्पृग्द्वयासमोरील - अन्यतर नाभिस्थकोन समान अथवा संपूरकरूपी होतील.

प, प बिन्दु विषमापूर्णकक्षाच्या अभिमुख शारवांवर असूंदे.

पस, सप सांध; असेच सप, सप सांध.

पस म बिन्दू पर्यंत वाढीव. पम पस- बरोबर कर. पस- पासून पस- च्या बरोबरीचा पस भाग पाड.

ओम, ओम सांध. तसेच ओस, ओस सांध.

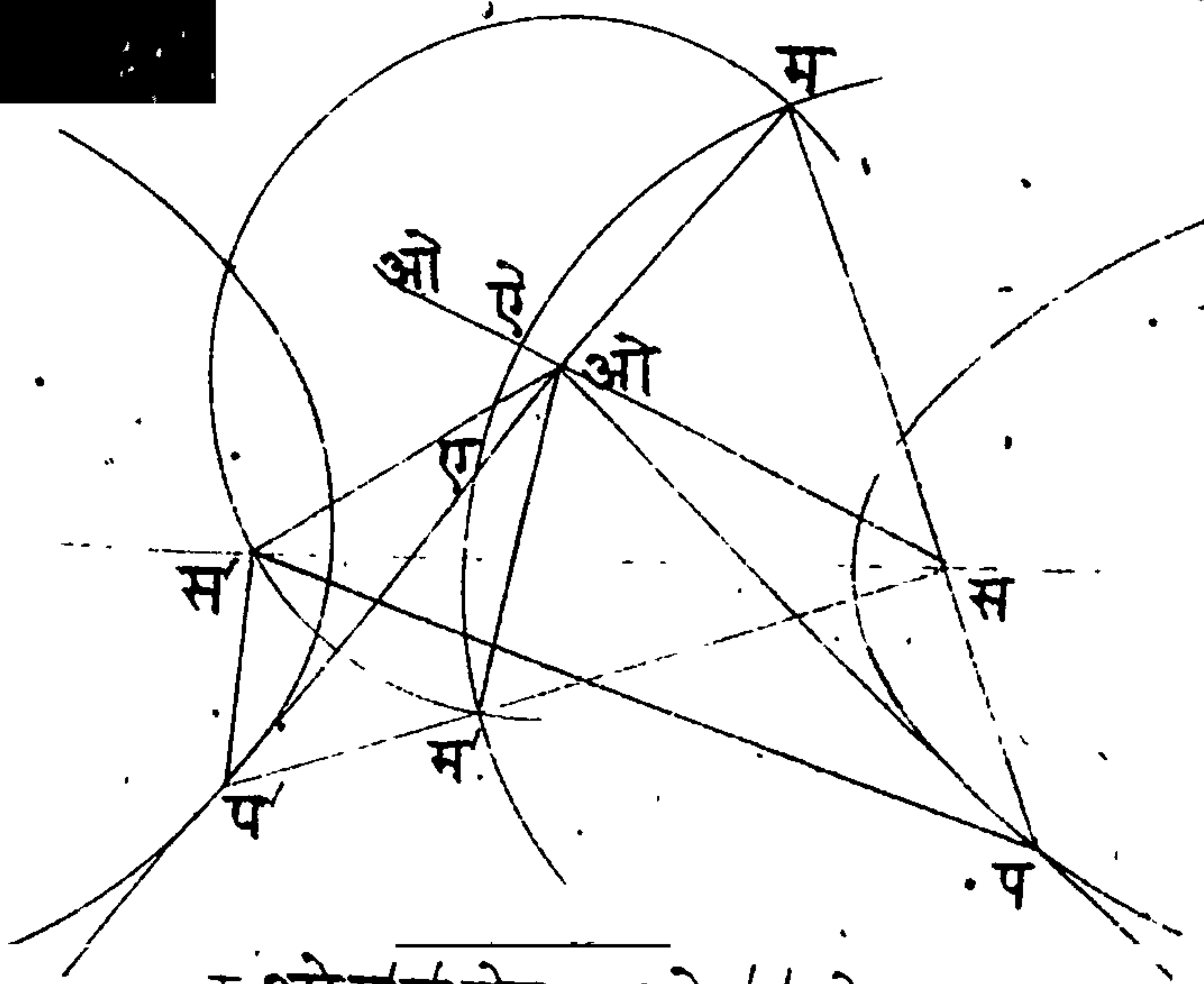
आतां, ज्या अर्थी ओप, पस = ओप, पम, अनुक्रमे,

$$\text{व ओपस कोन} = \text{ओपम कोन}, (\text{सि. ६.})$$

$$\therefore \text{ओस} = \text{ओम}, [\text{यूक्लिड}, १.४.]$$

$$\text{व ओसप कोन} = \text{ओमप कोन.}$$

ह्याप्रमाणेच ओस = ओम,



व ओसर्पकोन = ओमर्पकोन.

∴ ओम = ओर्म.

पुनः, ज्याअर्थी सम = सप - सप = अर्ज, व पम = सप.

व सम = सप - सप = अर्ज,

∴ सम = सर्म.

आणरवी, ज्याअर्थी ओस, सम = ओस, सर्म, अनुक्रमे,

व ओम = ओर्म,

∴ ओसमकोन = ओसर्मकोन, [यूक्लिड, १.८.]

व ओमसकोन = ओर्मसकोन.

परंतु ओसमकोन ओसपकोनाचा संपूरक आहे,

व ओर्मसकोन ओर्मपकोनाचा संपूरक आहे,

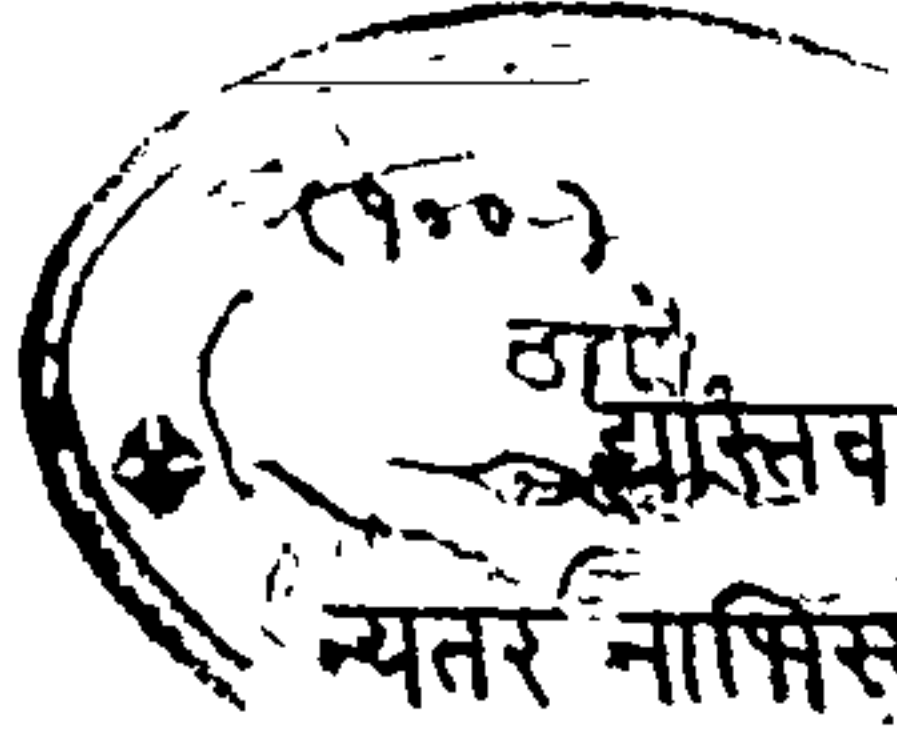
∴ ओसर्मकोन ओसपकोनाचा संपूरक झाला,

व ओमपकोन ओर्मपकोनाचा संपूरक झाला,

परंतु ओमपकोन = ओसपकोन,

व ओर्मपकोन = ओसर्मकोन,

∴ ओसर्मकोन ओसर्मकोनाचा संपूरक झाला.



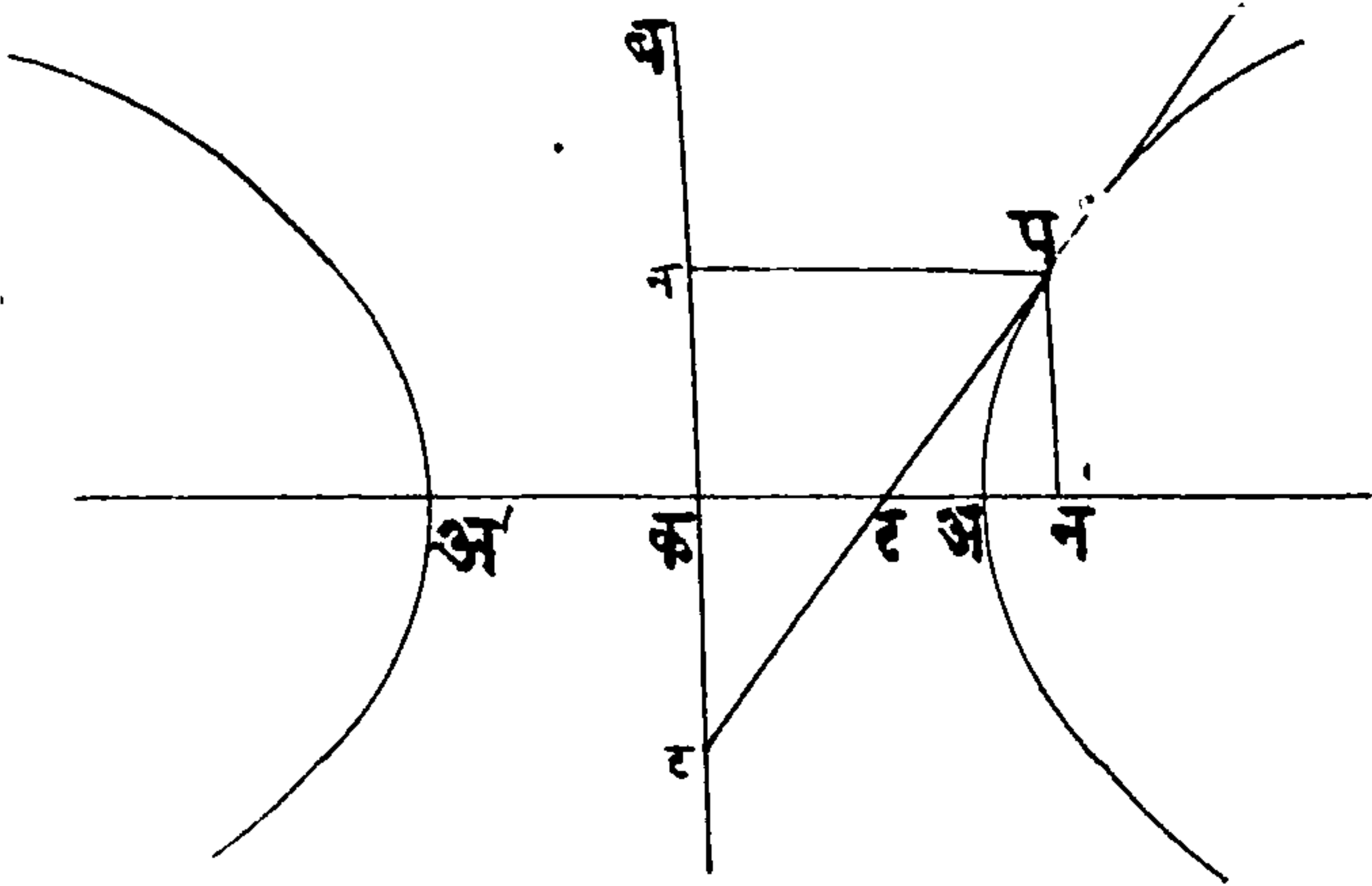
शङ्कुच्छेद.

यास्तव ओप व ओप ह्या स्पृशा समोरील (स अथवा स) अन्यतर नाभिस्थकोन संपूरक रूपी असतात.

जर प, प बिन्दु विषमापूर्णकक्षाच्या एकाच शाखेवर असतील, तर ओप व ओप ह्यांच्या समोरील (स अथवा स) अन्यतर नाभिस्थकोन समान होतील हे ही ह्याप्रमाणेच दाखवितां येईल.

सिद्धान्त १५.

१५. जर विषमापूर्णकक्षाची प बिन्दुस्थ स्पृक सहचरिताक्षास ट बिन्दूंत मिळेल व पन जर कब-वर लम्बरूप काढिली, तर
कन. कट = बकै.



पन ही कअ-वर लम्बरूप काढ. आतां

कट : कट :: पन : नट, [यूक्लिड, ६.४.]

विनिमयाने :: कट : पन :: कट : नट,

∴ कट.कन : पन :: कट.कन : कन.नट;

अथवा कट.कन : कट.कन :: पन : कन.नट,

∴ बकै : अकै. (सि.१०.)

परंतु कट.कन = अकै, [सि.८.]

∴ कट.कन = बकै.

५६. विषमापूर्णकक्षाच्या धर्माविषयी ज्या हा कालपर्यंत सिद्धता दिल्या त्या ऊनसंपूर्णकक्षांतील त्या त्या सिद्धान्तांच्या सिद्धता सारख्या आहेत. उपकारक वर्तुळाच्या साहाय्याने जसे आपण ऊनसंपूर्णकक्षाचे धर्मविवेचन केले तसेच विषमापूर्णकक्षाच्या अवशिष्ट धर्माचे विवेचन रेखाविशेषांच्या योगाने अधिक सुलभतेने करू. ह्या रेखाविशेषांस उपसंजिहाना म्हणतात; व ह्यांचे लक्षण लोकरच देण्यांत येईल.

लक्षण. ककेन्द्र, बर्ब अतिक्रान्ताक्ष, व अर्ध सहचरिताक्ष कल्पून जें विषमापूर्णकक्ष काढितात त्याला सहचरित विषमापूर्णकक्ष म्हणतात. ह्याच्या नाभि बर्ब रेघेत येतील, व त्या नाभि, आद्यविषमापूर्णकक्षाच्या नाभि क केन्द्रापासून जितक्या अन्तरावर असतात, तितक्याच अन्तरावर येतील हे स्पष्टच आहे, कारण (सि. १६. आकृ. ५६.)

$$कस = कअ + कब.$$

सिद्धान्त १६.

जर अ, अर्, ब, बर्ब शिरांतून आद्यविषमापूर्णकक्षास व त्याच्या सहचरितास काढिलेल्या स्पृशांच्या योगाने जो एक काटकोन चौकोन होतो त्याच्या अन्यतर कर्णावरील र बिन्दूतून रपन, रडम निर्णायिका अर्, बर्ब त्यांजवर लम्बरूप काढिल्या व त्यांना आद्यविषमापूर्णकक्षास व त्याच्या सहचरितास प, ड बिन्दूंत मिळू दिले; तर

$$रन = पन = बक,$$

$$व रम = डम = अक.$$

र हा बिन्दु ओक ओ कर्णावर असूंदे. आतां

$$रन : कन :: अओ : अक, [यूक्लिड. ६. ४.]$$

$$:: बक : अक, [समान्तरता.]$$

(१०२)

शङ्कुच्छेद.

व पनै : कनै-कअै :: बकै : अकै; (सि.१००.)

∴ रनै-पनै : कअै :: बकै : अकै;

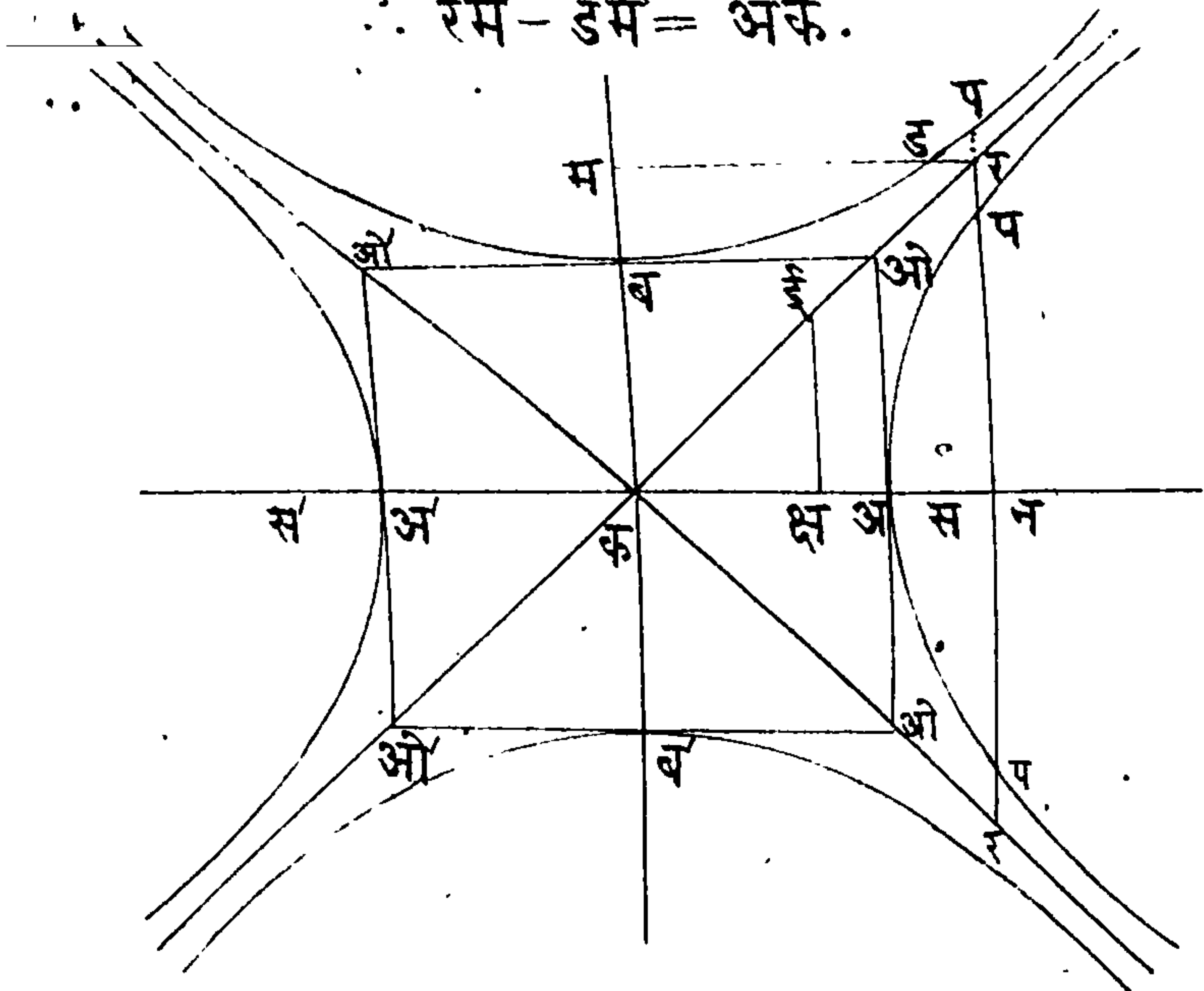
∴ रनै-पनै = बकै.

पुनः, रमै : कमै :: अकै : बकै, [यूक्लिड, ६.४. व अओ=बकः]

व डमै : कमै-कबै :: अकै : बकै; (सि.१००.)

∴ रमै-डमै : बकै :: अकै : बकै;

∴ रमै-डमै = अकै.



जर नर वाढविली व तिला सहचरित विषमापूर्णकक्षास प बिन्दूत मिळूं दिलें, व मर वाढविली व हिला आद्यविषमापूर्णकक्षास ड बिन्दूत मिळूं दिलें, तर आपणास पूर्वोक्तीतीनें स्वातीं लिहिलेले समीकरणयुग्म उपलब्ध होईल;—

पनै - रनै = बकै,

व डमै - रमै = अकै.

उपसि. जर रप, आद्यविषमापूर्णकक्षास प बिन्दूत व दुसऱ्या उपसंजिहानेस र बिन्दूत मिळे पर्यंत वाढविली; तर

रनै - पनै = रप.पर; (यूक्लिड, २.५.)

∴ रप.पर = बकै.

आतां रपन जों जों अ बिन्दू पासून दूर न्याची तों तों पर वाढत जाणार; परंतु रप व पर ह्यांनी रचलेला काटकोन चौकोन-सदैव अभिन्न असला पाहिजे, नाहीतर रप.पर = बकै ह्या समीकरणास बाध येईल; यास्तव पर जर वाढत जाईल तर रप अर्थात कमी होत गेली पाहिजे. ह्या सर्व कारणास्तव आपण जर र बिन्दूक बिन्दू पासून अमर्याद दूर घेतला, तर रप ही अमर्याद कमी होईल, व कर रेघ विषमापूर्णकक्षास कधीही मिळणार नाही असा जरी आक्षेप केला तरी ती विषमापूर्णकक्षाच्या जवळ जवळ येणार हे कबूल केले पाहिजे. [वास्तविक कर विषमापूर्णकक्षाच्या जवळ येत नाही परंतु विषमापूर्णकक्ष उलटें तिच्या जवळ जातें; यास्तव विषमापूर्णकक्ष कर-च्या जवळ जातें किंवा कर विषमापूर्णकक्षाच्या जवळ येतें ह्यांतून कोणतेंही ह्मटलें तरी फळ एकच.]

'कर-च्या ह्या धर्मावरून तिला विषमापूर्णकक्षाची उपसं-
जिहाना म्हणतात.

[जेव्हां वृत्तस्थायी बिन्दु, प्रभावापासून अनन्तान्तरापर्यंत संचार करून, एखाद्या सरळ रेघेच्या अमर्याद जवळ जवळ येत जातो अशा वेळीं त्या सरळरेघेस उपसंजिहाना म्हणतात.]

ह्या प्रमाणेंच, जर नर वाढविली व तिला सहचरित विषमापूर्ण कक्षास प बिन्दूत मिळू दिलें, तर

रप.पर = बकै;

ह्या कारणास्तव कर सहचरित विषमापूर्णकक्षाची ही उपसंजिहाना झाली.

ओओ काटकोन चौकोनाचा दुसरा कर्ण ओकओ हा आद्य विषमापूर्णकक्ष व त्याचें सहचरित ह्या उभयतांची उपसंजिहाना होईल.

सिद्धान्त १८.

जर विषमापूर्णकक्षाच्या अन्यतर उपसंजिहानेवरील र बिन्दूपासून रपन, रडम ह्या विषमापूर्णकक्षास व त्याच्या सहचरितास निर्णायिका काढिल्या व पड सांधले, तर पड दुसऱ्या उपसंजिहानेशीं समान्तर होईल. [सि. १७. आकृ. पहा.]

कारण रनैः रमैः :: बकैः अकैः, [यूक्लिड, ६.४.]
 व रनै-पनैः रमै-डमैः :: बकैः अकैः, (सि. १६.)

∴ पनैः डमैः :: बकैः अकैः;

:: रनैः रमैः,

∴ पनः डमः :: रनः रमः,

∴ पड मन-शीं समान्तर आहे. (यूक्लिड, ६.२.)

आणखी, कनः कमः :: अकः बक

∴ मन अब-शीं समान्तर आहे; [यूक्लिड, ६.२.]

व ओअः ओओः :: ओबः वओ,

∴ अब ओओ-शीं समान्तर आहे; [यूक्लिड, ६.२.]

ह्यास्तव पड ओओ-शीं समान्तर झाली.

उपसि. ह्या प्रमाणेच, जर र, ड हे, जेथें नर, मर वाढविल्या असतां क्रमानें सहचरित विषमापूर्णकक्षास व आद्य विषमापूर्णकक्षास मिळतात, ते बिन्दु असतील, तर पड ओओ-शीं समान्तर होईल.

सिद्धान्त १९.

१९. जर विषमापूर्णकक्षाच्या घ, घ ह्या बिन्दूतून रघघर रघ पाहिजे त्या दिशेला काढली व तिला उपसंजिहानांस र, र बिन्दूत मिळू दिलें, तर

रघ = रघ.

घ, घ बिन्दूतून युघउ, युघउ निर्णायिका काढ. त्यांना

∴ लप = पल,

हणजे लपः स्पृशेचे प संपर्कबिन्दूत दोन समान भाग झाले.

उपसि. २. जर कप रर-स व बिन्दूत मिळेपर्यंत काढविली, तर

ज्याअर्धी रवः वरः :: लपः पल,

∴ रव = वर;

व रघ = घर

∴ घव = घर.

ह्यास्तव, जर विषमापूर्णकक्षांत एखादी समान्तर ज्यामाला - काढिली, तर तिचे सर्व मध्यबिन्दु, ज्यांशीं समान्तर असणारी स्पृक विषमापूर्णकक्षास ज्या बिन्दूत स्पर्श करिते त्या बिन्दूतून व केन्द्रांतून काढिलेल्या रेघेंत येतील.

लक्षणा. विषमापूर्णकक्षास प, प बिन्दूत मिळणाऱ्या व केन्द्रांतून काढिलेल्या पकप रेघेस व्यास हणतात.

व्यासान्त्यस्थ स्पृशांशीं समान्तर काढिलेल्या सर्व ज्यांचे व्यास दोन समान भाग करितो हें अर्थातच झालें.

सिद्धान्त २०.

५९. जर विषमापूर्णकक्षाच्या घ बिन्दूतून रघर रेघ पाहिले त्या दिशेस काढिली व तिला उपसंजिहानांस र, र बिन्दूत मिळू दितें, व लपल स्पृक रघर-शीं समान्तर काढिली, तर

रघ.घर = पल.

प, घ बिन्दूतून ईपई, युघउ निर्णायिका काढ. त्यांना उपसंजिहानांस ई, ई, यु, उ बिन्दूत मिळू दे. आता, सरूप त्रिकोणावरून,

घरः घयुः :: पलः पई, [यूक्लिड, ६.४.]

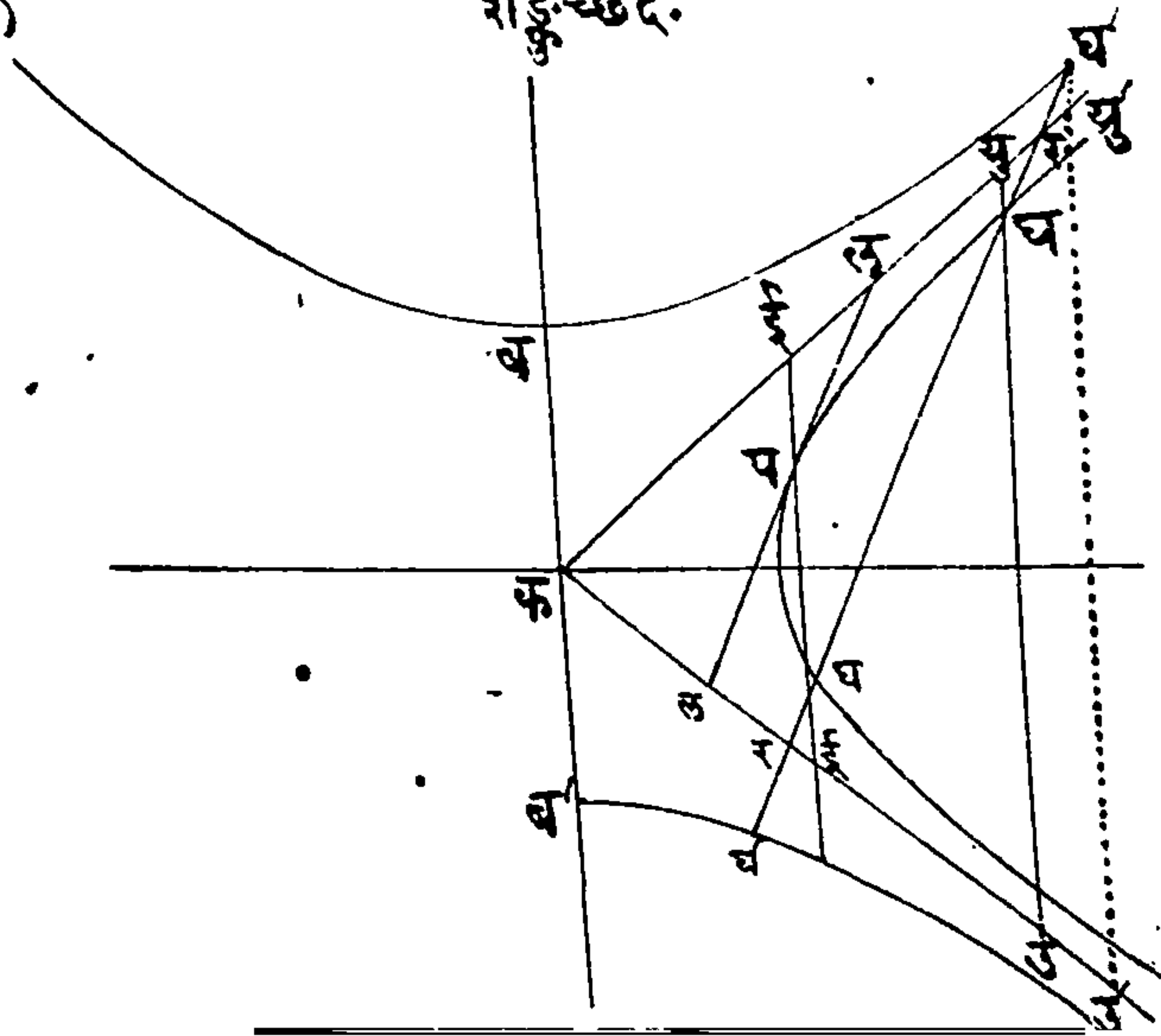
घरः घउः :: पलः पई, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ घर.घरः घयु.घउः :: पल.पलः पई.पई;

परंतु घयु.घउ = वकै = पई.पई, (सि. १६. उपसि.)

(१०८)

शङ्कुच्छेद.



$$\therefore \text{घर.घर} = \text{पल.पल},$$

$$= \text{पल}^2. \quad (\text{सि.१९. उपसि.१.})$$

उपसि. जर घष सहचरित विषमापूर्णाकक्षास घ, प विन्दूत मिळे पर्यंत वाढविली, तर आपणास सिद्ध करितां येईल कीं,

$$\text{घर.घर} = \text{पल}^2,$$

व सि.१९ मध्ये जसें सिद्ध केले आहे त्याप्रमाणे

$$\text{घर} = \text{घर},$$

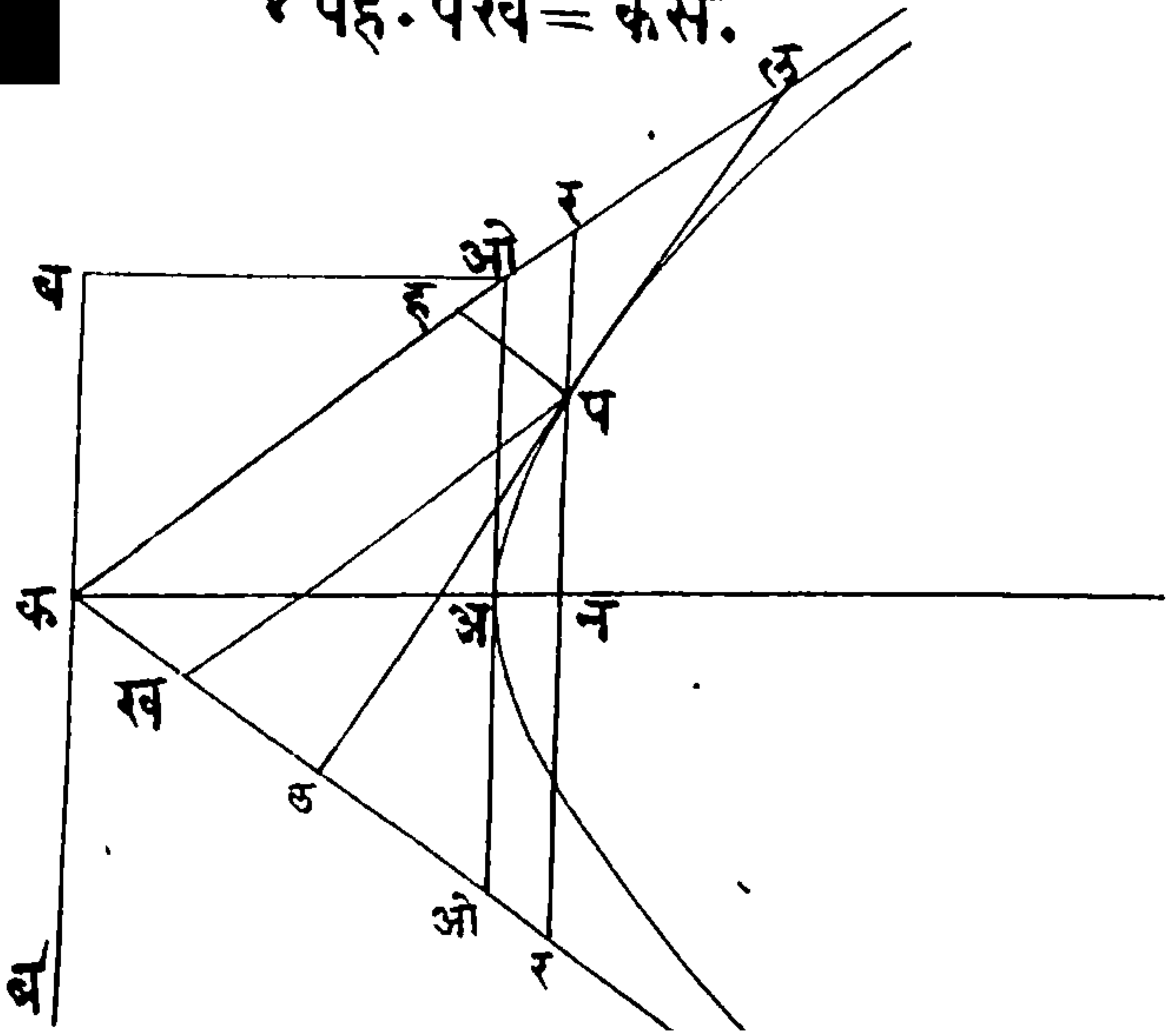
$$\therefore \text{घघ} = \text{घघ}.$$

ह्यास्तव, आद्यविषमापूर्णाकक्ष व त्याचे सहचरित ह्या उभयतांस मिळे पर्यंत जर एखादी रेघ पाहिजे त्या दिशेस काढिली तर त्यानीं अचरुद्ध जे ह्या रेघेचे एकदेश ते वरोबर होतील.

सिद्धान्त २१.

६०. जर विषमापूर्णाकक्षाच्या प विन्दू पासून पह, पख उपसंजिहानांशीं समान्तर काढिल्या व त्यांना उपसंजिहानांस क्रमानें ह, रघ विन्दूत मिळू दिलें, तर

४ पह. पख = कसै.



रपनर निर्णायिका काढ. तिला उपसंजिहानांस र, र बिन्दूत
मिळूं दे. आतां; सरूप त्रिकोणा वरून,

पहः पर :: कओ : ओओ, [यूक्लिड, ६:४.]

परखः पर :: कओ : ओओ, [यूक्लिड, ६:४.]

∴ पह.पखः पर.पर :: कओ^२ : ओओ^२,

:: कसै^२ : ४बकै. [क.५६. पहा.]

परंतु पर.पर = बकै, [सि.१६. उपसि.]

∴ ४ पह.पख = कसै.

सिद्धान्त २२.

जर विषमापूर्णाकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृक उपसंजिहानांस ल, ल
बिन्दूत मिळेल, तर लकल त्रिकोणाचें क्षेत्र अक, बक त्यांनीं रचलेल्या
फाटकोनचौकोनाचे क्षेत्रासमान होईल. [सि.२१. आक.पहा.]

पह, पख उपसंजिहानांशीं समान्तर काढ. त्यांना उपसंजिहानांस
ह, ख बिन्दूत मिळूं दे. आतां,

ज्याअर्थी कलः कहः : लल : पल, [यूक्लिड, ६.२७]

व लल = २ पल, (सि. १९. उपसि. १.)

∴ कल = २ कह = २ पख; [समान्तरता.]

स्याप्रमाणेच कल = २ करव = २ पह,

∴ कल. कल = ४ पह. पख = कसै, (सि. २१.)

= कओ. कओ,

∴ कल : कओ : : कओ : कल, [यूक्लिड, ६.१५.]

∴ लकल, ओकओ त्रिकोणांस क-बिन्दुस्थ कोन साधारण आहे व ह्या कोनाजवळील बाजू पर्यायाने अनुपात पदे आहेत,

∴ लकल त्रिकोण = ओकओ त्रिकोण, [यूक्लिड, ६.१५.]

= अक. अओ,

= अक. बक.

सिद्धान्त २३.

६१. जर विषमापूर्णकक्षाच्या उपसंजिहानेवरील र बिन्दूपासून न रपन, रडम निर्णायिका अनुक्रमे विषमापूर्णकक्षास व त्याचे सहचरितास काढिल्या; तर प, ड बिन्दुस्थ स्पृशा, कड, कप ह्या रेषांशी अनुक्रमे समान्तर होतील.

पड सांध. तिला कर-स ह बिन्दूंत मिळूंदे. आतां,

ज्याअर्थी पड ओओ-शीं समान्तर आहे, (सि. १८.)

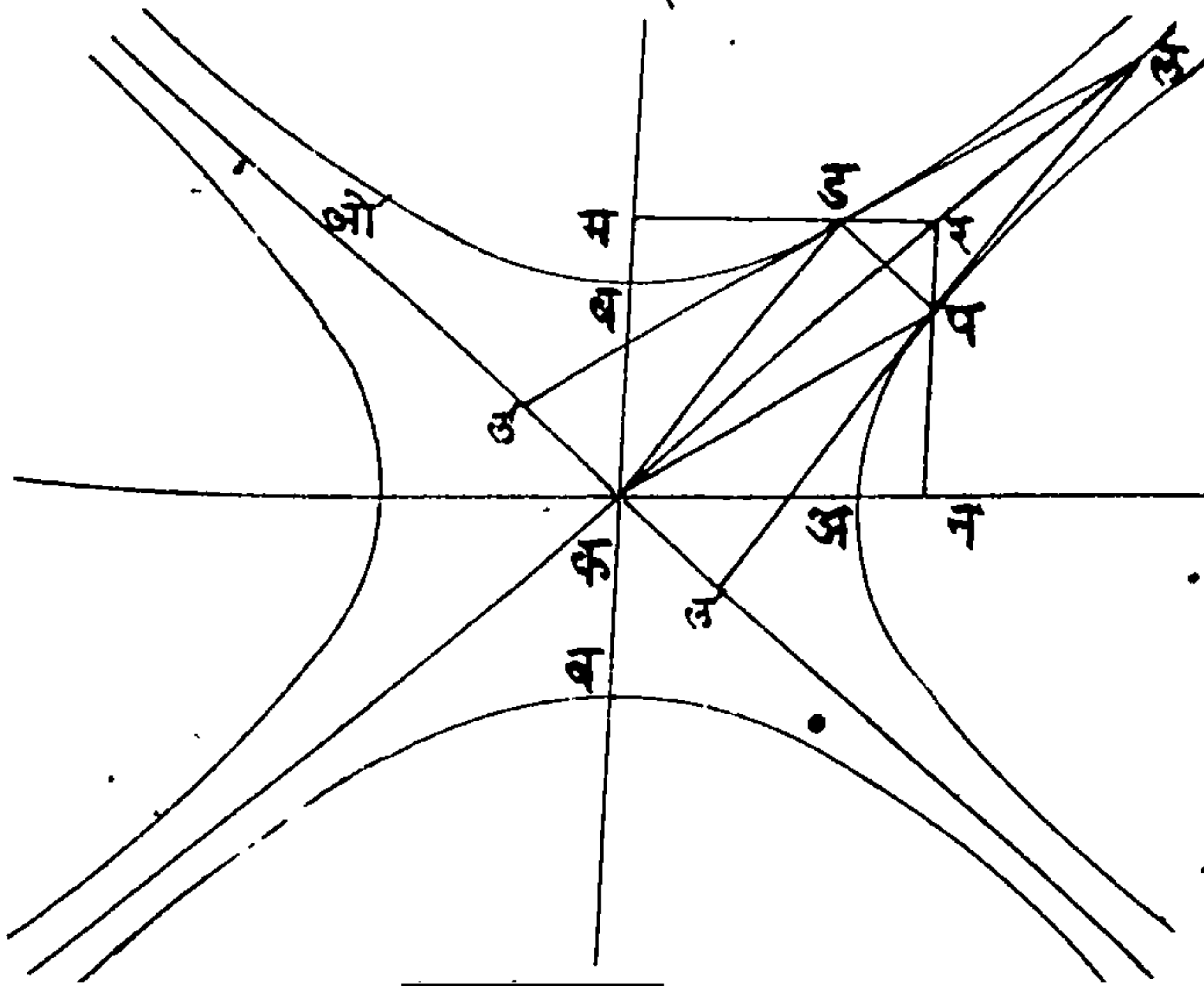
∴ प, ड बिन्दुस्थ स्पृशा वाढविलेल्या कर-स एकाच ल बिन्दूंत मिळतील. (सि. २२.)

लप, लड ह्यांना दुसऱ्या उपसंजिहानेस ल, ल' बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढीव; आतां,

ज्याअर्थी कल. कल = कसै = कल. कल', (सि. २३.)

∴ कल = कल',

∴ लक : कल' : : लप : पल, [प्रमाणसाम्य]. [सि. १९. उपसि. १]



∴ कप ड-बिन्दुस्थ स्पृशोशीं समान्तर शाली. [यूक्लिड, ६.२०]

आणखी लड : डल :: लक : कल, [प्रमाणसाम्य]

∴ कड प-बिन्दुस्थ स्पृशोशीं समान्तर शाली. [यूक्लिड, ६.२०]

कप कड ह्या रेघांस सहचरित व्यास स्मगतात, कारण ह्या रेघांपैकीं प्रत्येक रेघ दुसरीच्या अन्त्यस्थ स्पृशोशीं समान्तर असते.

सिद्धान्त २४.

जर विषमापूर्णाक्षांत कप, कड हे सामिसहचरित व्यास असतील, तर, [सि. २३. आकृ. पहा.]

$$\text{कप} \sim \text{कड} = \text{कओ} \sim \text{कब}.$$

नपर, मडर निर्णायिका काढ. त्यांना उपसंजिहानेस र बि-
द्वं मिळूंदे (सि. २३.); आतां,

$$\begin{aligned} \text{कर} - \text{कप} &= \text{नर} - \text{नप}, \\ &= \text{बक}, \quad (\text{सि. १६.}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{कर} = \text{कप} + \text{बक}.$$

$$\text{ह्याप्रमाणेंच कर} = \text{कड} + \text{अक},$$

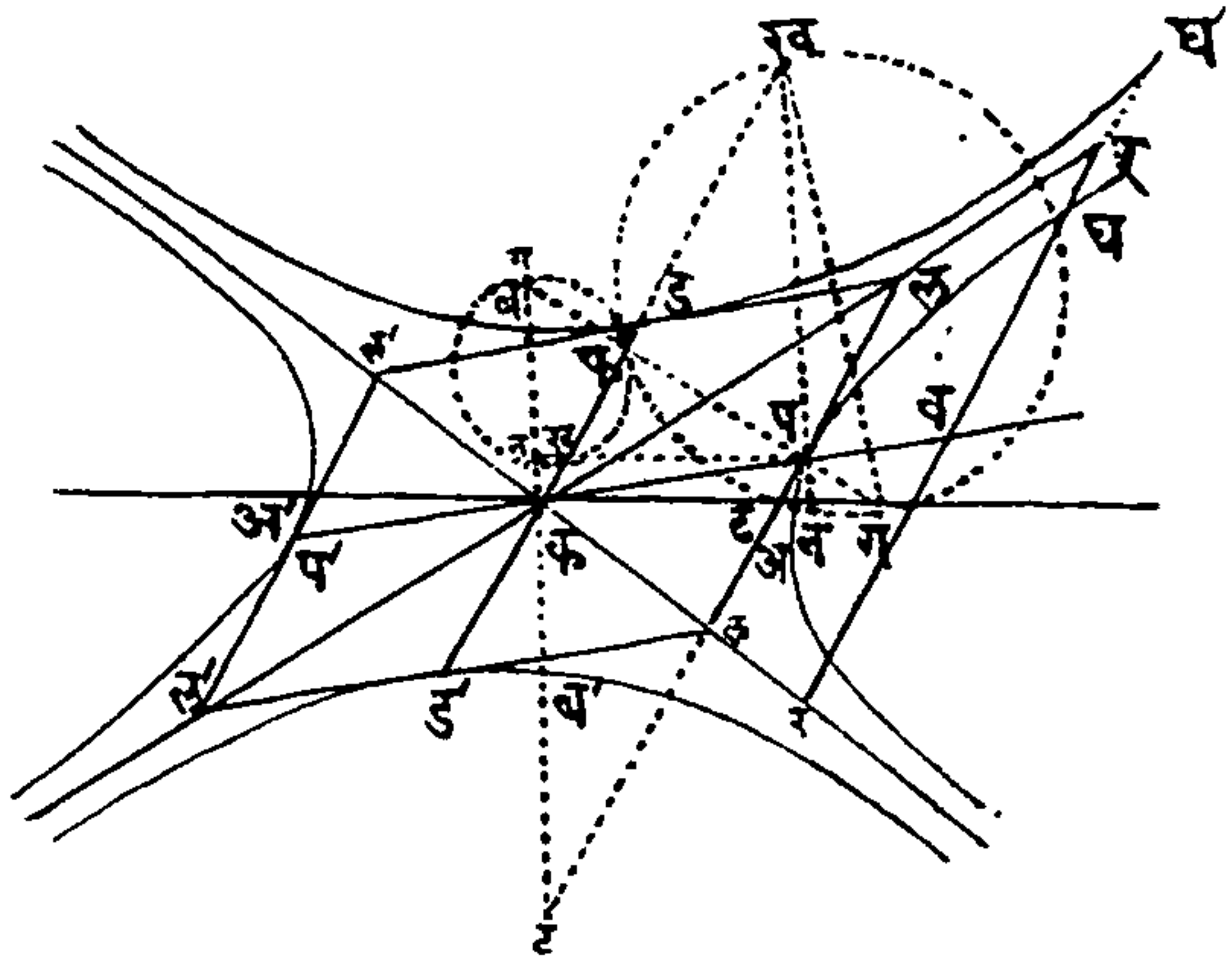
(११२)

शङ्कुच्छेदः

∴ कर्प + बर्क = कड + अर्क;
स्रणजे कर्प ~ कड = अर्क ~ बर्क.

सिद्धान्त २५.

६२. सहचरित व्यासयुग्माच्या प, प, ड, ड अन्त्य बिन्दूपासून विषमापूर्णकक्षास व त्याच्या सहचरितास काढिलेल्या स्पृशांच्या योगाने झालेल्या समान्तरभुज चौकोनाचे क्षेत्र अक्षांच्या योगाने झालेल्या काटकोन चौकोनासमान असते.



सहचरित व्यासयुग्माच्या प, प, ड, ड अन्त्य बिन्दूपासून काढिलेल्या स्पृशांच्या योगाने झालेला एक लल लल समान्तरभुज चौकोन असूंदे. ल, ल, ड, ल बिन्दु (सि. २३.) उपसंजिहानांवर येतील. आतां

लल समान्तरभुज चौकोन = ४ कल समान्तरभुज चौकोन,
= ४ लकड त्रिकोण,
= ४ अक. बक, (सि. २२.)
= अअ. बब.

उपसि. जर पफ कड- वर लम्बरूप काढिली, तर

पफ. कड = अक. बक.

आणखी, जर पग हा संपर्कलम्ब ऊनसंपूर्णाकक्षांत जसा मि-
ळतो त्या प्रमाणें व्यतिक्रान्ताक्षास ग बिन्दूंत मिळेल, तर

पफ. पग = बक.

६३. लक्षणा. विषमापूर्णाकक्षाच्या घ बिन्दूपासून प-बिन्दुस्थ
स्पृशेशीं समान्तर काढिलेली व वाढविलेल्या कप-स व बिन्दूंत मि-
ळणारी जी घ व रेघ तिला कप व्यासाची निर्णायिका म्हणतात.

सिद्धान्त २६.

जर घ व ही पकप व्यासाची निर्णायिका असेल, व कड कप-
शीं सहचरित असेल, तर [सि. २५. आकृ. पहा.]

घवै : पव.पव : : कडै : कपै.

वघ, उपसंजिहानांस र, र बिन्दूंत मिळेपर्यंत वाढीव; प-बि-
न्दुस्थ स्पृशेला उपसंजिहानांस ल, ल बिन्दूंत मिळू दे; आतां

रवै : पलै : : कवै : कपै, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ रवै-पलै : पलै : : कवै-कपै : कपै.

परंतु रघ.घर = पलै, (सि. २०.) [व रघ.घर = रवै-घवै [यू-
क्लिड, २.५.]]

∴ रवै-घवै = पलै,

अथवा रवै-पलै = घवै.

आणखी कवै-कपै = पव.पव, (यूक्लिड, २.६.)

∴ घवै : पलै : : पव.पव : कपै.

विनिमयानें, घवै : पव.पव : : पलै : कपै.

परंतु, ज्याअर्थी पड हा समान्तर भुज चौकोन आहे, (सि. २३.)

∴ पल = कड.

त्यास्तच घवै : पव.पव : : कडै : कपै.

ज्याअर्धी रकर, लकळं त्रिकोण समान आहेत (सि.२२.) व क-
बिन्दुस्थ कोन उभयतांस साधारण आहे,

∴ कर : कल :: कळ : कर. (यूक्लिड, ६.१५.)

परंतु कर : कल :: करघ : कप, [यूक्लिड, ६.२.]

व कळ : कर :: कप : कख, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ करघ : कप :: कप : कख, [यूक्लिड, ५.७.]

∴ करघ. कख = कप. [१.] [यूक्लिड, ६.१७.]

पुनः, ररघ, घघ वाढीव. त्यांना कळ उपसंजिहानेसर, घ बिन्दूत
मिळू दे, आतां

ज्याअर्धी रर-चे घ बिन्दूत दोन समान भाग झाले, (सि.१९.उपसि)

∴ रर-चेही घ बिन्दूत दोन समान भाग झाले,

व ररघ = ररघ, (सि.१९. उपसि.२.)

∴ रघ रर-शीं समान्तर आहे, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ कट : करघ :: कर : कघ, [यूक्लिड, ६.२.]

:: कख : कच, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ कच. कट = करघ. कख, [यूक्लिड, ६.१६.]

= कप. [१.]

उपसि.१. प्रत्यनुमानाने, जर घघ पघ-ची निर्णायिका असेल,

व कच. कट = कप,

तर घट घ-बिन्दुस्थ स्पृक् होईल.

उपसि.२. ह्यास्तव, जर रर रतास यु, यु बिन्दूत मिळेल,

व रर यु, रर यु काढिल्या, तर

ज्या अर्धी करघ. कख = कप,

∴ रर यु, रर यु ह्या विषमापूर्णकक्षाच्या यु, यु बिन्दुस्थ स्पृशा होतील.

सिद्धान्त २०.

६५. जर विषमापूर्णकक्षाच्या दोन ज्या एकमेकास छेदितील,

∴ घओ.ओघ = रओ.ओर - पलै.

पुनः, ओ, प बिन्दूतून अक्षावर ईओई, युपउ लम्ब काढ.
त्यांना उपसंजिहानांस ई, ई, यु, उ बिन्दूतूत मिळूं दे. आतां

रओः ओई :: पलः पयु, [यूक्लिड, ६.४.]

व रओः ओई :: पलः पउ, [यूक्लिड, ६.४.]

एणून ∴ रओ.रओः ओई.ओई :: पलैः पयु.पउ. [सि. १९.]

परंतु पयु.पउ = बकै, (सि. १६.) उपसि. १.]

व पलै = कडै, (सि. २३.)

∴ रओ.रओः ओई.ओई :: कडैः बकै,

अथवा रओ.रओः कडै :: ओई.ओईः बकै;

∴ रओ.रओ - पलैः कडै :: ओई.ओई - बकैः बकै,

अथवा घओ.ओघ : कडै :: ओई.ओई - बकैः बकै.

जर ओ बिन्दूतून दुसरी घ ओघ ज्या काढिली व कडै ति-
वेशीं समान्तर काढिली व तिला सहचरित विषमापूर्णकक्षास दु' बि-
न्दूतूत मिळूं दिलें, तर आपणास पूर्वी प्रमाणेंच स्वालील परिपाक उपल-
ब्ध होईल,

घओ.ओघ : कडै :: ओई.ओई - बकैः बकै.

त्यास्तव घओ.ओघ : घओ.ओघ :: कडैः कडै.

उपसि. जेव्हां ओ बिन्दु विषमापूर्णकक्षाच्या बाहेर असतो
तेव्हां ही हाच परिपाक यथार्थ असतो हें सिद्ध करितां येईल. आण-
खी त्या ज्या विषमापूर्णकक्षाच्या एकाच अथवा अपिन्न शार्वेस
व मिळणाऱ्या काढिल्या पाहिजेत असें नाहीं. जेव्हां एक किंवा दोन्ही
ज्या विषमापूर्णकक्षाच्या दोही शारवांस मिळतात तेव्हां, अथवा -
त्या ज्या जेव्हां विषमापूर्णकक्षाच्या निरनिराळ्या शारवांत काढितात
तेव्हां देखील हाच परिपाक अनुभववास येतो.

६६. लक्षणा. जर प-बिन्दुस्थं संपर्कलम्बावरील ओ बिन्दूस
केंद्र व ओप-स त्रिज्या कल्पून विषमापूर्णकक्षास प बिन्दूतूत स्पर्शी

अथवा पव. रउ = घघै. [समान्तरता.]

परंतु घघैः पव. पव :: कडैः कपै, (सि. २६.)

∴ पव. रउ : पव. पव :: कडैः कपै,

अथवा रउ : पव :: कडैः कपै.

आतां, वर्तुळ जेव्हां प-बिन्दुस्थ चलमानवर्तुळ होते, तेव्हां र, घ बिन्दु प बिन्दूंपर्यंत येऊन तद्रूप (प) होतात, व रउ रेघ पह रेघे-समान होते, व

पव पव-बरोबर अथवा २ कप बरोबर होते.

१) ह्यास्तव पहः २ कप :: कडैः कपै,

∴ पह. कप : २ कपै :: २ कडैः २ कपै,

∴ पह. कप = २ कडै.

सिद्धान्त ३०.

जर पयु हा विषमापूर्णाकक्षाच्या प-बिन्दुस्थ चलमानवर्तुळा-चा व्यास असेल, व पफ कड-वर लम्बरूप काढिली, तर [सि. २९. आक. पहा.]

पयु. पफ = २ कडै.

ज्याअर्थी पहयु त्रिकोण पफक त्रिकोणाशीं सरूप आहे,

∴ पयु : पह :: कप : पफ, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ पयु. पफ = पह. कप, [यूक्लिड, ६.१६.]

= २ कडै. (सि. २९.)

सिद्धान्त ३१.

जर पए ही चलमान वर्तुळाची ज्या असून विषमापूर्णाकक्षाचे नाभींतून जाईल, तर [सि. २९. आक. पहा.]

पए. अक = २ कडै.

संप-ला कड-स ई बिन्दूंत मिळू दे; आतां, ज्याअर्थी पएयु

(१२०)

शङ्कुच्छेदः

व पईफ त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ पऐः पयुः :: पफः पई. [यूक्लिड, ६.४.१]

परंतु पई = अक, (सि. १२. उपसि.)

∴ पऐः पयुः :: पफः अक,

∴ पऐ. अक = पयु. पफ, [यूक्लिड, ६.१६.१]

= २ कडै. (सि. ३०.)

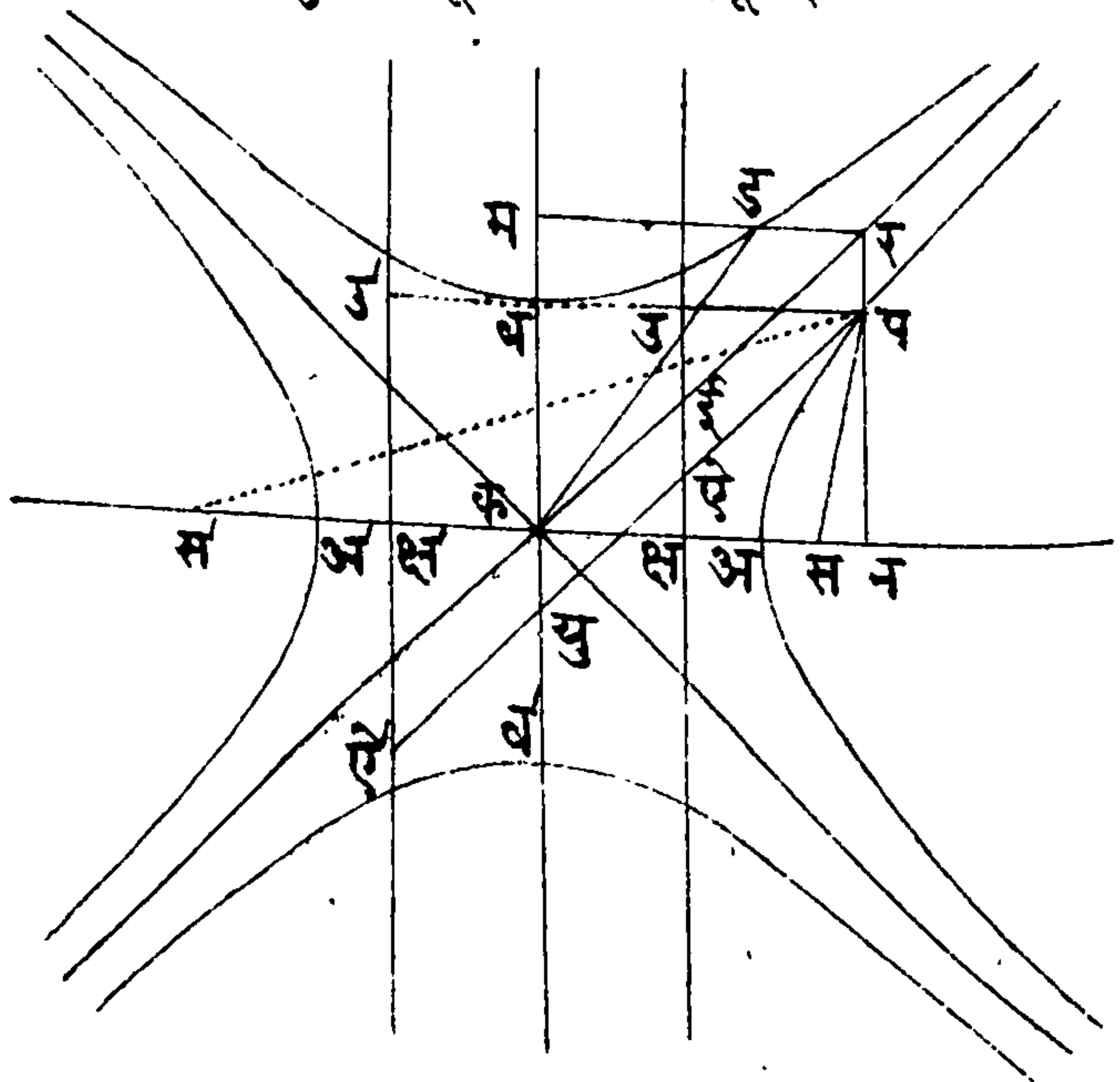
विषमापूर्णाकक्षास वलमानवर्तुळ ज्या बिन्दूंत छेदितें त्या बिन्दूचे नियमन ऊनसंपूर्णाकक्षांत जसें केले आहे त्याप्रमाणें करावें.

सिद्धान्त ३२.

६७. जर प हा विषमापूर्णाकक्षावरील बिन्दु असेल व कड कप-शीं सहचरित असेल, तर

$$\text{सप} \cdot \text{सप} = \text{कडै}.$$

पऐऐ कडै उपसंजिहानेशीं समान्तर काढ. तिला ज्ञापिकांस ऐ, ऐ, व कर्ब-स यु, बिन्दूंत क्रमानें मिळू दे.



नप, मड ह्या निर्णायिकांना उपसंजिहानेसर विन्दूंत मिळूंदे; पउ ही ज्ञापिकेघर लम्बरूप काढ; आतां सरूप त्रिकोणांवरून,

पऐः पउ :: कईः कक्ष, [यूक्लिड, ६.४.]

:: कअः कक्ष. (सि.१७.)

परंतु सपः पउ :: सअः अक्ष, [सि.१.]

:: कअः कक्ष. [सि.२.]

सप = पऐ;

ह्याप्रमाणेंच सप = पऐ,

∴ सप.सप = पऐ.पऐ,

= युपै - युऐ, [यूक्लिड, २.६.]

= करै - कई, [समान्तरता.]

= करै - कअ. (सि.१७.)

परंतु करै - कई = रमै - उमै, [यूक्लिड, १.४७.]

= कअ, (सि.१६.)

∴ करै - कअ = कई.

त्यास्तच सप.सप = कई.

विषमापूर्णकक्षावर प्रश्न.

१. दिलेल्या वर्तुलद्वयास स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाच्या केन्द्राची संस्था विषमापूर्णकक्ष अथवा ऊनसंपूर्णकक्ष असते.
२. जर, शिरस्थ स्पृशांनीं अवरुद्ध जो एखाद्या स्पृशेचा एकदेश, त्यावर एखादे वर्तुळ काढिलें, तर तें नाभीं मधून जाईल.
३. शिरस्थ स्पृशा, सप्त-स व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळाच्या परिघांत, उपसंजिहानांस मिळतील; हें विषमापूर्णकक्षांत घडते.
४. जर विषमापूर्णकक्षाच्या प बिन्दू पासून पऐऐ, व्यतिक्रान्ताक्षार्शां समान्तर काढिली, व तिला उपसंजिहानांस ऐ, ऐ बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर पऐ.पऐ = अकै.
५. जर सप्तस त्रिकोणांत एखादे वर्तुळ काढिलें, तर त्याच्या केन्द्राची संस्था शिरस्थ स्पृक् होईल.
६. जर पन ही प बिन्दूची निर्णायिका असेल व नघ ही व्यतिक्रान्ताक्षास व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळाची स्पृक् असेल, व पम ही घक-शीं समान्तर काढिली व तिला अक्षास म बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर मन = बक.
७. जर पन प बिन्दूची निर्णायिका असेल, व नघ अप-शीं समान्तर काढिली व तिला कप-स घ बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर अघ प-बिन्दुस्थ स्पृशेशीं समान्तर होईल.
८. जर विषमापूर्णकक्ष व ऊनसंपूर्णकक्ष एक नाभ असतील; तर तीं एकमेकास लम्बरूपानें छेदितील.
९. जर प-बिन्दुस्थ स्पृक् शिरस्थ स्पृशांस र, र, बिन्दूंत छेदील, व प-बिन्दुस्थ स्पृक् त्यांना र', र', बिन्दूंत छेदील; तर अर. अर = अर'. अर'.
१०. जर विषमापूर्णकक्षास एखादे स्पृग्द्वय काढिलें, तर तें स्पृग्द्वय उपसंजिहानांस ज्या बिन्दूंत छेदील ते बिन्दु सांधणाऱ्या रेषा

समान्तरं होतील .

११. विषमापूर्णाक्षान्या उपसंजिहानेवर नाप्ती पासून काढिलेला लम्ब सामिसहचरिनाक्षा बरोबर असतो .

१२. जर उपसंजिहाना शिरस्थ स्पृशेस ओ बिन्दूंत व ज्ञापिकेस ई बिन्दूंत मिळेल, तर अई सओ-शीं समान्तर होईल .

१३. समकोणायत विषमापूर्णाक्षांत सहचरित व्यास एकमेका बरोबर असतात .

१४. समकोणायत विषमापूर्णाक्षाचा पग-संपर्कलम्ब कप-बरोबर असतो .

१५. समकोणायत विषमापूर्णाक्षाच्या एखाद्या बिन्दू पासून व्यासाच्या अन्यां पर्यंत काढिलेल्या रेघा उपसंजिहानांशीं समान कोन करितात .

१६. विषमापूर्णाक्षाच्या उपसंजिहाना सहचरित व्यासांच्या अन्य बिन्दूंस सांधणान्या रेघांचे दोन समान भाग करितात, हें सिद्ध कर .

१७. विषमापूर्णाक्षाच्या एका शिरांतून एक रेघ काढिली आहे; ती रेघ दुसऱ्या शिरांतून उपसंजिहानेशीं समान्तर काढिलेल्या रेखाद्वयावर पर्यवसान पावते . विषमापूर्णाक्षास ज्या बिन्दूंत ती कापिते त्या दुसऱ्या बिन्दूंत तिचे दोन समान भाग होतील, हें सिद्ध कर .

१८. विषमापूर्णाक्षावर एक प बिन्दु आहे; व सहचरित-विषमापूर्णाक्षावर एक प' बिन्दु आहे . जर कप कप-शीं सहचरित असेल, तर

सप-सप = अक-बक ,

हें सिद्ध कर; एथें स, स' ह्या आन्तर नाप्ति आहेत .

१९. जर कप व कड सहचरित असतील, व क बिन्दूंतून प बिन्दूच्या अन्यतर नाप्यन्तराशीं समान्तर एक रेघ काढिली, तर ड बिन्दूपासून ह्या रेघेवर लम्बरूप काढिलेली रेघ बक बरोबर होईल .

२०. सहचरित व्यासयुग्म दिलें असतां, सुरव्यअक्ष काढावयाचे.
 २१. जर समकोणायत विषमापूर्णकक्षांच्या सहचरिताक्षावर एक घ बिन्दु असेल, व घप व्यतिक्रान्ताक्षाशीं समान्तर काढिली व तिला वृत्तास प बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर
 पघ = अघ.

२२. समकोणायत विषमापूर्णकक्षांत सहचरित व्यासांशीं समान्तर काढिलेल्या सनाभ ज्या समान असतात.

२३. जर समभुजविषमापूर्णकक्षांत प-बिन्दुस्थ स्पृशेवर कघ उम्बरूप काढिली, व अघ सांधले; तर पकअ, कअघ त्रिकोण सरूप होतील.

२४. विषमापूर्णकक्षास व त्याच्या उपसंजिहानांस स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या; वृत्त व उपसंजिहाना ह्यांनीं अवरुद्ध जो वाढविलेल्या ऊर्ध्वमात्रेचा एकदेश त्याबरोबर असते.

२५. जर घघ ही विषमापूर्णकक्षाची ज्या असेल, व कप हा त्या ज्येचा अनुगुण व्यास असेल, व घह, पख, घह ह्या रेषा एका उपसंजिहानेशीं समान्तर काढिल्या व त्यांना दुसऱ्या उपसंजिहानेस ह, ख, ह बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर

$$\text{कह} \cdot \text{कह} = \text{कख}^2.$$

२६. जर रपरर् ही ज्या विषमापूर्णकक्षास प, प बिन्दूंत व उपसंजिहानांस र, र बिन्दूंत छेदील; व परख कर-शीं व परख कर-शीं, समान्तर काढिल्या; तर

$$\text{रख} = \text{परख},$$

$$\text{व ररख} = \text{परख}.$$

२७. जर एखाद्या वर्तुळाचा व्यास अअ असेल, व पनघ ही त्याची निर्णायिका असेल; तर अप, अघ ह्यांच्या छेदबिन्दूची संस्था समकोणायत विषमापूर्णकक्ष होईल.

२८. जर दोन एककेन्द्र समकोणायत विषमापूर्णकक्षे -

अशीं काढिलीं कीं एकाचे अक्ष दुसऱ्याच्या उपसंजिहाना होतील, तर तीं इतरेतरास उम्बरूपानें छेदितील.

२९. जर शिरांतून जाणाऱ्या अप ज्येचे घ बिन्दूत असे खण्ड पाडिले कीं अघ : घप :: अकै : बकै, व घन पन-निर्णायिकेच्या तळा पर्यंत काढिली; तर घ बिन्दूपासून घन-वर उम्बरूप काढिलेली रेघ व्यतिक्रान्ताक्षास अभिन्न प्रमाणानें छेदील, हें सिद्ध कर.

३०. दिलेल्या पायावर काढिलेल्या वर्तुळाच्या सर्व वर्तुळखण्डांच्या वृत्तकांचे तीन समान भाग करणारें वृत्त विषमापूर्णकक्ष असतें हें सिद्ध कर.

३१. जर सवस, वट हें स्पृग्द्वय एका उपसंजिहानेस स, ट बिन्दूत, व दुसरीस स, ट बिन्दूत छेदील, तर
 वस : वस :: वट : वट,
 हें सिद्ध कर.

३२. जर विषमापूर्णकक्षाच्या बाह्य नाभीपासून, बक-ला-बीची त्रिज्या कल्पून, एखादें वर्तुळ काढिलें, व विषमापूर्णकक्षावरील बिन्दू पासून त्याला स्पृशा काढिल्या; तर संपर्कबिन्दु सांधणारी रेघ व्यतिक्रान्ताक्षास व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळास स्पर्श करील.

३३. अब रेघेस क स्थिर बिन्दूत स्पर्श करणारीं वर्तुळां काढिलीं; अ, व, ह्या स्थिर बिन्दूपासून त्या वर्तुळांना स्पृशा काढिल्या; तर त्यांच्या छेदबिन्दूची संस्था ऊनसंपूर्णकक्ष अथवा विषमापूर्णकक्ष होईल. हें सिद्ध कर व दोहोंत षेद काय असतो हें सांग.

३४. पप ही ऊनसंपूर्णकक्षाची दुपट निर्णायिका आहे. अप, अकै, ह्या घ बिन्दूत मिळेपर्यंत वाढविल्या आहेत. आतां घ बिन्दूची संस्था विषमापूर्णकक्ष होईल, व ऊनसंपूर्णकक्षाचे जे अक्ष असताना तेंच त्याचे अक्ष होतील, हें सिद्ध कर.

३५. जर प-बिन्दुस्थ स्पृक उपसंजिहानांस ल, ल बिन्दूंत छेदील, व पग हा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब असेल, तर लगल कोन काटकोन होईल, हें सिद्ध कर.

३६. जर ऊनसंपूर्णकक्ष, समापूर्णकक्ष, व विषमापूर्णकक्ष ह्या सर्वास एकच साधारण स्पृक असेल व शिरस्थ एकच चलमान वर्तुळ असेल; तर समय ऊनसंपूर्णकक्ष समापूर्णकक्षाच्या आंत व समय समापूर्णकक्ष विषमापूर्णकक्षाच्या आंत राहील.

३७. विषमापूर्णकक्षाची रपपर ज्या उपसंजिहानांस र, र् बिन्दूंत छेदिते. र बिन्दू पासून रघ स्पृक काढिली आहे. ती विषमापूर्णकक्षास घ बिन्दूंत मिळते. जर पह, घरघ, पर्ह ह्या रेखा एका उपसंजिहानेशीं समान्तर काढिल्या व त्यांना दुसरीस ह, रघ, र्ह बिन्दूंत मिळूं दिलें, तर

$$\text{पह} + \text{पर्ह} = \text{रघरघ.} \quad " \quad "$$

३८. जर विषमापूर्णकक्षावरील प, प बिन्दूंतून उपसंजिहानांशीं समान्तर रेखा काढिल्या, व त्यांना एक समान्तरभुज चौकोन करूं दिलां, व त्या चौकोनाचा पप कर्ण मानिला, तर दुसरा कर्ण केन्द्रांतून जाईल.

४०. पम, पन ह्या रेखा कन, कम ह्या उपसंजिहानांशीं समान्तर काढिल्या आहेत. कन, कम ह्यांना सामिसहचरित व्यास कल्पून एक ऊनसंपूर्णकक्ष काढिलें आहे. जर कप ऊनसंपूर्णकक्षास घ बिन्दूंत छेदील, तर ऊनसंपूर्णकक्ष व विषमापूर्णकक्ष ह्यांच्या घ, प बिन्दुस्थ स्पृशा समान्तर होतील.

४१. जर दिलेल्या विषमापूर्णकक्षाच्या प बिन्दूंतून, व व्यतिक्रान्ताक्षाच्या अ, अ अन्यांतून जाणारें एखादें वर्तुळ काढिलें, व नप वर्तुळास घ बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढविली, तर घ एक विषमापूर्णकक्ष वर्तवील; ह्याचा सहचरिताक्ष आद्य विषमापूर्णकक्षाच्या सहचरित व व्यतिक्रान्त अक्षांचें अनुपात तृतीयपद होईल.

४२. जर समकोणायत विषमापूर्णकक्षाच्या एखाद्या बिन्दूपासून व्यासाच्या अन्यांपर्यंत रेखा काढिल्या, तर त्या रेखा व्यासाशीं जे कोन करितात त्यांचे व्यवकलन हा व्यास आपले सहचरिताशीं जो-कोन करितो त्या बरोबर होईल.

४३. जर, समकोणायत विषमापूर्णकक्ष व त्याच्या उपसंजिहाना, ह्यांच्या मध्ये पाहिजेत तितके एककेन्द्र ऊनसंपूर्णकक्षपाद काढिले, तर त्यांच्या अक्षांच्या योगाने झालेला काटकोनचोकोन अ-भिन्न होईल.

४४. समकोणायत विषमापूर्णकक्षांत जर कप घ बिन्दू पर्यंत वाढविली व पघ = कप, व कघ-वर घओ लम्बरूप काढिली वतिला संपर्कलम्बास ओ बिन्दूंत छेदू दिले; तर ओ हा प-बिन्दुस्थ वलमानवर्तुळाचा केन्द्र होईल.

४५. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या सहचरितव्यासद्वयास उपसंजिहाना कल्पून सहचरित विषमापूर्णकक्षयुग्म काढिले आहे. आतां, जर एक विषमापूर्णकक्ष त्या ऊनसंपूर्णकक्षास स्पर्श करील, तर दुसरें ही विषमापूर्णकक्ष त्याला स्पर्श करील हें सिद्ध कर; व संपर्कबिन्दूंतून काढिलेले व्यास एकमेकाशीं सहचरित होतील हें सिद्ध कर.

४७. समकोणायत विषमापूर्णकक्षांत प-बिन्दुस्थ वलमानवर्तुळाची त्रिज्या, व प-बिन्दुस्थ वलमानवर्तुळाची त्रिज्या, ह्यांचे प्रमाण, कप व कर्प ह्यांच्या घनप्रमाणासमान असते.

४८. ओप, ओघ ह्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या प, घ बिन्दुस्थ स्पृशा आहेत, व त्याच विषमापूर्णकक्षाच्या उपसंजिहाना ही आहेत; आतां उभयसाधारण ज्यायुग्म पघ-शीं समान्तर असते हें सिद्ध कर. रस जर त्या ज्यायुग्मापैकीं एक ज्या असेल, व पर ही विषमापूर्णकक्षास प बिन्दूंत स्पर्श करील तर घस त्याला स बिन्दूंत स्पर्श करील; हें सिद्ध कर. आणि, जर पस, घर ह्या यु बिन्दूंत मिळतील, तर ओयु पघ-चे दोन समान भाग करील.

(१२८)

शङ्कुच्छेद.

४९. अबक त्रिकोणाचा पाया स्थिर राहतो, व क हे शिर
समभजविषमापूर्णाकक्षांत फिरून अ, ब बिन्दूंतून जाते. जर अब-
स व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळास ज्या बिन्दूंत अक, बक मि-
ळतात ते बिन्दु प, घ असतील, तर अघ, बघ ह्यांचा विप्रतिच्छेद
विषमापूर्णाकक्षाच्या दुसऱ्या शारवेवर होईल.

भाग ४ था.

शङ्कुच्छेद.

६८. लक्षणा. जेव्हां ऐओऐ, डओड ह्या अनन्त रेघा एकमेकीस ओ बिन्दूंत छेदितात, व त्यांपैकीं एक ऐओऐ स्थिर राहते व दुसरी डओड निच्या सप्तोचतीं अशी फिरते कीं ऐओऐ-शीं डओड जो कोन करिते तो सदैव सर्वस्थानीं अभिन्न राहतो, तेव्हां डओड-च्या परिभ्रमणानें उत्पन्न झालेल्या क्षेत्रास ऊर्ध्वशङ्कु-लक्षणात.

ऐओऐ रेघेस शङ्कुचा अक्ष, व ओ बिन्दूस शङ्कुचेशि-र लक्षणात.

आतां, हें शङ्कुक्षेत्र व पातळी ह्यांच्या छेदापासून उत्पन्न झाले-लें वृत्त (ज्यांच्या धर्माविषयीं आपण एथ पर्यंत विवेचन करीत आलों त्या वृत्तत्रयापैकीं) कोणतें तरी एक वृत्त प्रायः होईल, व तें कोण-त्या गोष्टी असल्या लक्षणजे समापूर्णाकक्ष, ऊनसंपूर्णाकक्ष, किंवा वि-षमापूर्णाकक्ष होईल हें आपणास सिद्ध करणें राहिलें आहे. (आसु-रव पहा.)

जर छेदकपातळी शङ्कुच्या ओ शिरांतून रवओरव-प्रमाणें जाईल व शङ्कुला पुनः छेदील, तर ती त्याला ओरव, ओरव रेघांत प्रायः कापील, व ह्या रेघा उत्पादक रेघेचे स्थानद्वय दर्शवितील.

ह्या रेघांचा विप्रतिपातरूपी कोन, छेदकपातळी व शङ्कुचा अ-क्ष ह्यांच्या विप्रतिपातरूपी कोनावर अचलंबून राहिल, व छेदकपातळीं जेव्हां शङ्कुच्या अक्षांतून जाईल तेव्हां ती महत्तम होईल, ह्यापक्षींतो रेखाद्वयविप्रतिपातरूपी कोन शङ्कुचा अक्ष व उत्पादक रेघ ह्यांजम-धील अभिन्न कोनाचे दुपट होईल.

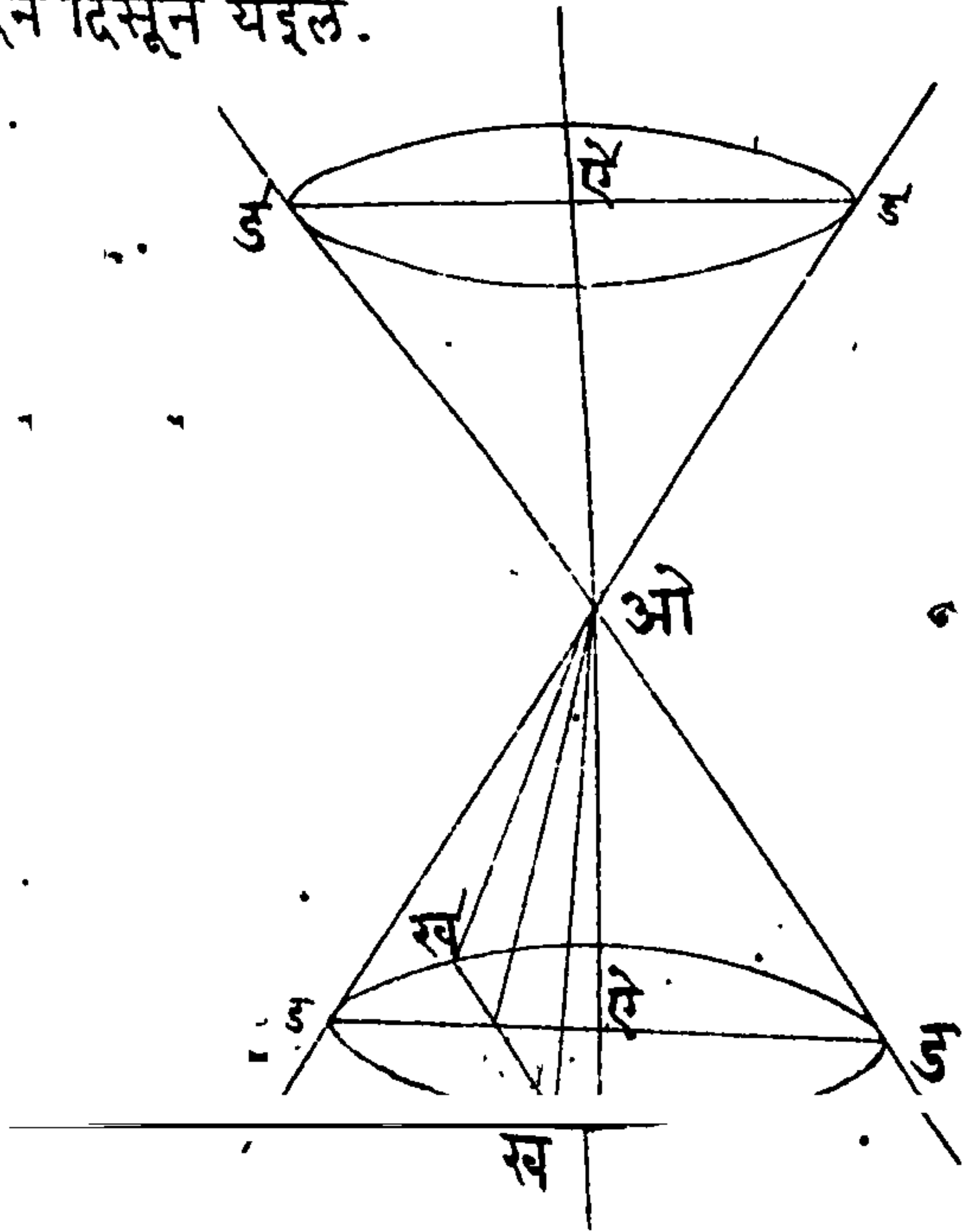
जर छेदकपातळी, डओड ह्या एका उत्पादक रेघेंतून जाईल, व अक्ष व ही रेघ ज्या पातळींत आहेत त्या पातळीवर लम्बरूपानें

(१३०)

शङ्कुच्छेद.

पडेल, तर ती छेदकपातकी ह्या रेघेबरोबर शङ्कुस स्पर्शमात्र करील, जर छेदकपातकी, शङ्कुच्या शिरांतून न जातां, शङ्कुक्षावर लम्बरूपानें पडेल, तर छेदरूपी वृत्त वर्तुल होईल हें स्पष्टच आहे.

दुसऱ्या कोणत्याही पक्षां छेदरूपी वृत्त समापूर्णकक्ष, ऊनसंपूर्णकक्ष, किंवा विषमापूर्णकक्ष होईल हें आपल्या पुढील विवेचनावरून दिसून येईल.



छेदक पातकी शङ्कुवर पाहिजे तशी धरिली, तथापि शङ्कुक्षांतून जाणारी व त्या छेदकपातकीला लम्बरूप असणारी दुसरी एक पातकी आपणास नेहमीं कल्पितां येईल; व ही दुसरी पातकी कागदाच्या डओड पातकीनें दर्शविणें सोयकर होईल. ह्याकारणास्तव छेदकपातकी कागदाच्या डओड-पातकीस नेहमीं लम्बरूप घेतली जाईल.

सिद्धान्त १.

६९. जर, शङ्कुक्ष व छेदकपातळी ह्यांचा विप्रतिपातरूपी कोन शङ्कुक्ष व उत्पादना ह्यांजमधील अभिन्न कोना समान, महत्तर, किंवा लघुतर असेल तर, ऊर्ध्व शङ्कुक्षेत्र व छेदकपातळी (जी शङ्कुच्या शिरांतून जात नाही व शङ्कुक्षाशी काटकोन करित नाही) ह्यांच्या छेदापासून उत्पन्न झालेलें वृत्त समापूर्णाकक्ष, ऊनसंपूर्णाकक्ष, किंवा विषमापूर्णाकक्ष होईल.

शङ्कुच्या ऐओ ऐ अक्षांतून जाणारी व छेदकपातळीस लम्बरूप असणारी दुसरी एक पातळी पत्रपातळीनें दर्शाविली आहे असें समज; व ती शङ्कुक्षेत्रास ओड, ओ ड उत्पादनांत छेदिते असें मान.

छेदकपातळीला शङ्कुक्षेत्रास पअ वृत्तांत व पत्रपातळीस अनह रेघेंत छेदूं दे.

पअ वृत्त अनह रेघेच्या संबन्धानें संमिताकार होईल हें स्पष्टच आहे.

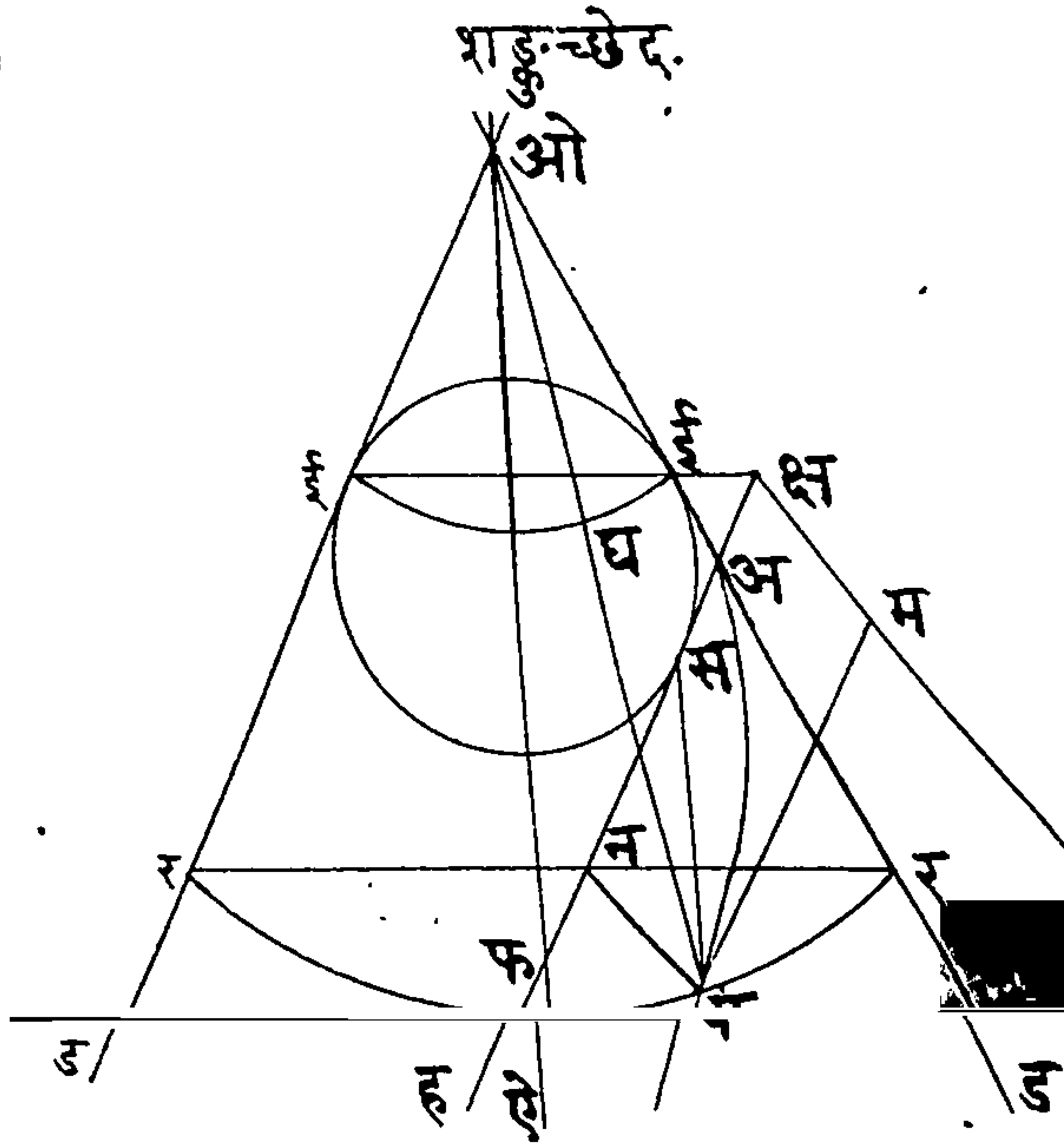
अह रेघेवर पाहिजे तेथें न बिन्दु घे. न बिन्दूंतून अक्षावर लम्बरूप एक पातळी काढ. हिला शङ्कुक्षेत्रास रपर वर्तुळांत व छेदकपातळीस पन रेघेंत मिळूं दे. पन रेघ आतां पत्रपातळीशीं व अन रेघेशीं काटकोन करील.

शङ्कुच्या आंत एक गोल असा घाल कीं तो शङ्कुस ई घ ई वर्तुळांत व छेदकपातळीस स बिन्दूंत स्पर्श करील. ई घ ई पातळीला छेदकपातळीस क्षम रेघेंत छेदूं दे. आतां क्षम रेघ पत्रपातळीवर लम्बरूपानें पडेल, ह्मणूनच ती पन-शीं समान्तर होईल.

पम क्षम-वर लम्बरूप काढ. पस, पओ सांध. पओ-ला ई घ ई वर्तुळास घ बिन्दूंत मिळूं दे.

१. टीप. आकृतींत पत्रपातळीवर असणारा शङ्कुचा छेदमात्रदारवधिला आहे. तसें न केले तर गोंधळ होईल.

(१३२)



आतां, ज्या अर्धी पस व पघ ह्या गोलाच्या स्पृशा आहेत,

∴ पस = पघ. [यूक्लिड, ३.३६, ३७. पहा.]

परंतु पघ = रई [कारण ओप = ओर, व ओघ = ओई]

∴ पस = रई.

परंतु रई : क्षन :: अई : अक्ष, (यूक्लिड, ६.२.)

व अई = अस, [कारण त्या स्पृशा आहेत.]

∴ रई : क्षन :: अस : अक्ष,

∴ सप : पम :: अस : अक्ष,

∴ पअ चतुर्भुज समापूर्णकक्ष, ऊनसंपूर्णकक्ष, किंवा विषमापूर्णकक्ष होईल व त्याची नाभि स, अक्ष असूनह, व ज्ञापिका क्षम क्रमाने होतील.

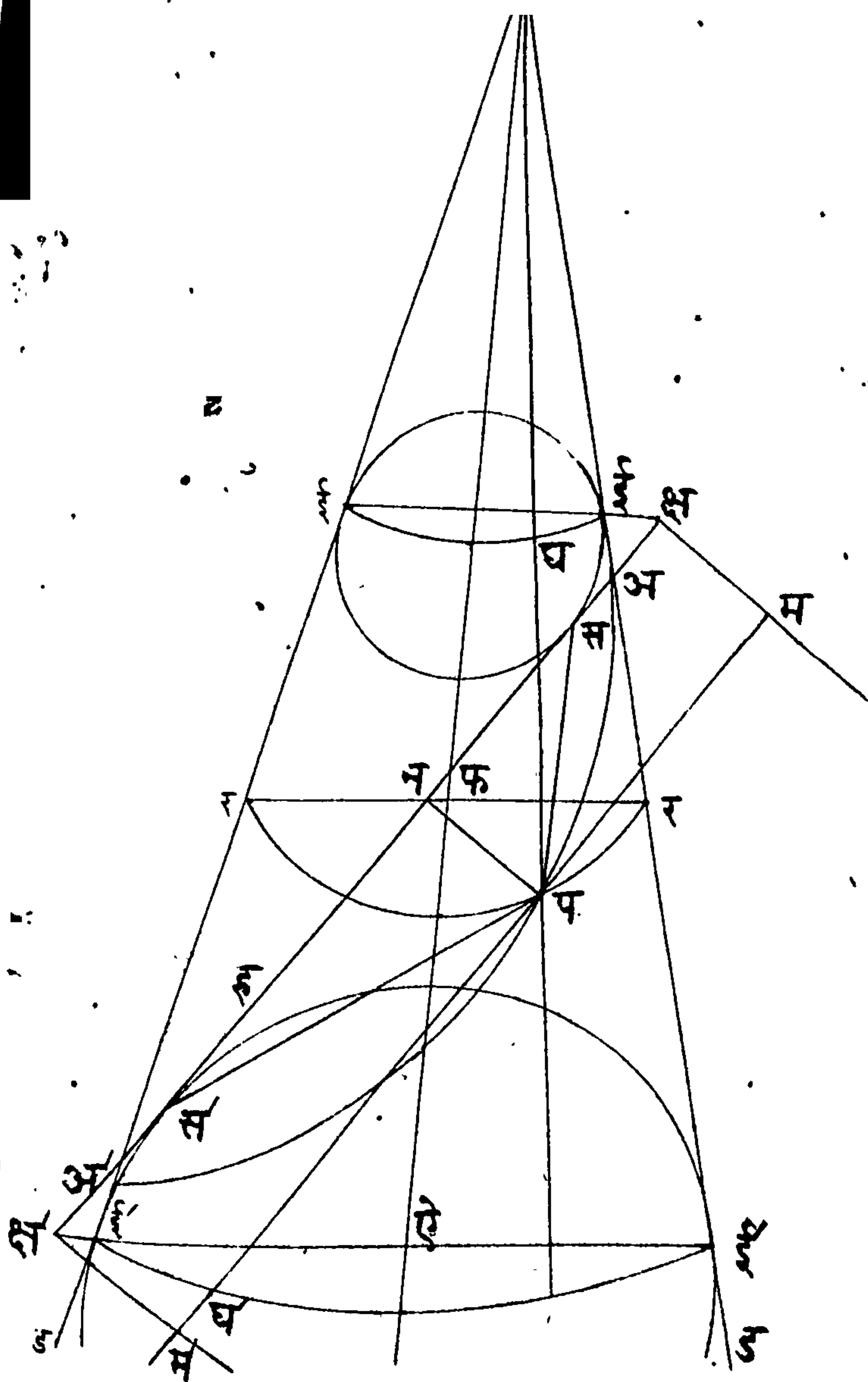
पुनः अह-ला ओए शङ्कुक्षास फ बिन्दूत मिळूंदे.

आतां अफओ कोन शङ्कुक्ष व छेदकपातकी ह्यांचा विन्यतिपातरूपी कोन होईल.

(१) अफओ कोन = फओड कोन, असूंदे.

आतां ज्या अर्धी अहं ओ ड-शीं चामान्तर आहे,
 ∴ अक्षई कोन = ओईई कोन = अईक्ष कोन,
 ∴ अई = अक्ष,

ओ



[परंतु अई = अस, कारण त्या स्पृशा आहेत.]

∴ अस = अक्ष.

∴ अप वृत्त समापूर्णाकक्ष झाले.

(२) अफओ कोन > फओड कोन, असूंदे.

आतां ज्या अर्थां फक्षई कोनाचा प्रपूरक < ओईई कोनाचा प्रपूरक आहे.

∴ अक्षई कोन < अईक्ष कोन, आहे

∴ अई < अक्ष, आहे

[परंतु अई = अस, कारण त्या स्पृशा आहेत]

∴ अस < अक्ष, आहे.

∴ अप वृत्त ऊनसंपूर्णाकक्ष झाले.

अह व ओई रेघा वाढविल्या असतां अ बिन्दूत मिळतील, कारण हफओ + फओड कोनांचे संकलन हफओ + ओफअ कोनांच्या संकलनापेक्षां ह्यणजे दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे.

जर दुसरा एक गोल शङ्कुच्या आंत घातला, व त्याला शङ्कुस ईई वरुळांत व छेदकपातळीस स बिन्दूत स्पर्श करूं दिले; व क्षम रेघ जर छेदकपातळीचा ईई पातळीनें केलेला विप्रतिच्छेद दर्शावील व पर्म रेघ जर ह्या रेघेवर लम्बरूपाने पडेल, तर आपणास असें सहज दारववितां येईल कीं

सप : पर्म :: सअ : अक्ष.

ह्यास्तव स ही ऊनसंपूर्णाकक्षाची दुसरी नाभि व क्षम ही दुसरी ज्ञापिका झाली.

आणखी, जर बक सामिलघुतराक्ष असेल, व क. केन्द्रांतून एक युकर्यु रेघ ईई-शीं समान्तर काढली व त्या युकर्यु रेघेला ओड, ओड उत्पादनांस यु, यु बिन्दूत मिळूं दिले, तर

बक = कयु. कयु,

हे स्पष्ट आहे.

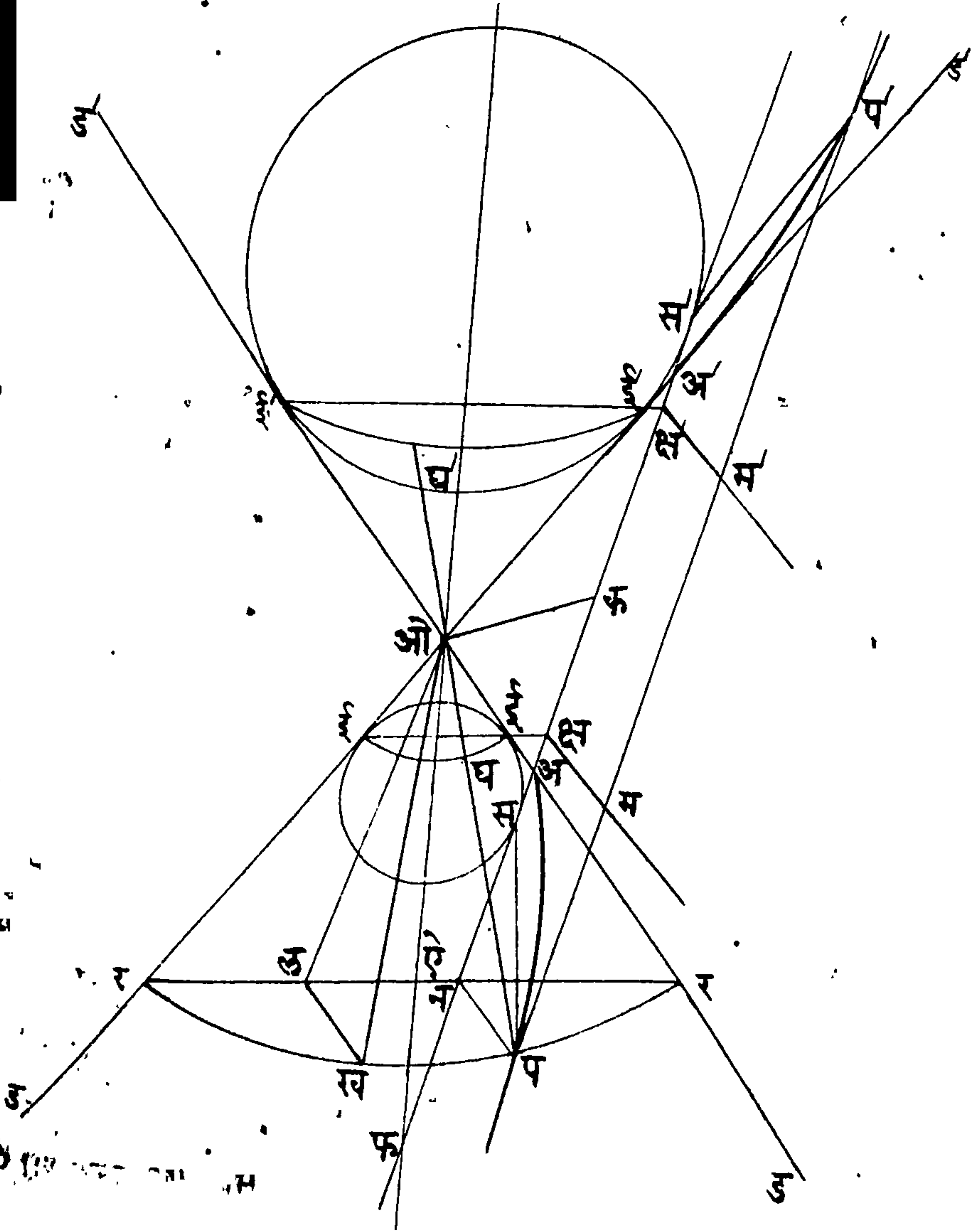
(३) अफओ कोन < फओड कोनापेक्षां लघुतर असूंदे;

आतां, ज्याअर्धी अक्षईकोनं > अईक्ष कीनापेक्षां महत्तर आहे,

∴ अई > अक्ष-पेक्षां महत्तर आहे,

∴ अस > अक्ष-पेक्षां महत्तर आहे,

∴ पअ वृत्त विषमापूर्णाकक्ष झालें.



ज्याअर्थी अफओ + फओड' कोनांचे संकलन फओड + फओड' कोनाच्या संकलनापेक्षां ह्यणजे दोन कारकोनांपेक्षां कमी आहे, त्याअर्थी फअ, व उओ रेघा वाढविल्या असतां अ' बिन्दूत मिळतील.

ह्यापक्षां छेदकपातळी शङ्कुच्या अपरार्द्धास कापील, व प' बिन्दु जर ह्या भागावरील वृत्तावर घेतला, व प'म क्षम-वर लम्ब-रूप काढिली, तर

सर्प : प'म :: सअ : अक्ष,
हे पूर्वचतु दारवचितां येईल.

ह्या कारणास्तव, शङ्कुच्या हा अपरार्द्ध भाग व छेदकपातळी: ह्यांचे छेदरूपी वृत्त विषमापूर्णाकक्षाची दुसरी शाखा होईल.

आणखी, जर दुसरा एक गोल शङ्कुच्या ह्या वरील भागाच्या आंत घातला, व त्याला ह्या शङ्कुच्या भागास ई'घई' वर्तुळांत व छेदकपातळीस स' बिन्दूत स्पर्श करूं दिलें, व क्ष'म रेघ जर छेदकपातळीशीं ई'घई'-वर्तुळपातळीनें केलेला छेद दर्शवील, व प'म रेघ ह्या छेदरूपी रेघेवर लम्बरूपानें पडेल, तर

स'म : प'म :: स'अ : अक्ष,
हे सहज सिद्ध करितां येईल.

ह्यास्तव स' ही विषमापूर्णाकक्षाची दुसरी नाभि व क्ष'म ही दुसरी ज्ञापिका झाली.

उपसि. १. ह्या अन्तिमपक्षांत ह्यणजे छेदरूपी वृत्त जेव्हां विषमापूर्णाकक्ष असतें, तेव्हां, जर ओरवल पातळी शङ्कुच्या शिरांतून छेदकपातळीशीं समान्तर काढिली, व तिला पत्रपातळीस ओल रेघेंत व शङ्कुक्षेत्रास ओरव उत्पादनेंत मिळूं दिलें; तर

ओल : ओरव :: ओल : ओर,

:: अन : अर,

:: अक्ष : अई, (यूक्लिड, ६.२०)

∴ अक्षः अस,

∴ कअः कस; (भाग ३. सि. २.)

एथें क हा अर्ध-चा मध्यबिन्दु आहे, ह्यणूनच तो विषमापूर्णकक्षाचा केन्द्र आहे.

∴ रवओल कोन उपसंजिहानांमधील कोनाचा अर्धा भाग आहे. (भाग ३. सि. १६.)

पुनः, जर वक सामिसहचरिताक्ष असेल, व कयुयु जर रर-शीं समान्तर काढिली व तिला ओड, ओड उत्पादनांस यु, यु बिन्दूंत मिळू दिलें, तर

ज्याअर्धी कयुः अकः ∴ रलः ओल,

व कयुः अकः ∴ रलः ओल,

∴ कयु. कयुः अकै ∴ रल. रलः ओल,

∴ रलः ओल;

परंतु बकैः अकै ∴ रलः ओल,

∴ बकै = कयु. कयु.

उपसि. २. जर छेदकपातकी शङ्कुक्षाशीं समान्तर असेल, तर ओल व ओए एकरूप होतील.

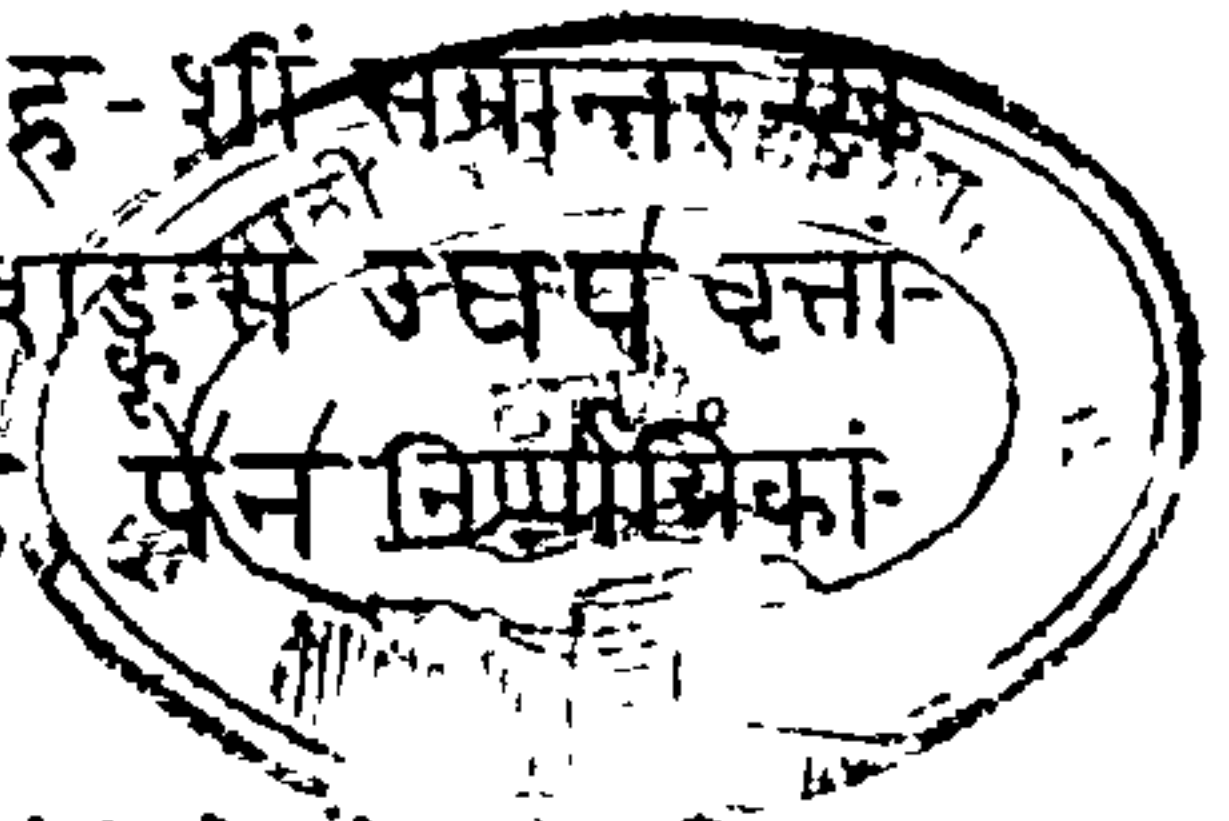
ह्यापक्षीं विषमापूर्णकक्षरूपी छेदाच्या उपसंजिहानांमधील-कोणार्द्ध, डओए ह्या अभिन्न कोनासमान असतो, व ओक हा सामिसहचरिताक्ष आहे हे आपल्या नजरेस लागलेच येतें.

येणेकरून आपणांस सहचरित विषमापूर्णकक्षद्वयोपलब्ध्यर्थ सोईची रीत प्राप्त होते.

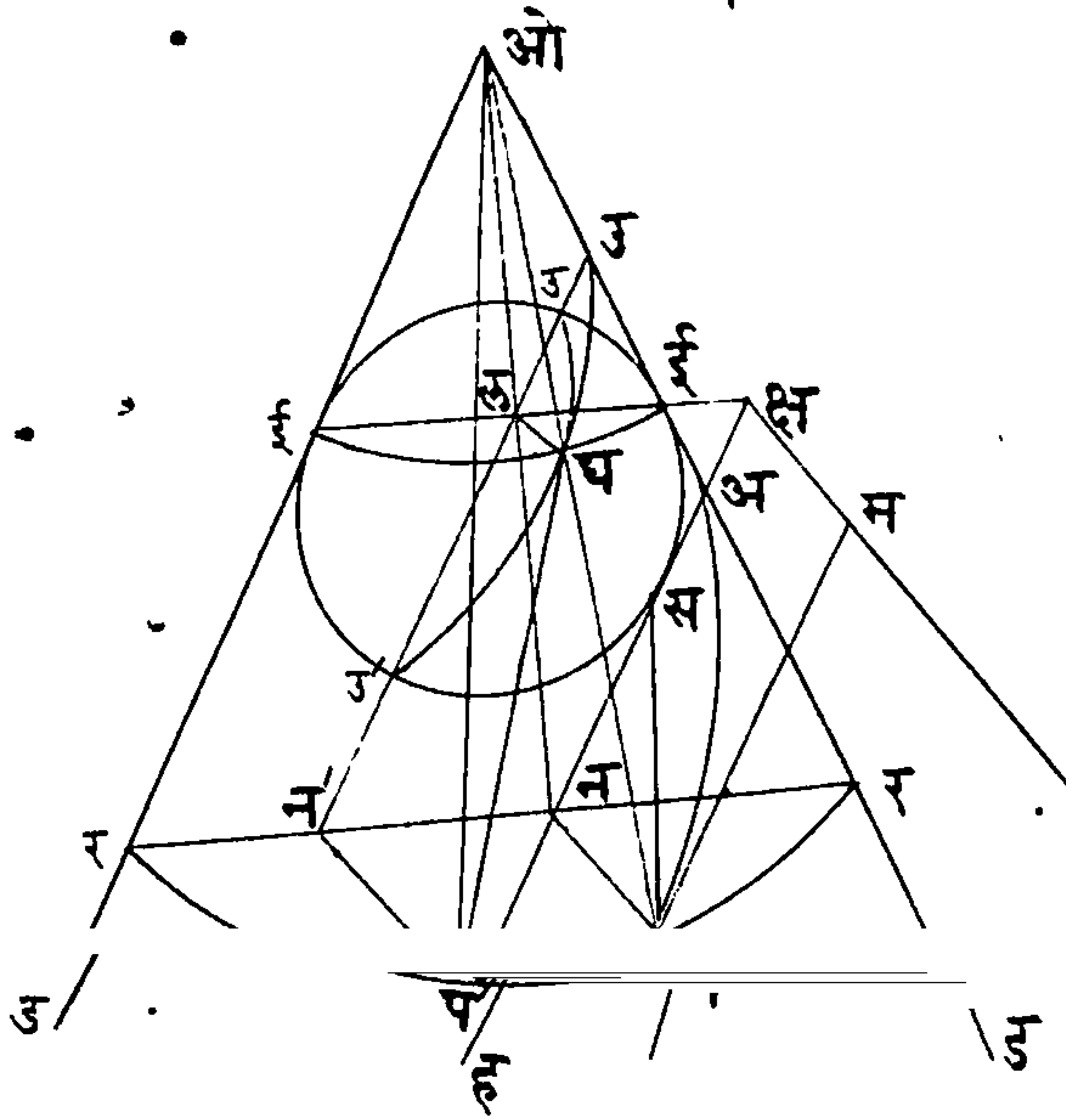
पत्रपातकीतील ओए-वर ओए लम्बरूप काढ; व ओए-च्या सभोवतीं ओड-च्या परिभ्रमणानें दुसरा एक शङ्कु उत्पन्न झाला-आहे असें समज; ही ओड ओए-च्या सभोवती डओए कोनाची सर्वस्थानीं अभिन्नता व त्याचीच डओए कोनाच्या प्रपूरकाशीं-समता, ह्या दोन गोष्टी कायम ठेवून फिरते असें हीं मान.

केन्द्रच्युति* अभिन्न राहिलः

७१. ईघई वर्तुळावरील घ बिन्दूतून अनह-शीं समान्तर रेषा पातळी काढ; तिला पत्रपातळीस उलटून रेषेत, शङ्कुस्य उघर्ष वृत्तांत, व ईघई, रपर ह्या वर्तुळरूपी छेदांस घळ, घर्षण निष्पत्तीकांत अनुक्रमानें छेदूं दे.



आनां उघर्ष वृत्त, गोलाशीं छेदकपातळीनें केलेल्या विभक्ति-छेदापासून उत्पन्न झालेल्या उघर्ष वर्तुळास वाढविलेल्या घळ निष्पत्तीकेच्या अन्त्यांत स्पर्श करील हें स्पष्ट आहे.



ओप सांध. तिलां ईघई-स घ बिन्दूंत मिळूं दे. आतां
 पघ : नल :: रई : नक्ष,
 :: सअ : अक्ष.

* सअ-चें अक्ष-शीं जें प्रमाण झणजे सअ : अक्ष, किंवा कस-चे कअ-शीं जें प्रमाण झणजे कस : कअ, त्याला केन्द्रच्युति झणतात.

परंतु पंच ही उघड-वर्तुळास पै बिन्दू पासून काढिलेल्या स्पृशेबरोबर आहे, व नल ही उघड-वृत्तरूपी छेद, व उघड-वर्तुळ ह्यांच्या उभयसाधारण निर्णायिकेवर पै बिन्दू पासून काढिलेल्या लम्बाबरोबर आहे.

ह्या कारणास्तव आपणास रवालील विशिष्टधर्म उपलब्ध होतो:—

जर एखादे वर्तुळ निर्णायिकान्यस्थ बिन्दु ह्यांत शङ्कुच्छेदास स्पर्श करील, तर, शङ्कुच्छेदावरील अविशेष बिन्दू पासून वर्तुळास काढिलेल्या स्पृशेचें जें, त्याच बिन्दू पासून उभयसाधारण ज्येवर काढिलेल्या लम्बाशीं प्रमाण असतें, तें शङ्कुच्छेदाच्या केन्द्रच्युतीबरोबर, होईल.

जर, तें वर्तुळ ज्या बिन्दु ह्यांत त्या शङ्कुच्छेदास स्पर्श करितें, ते बिन्दु एकरूप होतील. तर तें वर्तुळ शिरस्थ चलमान वर्तुळ होईल; म्हणूनच शिरस्थ चलमान वर्तुळास शङ्कुच्छेदाच्या अविशेष बिन्दू पासून काढिलेल्या स्पृशेचें जें, त्याच बिन्दूच्या निर्णायिकाशीं प्रमाण असतें, तें अभिन्न राहील व तें शङ्कुच्छेदाच्या केन्द्रच्युती बरोबर होईल.

शङ्कुच्छेदा - वरप्रश्न.

१. दिलेल्या ऊर्ध्वशङ्कुपासून जितके समापूर्णकक्षरूपी छेद का-
पितां घेतील त्या सर्वांच्या नाभि अन्यशङ्कुक्षेत्रावर असतात.
२. दिलेल्या ऊर्ध्वशङ्कुच्या सर्व ऊनसंपूर्णकक्षरूपी छेदांच्या नाभि
अन्यशङ्कुद्वयावर येतील; एथे कअ-चे कस-शीं अभिन्न प्रमाण-
आहे.
३. समान्तर पातळ्यांनीं निर्मिलेल्या, ऊर्ध्वशङ्कुच्या ऊनसंपूर्ण
कक्षरूपी छेदांचे जे लघुतराक्ष असतात त्यांचे अन्य उत्पादकरेखा-
द्वयावर असतात.
४. दिलेल्या शङ्कुपासून कापून काढिलेल्या समापूर्णकक्षाची
ऊर्ध्वमात्रा, शङ्कुचे शिर, व समापूर्णकक्षाचे शिर, त्यांजमधील अन्त-
राशीं समप्रमाण असते.
५. दिलेल्या ऊर्ध्वशङ्कुपासून समभुज विषमापूर्णकक्ष, कोण-
त्या गोष्टी असल्या-ह्मणजे, कापून काढणे संभवेल?
६. दोन शङ्कु एकमेकास जोडिले आहेत (क. ६९. उपसि.
२. आरु. पहा.) त्यांचे शिरस्थ कोन संपूरकरूपी आहेत; व त्यांचे
अक्ष ओंऐ, ओंऐ अनुक्रमें आहेत. अक्षांच्या पातळीस लम्बरूप
किंवा समान्तर असणाऱ्या पातळ्यांनीं हे ओंऐ, ओंऐ अक्ष निर्मि-
ले आहेत. शङ्कुच्छेदरूपी चृत्तांच्या ऊर्ध्वमात्रा, ओंऐ व ओंऐ त्यांच्या
वर्गप्रमाणाशीं समप्रमाण असतात हे सिद्ध कर.

प्रश्नसमुदाय.

१. एखाद्या नाभीमधून जाणाऱ्या ज्येच्या अन्यांपासून समापूर्णाकक्षांच्या ज्ञापिकेवर काढिलेल्या लम्बांनीं अवरुद्ध जो त्या ज्ञापिकेच्या एकदेश त्या समोरील नाभिस्थकोन काटकोन असतो, हें सिद्ध कर.
२. त्रिकोणाच्या भुजत्रयास स्पर्श करणाऱ्या सर्व समापूर्णाकक्षांच्या नाभींची संस्था वर्तुळ असते, हें सिद्ध कर; व केन्द्र काढण्या करितां क्षेत्र रचना रच.
३. दिलेल्या रेखाद्वयांस सदैव स्पर्श करणाऱ्या समापूर्णाकक्षमालेचे अक्ष समान्तर आहेत; आतां नाभींची संस्था एक सरळ रेषा होईल, हें सिद्ध कर.
४. समापूर्णाकक्षाच्या नाभी पासून संपर्कलम्बावर एक लम्बा काढिला आहे; आतां ह्या लम्बाच्या तळाची संस्था समापूर्णाकक्ष असते, हें सिद्ध कर.
५. जर स ही समापूर्णाकक्षाची नाभि असेल, व तें समापूर्णाकक्ष अथवा त्रिकोणाच्या अथ, अक बाजूंस व, क बिन्दूंत स्पर्श करील, व ओ हा त्या त्रिकोणासभोवतीं काढिलेल्या वर्तुळाचा केन्द्र असेल; तर ओसअ कोन काटकोन होईल, हें सिद्ध कर.
६. समापूर्णाकक्षाच्या नाभी पासून प-बिन्दुस्थ स्पृशीं समान्तर एक सरळ रेषा काढिली आहे; ती प बिन्दूंतून काढिलेल्या व्यासास व बिन्दूंत मिळते; आतां व बिन्दूंतून जाणाऱ्या वर्तुळास प बिन्दू पासून काढिलेली स्पृक् घट-निर्णायिकेच्या निमपटी बरोबर असते, हें सिद्ध कर; एथें प बिन्दूंतून जाणाऱ्या व्यासास वर्तुळ ज्या बिन्दूंत छेदिनें ती दुसरा बिन्दु व आहे.
७. पसप ही एक नाभींतून जाणारी ज्या आहे; पस, पस ह्यांस व्यास कळवून वर्तुळें काढिलीं आहेत; आतां वर्तुळांच्या अन्यतर उभय साधारण स्पृशींचें दैर्घ्य, अस, पप ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपद होईल

हैं सिद्ध कर.

८. जर अघ ही समापूर्णकक्षाची अ-शिरांतून जाणारी ज्या असेल व घर अघ- वर लम्बरूप काढिली, व तिला अक्षास र बिन्दूंत मिळू दिलें; तर अर अघ-शीं समान्तर काढिलेल्या नाभींतून जाणाऱ्या ज्येवरोवर होईल, हे सिद्ध कर.

९. ज्या समापूर्णकक्षांस उभयसाधारण एकच नाभि व स्पृक् असते त्या सर्वांच्या शिरांची संस्था वर्तुळ असते.

१०. समापूर्णकक्ष द्वयास उभयसाधारण एकच अक्ष व शिर आहे; त्यांच्या अन्तर्वृत्तता विरुद्ध दिशांकडे फिरविल्या आहेत; एकाची ऊर्ध्वमात्रा दुसऱ्याच्या ऊर्ध्वमात्रेच्या आठपट आहे; आतां उभयसाधारण स्पृक् व अक्ष, ह्यांनीं अचरुद्ध जो पहिल्याच्या स्पृशीचा एक देश त्याचे दुसरे दोन समान भाग करील, हे सिद्ध कर.

११. एका वर्तुळाच्या ओअ त्रिज्येवर ब बिन्दु आहे; त्या वर्तुळाचा केन्द्र ओ आहे. ओअ वाढीव; त्रिज्येवर क बिन्दु असा घेईं ओब. ओक = ओअ. जर ह्या वर्तुळाचा परिघास्थायी बिन्दु प, बप-चा मध्यबिन्दु र, व अर, कप ह्यांचा छेदबिन्दु घ, अनुक्रमें असतील; तर घ बिन्दूची संस्था वर्तुळ होईल हे सिद्ध कर.

१२. समापूर्णकक्षाच्या नाभीमधून जाणाऱ्या ज्येच्या मध्यबिन्दू पासून, एक त्या ज्येवर लम्बरूप, व अक्षास ग बिन्दूंत मिळणारी, व दुसरी अक्षावर लम्बरूप, व त्या ज्येस न बिन्दूंत मिळणारी, अशा दोन रेषा काढिल्या, तर नग अभिन्न असते, हे सिद्ध कर.

१३. समापूर्णकक्षाच्या अक्षास, प बिन्दूच्या नाभ्यन्तरास, व प बिन्दूंतून जाणाऱ्या व्यासास स्पर्श करणारे एक वर्तुळ काढिलें आहे; आतां त्याच्या केन्द्राची संस्था समापूर्णकक्ष असते, व ह्याचें शिर स, व ऊर्ध्वमात्रा अस- वरोवर असते, हे सिद्ध कर.

१४. जर, समापूर्णकक्षाचा अक्ष व क्षापिका, ह्यांच्या छेद बिन्दू पासून क्षपघ एक ज्या काढिली, व हिला समापूर्णकक्षास प, घ बिन्दूंत

(१४४)

शङ्कुच्छेद.

छेदू दिलें; तर प, घ बिन्दूच्या निर्णायिकांनीं रचलेला काटकोन चौकोन अर्द्धा ऊर्ध्वमात्रेवरील वर्गाबरोबर होईल, हें सिद्ध कर.

१५. दिलेल्या वर्तुळास व रेषेस स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाच्या केन्द्राची संस्था काढ.

१६. समापूर्णकक्षाचा एक संपर्क बिन्दु व तीन स्पृशांचीं स्थानें दिलीं आहेत; दुसरे दोन संपर्कबिन्दु काढ.

१७. अबक त्रिकोण एका समापूर्णकक्षा सभोवतीं काढिला आहे; त्याची नाभि स बिन्दु आहे. अब, क बिन्दूंतून सअ, सब, सक ह्यांजवरं लम्ब काढिले आहेत; हें लम्बत्रय एकाच बिन्दूंतून जातें हें सिद्ध कर.

१८. नाभीपासून प-बिन्दुस्थ स्पृशेशीं एक समान्तर रेषा काढिली आहे; ती समापूर्णकक्षास घ बिन्दूंत मिळते. घन एक निर्णायिका आहे. प, घ बिन्दुस्थ स्पृशा अक्षास ट, र्ट बिन्दूंत मिळतात. आतां सन = ४ अट. अट, व प-बिन्दुस्थ व्यास जर सघ-स ई बिन्दूंत मिळेल, तर ई बिन्दूची संस्था समापूर्णकक्षा होईल, व त्याची ऊर्ध्वमात्रा दिलेल्या समापूर्णकक्षाच्या ऊर्ध्वमात्रेच्या निमपटी बरोबर होईल, हें सर्व सिद्ध कर.

१९. समापूर्णकक्षावर एक प बिन्दु आहे; स बिन्दूंतून अक्षावर एक रेषा लम्बरूप काढिली आहे; ती अप-स अथवा अप-स वाढविल्यावर र बिन्दूंत मिळते. सव. सर = २ अस. सघ, हें सिद्ध कर; एथें सघ हा स्पृशेवर, व सरव हा संपर्कलम्बावर लम्ब आहे.

२०. समापूर्णकक्षाच्या सनाभीपासून सरघ काढ; निला प-बिन्दुस्थ स्पृशेशीं दिलेला कोन करू दे. आतां रघ बिन्दूची संस्था समापूर्णकक्षाची स्पृक होईल व ती अक्षाशीं दिलेल्या कोनासमान कोन करील, हें सिद्ध कर.

२१. पसघ ही समापूर्णकक्षाची सनाभ ज्या आहे; ती ऊर्ध्वमात्रेस घ बिन्दूंत मिळते. अप. अघ = सप. सघ, हें सिद्ध कर.

२२. समापूर्णकक्ष बिन्दुस्थ वलमान वर्तुल अक्षांस यु, यु बिन्दूत छेदितें. अन हा त्या बिन्दूचा निर्णायक आहे. आतां अयु. अयु = ३ अन, हें सिद्ध कर.

२३. अब हा एका वर्तुळाचा व्यास आहे. वर्तुळाच्या परिघावरील घ बिन्दू पासून एक स्पृक काढिली आहे. प बिन्दू पासून पन अब-वर लम्बरूप काढिली आहे. आतां, जर प बिन्दु असा घेतला कीं घप = अन, तर प बिन्दूची संस्था समापूर्णकक्ष होईल, हें सिद्ध कर.

२४. जर समापूर्णकक्षाच्या अविशेष बिन्दूपासून शिरस्थ वलमान वर्तुळास एखादी स्पृक काढिली, तर त्या स्पृशेचे दीर्घ्याच्या बिन्दूच्या निर्णायका बरोबर होईल; हा निर्णायक अक्षावर मोजला आहे.

२५. समापूर्णकक्षद्वयास उभय साधारण एकच नाभि व अक्ष आहे. त्यांना एक [अन्योन्य] लम्बरूप स्पृग्द्वय काढिलें आहे. ह्या स्पृशांच्या छेद बिन्दूची संस्था एक सरळ रेष होईल, व ती ज्ञापिकांशीं समान्तर होईल, हें सिद्ध कर.

२६. जर समापूर्णकक्षास तीन स्पृशा काढिल्या, तर ह्यांच्या योगानें झालेल्या त्रिकोणासभोंवतीं काढिलेले वर्तुळ नाभी मधून जाईल, व ह्या त्रिकोणाच्या कोना पासून त्यांच्या समोरील बाजूंवर काढिलेले लम्ब इतरेतरास ज्ञापिकेंत छेदितील.

२७. त्रिकोणाच्या एका बाजूस तिच्या मध्यबिन्दूत व दोहों बाजूस, वाढविल्यावर, समापूर्णकक्ष स्पर्श करितें. ह्या समापूर्णकक्षाचे स्पृशेवर त्रिकोणाच्या कोना पासून काढिलेले लम्ब एकतान्त्रेदीर्घ असतात, हें सिद्ध कर.

२८. दोहों समापूर्णकक्षास एकच अक्ष व शिर आहे. तीं समापूर्णकक्षें विरुद्ध दिशांस काढिलीं आहेत. एका समापूर्णकक्षाच्या ज्या दुसऱ्याच्या स्पृशा आहेत. आतां ज्यांच्या मध्यबिन्दूची

संस्था एक समापूर्णाकक्ष होईल; व त्यांची ऊर्ध्वमात्रा दिलेल्या समापूर्णाकक्षाच्या ऊर्ध्वमात्रेच्या $\frac{1}{2}$ बरोबर होईल, हें सिद्ध कर.

२९. दोहोंसमान समापूर्णाकक्षास एकच नाभि आहे; त्यांचे अक्ष एकमेकास लम्बरूप आहेत; व एकाचा संपर्कलम्ब दुसऱ्याच्या संपर्कलम्बावर लम्बरूपानें पडत आहे; आतां ह्या रेखांच्या छेदबिन्दूची संस्था समापूर्णाकक्ष असते, हें सिद्ध कर.

३०. ऊनसंपूर्णाकक्षास अक्षांच्या अन्त्यांत स्पर्श करणाऱ्या - काटकोन चौकोनाच्या कर्णांशीं दिशेनें एकरूप होणारे दोन समान सहचरित व्यास प्रत्येक ऊनसंपूर्णाकक्षांत असतात, हें सिद्ध कर.

३१. जर ऊनसंपूर्णाकक्षाच्या दोहोंनाभींतून जाणारे वर्तुळ काढिलें, व त्याला ऊनसंपूर्णाकक्षास छेदूं दिलें, तर ह्या वर्तुळास, व ऊनसंपूर्णाकक्षास अन्यतर छेद बिन्दूंत, स्पर्श करणाऱ्या स्पृशांच्या मधील कोन ऊनसंपूर्णाकक्षाच्या संपर्कलम्बानें लघुतराक्षाशीं केलेल्या कोनाबरोबर होईल, हें सिद्ध कर.

३२. ऊनसंपूर्णाकक्षाची अविशेष बिन्दुस्थ स्पृक् त्याच्या व्यतिकान्ताक्षाच्या अन्त्यस्थ स्पृशांस ज्या बिन्दूंत छेदिते ते बिन्दु, एक एका नाभीशीं व दुसरा दुसऱ्या नाभीशीं, अशा रीतीनें सांधले, तर ज्या रेखा उत्पन्न होतात, त्यांचा छेदबिन्दु तदविशेषबिन्दुस्थ संपर्कलम्बांत येईल, हें सिद्ध कर.

३३. ऊनसंपूर्णाकक्षाच्या स्पृग्द्वया मधील बाह्य कोन संपर्कबिन्दूस सांधणाऱ्या ज्ये समोरील नाभिद्वयस्थ कोनांच्या सामिसंकलिताबरोबर असतो.

३४. ऊनसंपूर्णाकक्षाच्या प-बिन्दुस्थ स्पृशेस सहचरित व्यास युग्म ट, ढ बिन्दूंत कापितें; व ट, ढ बिन्दु स, स नाभीशीं क्रमानें सांधले; तर सपट, सपट त्रिकोण एकमेकाशीं सरूप होतील, हें सिद्ध कर.

३५. प हा स्थिर वर्तुळावरील बिन्दु आहे; ह्याचा केन्द्र ओ आहे;

ई हा स्थिरबिन्दु वर्तुळाच्या बाहेर आहे; ओ केन्द्र कल्पून एक ऊन-संपूर्णकक्ष काढिले, व त्याचे क्षेत्र असें अभिन्न ठेविले कीं त्यानें ईप-स नेहमीं प बिन्दूत स्पर्श करावा; आतां ओप-शीं सहचरित असणाऱ्या व्यासाच्या अन्यांची संस्था काढ.

३६. ऊनसंपूर्णकक्षाचा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब अक्षांस ग, ग बिन्दूत कापितो; आतां ग, ग बिन्दूतून जाणारे जर एखादे वर्तुळ काढिले, तर त्या वर्तुळास प बिन्दूपासून काढिलेली स्पृक कड-ब-रोबर होईल, हे सिद्ध कर.

३७. शङ्कुच्छेदाची नाभि, स्पृक, व केन्द्रच्युति दिली आहे; केन्द्राची संस्था वर्तुळ असते हे सिद्ध कर.

३८. वर्तुळाच्या आंत एक क बिन्दु दिला आहे; त्या बिन्दूतून जाणारी व वर्तुळास प, प बिन्दूत कापणारी एक सरळ रेषा काढिली आहे. जर तिजवर प बिन्दु असा घेतला कीं कप = कप. कर्प; आतां प बिन्दूची संस्था काढ.

३९. पय. घर्ष : पनै : : कसै : बकै, व सय. कड = सप. बक, असें ऊनसंपूर्णकक्षांत असते.

४१. प-बिन्दुस्थ स्पृक ऊनसंपूर्णकक्षाच्या सहचरित व्यासयुग्मास म, न बिन्दूत कापिते; आतां कपम त्रिकोणाचे क्षेत्रफल कप-न त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाशीं व्यस्तप्रमाणानें असते, हे सिद्ध कर.

४२. सय, सय ह्यांस व्यास कल्पून वर्तुळें काढिलीं आहेत; तीं सप, सप ह्यांस घ, घ बिन्दूत क्रमानें कापितात. तेव्हां सघ. सप = सप. सघ = बकै, हे सिद्ध कर.

४३. पसर्प, पसर्प ह्या एका शङ्कुच्छेदाच्या सनाप्त ज्या आहेत; प, प बिन्दु अक्षाचे एकाच बाजूस आहेत; आतां पप, पप ज्ञापिकेंत मिळतात, हे सिद्ध कर.

४४. समान्तरभुज चौकोनाच्या चोहों बाजूस त्यांच्या मध्य-बिन्दूत स्पर्श करणारे ऊनसंपूर्णकक्ष काढितां येईल, हे सिद्ध कर;

व हेँ ऊनसंपूर्णकक्ष त्या समान्तरभुज चौकोनांत काढिलेल्या सर्वऊनसंपूर्णकक्षांत महत्तम असते, हेँ ही सिद्ध कर.

४५. जर एककेन्द्र सरूप, व सात्त्व्यानें स्थापित अशा दोहीँ ऊनसंपूर्णकक्षांपैकीं बाह्य ऊनसंपूर्णकक्षाच्या एखाद्या बिन्दूपासून आन्तर ऊनसंपूर्णकक्षास दोन स्पृशा काढिल्या, व त्यांना बाह्य ऊनसंपूर्णकक्षास कांपूं दिलें, तर छेदबिन्दूच्या मधील अन्तर संपर्कबिन्दू-मधील अन्तरांचे दुपट होईल.

४६. एका ऊनसंपूर्णकक्षाच्या स, ह ह्या नाभि आहेत; त्याची प-बिन्दुस्थ स्पृक महत्तराक्षास ट बिन्दूंत मिळते; टघर हप-चे प्र बिन्दूंत दोन समान भाग करिते, व सप-स र बिन्दूंत मिळते. आतां पर स-नाभींतून जाणाऱ्या प-बिन्दुस्थ चलमान वर्तुळाच्या ज्येचा चतुर्थांश होईल हेँ सिद्ध कर.

४८. उपकारक वर्तुळावरील बिन्दूपासून ऊनसंपूर्णकक्षाच्या - नाभिद्वयांतून जाणाऱ्या ज्या काढिल्या, व ह्या ज्यांचे अन्य त्या बिन्दू मधून जाणाऱ्या ज्यासाच्या एका अन्याशीं सरळ रेषांनीं सांधले, तर ह्या रेषा ऊनसंपूर्णकक्षास स्पर्श करतील, हेँ सिद्ध कर.

४९. एक चतुर्भुज ऊनसंपूर्णकक्षास परिवेष्टितो; आतां अभिमुखभुजांचे अन्यतर युग्मा समोरील, अन्यतर नाभिस्थ कोन संपूरक रूपी असतात, हेँ सिद्ध कर.

५०. ऊनसंपूर्णकक्षाचें स्पृग्द्वय एकमेकास लम्बरूपानें छेदितें; आतां त्यांच्या छेदबिन्दूचा संपर्क बिन्दुस्थ संपर्कलम्बांच्या छेद बिन्दूशीं योग करून देणारी सरळ रेषा केन्द्रांतून जाते, हेँ सिद्ध कर.

५२. नाभिद्वयांतून जाणाऱ्या वर्तुळाच्या बिन्दूपासून ऊनसंपूर्णकक्षास स्पृग्द्वय काढिलें आहे. आतां स्पृशांच्या मधील कोनाचे दोन समान भाग करणाऱ्या सर्व रेषा एकां स्थिर बिन्दूंतून जातात, हेँ सिद्ध कर.

५३. जर प बिन्दूची निर्णायिका उपकारक वर्तुळास घ बिन्दूंत

मिळेल, व कघ ऊनसंपूर्णकक्षास र बिन्दूंत मिळेल; तर कर कबि-
न्दूपासून प-बिन्दुस्थ स्पृशेवर काढिलेल्या लम्बाबरोबर होईल.

५४. जर प असा एक बिन्दु असेल कां तेषोंकत्वन सप, सप
लम्बरूप होतील, तर कड^३ = २ बकै, हें सिद्ध कर.

५५. जर स, स बिन्दुस्थ कोना समोरील सपस विकोणास-
भोंवतीं वर्तुळें काढिलीं, तर त्यांच्या विज्यांच्या योगानें झालेला काट-
कोन चौकोन = बकै.

५६. ऊनसंपूर्णकक्षाचे प-बिन्दुस्थ चलमान वर्तुळ नाभ्यन्तरां-
सर, र बिन्दूंत मिळते. सयु ही त्या वर्तुळाची स्पृक आहे. आतां

सयु^३ : सप^३ :: २ सप - ३ अक : अक,
हें सिद्ध कर; वरर जर चलमान वर्तुळाच्या केन्द्रांतून जाईल, तर

कप = कस,

हेंही सिद्ध कर. त्या दोन्ही गोष्टी कोठपर्यंत संभवनीय आहेत त्या-
चा निश्चय कर.

५७. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या केन्द्रापासून एक सरळ रेष काढि-
ली आहे; ती ऊनसंपूर्णकक्षास प बिन्दूंत, महत्तराक्षावरील वर्तुळा-
स घ बिन्दूंत, व शिरस्थ स्पृशेस ट बिन्दूंत मिळते. आतां जसज-
शी कट जवळ जवळ येऊन शेवटीं सामि-महत्तराक्षाशीं एकरूप
होते, तसतशा टप व घट शेवटीं अक्षांच्या वर्गप्रमाणाशीं सम
प्रमाण होतात, हें सिद्ध कर.

५८. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या स नाभींतून एक रेष काढिली आ-
हे. ती तिला लम्बरूप असणाऱ्या दोहों स्पृशांस य, ज बिन्दूंत,
स्पृशांशीं समान्तर असणाऱ्या व्यासास ल बिन्दूंत, व ज्ञापिकेस
प बिन्दूंत मिळते. आतां,

सल : सय :: सज्ञ : सम,

हें सिद्ध कर.

५९. जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या उपकारक वर्तुळांत एक पघर

(१५०)

शङ्कुच्छेद.

समभुज त्रिकोण काढिला, व प, घ, र बिन्दूच्या निर्णायिकांना ऊन-संपूर्णकक्षास प, घ, र बिन्दूंत मिळू दिले; तर प, घ, र बिन्दुस्थ व-लमानवर्तुळें एकाच बिन्दूंत मिळतील व तो बिन्दु त्या ऊनसंपूर्णकक्षावरच असेल, हे सिद्ध कर.

६०. ऊनसंपूर्णकक्षास ट बिन्दू पासून टप, टघ स्पृशा काढिल्या आहेत. आतां टं केन्द्र कल्पून वर्तुळ काढितां येईल, व ते वर्तुळ सप, सप, सघ, सघ यांस स्पर्श करील हे सिद्ध कर.

६१. जर प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब लघुतराक्षास ग बिन्दूंत मिळेल, व प-बिन्दुस्थ स्पृक् अ-शिरस्थ स्पृशस व बिन्दूंत मिळेल, तर
सग : सक :: पघ : वअ,

हे सिद्ध कर.

६२. जर य, र बिन्दूंतून जाणारे वर्तुळ महत्तराक्षास घ-बिन्दूंत स्पर्श करील, व घ बिन्दूंतून जाणारा त्या वर्तुळाचा व्यास स्पृशस प बिन्दूंत मिळेल, तर पर = बक, हे सिद्ध कर. (सि. १५. आक. पहा.)

६३. जर पग हा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब महत्तराक्षास ग बिन्दूंत कापील, व डर, पन ह्या ड, प बिन्दूच्या निर्णायिका असतील, तर पगन, डरक त्रिकोण सरूप होतील, हे सिद्ध कर; व ह्याचरून पग कड-शीं अभिन्न प्रमाणानें राहिल, ह्याचा ही निर्णय कर.

६४. ऊनसंपूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृक् शिरस्थ स्पृशांस व, व बिन्दूंत मिळते. व व व्यास कल्पून एक वर्तुळ काढिले आहे. ते वर्तुळ ऊनसंपूर्णकक्षास घ, घ बिन्दूंत छेदिते. आतां,
घ बिन्दूची निर्णायिका : प बिन्दूची निर्णायिका :: बक : बक + कड;
एथें कड कप-शीं सहचरित आहे

६५. पकप हा एक ऊनसंपूर्णकक्षाचा व्यास आहे. ई, ई बिन्दुस्थ स्पृशा एकमेकीस फ बिन्दूंत छेदितात; पई, पई ह्या रेखा एकमेकीस ग बिन्दूंत छेदितात. आतां फग पकप व्यासाशीं जो

व्यास सहचरित असतो त्याचेशीं समान्तर होईल, हें सिद्ध कर.

६६. ऊनसंपूर्णकक्षावर एक प बिन्दु आहे. प बिन्दूस केन्द्र व सामिलघुतराक्षास त्रिज्या कल्पून एक वर्तुळ काढिलें आहे. आतां पग जर संपर्कलम्ब होईल, तर कग-स व्यास कल्पून काढिलेलें वर्तुळ पहिल्या वर्तुळास लम्बरूपानें छेदील, हें सिद्ध कर.

६७. अबक एक समद्विभुज त्रिकोण आहे. त्याची अब = अक. बड, बई ह्या बक-च्या विरुद्ध दिशांस कापिल्या आहेत. त्या तिचेशीं समानकोन करितात, व अक-स ड, ई बिन्दूंत मिळतात.

• आतां लघुतराक्षास बक-शीं समान्तर ठेवून जर एखादें ऊनसंपूर्णकक्ष बडई त्रिकोणासभोंवतीं काढिलें, तर अब ऊनसंपूर्णकक्षाची स्पृक होईल, हें सिद्ध कर.

६८. जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या एका शिरापासून प-बिन्दुस्थ स्पृशेवर अघ लम्ब काढिला, तर पस व वाढविलेली घअ ह्यांच्या-छेदबिन्दूची संस्था वर्तुळ होईल, हें सिद्ध कर.

६९. जर प-बिन्दुस्थ स्पृशेवर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या नाभीपासून काढिलेल्या लम्बांचीं तळें य, र्य असतील, तर यनर्य त्रिकोणासभोंवतीं काढिलेलें वर्तुळ क बिन्दूंतून जाईल, हें सिद्ध कर.

७०. उपकारक वर्तुळाच्या य, र्य बिन्दुस्थ स्पृशांचा मधील कोन सपस कोनाचा संपूरक असतो, हें सिद्ध कर.

७१. प एक ऊनसंपूर्णकक्षावर बिन्दु आहे. पम, पन हे अक्षांवर लम्ब आहेत. ह्यांना वाढविलें असतां हे अक्षांस व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळांस क्रमानें घ, र्घ बिन्दूंत मिळतात. आतां घ र्घ केन्द्रांतून जाईल, हें सिद्ध कर.

७२. पघ ही ऊनसंपूर्णकक्षाची ज्या व प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब ही आहे. त्याज्येचे दोन समान भाग करणारा व्यास लकल. आतां पघ लपल कोनाचे दोन समान भाग करील, व लप + लप अ-भिन्न राहिल, हें सिद्ध कर.

७४. ऊनसंपूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृक् एकास्थिर स्पृशोस ट बिन्दूत छेदिते. जर नाभींतून सट-वर लम्बरूप एक रेघ प बिन्दू पर्यंत काढिली व तिला त्या स्पृशोस घ बिन्दूत मिळू दिलें, तर घ बिन्दूची संस्था एक रेघ होईल व ती ऊनसंपूर्णकक्षास स्पर्श करील, हें सिद्ध कर.

७५. ऊनसंपूर्णकक्षांत जर नाभींतून एखादी रेघ काढिली व तिला स्पृशोशीं अभिन्न कोन करूं दिला, तर ती रेघ व स्पृक् ह्यांच्या छेद बिन्दूची संस्था वर्तुळ होईल, हें सिद्ध कर.

७६. ऊनसंपूर्णकक्षाची पप ज्या अशी घ बिन्दू पर्यंत वाडविली कीं पघ पप-शीं समान्तर असणाऱ्या व्यासाच्या निमपटी बरोबर होईल; व घ र र केन्द्रांतून काढिली आहे, व ती ऊनसंपूर्ण कक्षास र, र बिन्दूत मिळते. पकर-क्षेत्र = ३पकर-क्षेत्र, हें सिद्ध कर.

७७. एका ऊनसंपूर्णकक्षांत, ऊर्ध्वमात्रेचा अन्य ल, व कड कल-शीं सहचरित, हीं दिलीं आहेत. जर क केन्द्र कल्पून व बिन्दूतून जाणारें वर्तुळ काढिलें, व ड बिन्दूतून महत्तराक्षाशीं समान्तर एक रेघ काढिली; तर वर्तुळाच्या भांतील जो ह्या रेघेचा एक देश तो ऊर्ध्वमात्रे बरोबर होईल, हें सिद्ध कर.

७८. जर ऊनसंपूर्णकक्षा वरील बिन्दु प, प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब व स-मधून त्याजवर लम्बरूप काढिलेली रेघ, ह्या उभयतांचा छेद बिन्दु रव, व सप व कप-शीं सहचरित जो व्यास, ह्या उभयतांचा छेद बिन्दु ई, हीं क्रमानें असतील, व ईरव, करव सांधले; तर सकरव ई, सक ईरव ही प्रत्येक आकृति समान्तरपुज चौकोन होईल, हें सिद्ध कर.

७९. जर वाढविलेल्या अ अ अक्षावर ट बिन्दु असेल, व पन ही, ट बिन्दूपासून काढिलेली स्पृक् ऊनसंपूर्णकक्षास ज्या बिन्दूत स्पर्श करिते, त्या बिन्दूची निर्णायिका असेल; तर

अन. अम : अट. अट :: कन : कट,

हैं सिद्ध कर.

८०. ऊनसंपूर्णकक्षाची नाभि व स्पृग्द्वय दिलें आहे. दुसऱ्या नाभीची संस्था सरळ रेघ होईल, हें सिद्ध कर.

८१. नाभि, स्पृक्, व महत्तराक्ष, हीं दिलीं आहेत. दुसऱ्या नाभीची संस्था वर्तुळ होईल, हें सिद्ध कर.

८२. नाभि, स्पृक्, व लघुतराक्ष, हीं दिलीं आहेत. दुसऱ्या नाभीची संस्था सरळ रेघ होईल, हें सिद्ध कर.

८३. एक ऊनसंपूर्णकक्ष दुसऱ्या स्थिर ऊनसंपूर्णकक्षास - स्पर्शी करितें; दोहोंस ही उभय साधारण एक नाभि आहे. जर महत्तराक्ष स्थिर केला, तर दुसऱ्या नाभीची संस्था वर्तुळ होईल; जर लघुतराक्ष स्थिर केला, तर ती संस्था ऊनसंपूर्णकक्ष होईल, हें सिद्ध कर.

८४. ऊनसंपूर्णकक्ष व समापूर्णकक्ष ह्यांस उभय साधारण एक नाभि आहे. आतां ऊनसंपूर्णकक्ष समापूर्णकक्षास दोन बिन्दूंत छेदील, व समापूर्णकक्षाच्या दोन स्पृशा उभय साधारण स्पृशा होतील; अथवा तें त्याला छेदणार नाही; हें सिद्ध कर.

८५. जर ऊनसंपूर्णकक्षाची नाभि, एक बिन्दु, व लघुतराक्ष, हीं दिलीं, तर दुसऱ्या नाभीची संस्था समापूर्णकक्ष होईल.

८६. जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या कप, कघ व्यासांच्या प, घ अन्त्यां पासून पप, घघ स्पृशा काढिल्या व त्यांना एकमेकीस ट बिन्दूंत, व वाढविलेल्या व्यासास प, घ बिन्दूंत छेदूं दिलें; तर टघघ त्रिकोणक्षेत्र = टपघ त्रिकोणक्षेत्र.

८७. जर ऊनसंपूर्णकक्ष व त्याचें प-बिन्दुस्थ वलमानवर्तुळ ह्यांच्या उभय साधारण ज्येचे दोन समान भाग व्हावे म्हणून केंद्रां पासून कन रेघ काढिली, व तिला वाढवून ऊनसंपूर्णकक्षास घ बिन्दूंत व स्पृशेस ट बिन्दूंत छेदूं दिलें; तर कप = कघ; व हीं पृथक् पृथक् कन, कट ह्यांजमधील अनुपात मध्यमपदें होतील, हें

सर्व सिद्ध कर.

८८. त्रिकोणाच्या भुजत्रयास स्पर्श करणारे एक ऊनसंपूर्णकक्ष काढिले आहे. आतां, जर एकतर नाभि त्रिकोणाच्या कोणबिन्दुद्वयांतून जाणाऱ्या वर्तुळाच्या परिघाबरोबर फिरेल, तर अन्यतर नाभि ही त्रिकोणाच्या त्याच कोणबिन्दुद्वयांतून जाणाऱ्या दुसऱ्या वर्तुळाच्या परिघाबरोबर फिरेल, हे सिद्ध कर. आणखी, जर ह्या वर्तुळांपैकी एक वर्तुळ त्रिकोणांत काढिलेल्या वर्तुळाच्या केन्द्रांतून जाईल, तर दोन्ही वर्तुळे एकरूप होतील, हेही सिद्ध कर.

८९. एक त्रिकोण एका ऊनसंपूर्णकक्षासमोवतीं काढिला आहे. त्याच्या अन्यतम भुजाचे अन्य दुसऱ्या एका ऊनसंपूर्णकक्षांत आहेत; हे दुसरे ऊनसंपूर्णकक्ष दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षाशीं एककेन्द्र आहे. आतां समोरील कोनाचे दोन समानभाग करणारी रेषा, बाह्य ऊनसंपूर्णकक्षाच्या संबन्धानें त्या भुजाचा जो ध्रुव, त्यांतून जाते, हे सिद्ध कर.

९०. एका ऊनसंपूर्णकक्षाचा केन्द्र क आहे. त्याला ट ह्या बाह्य बिन्दू पासून स्पृग्द्वय काढावयाचें आहे. आतां खाली लिहिलेली रचना स्पृक्त्वस्थापन करण्यापुरती आहे किंवा नाही हे दाखवा. कट सांध. टपकपट हे सरूप व सासूष्यस्थित ऊनसंपूर्णकक्ष काढ; त्याचा कट व्यास असू दे; त्याला दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षास प, प बिन्दूंत छेदू दे. टप, टप ह्या दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या स्पृशा होतील.

९१. एकाच समान्तरभुजचौकोनांत काढिलेल्या सर्व ऊनसंपूर्णकक्षांच्या नाभींची संस्था समकोणायत विषमापूर्णकक्ष असते, हे सिद्ध कर, व उपसंजिहाना काढण्याकरितां क्षेत्ररचना कर.

९२. अक हा एका वर्तुळाचा स्थिर व्यास आहे. अबकड हा त्यांत चतुर्भुज काढिला आहे. आतां बअक, डअक कोन जर प्र-पूरकरूपी होतील, तर बअ, कड ह्यांच्या छेदाची संस्था विषमापूर्णकक्ष होईल, हे सिद्ध कर.

९३. विषमापूर्णकक्षाच्या नाभीं पासून एकाच शाखेवरील बि-

दुह्यापर्यंत काढिलेल्या रेखाचतुष्टयास स्पर्श करणारे वर्तुळ काढितां येईल, हें सिद्ध कर.

१४. एका ऊनसंपूर्णकक्षाचे व्यास ल, ल', म, म' व न, न' हे आहेत. रटयुव हा समान्तरभुजचौकोन त्याच्या सभोवतीं काढिला आहे, तो त्याला ल, ल', म, म' बिन्दूंत स्पर्श करितो. आतां र, ट, यु, व, न, न' बिन्दूंतून एक शङ्कुच्छेद काढितां येईल. तो शङ्कुच्छेद विषमापूर्णकक्ष होईल. त्याच्या उपसंजिहाना, ऊनसंपूर्णकक्ष व विषमापूर्णकक्ष ह्यांच्या उभयसाधारण दुसऱ्या ज्येशीं व न, न'-शीं सहचरित ज्या व्यासरूपी ऊनसंपूर्णकक्षांतील रेखा असतात, त्या होतील, हें सर्व सिद्ध कर.

१५. समकोणायत विषमापूर्णकक्षाच्या ज्येच्या अभिमुख कोनावर वर्तुळांचे समान खण्ड काढिले आहेत. आतां ज्या वर्तुळांचे हे खण्ड आहेत तीं वर्तुळे ज्या बिन्दुचतुष्टयांत विषमापूर्णकक्षास पुनः मिळतात ते चार बिन्दु समान्तरभुजचौकोनाचे कोणबिन्दु होतील, हें सिद्ध कर.

१६. समकोणायत विषमापूर्णकक्षांत एक त्रिकोण काढिला आहे. आतां ह्या त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यबिन्दूंतून जाणारे वर्तुळ काढिलें, तर तें विषमापूर्णकक्षाच्या केन्द्रांतून जाईल, हें सिद्ध कर.

१७. अकब एक समद्विभुज त्रिकोण आहे. अब हा त्याचा पाया आहे, व ड हा एक कब-वर अथवा वाढविलेल्या कब-वर बिन्दु आहे. जर बज्ञ अड-शीं समान्तर काढिली व तिला कअ-स अथवा वाढविलेल्या कअ-स श्च बिन्दूंत मिळू दिलें, तर डज्ञ-चा मध्यबिन्दु विषमापूर्णकक्षांत येईल व त्याच्या उपसंजिहाना कअ, कब होतील, हें सिद्ध कर.

१८. ऊनसंपूर्णकक्ष व विषमापूर्णकक्ष हीं काढिलीं आहेत; तीं अशीं कीं प्रत्येकाच्या नाभि दुसऱ्याच्या व्यतिक्रान्ताक्षाचे अन्त्य होतात. आतां त्यांच्या छेदबिन्दूपासून काढिलेल्या स्पृशा सहचरिताक्षास केन्द्रापासून समावधि बिन्दूंत मिळतील, हें सिद्ध कर.

९९. समकोणायत विषमापूर्णकक्षांतील अप, अप घांजवर परव, पल अनुक्रमें लम्बरूप काढिल्या आहेत; ह्या व्यतिक्रान्ताक्षास स्व, ल-बिन्दूंत मिळतात. आतां परव = अप, स्वल = अर्अ, व प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब स्वल-चे दोन समान भाग करील, हें सिद्ध कर.

१००. पक हा समकोणायत विषमापूर्णकक्षांत स्थिर व्यास आहे; घ हा एक वृत्तावर बिन्दु आहे. आतां घपक, घकप कोनांचे व्यवकलित अभिन्नकोणरूपी असतें हें सिद्ध कर.

१०१. जर विषमापूर्णकक्षाची प-बिन्दुस्थ स्पृक् एका उपसंजिहानेस ट बिन्दूंत कार्पाळ, व सप जर त्या उपसंजिहानेस घ बिन्दूंत छेदील, तर सघ = घट.

१०२. जर दिलेला बिन्दु विषमापूर्णकक्षाची नाभि असेल, व तें दिलेल्या बिन्दूंतून जाऊन दिलेल्या रेघेस स्पर्श करील, तर दुसऱ्या-नाभीची संस्था एका स्थिर विषमापूर्णकक्षाचें वृत्तक होईल हें सिद्ध कर.

१०३. विषमापूर्णकक्षाच्या प बिन्दूपासून एक स्पृक् काढिली आहे. तिजवर पघ अशी घेतली आहे कीं तिचे कड-शीं अभिन्न प्रमाण कायम राहतें. घ बिन्दूची संस्था विषमापूर्णकक्ष होईल, हें सिद्ध कर.

१०४. विषमापूर्णकक्षांत दोन उपसंजिहाना व-वृत्तावरील एक बिन्दु घांचीं स्थानें दिलीं आहेत; आतां वृत्त कसें रचावें हें सिद्ध कर; व नाभिहयाचें स्थान कसें काढावें हें दाखीव.

१०५. जर अ, ड हे दोन स्थिर बिन्दु असतील, व पअड कोन नेहमीं पडअ कोनापेक्षां दिलेल्या कोनानें ज्यास्ती राहिल, तर, आतां प बिन्दूची संस्था, व व्यतिक्रान्ताक्ष व उपसंजिहाना, घांचीं स्थानें काढ.

१०६. अबक त्रिकोणाच्या अब पायाच्या ड मध्यबिन्दूपासून ईडई एक रेघ काढिली आहे; ही रेघ अब-शीं दिलेला कोन करिते; व ई, ई बिन्दु असे घेतले आहेत कीं ईड = ईड = $\frac{1}{2}$ अब. आतां कअब, कबअ ह्या कोनांचें व्यवकलेन = ईडअ, ही अट कायम ठेवून जर कअ, कब सर्व संभवनीय स्थानापन्न होतील,

तर क बिन्दु एक समकोणायत विषमापूर्णाकक्ष वर्तवील व ह्याचे सह-चरित व्यास अच, ईई रेघा होतील, हें सिद्ध कर.

१०७. एखाद्या बिन्दूपासून काढिलेली स्पृक, व तिनें अवरुद्ध जें अक्षांचे खण्ड, ह्या दोहोंच्या योगानें झालेला त्रिकोण, त्या बिन्दूचा केन्द्राशीं योग करून देणारी रेघ, व त्याच बिन्दूचा निर्णायक व सामिनिर्णायिका, ह्यांच्या योगानें झालेल्या त्रिकोणाशीं सरूप असतो, असें समकोणायत विषमापूर्णाकक्षांत घडतें, हें सिद्ध कर.

१०८. विषमापूर्णाकक्षास स्पृशा काढिल्या आहेत. ह्याच्या उपसं-जिहानांनीं अवरुद्ध जो त्या प्रत्येक स्पृशेचा एकदेश त्याचे अभिन्न प्रमाणानें खण्ड पडले आहेत. छेदबिन्दूची संस्था विषमापूर्णाकक्ष होईल, हें सिद्ध कर.

१०९. समान सीम वर्तुलरूपी वृत्तकांच्या मालेचे तीन समान-भाग पाडणारे बिन्दु विषमापूर्णाकक्ष ह्याच्या शारवांवर असतात, हें सिद्ध कर; व त्यांच्या केन्द्रांमधील अन्तर किती असतें, ह्यांचा निश्चय कर.

११०. एका उपसंजिहानेवरील र बिन्दू पासून विषमापूर्णाकक्षास ई बिन्दूंत स्पर्श करणारी रई काढिली आहे. ई बिन्दूंतून ईट, ईघ ह्या, उपसंजिहानांशीं समान्तर काढिल्या आहेत. त्या व्यासास ट, व बिन्दूंत कापितात. रघ सांधून झालेली रेघ विषमापूर्णाकक्षास प, प बिन्दूंत छेदिते. आतां टप, टप विषमापूर्णाकक्षास स्पर्श करतील, हें सिद्ध कर.

१११. ऊनसंपूर्णाकक्षांत एक नाभि व दोन बिन्दु दिले आहेत. दुसऱ्या नाभीची संस्था विषमापूर्णाकक्ष होईल हें सिद्ध कर.

११२. जर समकोणायत विषमापूर्णाकक्ष दिलेल्या तीन बिन्दूंतून जाईल, तर त्यांच्या केन्द्राची संस्था वर्तुळ होईल, व तें वर्तुळ दिलेल्या तीन बिन्दूंस सांधणाऱ्या रेघांच्या मध्यबिन्दूंतून जाईल, हें सिद्ध कर.

११३. जर प-बिन्दुस्थ स्पृक् एका उपसंजिहानेस ट बिन्दूंत मिळेल, व टघ रेघ दुसऱ्या उपसंजिहानेशीं समान्तर काढिली व तिला वृत्तास घ बिन्दूंत मिळूं दिलें, व पघ सांधले, व पघ-ला दोहों बाजूनी वाढवून उपसंजिहानांस र, र बिन्दूंत मिळूं दिलें; तर रर-चे प, घ बिन्दूंत तीन समान भाग होतील, हें सिद्ध कर.

११४. जर एककेन्द्र समकोणायत विषमापूर्णकक्षद्वयास-उभय साधारण एक स्पृक् असेल, तर ह्या दोहों विषमापूर्णकक्षांचे छेदबिन्दु आपआपल्या उभयसाधारण स्पृग्जात संपर्क बिन्दूशीं सांधले असतां ज्या रेघा उत्पन्न होतात त्यांच्या समोरील उभयसाधारण केन्द्रस्थ कोण समान होतील.

११५. जर ट बिन्दूपासून काढिलेल्या टप, टघ स्पृशा शङ्कु-च्छेदास प, घ बिन्दूंत स्पर्श करतील, व स, र जर नाभि असतील, तर

सटै : सटै :: सप.सघ : सप.सघ.

११६. शङ्कु-च्छेदाचें शिरस्थ बलमान वर्तुळ अक्षास पुनः ड बिन्दूंत मिळतें. ड बिन्दूपासून त्या वर्तुळास एक स्पृक् काढिली आहे. शङ्कु-च्छेदांतील अविशेष बिन्दूपासून जर दोन स्पृशा त्या वर्तुळास काढिल्या; तर ह्या स्पृशा पहिल्या स्पृशेचें जें दैर्घ्य अवरोधितील तें अपिन्न होईल, हें सिद्ध कर.

११७. जर ऊनसंपूर्णकक्षांच्या स्पृशांच्या युग्मामधील कोनाचे दोन समान भाग करणाऱ्या रेघा एका स्थिर रेघेशीं समान्तर असतील, तर स्पृशांच्या छेदबिन्दूची संस्था समकोणायत विषमापूर्णकक्ष होईल, हें सिद्ध कर.

११८. एक विषमापूर्णकक्ष आहे. त्याची केन्द्रच्युति दिली आहे. तें विषमापूर्णकक्ष दिलेल्या दोहों बिन्दूंतून जात आहे. जर त्याची उपसंजिहाना दिलेल्या तिसऱ्या बिन्दूंतून व पूर्वोक्त बिन्दूंतून एकाच सरळ रेघेनें जाईल; तर विषमापूर्णकक्षांच्या केन्द्राची संस्था-

वर्तुळ होईल, हें सिद्ध कर. •

११९. दोन समान्तर सरळ रेखांवर अनुक्रमें अ, प व ब, घ बिन्दु घेतले आहेत. अ, ब स्थिर आहेत व प, घ संचारी आहेत. आतां अप बघ काटकोन चौकोन जर अभिन्न असेल, व जर प, घ बिन्दु अब-च्या एकाच अथवा अभिसुरव बाजूंस असतील; तर पघ रेघ स्थिर ऊनसंपूर्णकक्षास अथवा स्थिर विषमापूर्णाकक्षास नेहमीं स्पर्श करील, हें सिद्ध कर.

१२०. जर एखाद्या ऊर्ध्वशङ्कुचे दोन साधे छेद घेतले व त्यांना एकच ज्ञापिका असू दिली, तर त्या ज्ञापिकेस अनुगुण असणाऱ्या नाभि एका सरळ रेघेंत येतील व ही रेघ शिरांतून जाईल.

१२१. असें क्षेत्र कल्पन कर कीं तेषांकरून शङ्कु असा कापितां येईल कीं त्याचें छेदरूपी वृत्त दिलेल्या केन्द्रच्युतीचें ऊनसंपूर्णकक्ष होईल.

१२२. शङ्कु दिला आहे व त्याच्या आंत एक बिन्दु दिला आहे; हा बिन्दु ज्यांची नाभि होईल अशीं छेदरूपी वृत्ते दोन मात्र असतात; व ह्या छेदरूपी वृत्तांच्या पातळ्या शङ्कुच्या शिराशीं दिलेल्या-बिन्दूचा योग करून देणारी जी रेघ तिचेशीं समान कोन करितात, हें सिद्ध कर.

१२४. ऊनसंपूर्णकक्षरूपी छेदाचा महत्तराक्ष शङ्कुस ज्या बिन्दूंत मिळतो तो बिन्दु जर फ असेल व त्या छेदाचां केन्द्रे जर क असेल; तर

कफ : कस :: अर्ज : अओ + अओ,
हें सिद्ध कर; एथें ओ हें शङ्कुचें शिर आहे.

प्रश्नसमुदाय.

दुसरी प्रश्न.

१. जर ओघ, ओघ त्या समापूर्णकक्षाच्या स्पृशा असतील, व ओघ अक्षाशी समान्तर काढिली व तिच्या जापिकेस रच. बिन्दूत व घघ-स व बिन्दूत मिळुं दिलें, व घघ-आ अक्षास न बिन्दूत मिळुं दिलें, तर ओखनस एक समान्तर भुज चौकोन होईल.

२. समापूर्णकक्षाच्या प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्बाचें तळ ग बिन्दु आहे; घ हा सग-चा मध्यबिन्दु आहे; व क्ष हें जापिकेचें तळ आहे; आतां

$$\text{घक्ष} - \text{घप} = ४ \text{ अस,}$$

हें सिद्ध कर.

३. एका ओ बिन्दूतून समापूर्णकक्षास स्पृशा काढिल्या आहेत; व ओ बिन्दूतूनच संपर्कबिन्दुस्थ संपर्कलम्बांशीं समान्तर अशा सरळ रेखा काढिल्या आहेत. अशा रीतीनें कल्पून झालेल्या समान्तरभुज चौकोनाचा एक कर्ण नाभीमधून जाईल, हें सिद्ध कर.

४. समापूर्णकक्षांच्या नाभि एकरूप आहेत. आतां उभयसाधारण ज्या जापिकांच्या छेदबिन्दूतून जाईल, व तीं समापूर्णकक्षें अक्षांच्या मधील कोनांचे निमपटी बरोबर कोन करून एकमेकांस छेदितील हें सिद्ध कर.

५. दिलेल्या दोन रेखांच्या छेदबिन्दूतून व दुसऱ्या एका दिलेल्या बिन्दूतून जाणारे वर्तुळ काढिले आहे. आतां दिलेल्या दोन रेखांस वर्तुळ ज्या बिन्दूत पुनः मिळते त्या बिन्दूस साधणारी रेखा स्थिर समापूर्णकक्षास स्पर्श करील, हें सिद्ध कर.

६. दोन समापूर्णकक्षें एकमेकांस प, घ बिन्दूत कापितात. त्यांना उभयसाधारण एकच जापिका आहे; त्या समापूर्णकक्षांस उभयसाधारण स्पृशा काढिल्या आहेत. आतां प्रत्येक समापूर्णकक्षा-

च्या संपर्कबिन्दूस सांधणाऱ्या ज्या ह्मणजे संपर्कज्या पद्य-शीं स-
मान्तर असतात; व दोहों वृत्तांच्या संपर्कबिन्दूमधील जो प्रत्येक
स्पृश्या एकदेश त्याचे दोन समान भाग पद्य वाढविली असतां-
करिते, हें सिद्ध कर.

७. समापूर्णाक्ष्याच्या घ, घर्ष बिन्दुस्थ स्पृशा त्याच्या प-बि-
न्दुस्थ स्पृशेस क्रमानें र, र् बिन्दूंत मिळतात; त्यांच्या ट ह्या छेद-
बिन्दूंतून जाणारा व्यास तिला र्घ बिन्दूंत मिळतो. आतां पर=स्वर्
व घम, घर्म, टन ह्या जर घ, घर्ष, ट बिन्दुस्थ, प बिन्दूंतून जाणा-
ऱ्या व्यासाच्या, अनुक्रमें निर्णायिका असतील, तर पन ही पम,
पर्म ह्यांजमधील अनुपातमध्यमपद होईल, हें सिद्ध कर.

८. प, प हे बिन्दु अक्षाचे एकाच बाजूला समापूर्णाक्ष्यावर
आहेत; पन, पन ह्या निर्णायिका आहेत; प, प बिन्दुस्थसंपर्कल-
म्बः एकमेकास घर्ष बिन्दूंत छेदिताने. आतां अक्षापासून घ बिन्दूचे अ-
न्तर

$$= \frac{२.पन.पन(पन + पन)}{(ऊर्ध्वमात्रा)^२},$$

हें सिद्ध कर.

ह्यापासून चलमानवर्तुलाच्या त्रिज्येची किंमत काढ.

९. दोन समान समापूर्णाक्ष्यास एकच उभय साधारण ना-
भि आहे; उभय साधारण स्पृशेवरील बिन्दूपासून प्रत्येकास दुसरी
एकेक स्पृकू काढिली आहे. आतां ह्या स्पृशा उभयसाधारण ना-
भिपासून सारख्या अन्तरावर आहेत, हें सिद्ध कर.

१०. ओ ह्या बाह्य बिन्दूपासून समापूर्णाक्ष्यास दोन स्पृशा
काढिल्या आहेत; त्या ज्ञापिकेस ज्या बिन्दूंत मिळतात त्या बिन्दूपा-
सून दुसऱ्या दोन स्पृशा काढिल्या आहेत. ह्या स्पृशा ओ बिन्दूपा-
सून काढिलेल्या स्पृशांस अ, ब बिन्दूंत मिळतात.

आतां अं ब स नाभी मधून जाईल, व ओस अब-परल-
म्बरूपानें पडेल. हें सिद्ध कर.

११. समापूर्णाकक्षाची नाभि वं दोन स्पृशा दिल्या आहेत. ह्या पासून वृत्त कसे काढावे हे दाखीव.

१२. ज्याच्या बाजू एका दिलेल्या त्रिकोणाच्या बाजूशी समान्तर राहतील असा एक त्रिकोण दिलेल्या समापूर्णाकक्षांत काढ.

१३. समापूर्णाकक्षाच्या नाभीतून जाणाऱ्या ज्याचे अन्य प, प आहेत. प, प बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब अक्षास ग, ग बिन्दूत मिळतात. - स्पृशा ट बिन्दूत मिळतात. आतां सपग, सपग त्रिकोणासभोंवतीं काढिलेलीं वर्तुळे वाढविलेल्या टस-स र बिन्दूत एकमेकास छेदितात व रट-चे स बिन्दूत दोन समान भाग करितात, हे सिद्ध कर.

१४. समापूर्णाकक्षाची जी दुपट निर्णायिका तिच्या दोहीं अन्य बिन्दूत वर्तुळ व समापूर्णाकक्षा एकमेकास स्पर्श करितात. आतां वर्तुळाने संपर्कबिन्दूच्या निर्णायिकांचे आंतून अथवा बाहेरून जे भाग पाडिले आहेत त्या भागांचे, ऊर्ध्वमात्रा अनुपाततृतीयपद होईल, हे सिद्ध कर.

१५. पघ ही समापूर्णाकक्षाची ज्या व प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब ही आहे. घर ही अक्षाशी समान्तर काढिली आहे. ती पघ ह्या दुपट निर्णायिकेस वाढविल्यावर र बिन्दूत मिळते. आतां पघ, व पर ह्यांनी रचलेला काटकोन चौकोन अभिन्न होईल, हे सिद्ध कर.

१६. ओप, ओघ ह्या समापूर्णाकक्षाच्या दोन स्पृशा आहेत. अक्षावर ओम लम्बरूप काढिली आहे. पघ ही अक्षास ज्या बिन्दूत कापिते तो बिन्दु जर र असेल, तर मर-चे शिरांत दोन समान भाग पडतील.

१७. एका समापूर्णाकक्षाची नाभि स आहे. ते अत्रक त्रिकोणाच्या श्रुजत्रयास सार्श करिते व वक पायाचे ड बिन्दूत दोन समान भाग पाडिते. आतां अस ही अड, अब, व अक ह्यांचे अनुपातचतुर्थपद होईल हे सिद्ध कर.

१८. जर संपर्कज्या [आपल्या] एका शेषटास संपर्कलम्ब ही-

ईल तर [तिच्या] दुसऱ्या शोचसास असणाऱ्या स्पृशेचे, बाह्य बिन्दूशीं नाभीचा योग करून देणाऱ्या रेघेवर लम्बरूपानें पडणारा सनाभलम्ब, दोन समान भाग करील.

१९. समापूर्णाकक्षाद्वयास एक उपय साधारण नाभि आहे. त्यांच्या उपय साधारण स्पृशेवरील बिन्दू पासून त्यांना दुसऱ्या दोन स्पृशा काढिल्या आहेत. ह्या स्पृशांमधील कोन समापूर्णाकक्षांच्या अक्षांमधील कोनाबरोबर असतो, हे सिद्ध कर.

२०. जर नाभी पासून अक्षावर दिलेल्या समावधि बिन्दुद्वयापासून समापूर्णाकक्षाच्या एखाद्या स्पृशेवर लम्ब काढिले, तर लम्बांवरील वर्गाचें व्यकलित अभिन्न होईल, हे सिद्ध कर.

२१. जर एखादा चतुर्भुज वर्तुळांत काढिला, तर त्याच्या कर्णाद्वयापैकीं एक कर्ण, त्याच्या चोहीं बाजूंस स्पर्श करणाऱ्या समापूर्णाकक्षाच्या नाभीमधून जाईल.

२२. समापूर्णाकक्षाची एक ज्या दिलेल्या रेघेशीं समान्तर काढिली आहे. ह्या ज्येस व्यास कल्पून एक वर्तुळ काढिलें आहे. आतां ह्या ज्येचा मध्यबिन्दु, व, वर्तुळ व समापूर्णाकक्ष ह्यांच्या दोहों छेदबिन्दूस सांधणाऱ्या ज्येचा मध्यबिन्दु, ह्या दोहों बिन्दूंमधील अन्तर अभिन्न असतें.

२३. ऊनसंपूर्णाकक्षाच्या प बिन्दूतून एक रेघ कप ह्या वाहक त्रिज्येवर लम्बरूप काढिली आहे. ती उपकारक वर्तुळास र, र बिन्दूंत मिळते. आतां कप-शीं सहचरित असणाऱ्या व्यासाच्या अन्त्याच्या नाभ्यन्तरांचें व्यकलित रर-बरोबर असतें, हे सिद्ध कर.

२४. ऊनसंपूर्णाकक्ष व समापूर्णाकक्ष ह्यांचे अक्ष समान्तर आहेत. ह्यांना प-बिन्दुस्थ चलमान वर्तुळ एकच आहे. ऊनसंपूर्णाकक्ष व समापूर्णाकक्ष एकमेकास घ बिन्दूंत छेदितात. जर प-बिन्दुस्थ स्पृक समापूर्णाकक्षाच्या अक्षास ट बिन्दूंत मिळेल, तर पघ = ४ पट.

२५. ऊनसंपूर्णाकक्षांत एक असा त्रिकोण काढिला आहे कीं त्याची प्रत्येक बाजू अभिसुखकोणस्थ स्पृशेशीं समान्तर आहे. आतां त्या

(१६४)

शङ्कुच्छेद.

बाजूं वरील वर्गांचें संकलित : अक्षां वरील वर्गांचें संकलित :: ९ : ८ ,
हें सिद्ध कर.

२६. जेव्हां संपर्कबिन्दूचीं नाभ्यन्तरे एकमेकास लम्बरूप अस-
तात, तेव्हां व्यतिक्रान्ताक्ष, व नाभिद्वयापासून काढिलेले लम्ब व स्पृक-
द्यांनीं रचलेल्या चतुर्भुजाचे परिसूत्र महत्तम असते, असें ऊनसंपूर्-
णकक्षांत घडते.

२७. एकाच पातळींत दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षाद्वयास एक उ-
भयसाधारण नाभि आहे. एक ऊनसंपूर्णकक्ष उभयसाधारण नाभि-
सभोंवतीं फिरते व दुसरे स्थिर राहते. आतां ह्यांच्या उभयसाधारण
स्पृशांच्या छेदबिन्दूची संस्था वर्तुळ होईल, हें सिद्ध कर.

२८. टय, टय ह्या स्पृग्द्वयावर नाभिं पासून सय, सय ल-
म्बरूप काढिल्या आहेत. आतां सटय, सटय कोन, य, य बिन्दु
ऊनसंपूर्णकक्षाच्या केन्द्राशीं सांधून झालेल्या त्रिकोणाच्या पायाजव-
ळील कोनाबरोबर होतील अथवा त्यांचे संपूरक होतील, हें सिद्ध कर.

२९. त्रिकोणाच्या लम्बांच्या केन्द्रास केन्द्र कल्पून ऊनसंपूर्णकक्ष-
द्वय काढिले आहे; एक त्रिकोणासभोंवतीं, व दुसरे त्याच्या बाजूंस-
स्पर्श करणारे; आतां हीं ऊनसंपूर्णकक्षे सारूप होतील व त्यांचे सम-
प्रमाणाक्ष एकमेकावर लम्बरूपानें पडतील, हें सिद्ध कर.

३०. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या प बिन्दूतून पडई रेघ काढिली आहे.
ती अक्षांस अशी कापिते कीं पड, पई खण्ड साम्यक्षद्वया बरोबर
क्रमानें होतात. ड, ई बिन्दूतून अक्षांवर काढिलेले लम्ब एकमेकास
ओ बिन्दूत छेदितान. आतां पओ संपर्कलम्ब होईल, हें सिद्ध कर.

३१. जर ऊनसंपूर्णकक्षावरील प बिन्दूचें सप हें नाभ्यन्तर स-
हचरित व्यासास ई बिन्दूत मिळेल, तर कप व सई ह्यांजवरील वर्गांचें
व्यवफलन अभिन्न राहिल, हें सिद्ध कर.

३२. एकतर समान-सहचरित व्यासावर लम्बरूपानें पडणाऱ्या
ऊनसंपूर्णकक्षाच्या व्यासाच्या अन्यां पासून अन्यतराशीं समान्तर ज्या

काढिल्या आहेत. त्या ज्या ऊनसंपूर्णकक्षाचे संपर्कलम्ब होतील, हें सिद्ध कर.

३४. दिलेल्या साम्यक्षांचें ऊनसंपूर्णकक्ष दिलेल्या गुणक्षेत्राच्या भुजत्रयास स्पर्श करितें; त्याच्या नाभि व केन्द्र काढ.

३५. जर प, घ हे दोन बिन्दु स्थिर ऊनसंपूर्णकक्षावर असतील; व त्याच्या स, ह त्या नाभि असतील, व सप, हघ त्या एकमेकांस ऊनसंपूर्णकक्षाच्या आंतर बिन्दूंत छेदितील; तर एकमेकांस र बिन्दूंत स्पर्श करणारीं दोन ऊनसंपूर्णकक्षां काढितां येतील व एक दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षास घ बिन्दूंत स्पर्श करील व त्याची नाभि स होईल; व दुसरे दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षास प बिन्दूंत स्पर्श करील व त्याची नाभि ह होईल, हें सिद्ध कर.

जर अन्यतर संचारी ऊनसंपूर्णकक्षाचा महत्तराक्ष दिला तर संचारी ऊनसंपूर्णकक्षद्वयाच्या दुसऱ्या नाभिंच्या संस्था व त्यांच्या संपर्कबिन्दूची संस्था काढितां येईल हें दाखवीव.

३६. एक ऊनसंपूर्णकक्ष दिलेल्या पओ, घओ रेखांस दिलेल्या प, घ बिन्दूंत स्पर्श करितें. त्याची एक नाभि पघ रेखेवर आहे, व त्याचा पओघ कोन काटकोनापेक्षा कमी आहे. आतां त्याच्या नाभिंची व ज्ञापिकांची स्थानें काढ.

३७. जर पप ही दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या व्यतिक्रान्ताक्षाशीं समान्तर काढिली व तिला त्या ऊनसंपूर्णकक्षास प, प बिन्दूंत व वर्तुळास र, र बिन्दूंत मिल्कें दिलें; तर

$$पप : रर :: घघ : पप,$$

हें सिद्ध कर; एथें वर्तुळाचा व्यास सहचरिताक्ष आहे.

३८. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या प बिन्दूंतून अपघ, अपर रेखा काढिल्या आहेत. त्या उपकारक वर्तुळास घ, र बिन्दूंत मिल्कतात. - घप, रर ह्या व्यतिक्रान्ताक्षाच्या निर्णायिका काढिल्या आहेत. आतां ल हा ऊर्ध्वमात्रेचा अन्य घेतला, तर

अप. अरः अर. अघः. अकैः सलै,

हैं सिद्ध कर.

३९. दोन ऊनसंपूर्णकक्षें एकाच पातळींत ठेविलीं आहेत. एकाचा प्रत्येक अक्ष दुसऱ्याच्या प्रत्येक अक्षा बरोबर आहे; एकाचा केन्द्र दुसऱ्याच्या केन्द्राशीं एकरूप आहे. एकाचे अक्ष दुसऱ्याच्या अक्षाशीं कोन करीत आहेत. आतां त्यांना उभयसाधारण स्पृशा काढ.

४०. जर स, स' ह्या एका ऊनसंपूर्णकक्षाच्या दोन नाभि असतील, व सय ही स बिन्दूपासून एखाद्या स्पृशेवर लम्बरूप काढिली; तर स'य ही अनुगुण संपर्कलम्बाचे दोन समान भाग करील, हें सिद्ध कर.

४१. ओर हा एका ऊनसंपूर्णकक्षाच्या समान्तरभुजचौकोनाचा कर्ण आहे. ओघ, ओघ' ह्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या स्पृशा त्याच्या पार्श्वस्थ बाजू आहेत. जर र हा बिन्दु ऊनसंपूर्णकक्षांत असेल, तर ओ हा बिन्दु सरूप व सात्त्विकस्थित अशा दुसऱ्या एका एककेन्द्र ऊनसंपूर्णकक्षावर येईल हें सिद्ध कर.

४२. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या एका नाभींतून एक वर्तुळ जातें. त्याचा केन्द्र ऊनसंपूर्णकक्षाच्या महत्तराक्षावर आहे. तें वर्तुळ ऊनसंपूर्णकक्षास स्पर्श करितें. आतां नाभीपासून संपर्क बिन्दूपर्यंत काढिलेली रेघ ऊर्ध्वमात्रे बरोबर होईल, हें सिद्ध कर.

४३. समीपतर शिरस्थ स्पृक दुसऱ्या एका स्पृशेस ज्या बिन्दूंत छेदिते तो बिन्दु जर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या एका नाभीशीं सांधला, व सांधून झालेली रेघ व दुसरी स्पृक ह्यांजवर दुसऱ्या नाभीपासून लम्ब काढिले, तर ह्या लम्बांच्या तळांमधील अन्तर, अन्यतर नाभीपासून दूरतर शिरापर्यंत जें अन्तर त्या बरोबर होईल, हें सिद्ध कर.

४४. ऊनसंपूर्णकक्षासभोंवतीं एक समान्तरभुजचौकोन काढिला आहे. जर त्याचे दोन कोणबिन्दु ज्ञापिकांवर असतील तर त्याचे दुसरे दोन कोणबिन्दु उपकारक वर्तुळावर येतील.

४५. प स ही ऊनसंपूर्णकक्षाच्या अविशेष बिन्दूपासून समा-
प्त ज्या काढिली आहे. प स-शीं समान्तर काढिलेली कर ही उपकु-
र्वाणवर्तुळाची त्रिज्या आहे. ही कर स बिन्दूच्या दिशेस प बिन्दू
पासून काढिली आहे. स घ हा कर-वर लम्ब आहे. आतां सप,
घर ह्यांनीं रचिलेले गुणक्षेत्र सामिलघुतराक्षा वरील वर्गक्षेत्राबरो-
बर होईल, हें सिद्ध कर.

४६. पघ हा ऊनसंपूर्णकक्षाचा व्यास आहे. त्याच्या प अ-
त्यापासून टपट स्पृक काढिली आहे. ती सहचरित व्यासयुग्मास
टट बिन्दूंत मिळते. पघ-पासून पर, घर ह्या त्याच सहचरित व्या-
सांशीं समान्तर काढिल्या आहेत. आतां ऊनसंपूर्णकक्षाच्या साम्य-
क्षांनीं रचलेला काटकोन चौकोन, पघर, कटट ह्या त्रिकोणांमधी-
ल अनुपातमध्यमपद होईल, हें सिद्ध कर.

४७. जर कप, कड हे ऊनसंपूर्णकक्षाचे समान व सहच-
रित व्यास असतील, व प बिन्दुस्थ स्पृक व संपर्कलम्ब महत्तराक्षास
ट, ग बिन्दूंत क्रमानें मिळतील, तर

$$\text{टक. टग} = २ \text{ कप}.$$

४८. एका त्रिकोणांत एक ऊनसंपूर्णकक्ष काढिलें आहे. त्रि-
कोणास परिवेष्टणाच्या वर्तुळाचा केन्द्र त्याचा केन्द्र आहे. त्रिकोणाच्या
कोनांपासून समोरच्या बाजूंवर काढिलेले लम्ब ऊनसंपूर्णकक्षाचे -
संपर्कलम्ब होतील, हें सिद्ध कर.

४९. उपकुर्वाणवर्तुळावरील बिन्दूपासून ऊनसंपूर्णकक्षास
स्पृशा काढिल्या आहेत. एकतर संपर्कबिन्दूस एकतर नाभीशीं
सांधणारी रेघ, अन्यतर संपर्कबिन्दूस अन्यतर नाभीशीं सांधणा-
या रेघेशीं समान्तर होईल, हें सिद्ध कर.

५०. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या बाहेरील प बिन्दूपासून पघरेघ म-
हत्तराक्षाशीं समान्तर काढिली आहे. ती वृत्तास ज्या बिन्दूंत मिळते
तो अन्यतर बिन्दु घ आहे. आतां पघ-वर लम्बरूपानें पडणारी वृत्ति-

चेच दीन समान भाग करणारी रेघ; घ बिन्दुस्थ स्पृक, व परव, पल ह्या प बिन्दूपासून काढिलेल्या स्पृशांच्या मध्यबिन्दूस ह्यणजे परव, पल ह्यांच्या मध्यबिन्दूस सांधणारी रेघ, ह्या सर्व एकाच-बिन्दूत मिळतील, हे सिद्ध कर.

५१. कप, कड हे ऊनसंपूर्णकक्षाचे सामिसहचरित व्यास आहेत. पघ ज्या अन्यतर अक्षाशीं समान्तर आहे. आतां ड घ ही अक्षांच्या अन्यांस सांधणाऱ्या अन्यतर रेघेशीं समान्तर होईल, हे सिद्ध कर.

५२. ऊनसंपूर्णकक्षामाला एकाच बिन्दूतून जाते. तिळा एक सर्वसाधारण नाभि आहे. तिचे महतराक्ष सारख्या लांबीचे आहेत. तिच्या केन्द्रांची संख्या वर्तुळ असते, हे सिद्ध कर.

ऊनसंपूर्णकक्षांच्या केन्द्रच्युतीचा परिच्छेद कर.

५३. ऊनसंपूर्णकक्षांत एक समान्तरभुज चौकोन काढिला आहे. ऊनसंपूर्णकक्षावरील बिन्दूपासून दीन रेघा समान्तरभुज चौकोनाच्या बाजूंशीं समान्तर काढिल्या आहेत. आतां समान्तरभुज चौकोनाच्या बाजूनीं केलेले जे ह्या रेघांचे खण्ड त्यांनीं रचलेले काढीन चौकोन एकमेकाशीं अभिन्न प्रमाणानें असतात, हे सिद्ध कर.

५४. जर ऊनसंपूर्णकक्षाची स्पृक व संपर्कलम्ब अक्षासट, ग बिन्दूत क्रमानें मिळतील, व उपकारक वर्तुळावरील अनुगुण बिन्दु घ असेल; तर

दघ : दप :: बक : पग.

५५. ऊनसंपूर्णकक्षाचा प कर्प हा व्यास आहे. कड कप-शीं सहचरित आहे. आतां पड, डर्प आपल्या दीन समान भाग-पाडणाऱ्या व्यासांशीं व्यस्तप्रमाणानें असतात, हे सिद्ध कर.

५६. जर ईफ ही ऊनसंपूर्णकक्षासमोवतीं काढिलेल्या समान्तरभुज चौकोनाची बाजू असेल, व त्याच्या बाजू सहचरित व्यासांशीं समान्तर असतील व ई, फ बिन्दूंचा नाभीशीं योग करून

देणाऱ्या रेघा एकमेकीस ओः ओ विन्दूंत छेदितील; तर ओ, ओ व नाभि वर्तुळावर येतील. हे सिद्ध कर.

५७. जर विषमापूर्णकक्षाचा अविशेष बिन्दुस्थ-संपर्कलम्ब सहचरिताक्षारस ग विन्दूंत मिळेल व स ही नाभि असेल; तर पग सग-शीं अभिन्न प्रमाणानें राहिल.

५८. जर समकोणायत विषमापूर्णकक्षाचा केन्द्र, व सहचरित व्यासांचीं युग्में व स्पृकू ह्यांचे विप्रतिच्छेदबिन्दु, ह्यांतून जाणारीं वर्तुळें काढिलीं; तर त्या वर्तुळांचे केन्द्र एका स्थिर रेघेंत येतील, असें सम-कोणायत विषमापूर्णकक्षांत घडतें.

५९. समकोणायत विषमापूर्णकक्षाची ज्या एका स्थिर व्यासावर लम्बरूप काढिली आहे. ज्या व व्यास ह्यांचे अन्य रेखाचतुष्टयानें सांधले आहेत. आतां रेघांच्या नूतन विप्रतिच्छेदबिन्दुह्यास सांध-णारी रेघ स्थिर रेघेशीं समान्तर होईल. हे सिद्ध कर.

६०. एकनाभविषमापूर्णकक्ष एकनाभ ऊनसंपूर्णकक्षमालेस छेदितें. आतां एका विशेष ऊनसंपूर्णकक्षाचा सहचरित व्यास विप्र-तिच्छेद बिन्दूपासून असणाऱ्या अन्यतर नाभ्यन्तरास एका बिन्दूंत कापील व हा बिन्दु वर्तुळ परिघस्थायी होईल, हे सिद्ध कर.

६१. जर अतिक्रान्ताक्षारस व्यास कल्पून काढिलेल्या वर्तुळास विषमापूर्णकक्षाच्या एखाद्या बिन्दूपासून स्पृकू काढिली; तर ती स्पृकू त्या बिन्दूंतून काढिलेल्या एकनाभ ऊनसंपूर्णकक्षाच्या सामिलघुतरा-क्षा बरोबर होईल.

६२. दिलेल्या विषमापूर्णकक्षाच्या एका नाभीस नाभि व स्पृशेस नापिका कल्पून दिलेल्या विषमापूर्णकक्षाच्या सहचरिताक्षारस स्पर्श करणारें दुसरें विषमापूर्णकक्ष काढिलें; तर हीं दोन्हीं सरूप होतील, हे सिद्ध कर.

६३. समकोणायत विषमापूर्णकक्षाच्या एकाच शारवेस एका बाह्य बिन्दूपासून एक स्पृग्द्वय काढिलें आहे. आतां ह्या स्पृशांसमोर

जे केन्द्रस्थ कोन असतात ते त्या स्पृशांनीं संपर्कज्येशीं केलेल्या कोनाबरोबर क्रमानें असतात, हें सिद्ध कर.

६४. समकोणायत विषमापूर्णकक्षाच्या व्यासाचे अन्य प, प आहेत. प, प बिन्दूंतून एक वर्तुळ काढिलें आहे. तें वर्तुळ स्पृशेस प, ट बिन्दूंत छेदितें. आतां पट व वर्तुळाची प बिन्दुस्थ स्पृक् विषमापूर्णकक्षावर मिळतात हें सिद्ध कर.

६५. एक केन्द्र ऊनसंपूर्णकक्ष एका स्थिर विषमापूर्णकक्षास स्पर्श करितें. संपर्कबिन्दुस्थ वलमान वर्तुळें जर समान असतील तर ऊनसंपूर्णकक्षाचें क्षेत्र अपिन्न राहिल.

६६. समान वर्तुलद्वय एका समकोणायत विषमापूर्णकक्षास ओ बिन्दूंत स्पर्श करितें व त्याला पुनः प, घ, प, घ बिन्दूंत क्रमानें कापितें आतां हे बिन्दु असे घेतां येतील कीं पप, घघ ह्या प्रत्येकी समोरील प्रत्येक ओ बिन्दुस्थ कोन काटकोन होईल, व ओपघ-वर्तुळाच्या केन्द्राचा प, घ बिन्दूशीं योग करून देणाऱ्या रेघा, ओप ओघ ह्या उभयतांचे क्रमानें तीन समान भाग करतील, हें सिद्ध कर.

६७. केन्द्रल शङ्कुच्छेदांत एक नाभि व व्यतिक्रान्ताक्षाचें द्वैर्घ्य दिलें आहे; व दुसरी नाभि एका स्थिर रेघेवर आहे. आतां शङ्कुच्छेद स्थिर समापूर्णकक्षद्वयास स्पर्श करील व दिलेली नाभि ह्याची नाभि होईल, हें सिद्ध कर.

६८. नाभीस केन्द्र व ऊर्ध्वमात्रेच्या चतुर्थभागास त्रिज्या कल्पून एक वर्तुळ विषमापूर्णकक्षांत काढिलें आहे. आतां वर्तुळ व विषमापूर्णकक्षांच्या छेदबिन्दूंचीं नाभ्यन्तरेण उपगांशीं समान्तर होतील हें सिद्ध कर.

६९. समकोणायत विषमापूर्णकक्षाचे, सहचरिताक्षाशीं समान्तर असणाऱ्या ज्ये समोरील, शिरस्थ कोन संपूरकरूपी असतात हें सिद्ध कर.

७०. एकनाभ विषमापूर्णकक्ष एका एकनाभ ऊनसंपूर्णकक्ष-

मालेस कापिते. आतां ह्या मालेतील एका विशेष ऊनसंपूर्णकक्षाचा सहचरित व्यास पाहिजे त्या विप्रतिच्छेद बिन्दूच्या अन्यतर नाभ्यन्तरास एका बिन्दूत कापितो व हा बिन्दु वर्तुळावर असतो हे सिद्ध कर.

७१. विषमापूर्णकक्षाची केन्द्रच्युति २ आहे. अक्षावरुड बिन्दु असा घेतला आहे कीं स-नाभीपासून त्याचे जें अन्तर तें, दूरच्या अ-शिंरापासून जें स-चे अन्तर त्या बरोबर आहे. प एक वृत्तावर बिन्दु आहे. अप ऊर्ध्वमात्रेस रव बिन्दूत मिळते. आतां डक व सप एकमेकीस एका स्थिर वर्तुळावर छेदितील हे सिद्ध कर.

७२. विषमापूर्णकक्षांत जर पह, पख ह्या उपगांशीं समान्तर काढिल्या व केन्द्रांतून जाणाऱ्या रेघेला पह, पख ह्यांस र, ट बिन्दूत मिळूं दिले व परघट समान्तरभुज चौकोन परिपूर्ण केला; तर घ हा विषमापूर्णकक्षावरचा एक बिन्दु होईल.

७३. जर ऊनसंपूर्णकक्ष व विषमापूर्णकक्ष ह्यांचे अक्ष समप्रमाण असून एकरूप असतील, तर ह्यांजवरील जे एका अक्षापासून समावधि बिन्दु असतात त्यांची जीं दुसऱ्या अक्षापासून अन्तरें असतात त्यांजवरील वर्गांचे संकलन अश्लिन्न असते हे सिद्ध कर.

७४. विषमापूर्णकक्षांत असें असतें:- (सि. २३. आक. पहा.)

मडः पन :: अकः ब्रकः :: कनः कम,

हे सिद्ध कर.

७५. समापूर्णकक्ष व विषमापूर्णकक्ष ह्या उभयतांस एकच नाभि व क्षापिका आहे. सपघ ही स नाभींतून जाणारी रेघ आहे. ती समापूर्णकक्षास प बिन्दूत व विषमापूर्णकक्षाच्या समीपतर शारवेस घ बिन्दूत मिळते. आतां पघ ही सप व सघ ह्यांनी रचिलेल्या काटकोन चौकोनाशीं समप्रमाण असते हे सिद्ध कर.

७६. जर विषमापूर्णकक्ष ह्याचे व्यतिक्रान्ताक्ष समान्तर असतील व त्यांच्या केन्द्रच्युति समान असतील, तर त्यांच्या उपसंजिहाना समान्तर होतील. ह्याचा प्रतिसिद्धान्त यथार्थ असतो कीं काय ?

७७. पप हा समकोणायत विषमापूर्णकक्षाचा व्यास असेल, व वृत्तावरील बिन्दु घ असेल व पर, पर हा पघ, पघ ह्यांजवर लम्बरूप क्रमाने काढिल्या व त्यांना घ-बिन्दुस्थ संपर्कलम्बास र, र बिन्दूंत कापू दिले; तर घर व घर समान होतील हे सिद्ध कर.

७८. विषमापूर्णकक्षांत प बिन्दुस्थ स्पृक व उपसंजिहाना ह्यांच्या छेदबिन्दूंतून बक-शीं समान्तर काढिलेली रेघ, डप व कअ ह्यांना वाढविल्यावर एकाच बिन्दूंत मिळेल हे सिद्ध कर. एथे कड, कप हे सहचरित व्यास आहेत.

७९. विषमापूर्णकक्षांत दिलेल्या बिन्दूपासून एक रेघ अशी काढ कीं विषमापूर्णकक्षाचा दुसरा छेदबिन्दु व दिलेली उपसंजिहाना ह्यांनीं अवरुद्ध जो त्या रेघेचा एकदेश तो दिलेल्या रेघेबरोबर होईल. हा प्रश्न संभवनीय केव्हां नसतो ?

८०. विषमापूर्णकक्षाच्या अतिक्रान्ताक्षावरील एका बिन्दूपासून उपकारक वर्तुळास एक स्पृक काढिली आहे. ही स्पृक व त्या बिन्दूची निर्णायिका ह्यांच्या मधील कोनास केन्द्रच्युत कोन ही संज्ञा दिली; तर स्वतः-शींच एकनाभ ऊनसंपूर्णकक्ष व विषमापूर्णकक्ष द्वय ह्यांचे छेदबिन्दुस्थ केन्द्रच्युत कोन समान असतात हे सिद्ध कर.

८१. असमान समापूर्णकक्षद्वयास एक उभयसाधारण नाभि आहे. त्यांचे अक्ष विरुद्ध दिग्गामी आहेत. उभयसाधारण नाभीस केन्द्र कल्पून एक समकोणायत विषमापूर्णकक्ष समापूर्णकक्षद्वयास स्पर्श करणारे काढिले आहे. आतां संपर्कबिन्दूचा उभयसाधारण नाभीशीं योग करून देणाऱ्या रेघांच्या मधील कोन ६०° अंश असतो, हे सिद्ध कर.

८२. विषमापूर्णकक्षाची अविशेष बिन्दुस्थ स्पृक व संपर्कलम्ब उपसंजिहानांस व अक्षांस क्रमाने चोहों बिन्दूंत कापितात. आतां हे चार बिन्दु विषमापूर्णकक्षाच्या केन्द्रांतून जाणाऱ्या वर्तुळावर येतील व ह्या वर्तुळाची त्रिज्या केन्द्रापासून स्पृशेवर लम्बरूप काढिलेल्या-

रेघेशीं व्यस्त प्रमाणाने राहिल हें सिद्ध कर.

८३. ऊनसंपूर्णकक्षाच्या नाभि ज्याच्या नाभि आहेत असें समकोणायत विषमापूर्णकक्ष ऊनसंपूर्णकक्षास समानसहचरित व्यासांच्या अन्य बिन्दूंत कापील हें सिद्ध कर.

८४. अबक एक दिलेला त्रिकोण आहे. कअ, कब वाढविल्यावर अब-स प बिन्दूंत छेदणाच्या विषमापूर्णकक्षाच्या उपसंजिहाना होतात. आतां त्याच्या अक्षांचरील वगोर्चे संकलन जेव्हां महत्तम असतें तेव्हां प बिन्दु कोणत्या स्थानीं असतो तें काढ.

८५. विषमापूर्णकक्षाची एक क्षापिका व एक उपसंजिहानांच्या छेदबिन्दूपासून वृत्तास एक स्पृक् काढिली आहे. आतां संपर्क बिन्दूचा नाभीशीं योग करून देणारी रेघ त्या उपसंजिहानेशीं समान्तर होईल हें सिद्ध कर.

८६. दिलेली रेघ हीच ज्याची उपसंजिहाना आहे व जें एका दिलेल्या बिन्दूंतून जातें व दिलेल्या रेघेस एका दिलेल्या बिन्दूंत स्पर्श करितें त्या विषमापूर्णकक्षाच्या अक्षांचे दैर्घ्य व स्थान काढ.

८७. दिलेल्या ऊनसंपूर्णकक्षाच्या व्यासद्वयाच्या अन्यांतून जाणारे व पूर्वोक्त व्यासांशीं सहचरित व्यास ज्याच्या उपसंजिहाना होतील असें विषमापूर्णकक्ष काढितां घेईल हें सिद्ध कर.

८८. प घ हा समकोणायत विषमापूर्णकक्षांचा प बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब आहे. तो विषमापूर्णकक्षास पुनः घ बिन्दूंत मिळतो. आतां प घ हा संपर्कलम्ब प-बिन्दुस्थ बलमान वर्तुळाच्या व्यासावरोबर होईल हें सिद्ध कर.

८९. प हा विषमापूर्णकक्षावर एक बिन्दु आहे. त्याच्या नाभिस, ह आहेत. दुसरे एक विषमापूर्णकक्ष काढिलें आहे. त्याच्या नाभिस, प आहेत. त्याचा व्यतिक्रान्ताक्ष = सप-२ प ह. आतां हीं विषमापूर्णकक्षे एकच बिन्दूंत मिळतील व त्यांची तद्विन्दुस्थ एकच स्पृक् होईल हें सिद्ध कर.

९०. विषमापूर्णाकक्षावरील अविशीष बिन्दुस्थ स्पृक् उपगांस-
मिच्छेपर्यंत वाढविली आहे येणेकरून एक त्रिकोण झाला आहे. आ-
तां समोरील बाजूंचे दोन समान भाग होण्याकरितां त्रिकोणाच्या कोनां-
पासून काढिलेल्या रेखांच्या छेदबिन्दूची संख्या कोणती आकृति होई-
ल ह्याचा निर्णय कर.

९१. ज्या शङ्कुच्छेदांस उभयसाधारण एक महत्तराक्ष असतो
त्या सर्व शङ्कुच्छेदांच्या ऊर्ध्वमात्रेचे अन्य समापूर्णाकक्षद्वयावर असतात.

९२. तीन बिन्दु दिले आहेत; आतां चार अशा रेखा काढितां ये-
तील कीं अन्यतम रेघेस ज्ञापिकाव दिलेल्या अन्यतम बिन्दूस नास्मि-
कल्पून दुसऱ्या दोन दिलेल्या बिन्दूतून जाणारा शङ्कुच्छेद काढितां ये-
ईल हें सिद्ध कर.

९३. शङ्कुच्छेदांत जर पग, पग हे सनाभज्यान्वयस्थ संपर्कल-
म्ब ओ बिन्दूंत एकमेकांस कापितील तर ओ बिन्दूतून पप-शीं स-
मान्तर काढिलेली रेघ गग-चे दोन समान भाग करील.

९४. केन्द्रल शङ्कुच्छेदाचा प-बिन्दुस्थ संपर्कलम्ब अक्षांस ग,
ग बिन्दूंत मिळतो; गरव, गरव हे सप-नाभ्यन्तरावर लम्ब काढिले
आहेत; आतां परव, परव अभिन्न असतात हें सिद्ध कर.

जर व्यतिक्रान्ताक्षांशी समान्तर असणारी रवल प-बिन्दुस्थ
संपर्कलम्बास क बिन्दूंत मिळेल, तर रवल अभिन्न होईल.

९५. पसघ ही शङ्कुच्छेदाची सनाभज्या आहे. तिला ज्ञापि-
केस रव बिन्दूंत मिच्छेपर्यंत वाढविलें आहे. रवम, रवन ह्या रेखा प, घ
बिन्दूंच्या पम, घन निर्णायिकांच्या तळांतून काढिल्या आहेत.

जर रवन वाढविली व तिला वाढविलेल्या पम-स र बिन्दूंत मि-
ळें दिलें तर पर = पम हें सिद्ध कर.

९६. पसघ ही शङ्कुच्छेदाची सनाभज्या आहे. तज्ज्यान्वयस्थ
संपर्कलम्ब रव बिन्दूंत परस्परस छेदितात. रवल पघ-वर लम्बरू-
प काढिली आहे. रव फ हा समान्तरभुज चौकोनाचा कर्ण आहे. ह्या

समान्तरभुज चौकोनाच्या पार्श्वस्थ बाजू सरव, सल आहेत. आतां शङ्कुच्छेदाच्या व्यतिक्रान्ताक्षाशीं रवफ समान्तर होईल हें सिद्ध कर.

९७. दिलेल्या वर्तुळावरील बिन्दूस नाप्ति व दिलेल्या व्यासास नापिका कल्पून दिलेल्या शङ्कुच्छेदाशीं सरूप एक शङ्कुच्छेद काढिला आहे. आतां अशा प्रकारचे सर्व शङ्कुच्छेद दिलेल्या दोहों सरूप शङ्कुच्छेदांस स्पर्शी करितील व दिलेला व्यास त्यांची ऊर्ध्वमात्रा होईल, हें सिद्ध कर.

९८. त्रिकोणाच्या बाजूंस स्पर्शी करणाऱ्या वर्तुलचतुष्टयाच्या केन्द्रांतून जाणारा प्रत्येक शङ्कुच्छेद समकोणायत विषमापूर्णकक्ष असतो. व ह्या समकोणायत विषमापूर्णकक्षमालेच्या केन्द्राची संस्था त्या त्रिकोणास परिवेष्टिणारें वर्तुळ असते.

९९. एका ऊर्ध्वशङ्कुच्या अक्षावरील स्थिर बिन्दू मधून काढिलेल्या शङ्कुच्या साध्या छेदांच्या केन्द्रांची संस्था काढ.

१००. दिलेला शङ्कु कसा कापावा ह्मणजे त्याचा छेद दिलेल्या ऊर्ध्वमात्रेचें समापूर्णकक्ष होईल हें दाखवीव.

१०१. दिलेल्या शिरकोनाच्या शङ्कुचा अक्ष व शिर ह्यांचें स्थान काढ; तें असें कीं दिलेले समापूर्णकक्ष त्या शङ्कुचा छेद होईल.

१०२. ऊर्ध्वशङ्कुद्वयास एकच उभय साधारण शिर आहे. त्यांना पातळीनें कसें कापावे ह्मणजे छेद सरूप व सासूप्यस्थित वृत्तें होतील, (१) तीं केव्हां परस्परास कापितील, (२) व केव्हां परस्परास कापणार नाहींत.

१०३. शङ्कुचें शिर व शङ्कुच्या आंत घातलेल्या गोलाचा केन्द्र ह्यांचीं स्थाने दिलीं आहेत. शङ्कुच्या उत्पादनेवर लम्ब रूपानें पडणारा एक शङ्कुचा साधा छेद गोलास स्पर्शी करित आहे. आतां संपर्क बिन्दूची संस्था वर्तुळाच्या परिभ्रमणानें निर्मिलेले क्षेत्र होईल व हें क्षेत्र शङ्कुक्षास गोलाच्या केन्द्रांत स्पर्शी करील हें सिद्ध कर.

१०५. ऊर्ध्वशङ्कु पासून दिलेले ऊनसंपूर्णकक्ष व दिलेले विषमा-
पूर्णकक्ष कापून काढण्याच्या प्रश्नांत काय भेद असतो ?

एक ऊनसंपूर्णकक्ष व विषमापूर्णकक्ष असें स्थित आहे कीं ए-
काचीं शिरे दुसऱ्याच्या नाभि होतात. व हीं वृत्ते एकमेकास लम्बरू-
प असणाऱ्या पातळींत आहेत. आतां प हा ऊनसंपूर्णकक्षस्थायी
व घ हा विषमापूर्णकक्षस्थायी बिन्दु असेल, व स ही नाभि व अ ही
विषमापूर्णकक्षाच्या त्या क्षारवेची आन्तर नाभि असेल, तर

$$पघ + अस = पस + अघ,$$

हें सिद्ध कर.

१०६. दोन शङ्कु आहेत; त्यांचे शिरकोन संपूरकरूपी आहे-
त; ते शङ्कु असे ठेविले आहेत कीं, तेषांकरून त्यांचीं शिरे एकरूप
व त्यांचे अक्ष लम्बरूप होतात; उभयसाधारण उत्पादनेस लम्बरूप
प असणाऱ्या पातळीनें ते शङ्कु छेदिले आहेत. आतां. एका शङ्कुच्या
छेदाच्या क्षापिका दुसऱ्या शङ्कुच्या छेदाच्या नाभीं मधून जातील,
हें सिद्ध कर.

परिशिष्ट. एकतान प्रमाण.

ध्रुव व ध्रौव.

अतिहरण.

७२. लक्षणा. जेव्हां एखादी सरळ रेघ अब आन्तरतः ओ
बिन्दूंत व बाह्यतः ओ बिन्दूंत अशी विभागितात कीं
अओ : ओब :: अओ : ओब,

जेव्हां अब-चे ओ, ओ बिन्दूंत एकतानानें विभाग पडले आहेत
असें लक्षणतात.

जर अओ ओब-पेक्षां महत्तर किंवा लघुतर असेल तर ओ
बिन्दु व बिन्दूंत किंवा अ बिन्दूंतून वाढविलेल्या अब रेघेवर येईल
हें स्पष्ट आहे.

जर अओ ओब-बरोबर असेल, तर ओ बिन्दु अनन्तान्त-
रास जाऊन पोहचेल.

एथें जें एकतान प्रमाणाचें लक्षण दिलें आहे तें बेंज एकतान प्र-
माण लक्षणापासून भिन्न नाहीं हें सहजच लक्षांत येईल.

कारण, जर अओ, ओओ, बओ हें राशित्रय एकतान
श्रेढींत असेल, तर बेंज एकतान प्रमाण लक्षणावरून

अओ : ओब :: अओ ~ ओओ : ओओ ~ बओ
:: अओ : बओ.

टीप. जेव्हां एखादें राशित्रय अशा प्रमाणानें असतें कीं प्रथम
राशीस तृतीय राशि तसेंच प्रथम व द्वितीय राशींचे व्यवकलनास द्वि-
तीय व तृतीय राशींचे व्यवकलन, अशा वेळीं तें राशित्रय एकतान
श्रेढींत आहे असें बेंज ग्रन्थांत लक्षण देतात. ह्या राशित्रयाचीं व्य-
तिहतपदें समानान्तर श्रेढींत असतात हें ह्या लक्षणावरून सहज

(१७८)

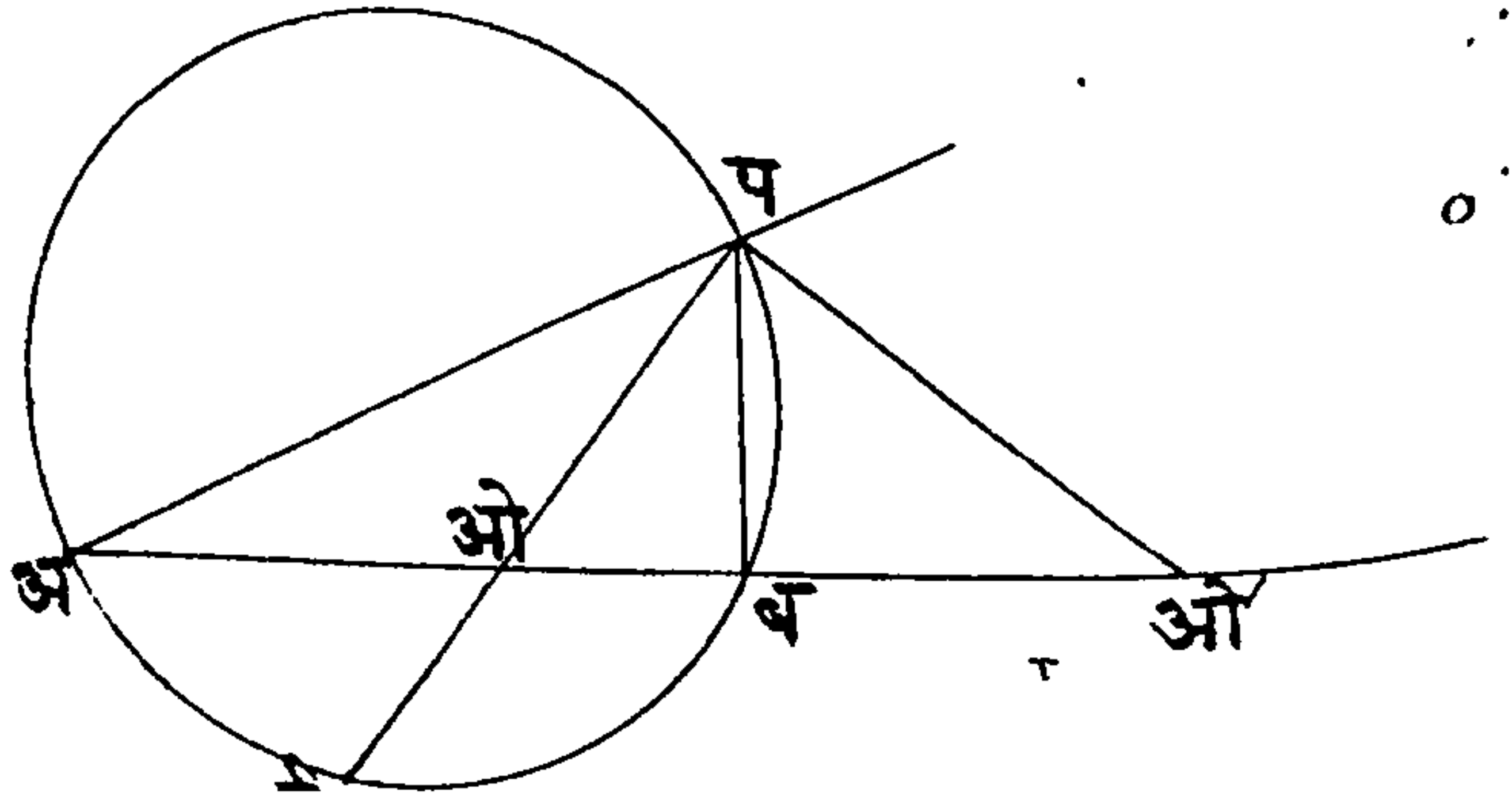
शङ्कुच्छेद.

दिसून घेतें.

सिद्धान्त १.

ओ बिन्दु दिला असतां ओ- बिन्दूचें नियमन करावयाचें.
अब रेघेवर एखादें अविशेष कोणामाक वर्तुलखण्ड काढ.

[यूक्लिड, ३. ३३.]



अब ह्या एकतर परिघेकदेशाचे ई बिन्दूंत दोन समान भाग कर. [यूक्लिड, ३. ३०.]

ई ओ सांध व ई ओ- ला अन्यतर परिघेकदेशास प बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढीव.

पओ ओप- वर लम्बरूप काढ. तिला वाढविलेल्या अब- स ओ बिन्दूंत मिळूं दे. आतां

ओ हा इष्टबिन्दु होईल.

कारण ई हा अब परिघेक देशाचा मध्यबिन्दु आहे. [रच.],
∴ पओ अपब कोनाचे दोन समान भाग करिते, [यूक्लिड, ३. ३७.]
∴ पओ ही अप-स वाढवून उत्पन्न झालेल्या संपूरकरूपी कोनाचे दोन समान भाग करिते.

∴ अओ: ओब :: अओ: ओब, (यूक्लिड, ६. सि. अ.)

:: [अप: पब], [यूक्लिड, ६. सि. अ.]

[परंतु अओःओबः:: अपःपब,] [यूक्लिड, ६.३.]
 [∴ अओःओबः:: अओःओब.] [यूक्लिड, ५.७.]
 उपसि. जर ओ बिन्दु दिला असेल, तर ओ बिन्दूचें निय-
 मन करते समयीं आपणास फक्त अब-चे दिलेल्या दोन अओ. -
 ओब, रेखांच्या प्रमाणानें विभाग केले पाहिजेत.

सिद्धान्त २.

जर अब-चे ओ, ओ बिन्दूंत एकतानानें विभाग झाले अस-
 तील, तर ओओ-चे ही ब,अ बिन्दूंत एकतानानें विभाग होतील.
 [सि. १. आरु. पहा.]

ज्याअर्थी, अओःओबः:: अओःओब, [लक्ष्.]
 विनिमयानें, अओःअओः:: ओबःओब,
 ह्मणजे, ओबःबओः:: ओअःअओ,
 ∴ ओओ-चे ब, अ बिन्दूंत एकतानानें विभाग झाले.

सिद्धान्त ३.

जर अब-चे ओ, ओ बिन्दूंत एकतान वं क बिन्दूंत समान
 भाग होतील, तर

$$\text{कओ. कओ} = \text{कब.}$$

अ क ओ ब ओ
 ज्याअर्थी, अओ : ओब :: अओ : ओब,
 ∴ अओ+ओब : अओ-ओब :: अओ+ओब : अओ-ओब;

ह्मणजे २ कब : २ कओ :: २ कओ : २ कब,
 [ह्मणजे, कब : कओ :: कओ : कब,]

$$\therefore \text{कओ. कओ} = \text{कब.} \quad [\text{यूक्लिड, ६.१७.}]$$

लक्षणा. जेव्हां अब रेखा व क बिन्दुही देतात व ओ, ओ बिन्दु
 असे धेनात कीं

कओ. कओ = कबे,

अशावेळीं ओ, ओ बिन्दु घातस्थ असतात असें ह्मणतात. अशा प्रकारचे ओ, ओ बिन्दु अब-चे एकतानाने भाग करितात.

७३. लक्षणा. जेव्हां अब सरररेघेचे ओ ओ अविशेष बिन्दूत भाग पडतात; (मग हे दोन्ही बिन्दु आन्तर असोत अथवा बाह्य असोत; अथवा एक आन्तर व दुसरा बाह्य असें असले तरी चिन्ता नाही; व अब-च्या ज्या बाजूला हा किंवा हे बाह्य बिन्दु असले पाहिजेत ती बाजू अनन्त असली तरी ही कांहीं हरकत नाही;) अशावेळीं अओ: ओब, व अओ: ओब, ह्या प्रमाणद्वयाचे प्रमाणास (हें प्रमाण खाली लिहिल्या प्रमाणें आपण लिहित जाऊं) ह्मणजे

(अओ: ओब) : (अओ: ओब) ह्या प्रमाणास अओबओ श्रेणीचें नैकतान प्रमाण ह्मणतात. हें प्रमाण अओब-ओ अक्षरांनीं नेहमीं दर्शवितात; मग अ, ब बिन्दूंच्या संबन्धानें ओ, ओ बिन्दूंच्या कोणताही क्षेत्र क्रम असला तरी चिन्ता नाही.

अओबओ श्रेणीचें नैकतान प्रमाण

(अओ: ओब) : (अओ: ओब) हें प्रमाण असतें.

ह्मणूनच हें अओबओ श्रेणीच्या नैकतान प्रमाणाचें व्यतिहृत असतें. जर अब बिन्दूंच्या संबन्धानें ओ, ओ हे बिन्दुद्वय आन्तर किंवा बाह्य असेल, तर अओबओ श्रेणीचें नैकतान प्रमाण बीज दृष्टीनें पाहिलें असतां धनात्मक असतें; परंतु जेव्हां एक विभाग बिन्दु बाह्य असतो व दुसरा आन्तर असतो, तेव्हां तें ऋणात्मक असतें. ह्यास्तव, जेव्हां अब रेघेचे ओ, ओ बिन्दूंत एकतानाने भाग पडतात, तेव्हां - अओबओ किंवा अओबओ श्रेणीचें नैकतान प्रमाण ऋणात्मक -१ एकाङ्कानें बीजगणितावरून दर्शविण्यांत येईल.

जेव्हां अओबओ व अओबओ ह्या श्रेणीद्वयाचें नैकतान प्रमाण युग्म परस्पर बरोबर असतें, तेव्हां अब-चे एकतानाने-भाग पडले आहेत हें स्पष्टच आहे; कारण, जी नैकतान प्रमाणाची किंमत

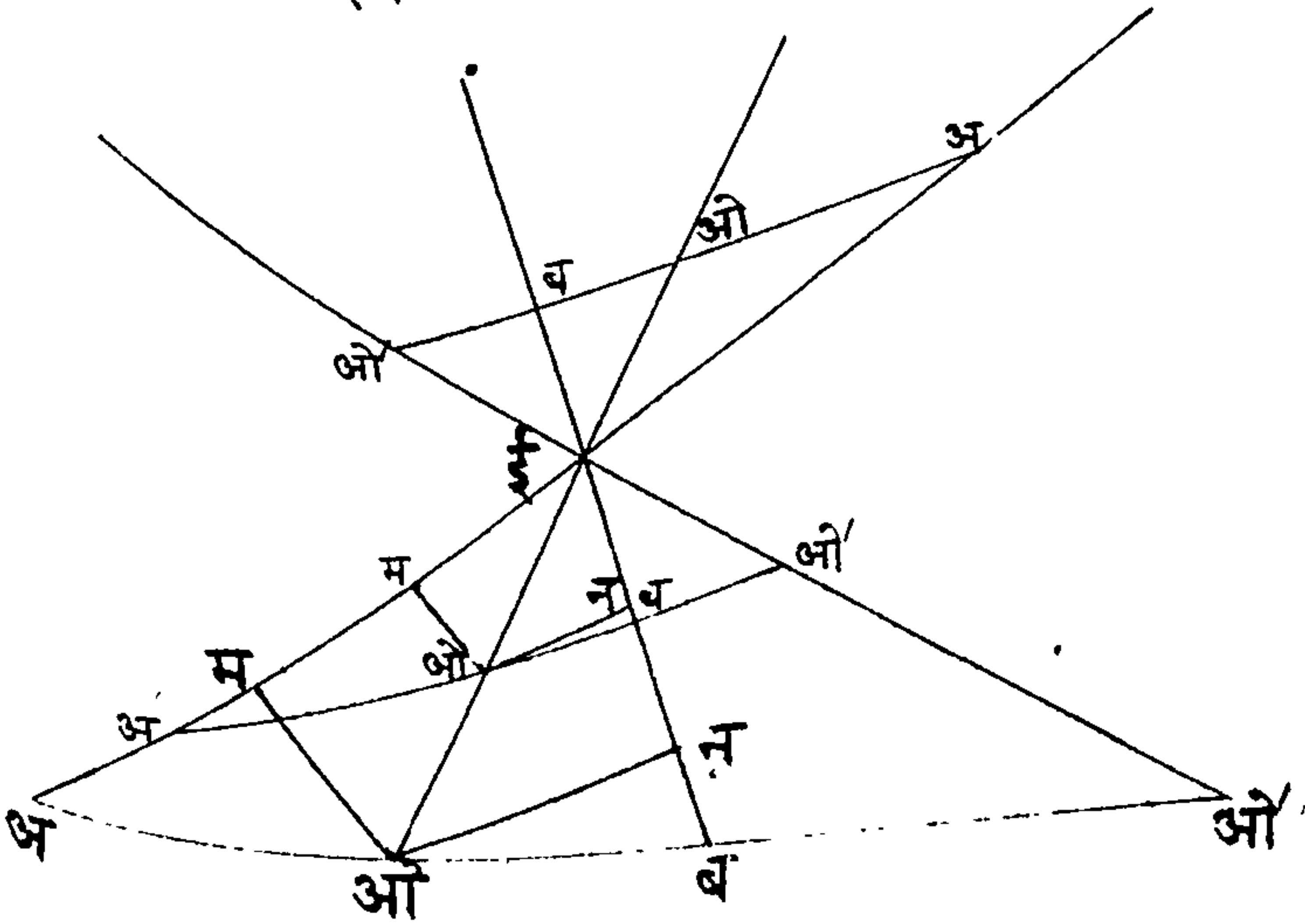
आपल्या व्यतिहताशीं अभिन्न राहूं शकेंल, तीच किंमत मात्र, एकाङ्क-
खेरीज करून (एकाङ्क, ओ, ओ' बिन्दु एकरूप होते हें ध्वनित करी-
त) ऋणात्मक - १ असते, व ह्यापक्षीं अब रेघेचे एकतानानें विभा-
ग पडतात.

जेव्हां एखाद्या अओबओ' श्रेणीचे अ, ओ, ब, ओ' हें बिन्दुच-
तुष्टय अब रेघेच्या बाहेर असणाऱ्या ई बिन्दूशीं सांधतात, तेव्हां जें रे-
खाचतुष्टय उत्पन्न होतें त्याला वर्तिका म्हणतात. ही वर्तिका ई (अओ-
बओ') अशी दर्शवितात.

सिद्धान्त ४.

७४. जर ईअ, ईओ, ईब, ईओ', ह्या रेखाचतुष्टयानें रचिले-
ल्या ई (अओबओ') वर्तिकेस दुसरी एखादी सरळ रेघ अ, ओ, ब, ओ'
बिन्दूंत कमानें छेदील, तर अओबओ' श्रेणीचे नैकतान प्रमाण -
अओबओ' श्रेणीच्या नैकतान प्रमाणाशीं अभिन्न राहिल; ही
अओबओ' सरळ रेघ कशी ही काढिली तरी चिन्ता नाही.

ओ, ओ' बिन्दूंपासून ओम, ओम हे ईअ, ओन ह्यांजवर लम्ब
काढ; व ओन हा ईब-वर लम्ब काढ; आतां



कओ. कओ = कबे,

अशावेळीं ओ, ओ बिन्दु घातस्थ असतात असें ह्मणतात. अशा प्रकारचे ओ, ओ बिन्दु अब-चे एकतानाने भाग करितात.

७३. लक्षणा. जेव्हां अब सरबरेघेचे ओ ओ अविशेष बिन्दूत भाग पडतात; (मग हे दोन्ही बिन्दु आन्तर असोत अथवा बाह्य असोत; अथवा एक आन्तर व दुसरा बाह्य असें असले तरी चिन्ता नाही; व अब-च्या ज्या बाजूला हा किंचा हे बाह्य बिन्दु असले पाहिजेत ती बाजू अनन्त असली तरी ही कांहीं हरकत नाही;) अशावेळीं अओः ओब, व अओः ओब, ह्या प्रमाणह्याचे प्रमाणास (हें प्रमाण खाली लिहिल्या प्रमाणें आपण लिहित जाऊं) ह्मणजे

(अओः ओब) : (अओः ओब) ह्या प्रमाणास

अओबओ श्रेणीचें नैकतानप्रमाण ह्मणतात. हें प्रमाण अओब-ओ अक्षरांनीं नेहमीं दर्शवितात; मग अ, ब बिन्दूंच्या संबन्धानें ओ, ओ बिन्दूंचा कोणताही क्षेत्र क्रम असला तरी चिन्ता नाही.

अओबओ श्रेणीचें नैकतानप्रमाण .

(अओ. ओब) : (अओः ओब) हें प्रमाण असतें.

ह्मणूनच हें अओबओ श्रेणीच्या नैकतानप्रमाणाचें व्यतिहृत असतें.

जर अब बिन्दूंच्या संबन्धानें ओ, ओ हे बिन्दुद्वय आन्तर किंवा बाह्य असेल, तर अओबओ श्रेणीचें नैकतान प्रमाण बीज दृष्टीनें पाहिलें असतां धनात्मक असतें; परंतु जेव्हां एक विभाग बिन्दु बाह्य असतो व दुसरा आन्तर असतो, तेव्हां तें ऋणात्मक असतें. ह्यास्तव, जेव्हां अब रेघेचे ओ, ओ बिन्दूंत एकतानाने भाग पडतात, तेव्हां - अओबओ किंचा अओबओ श्रेणीचें नैकतानप्रमाण ऋणात्मक -१ एकाङ्कानें बीजगणितावरून दर्शविण्यांत येईल.

जेव्हां अओबओ व अओबओ ह्या श्रेणीद्वयाचें नैकतानप्रमाण युग्म परस्पर बरोबर असतें, तेव्हां अब-चे एकतानाने भाग पडले आहेत हें स्पष्टच आहे; कारण, जी नैकतानप्रमाणाची किंमत

भुजांस र, स बिन्दूत म्बिं दे.

ज्या अर्थी डपकग सरळ रेघ ई (अघबग) वर्तिकेस रच-
णा ईअ, ईघ, ईब, ईग रेखाचतुष्टयास क, प, ड, ग बिन्दूत
छेदिते,

त्याअर्थी अघबग, कपडग श्रेणीद्वयाचें एकच नैकतान प्र-
माण आहे;

पुनः, ज्या अर्थी डपकग सरळ रेघ फ (अघबग) वर्तिकेस
रचणाच्या फअ, फघ, फब, फग रेखाचतुष्टयास ड, प, क, ग बिन्दू-
त छेदिते,

त्याअर्थी अघबग, डपकग श्रेणीद्वयाचें एकच नैकतान प्रमा-
ण आहे;

∴ कपडग, डपकग श्रेणीद्वयाचें एकच नैकतानप्रमाण आहे.

परंतु, कपडग श्रेणीचें नैकतान प्रमाण ह्मटलें ह्मणजे

(कपः पड) : (कगः गड) हें प्रमाण; [१.]

व डपकग श्रेणीचें नैकतान प्रमाण ह्मटलें ह्मणजे

(डपः पक) : (डगः गक); [२.]

व [१] पहिलें प्रमाण [२] दुसऱ्या प्रमाणाचें व्यतिहत आहे;

∴ डपकग, कपडग श्रेणीद्वय एकतान आहेत. (क. ७३.)

ह्यास्तव रईसग, अघबग श्रेणीद्वय ही एकतान आहे; व
फकसब, फपईघ, फडरअ हें श्रेणीत्रय एकतान आहे हें ही
हुबेहुब ह्याच रीतीनें सिद्ध करून दाखवितां येईल.

उपसि. जर अक, बड ह्यांना फग-स ह, रच बिन्दूत क्रमानें
मिळे पर्यंत वाढविलें; तर

अक, बड ह्यांचे ई, ह व ई, रच बिन्दूत अनुक्रमें एकतानानें
विभाग पडतील; व

गफ-चे ह, रच बिन्दूत एकतानानें विभाग पडतील.

टीप — जर गह हफ-पेक्षां लघुतर अथवा महत्तर असेल,

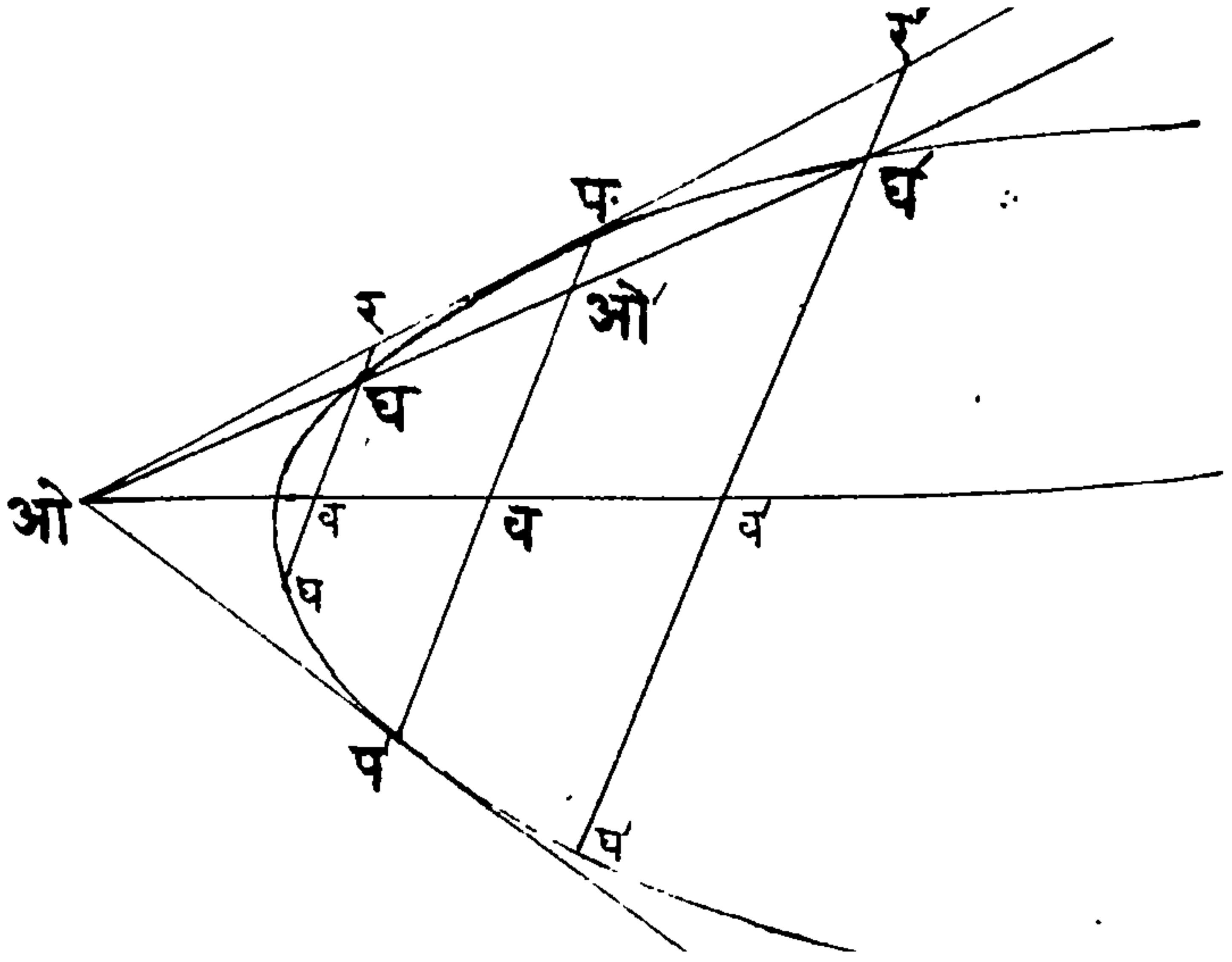
(१८४)

शङ्कुच्छेद.

तर रघ बिन्दु फग- वर अथवा वाढविलेल्या गफ- वर येईल. जर बई ईड- बरोबर असेल, तर रघ बिन्दु अनन्तान्तरीं राहील, व गफ, बड-शीं समान्तर होईल, व गफ-चे ह बिन्दूंत दोन समान भाग ही पडतील.

सिद्धान्त ६.

७५. जर एखाद्या ओ बाह्य बिन्दूपासून ओप, ओप हें एक स्पृशक्य एखाद्या शङ्कुच्छेदास काढिलें, व ओघघ सरळ रेषेला वृत्तास घ, घ बिन्दूंत व पप-स ओ बिन्दूंत छेदू दिलें; तर घघ-चें ओ, ओ बिन्दूंत एकतानानें विभाग पडतील.



ओ बिन्दूंतून ओ व काढ. तिला पप-चे व बिन्दूंत दोन समान भाग करूं दे. रघवघ, रघरघ ह्या दुपट निर्णायिका पप-शीं समान्तर काढ. त्यांना ओव-स व, व बिन्दूंत मिळूं दे;
आता घघ, घघ ह्यांचे व, व बिन्दूंत दोन समान भाग पडले आहेत.

आणरवी,

रपै : रपै :: रघ. रघ : रघ. रघ,
 :: रवे-घवे : रवे-घवे,
 :: ओवे : ओवे,
 :: ओरे : ओरे,

∴ रप : रप :: ओर : ओर,

∴ घओ : ओघ :: घओ : ओघ,

∴ घघ-चे ओ, ओ बिन्दूत एकतानाने भाग पडले; ह्यणूनच (सि. २, पहा) ओओ-चे ही घ, घ बिन्दूत एकतानाने भाग पडले.

उपसि. जर शङ्कुच्छेद समापूर्णाकक्ष असेल, तर ओव अक्षाशीं समान्तर होईल. जर शङ्कुच्छेद ऊनसंपूर्णाकक्ष अथवा विषमापूर्णाकक्ष असेल, तर ओव केन्द्रांतून जाईल. जर ओ बिन्दु विषमापूर्णाकक्षांचा केन्द्र असेल, तर ओप, ओप विषमापूर्णाकक्षाच्या उपसंजिहाना होतील; व पप अनन्तस्थलीं राहील, व क बिन्दूतून जाणाऱ्या घघ ज्येचे क बिन्दूत दोन समान भाग पडतील; आणरवी घघ-चे क बिन्दु सह वर्तमान एकतानाने भाग पाडणारा चतुर्थ बिन्दु अनन्तान्तरीं राहील.

सिद्धान्त ७.

७६. एरवाद्या शङ्कुच्छेदाच्या अन्तःप्रदेशीं अथवा बहिःप्रदेशीं दिलेल्या बिन्दूतून काढिलेल्या पाहिजे त्या ज्येच्या अन्त्यस्थ-स्पृशांच्या विप्रतिच्छेद बिन्दूची संस्था सरळ रेघ असते.

ओ हा दिलेला बिन्दु असूं दे. ओ बिन्दूतून घओ घ ज्या काढ. घघ-चे व बिन्दूतून दोन समान भाग पाड.

पाहिल्यानें शङ्कुच्छेद (वृत्त) समापूर्णाकक्ष असूं दे.

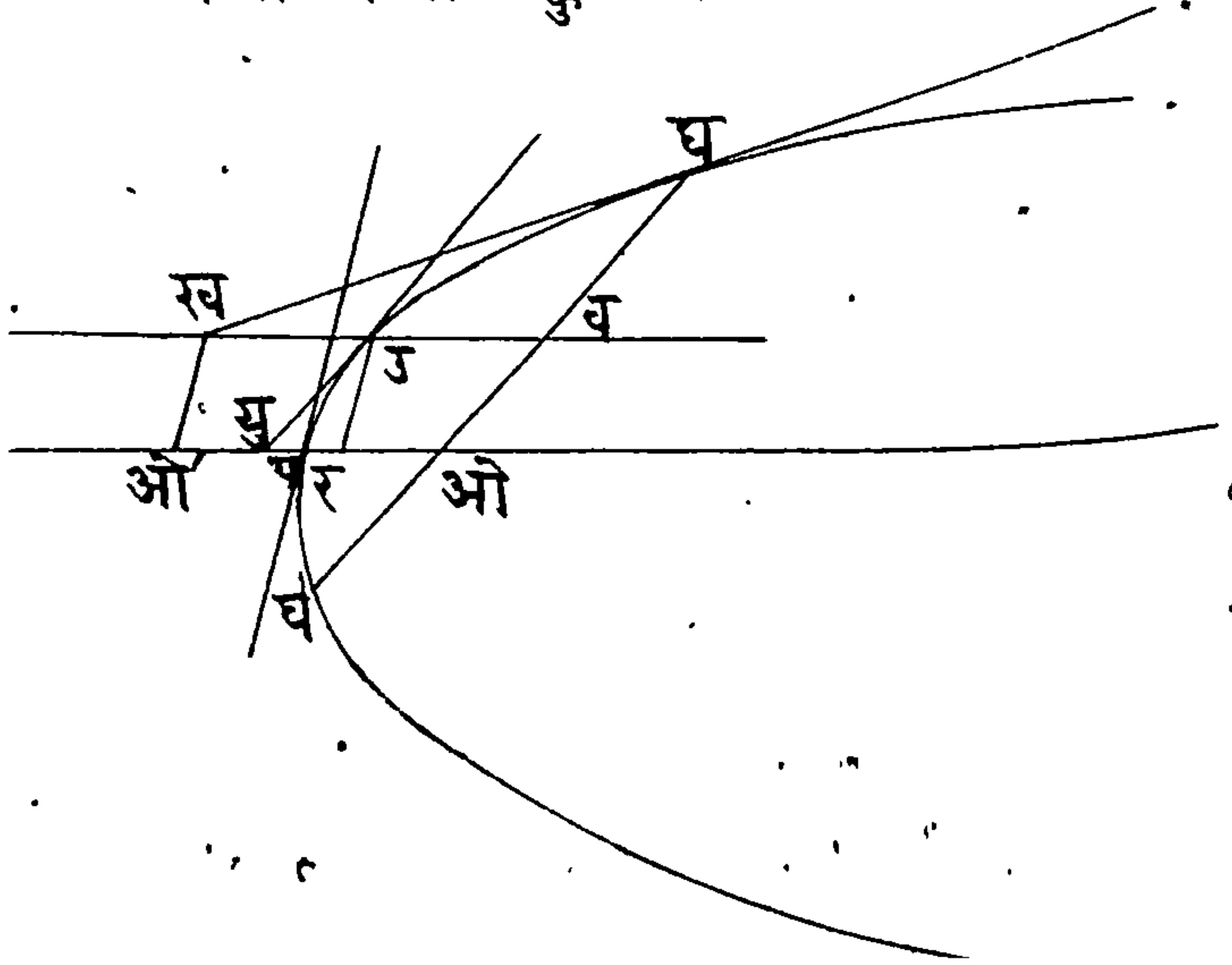
ओ, व बिन्दूतून ओपओ, व उरव क्रमाने समापूर्णाकक्षाच्या अक्षाशीं समान्तर काढ. त्यांना समापूर्णाकक्षास प,

(५८६)

शङ्कुच्छेद.

उ बिन्दूत मिलूं दे.

उरव वउ-शङ्कुच्छेदा बरोबर कर,
व पओ पओ- शङ्कुच्छेदा बरोबर कर;



आतां अक, बड कणांचा ई विप्रतिच्छेद, अड, बक व अब, डक ह्यांच्या विप्रतिच्छेद बिन्दूना सांधणारी जी फग सरळ रेषा तिचा ध्रुव होईल.

शङ्कुच्छेदास स्पर्श करणाऱ्या चतुर्भुजाच्या भुजांचे संपर्कबिन्दु अ, ब, क, ड बिन्दु असूं दे.

अबकड चतुर्भुज परिपूर्ण कर; ई हा अक, बड कणांचा विप्रतिच्छेद असूं दे; व फ, ग हे अड, बक व डक, अब ह्या अभिसुख्य भुजयुग्मांचे विप्रतिच्छेद क्रमानें असूं दे.

आतां अन्तिमसिद्धान्तावरून शङ्कुच्छेद अबकड-च्या आंत काढिला आहे म्हणूनच तो अबकड-च्या सभोवतीं काढिला आहे. ह्या शङ्कुच्छेदाच्या संबन्धानें ई हा फग-चा ध्रुव आहे.

परंतु, ज्याअर्थी फ हा डब-चा व ग हा अक-चा ध्रुव आहे :

∴ ई हा फग-चा ध्रुव आहे,

∴ फग फग सरळरेघा एकरूप होतात.

पुनः, ज्याअर्थी अहा अड-चा व क हा अक-चा ध्रुव आहे,

∴ फ हा अक-चा ध्रुव आहे.

ह्याप्रमाणेच ग ही बड-चा ध्रुव आहे,

∴ ई हा फग-चा ध्रुव आहे,

∴ ई,ई बिन्दु एकरूप होतात;

परंतु ई हा फग-चा ध्रुव आहे,

∴ ई हा फग-चा ध्रुव आहे.

उपसि. १. ज्याअर्थी फ हा अक-चा व ईग अथवा ईग ह्यांचा ध्रुव आहे,

त्याअर्थी अक सरळरेघ ग बिन्दूंतून जाते.

ह्याप्रमाणेच बड फ बिन्दूंतून जाते.

उपसि. २. जर अक फ बिन्दूंतून जाईल तर ग हा ईफ-चा ध्रुव होईल, व

ई हा फग-चा ध्रुव आहे हे सिद्ध केले आहे,

∴ फ हा ईग-चा ध्रुव आहे,

∴ बड ग बिन्दूंतून जाते.

ह्यापक्षीं, परंतु ह्यापक्षींच मात्र, Δ ईफग स्वसहचरित - आहे.

इतिशुभम्.

(१८८)

शङ्कुच्छेद.

भाग १.

समापूर्णकक्ष.



सिद्धान्त १.

“ह्याप्रमाणेच प, प' वृत्तावरील बिन्दु होतील.”

सम सांध. मप ज्ञापिकेवर लम्ब काढ [यूक्लिड, १. ११.]

समप कोन मसप कोनाबरोबर कर [यूक्लिड, १. २३.]. आतां

सप = पम, [यूक्लिड, १. ६.]

∴ प हा वृत्तावरील बिन्दु झाला. [लक्ष.]

ह्याप्रमाणेच प' ही वृत्तावरील बिन्दु होईल. सम सांध. मप ज्ञापिकेवर लम्ब काढ. [यूक्लिड, १. ११.]. समप कोन मसप कोनाबरोबर कर [यूक्लिड, १. २३.]. आतां

सप' = प'म, [यूक्लिड, १. ६.]

∴ प' हा वृत्तावरील बिन्दु झाला. [लक्ष.]

सिद्धान्त ५.

“ उपसि. १. सपरकोन = मपरकोन ” [सि. ५. व यूक्लिड, १. १३.]

सिद्धान्त ६.

“ ह्याप्रमाणेच सज्ञघ कोन सज्ञम कोनाचा अर्द्धा भाग इ. ”

कारण मघ = सघ, [सि. १.]

व ज्ञघ ही उपय त्रिकोणांस साधारण आहे,

व मघज्ञ कोन = सघज्ञ कोन, [सि. ५.]

∴ सज्ञघ कोन = मज्ञघ कोन, [यूक्लिड, १. ४.]

∴ सज्ञम कोन = २ सज्ञघ कोन,

सणजे सज्ञघ कोन = ३ सज्ञम कोन.

सिद्धान्त ७.

ज्या मानाने प बिन्दु ज्ञापिके पासून समीप अथवा दूर असतो, त्याच मानाने न बिन्दु ही ज्ञापिके पासून समीप अथवा दूर असतो. ह्यास्तव

नट = २ अन,

ह्यांपरिपाकास कांहीं बाध नाही.

सिद्धान्त ११.

“ओस-स त्रिज्या कल्पून काढिलेले वर्तुळ ज्ञापिकेस छेदीलच.”

(१.) ओ बिन्दु ज्ञापिकेच्या पलीकडे आहे असें मान.

ओस सांध, व ओस-ला ज्ञापिकेस ऐ बिन्दून छेदू दे.

आतां ओस ओ ऐ-पेक्षां मोठी हें स्पष्टच आहे, कारण ओ ऐ ओस- चा एकदेश आहे. ∴ ओस > ओ ऐ.

(२.) ओ बिन्दु ज्ञापिका व समापूर्णकक्ष ह्यांजमधील प्रदेशांत आहे असें मान.

ओस सांध व ओ बिन्दूपासून ज्ञापिकेवर ओ ऐ लम्ब काढ.

आतां, ओ बिन्दु जर समापूर्णकक्षावर असता, तर ओस ओ ऐ- वरोवर झाली असती; परंतु तो समापूर्णकक्षाच्या बाहेर आहे ह्यास्त- व ओस ओ ऐ पेक्षां मोठी आहे [सि. २.] ∴ ओस > ओ ऐ.

उभयपक्षां ही ओस ओ ऐ-पेक्षां मोठी आहे हें तात्पर्य.

ह्यास्तव वर्तुळ ज्ञापिकेस छेदील इ०.

“ह्या प्रमाणेच ओर्घ ही र्घ बिन्दुस्थ स्पृक् ही ईल.”

कारण ओर्घ, र्घस = ओर्घ, र्घम, अनुक्रमे, [सि. १.]

व ओस = ओर्म [यूक्लिड, १. लक्ष. १५.]

∴ सर्घओ कोन = र्घओ कोन [यूक्लिड, १.८.]

∴ ओर्घ ही र्घ बिन्दुस्थ स्पृक् झाली. [सि. ५.]

सिद्धान्त १२.

“स्याप्रमाणेन सओघ कोन = सघओ कोन.”

सर्म सांध. सर्म-लाओघ- वर र्य बिन्दूत लम्बरूपाने -
[सि. १०. उपसि.] छेदू दे. आतां

∴ सघओ कोन = मघओ कोन, [सि. ५.]

व मघओ कोन = सर्मम कोन,

कारण हा प्रत्येक कोन घर्मर्य कोनाचा प्रपूरक आहे,

∴ सघओ कोन = सर्मम कोन,

परंतु सर्मम हा परिघस्थ कोन सओम.द्या केन्द्रस्थ कोना-
च्या अर्द्धविरोधर आहे [यूक्लिड, ३. २०.], द्यास्तव तो सओघ-
कोना बरीबर आहे.

∴ सघओ कोन = सओघ कोन.

सिद्धान्त १३.

“ ∴ घघ : घव :: मज्ञ : मज्ञ.”

घ बिन्दूतून घज्ञघ. रेघ मज्ञम-शीं समान्तर काढ, तिला
ओघ-सज्ञ बिन्दूत व मघ-सघ बिन्दूत छेदू दे.

आतां मज्ञ = घज्ञ व जर्म = जघ,

व मज्ञ = मज्ञ, [यूक्लिड, १. २६. टीप.]

∴ मज्ञ = जर्म = घज्ञ = जघ.

घघघ एक त्रिकोण आहे, व वज्ञ घघ-शीं समान्तर
आहे,

∴ घव : वघ :: घज्ञ : जघ, [यूक्लिड, ६. २.]

परंतु घज्ञ = मज्ञ व जघ = जर्म,

∴ घव : वघ :: मज्ञ : मज्ञ.

परंतु मज्ञ = मज्ञ,

∴ घव = रघव.

सिद्धान्त १४.

“ह्याप्रमाणेच ओर = रघ.”

पघ सांध. रउ अक्षाशी समान्तर काढ. तिला पघ-स.
उ बिन्दूत मिळू दे.

आतां पउ = उघ, [सि. १३.]

ज्याअर्थी रउ अक्षाशी समान्तर आहे, [रच.]

∴ ओर : रघ :: पउ : उघ, [यूक्लिड, ६.२.]

परंतु पउ = उघ,

∴ ओर = रघ.

“ओर : रघ :: ओर : रघ”

कारण, ओर : रघ :: पउ : उघ,

व ओर : रघ :: पउ : उघ

ह्याप्रमाणे $\frac{ओर}{रघ} = \frac{पउ}{उघ} = \frac{ओर}{रघ} = \frac{पउ}{उघ} = १$, कारण सर्वां

चें प्रमाण एकच आहे,

पैकीं $\frac{ओर}{रघ} = \frac{ओर}{रघ}$ इतकें घेतलें असतां कांहीं चिन्ता नाही.

∴ ओर : रघ :: ओर : रघ.

सिद्धान्त १५.

“∴ घव : पर :: ओव : ओप.”

कारण घव पर-शी समान्तर आहे, [सि. १४.]

∴ ओपर कोन = ओवघ कोन; [यूक्लिड, १.२९.]

ह्याप्रमाणेच ओरप कोन = ओघव कोन;

व पओर कोन उभयत्रिकोणास साधारण आहे;

∴ घवओ, रओपत्रिकोणसरूप आहैत,
 ∴ घवः ओवः ∴ परः पओ, [यूक्लिड ६. ४.]
 विनिमयाने, घवः परः ∴ ओवः पओ.

सिद्धान्त १७.

“घओ.ओष = ४ सप.पव-४ सप.पउ, [सि.१५.१]”
 = ४ सप(पव-पउ),
 = ४ सप(उव),
 = ४ सप(रओ), [समान्तरता.]
 = ४ सप.रओ.

“रउ^३ = ४ सप.पउ” [सि.१४.उपसि. व सि.१५.]

“ह्याप्रमाणेच घओ.ओष = ४ सप.रओ.”

रउ घव- शीं समान्तरकाढ.

आतां घ व-चे व बिन्दूत सम व ओ बिन्दूत विषम भाग
 पडले आहैत,

∴ घओ.ओष = घव^३-ओव^३, [यूक्लिड, २.५.]
 = घव^३-रउ^३,
 = ४ सप.पव-४ सप.पउ, [सि.१५.१]
 = ४ सप(पव-पउ)
 = ४ सप(उव)
 = ४ सप(रओ)
 = ४ सप.रओ.

ह्यास्तव घओ.ओष : घओ.ओष ∴ ४ सप.रओ : ४ सप.रओ
 ∴ ४ सप : ४ सप.
 ∴ सप : सप.

“रउ^३ = ४ सप.पउ [सि.१४.उपसि. व सि.१५.१]”

कारण रउ घव ज्येश्ठीं समान्तर आहे, व रउ जर वृत्तास

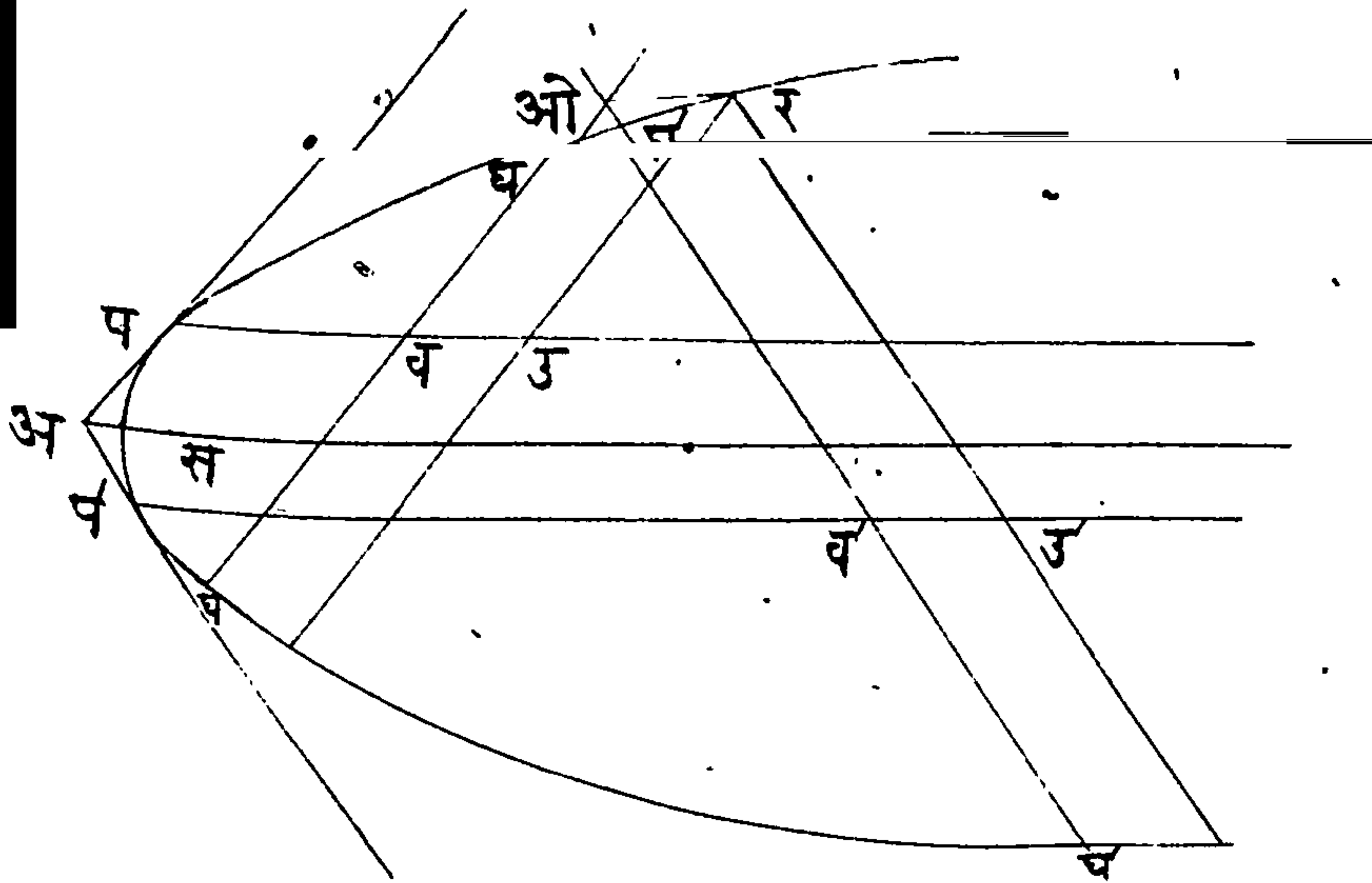
विली, तर तींहीं एक ज्या होईल, व तिचे उ बि-
दोन समान भाग करील हें स्पष्टच आहे.

हा बिन्दु समापूर्णकक्षाच्या बहिःप्रदेशीं इ०”

ज्या काढ. त्यांना समापूर्णकक्षाच्या बहिःप्रदेशीं
एकमेकास ओ बिन्दूंत छेदूंदे. ह्या ज्यांचे व, व बिन्दूंत दोन स-
मान भाग कर. पव, पर्व ज्यास अक्षाशीं समान्तर काढ..

ओ ह्या विषतिच्छेद बिन्दूंतून ओर पव-शीं समान्तरकाढ.
ओर समापूर्णकक्षास र बिन्दूंत छेदीलच कारण समापूर्ण-
कक्षा अक्षाचे दोही बाजूंस अमर्याद पसरते.

र बिन्दूंतून घघ, घर्घ ज्यांशीं समान्तर रेघा काढ. त्यांना
पव, पर्व ज्यासांस उ, उ बिन्दूंत छेदूंदे.



आतां घघ-चे व बिन्दूंत सम व ओ बिन्दूंत विषम भाग प-
डले आहेत.

∴ ओघ. ओघ + घव = ओव; [यूक्लिड, २.६.]

∴ ओघ. ओघ = ओव - घव,

(१९४)

शङ्कुच्छेद.
= रउ^३ - घव^३, कारण ओव = रउ,
= ४ सप. पउ - ४ सप. पव, [सि. १४ उपसि.
व सि. १५.]
= ४ सप (पउ - पव),
= ४ सप (वउ),
= ४ सप (ओर), [समान्तरता.]
= ४ सप. ओर.

ह्याप्रमाणेच.

ओष. ओघ = ओव^३ - घव^३, [यूक्लिड, २. ६.]
= रउ^३ - घव^३, कारण ओव = रउ,
= ४ सप. पउ - ४ सप. पव, [सि. १४.
उपसि. व सि. १५.]
= ४ सप (पउ - पव),
= ४ सप (वउ),
= ४ सप (ओर), [समान्तरता.]
= ४ सप. ओर.

ह्यास्तव, ओष. ओघ : ओष. ओघ :: ४ सप. ओर : ४ सप. ओर;
:: ४ सप : ४ सप;
:: सप : सप.

सिद्धान्त १८.

“ह्याप्रमाणेच ओपर त्रिकोण = ५ वपघ त्रिकोण इ०.”
कारण ओपर त्रिकोण = घपर त्रिकोण [यूक्लिड, १. ३८.]
कारण ओर = रघ [सि. १४.], व ओघ व प बिन्दूतून ओघ - शीं
समान्तर काढिलेली रेघ ह्यांजमध्ये आहेत.

∴ ओपघ त्रिकोण = २ ओपर त्रिकोण,

∴ ओपर त्रिकोण = ५ ओपघ त्रिकोण,

० = ३ वपघ त्रिकोण,
कारण ओपघ त्रिकोण = वपघ त्रिकोण [यूक्लिड, १.
३८.] व [सि. १४.]

ह्यास्तव;

ओपर त्रिकोण + ओपर त्रिकोण = ३ वपघ त्रिकोण + ३ वपघ त्रिकोण,

ह्यणजे, ओरर त्रिकोण = ३ पघघ त्रिकोण,

कारण घपव त्रिकोण = घपव त्रिकोण [सि. १४.] व [यूक्लिड, १. ३८.]

“ ह्याप्रमाणेच, ररर, त्रिकोण = ३ घपप त्रिकोण,

व ररर, त्रिकोण = ३ रपप त्रिकोण. ”

कारण रर = रघ, [सि. १४.]

∴ रपर त्रिकोण = घपर त्रिकोण; [यूक्लिड, १. ३८.]

परंतु रपर त्रिकोण + घपर त्रिकोण = रपघ त्रिकोण,

∴ रपर त्रिकोण = ३ रपघ त्रिकोण,

= ३ वपघ त्रिकोण.

पुनः, ररर = पर, [सि. १४.]

∴ रपर त्रिकोण = पपर त्रिकोण; [यूक्लिड, १. ३८.]

परंतु रपर त्रिकोण + पपर त्रिकोण = रपप त्रिकोण,

∴ रपर त्रिकोण = ३ रपप त्रिकोण,

= ३ वपप त्रिकोण.

॥ ह्यास्तव रपर त्रिकोण + रपर त्रिकोण = ३ (वपघ त्रिकोण + वपप त्रिकोण)

ह्यणजे ररर, त्रिकोण = ३ घपप त्रिकोण.

दुसऱ्यानें, ज्या अर्थी रर, = रघ, [सि. १४.]

∴ ररर, त्रिकोण = घपर, त्रिकोण; [यूक्लिड, १. ३८.]

परंतु ररर, त्रिकोण + घपर, त्रिकोण = रपघ त्रिकोण,

∴ ररर त्रिकोण = ३ रपघ त्रिकोण,

= ३ वपघ त्रिकोण.

(१९६)

शङ्कुच्छेद.

पुनः, ज्या अर्थां र्रर = पर, [सि. १४.]

∴ र्रर त्रिकोण = परर त्रिकोण; [यूक्लिड, १. ३८.]

परंतु र्रर त्रिकोण + परर त्रिकोण = रपप त्रिकोण,

∴ र्रर त्रिकोण = ५ रपप त्रिकोण,

= ५ वपप त्रिकोण.

ह्यास्तव,

र्रर त्रिकोण + र्रर त्रिकोण = ५ (वपप त्रिकोण + वपप त्रिकोण)

ह्यणजे र्रर त्रिकोण = ५ वपप त्रिकोण.

“∴ घपघ आकृतीचें क्षेत्र = ३ घओघ त्रिकोणाचें क्षेत्र.”

∴ ओघपघ आकृतीचें क्षेत्र = ५ घपघ आकृतीचें क्षेत्र.

ह्यणजे २ ओघपघ आकृतीचें क्षेत्र = १ घपघ आकृतीचें क्षेत्र.

दोहों ही बाजूंस ओघपघ आकृति मिळीव, आतां

३ ओघपघ आकृतीचें क्षेत्र = १ घपघ आकृतीचें क्षेत्र +
ओघपघ आकृति,
= घओघ त्रिकोणाचें क्षेत्र.

∴ ६ ओघपघ आकृतीचें क्षेत्र = २ घओघ त्रिकोण.

परंतु, २ ओघपघ आकृतीचें क्षेत्र = घपघ आकृतीचें क्षेत्र,

∴ ६ ओघपघ आकृतीचें क्षेत्र = ३ घपघ आकृतीचें क्षेत्र,

∴ ३ घपघ आकृतीचें क्षेत्र = २ घओघ त्रिकोण,

∴ घपघ आकृतीचें क्षेत्र = ३ ओघघ त्रिकोणाचें क्षेत्र.

हें अति सूक्ष्म मान झालें; नकी नव्हे हें सहज लक्षांत घेईल.

सिद्धान्त १९.

“उपसि. १. पफ = पउ = ४ सप.”

कारण फपयु कोन = उपयु कोन, [सि. ८.]

वउयु सांधल्यावर पफयु कोन = पउयु कोन, [यूक्लिड, ३. ३१.]

वपयु बाजू उभयसाधारण आहे,

∴ पफयु त्रिकोण = पयुउ त्रिकोण, [यूक्लिड, १-२६.]

∴ पफ = पउ.

परंतु पउ = रक्ष = ४ सप, [सि. १९.]

∴ पफ = ४ सप.

“ उपसि. २. पफयु, सयप त्रिकोण सरूप.”

कारण पयस कोन = पफयु कोन, कारण ते काटकोन आहेत,

व पसप कोन = पफयु कोन, कारण व्युत्क्रमकोन,
∴ अवशिष्ट सपय कोन = अवशिष्ट पयुफ कोन, [यूक्लिड, १-२२.]

∴ त्रिकोण सरूप आहेत.

∴ पयु : पफ :: सप : सय, [यूक्लिड, ६-४.]

परंतु पफ = ४ सप, [सि. १९. उपसि. १.]

∴ पयु : ४ सप :: सप : सय.

सिद्धान्त २०.

“ ∴ पओ. ओर = घओ. ओर्घ.”

∴ पओ. ओर : घओ. ओर्घ :: ४ सप : ४ सप, [सि. १७.]

:: सप : सप.

परंतु सप = सट = सर्प, [सि. ७.]

व $\frac{\text{पओ. ओर}}{\text{घओ. ओर्घ}} = \frac{\text{सप}}{\text{सप}} = १,$

∴ पओ. ओर = घओ. ओर्घ.

रविन्दु यूक्लिड, ३. २५ च्या प्रतिसिद्धान्तावरून वर्तुळावर घेतो, घेत नसेल तर वर्तुळ र बिन्दूतून जाते असें मान.

आतां पओ. ओर = घओ. ओर्घ;

परंतु पओ. ओर = घओ. ओर्घ हें सिद्ध केले.

∴ पओ. ओर = पओ. ओर,

∴ ओर = ओर हें असंभवनीय.
असेंच र' बिन्दु बाहेर घेऊनही सिद्ध करितां येईल.

भाग २.

ऊनसंपूर्णकक्ष.



सिद्धान्त १.

“ ∴ सय : यम :: सय : यम, ”
कारण, क्षम अय-शीं समान्तर आहे, व ती अय-शीं ही
समान्तर आहे,

∴ सय : यम :: सअ : अक्ष, [यूक्लिड, ६.२.]

व सय : यम :: सअ : अक्ष, [यूक्लिड, ६.२.]

परंतु सअ : अक्ष :: सअ : अक्ष, [रचना.]

सय : यम :: सय : यम [यूक्लिड, ५.७.]

“ ह्या प्रमाणेंच आपणास दाखवितां येईल कीं,

सय : यम :: सय : यम,

:: सअ : अक्ष. ”

पय, पय, सय सांध. आतां,

∴ सय : यम :: सअ : अक्ष, [यूक्लिड, ६.२.]

:: सअ : अक्ष,

व सय : यम :: सअ : अक्ष, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ सय : यम :: सय : यम,

विनिमयानें सय : सय :: यम : यम,

व यय हा साधिवर्तुळांतील कोन असल्यामुळे तो काटकोन आहे
[यूक्लिड, ३.३५.],

∴ यय सय कोनाचे दोन समान भाग करिते,

∴ सर्प : पय :: सय : यम
 :: सअ : अक्ष.

“∴ जर पय सपम कोनाचे दोनसमान भाग करीत न-
 सेल इ०.”

सपय कोन मपय कोनापेक्षां मोठा आहे असें मान.

यपरु कोन यपम कोनाबरोबरकर, [यूक्लिड, १. २३.]

आतां, सय : यम :: सप : पम. [यूक्लिड, ६. ३.]

पय ही सपर्म कोनाचे दोन समान भाग करिते इ०.

यप प बिन्दूकडे य-पर्यंत वाढीव.

यपर्य कोन काटकोन आहे, [यूक्लिड, ३. ३१.]

∴ पर्य पय-वर लम्बरूपानें पडते.

आणखी सपय कोन = मपय कोन, [रचना.]

व सपर्य कोन = सपय कोनाचा प्रपूरक,

व यपर्म कोन = यपर्म कोनाचा प्रपूरक;

परंतु यपर्ण कोन = यपम कोन, [यूक्लिड, १. १५.]

= यपस कोन,

त्यास्तव सपर्य कोन = यपर्म कोन;

∴ सय : यम :: सप : पम [यूक्लिड, ६. सि. अ.]

व सय : यम :: सप : पम, [यूक्लिड, ६. ३.]

∴ सय : यम :: सय : यम, [यूक्लिड, ५. ७.]

विनिमयानें, सय : सय :: यम : यम;

परंतु सय : सय :: यम : यम,

∴ सय : सय :: सय : सय, [यूक्लिड, ५. ७.]

विनिमयानें, सय : सय :: सय : सय,

स्मरणजे एकदेशः सर्वः :: सर्वः एकदेशः, हे अशक्य.

पुनः, जर आपण यपस कोन यपम कोनापेक्षां लहान आहे
 असें मानिलें, तर ह्यापक्षां स बिन्दु स बिन्दूच्या उजव्या बाजूस येईल,

व पूर्ववत् सर्व क्रिया केली तर आपणास रवालीं लिहिलेला परिपाक उपलब्ध होईल,

सयः सयः :: सर्घः सर्घः,
ह्रणजे सर्घः एकदेशः :: एकदेशः सर्घः, हे अशक्य.

ह्यास्तव सपय कोन मपय कोनापेक्षां मोठाही नाही व लहान ही नाही, ह्रणून स, स बिन्दु एकरूप होतात,

∴ सपय कोन = मपय कोन.

∴ पय सपम कोनाचे दोन समान भाग करिते.

सिद्धान्त २.

“ह्रणजे कअः कक्षः :: सअः अक्ष. (१)”

कारण, सअ+ सअ = अअ, कारण सअ = सअ, [सि.१.उपसि.१]

व अक्ष+ अक्ष = क्षक्ष, कारण अक्ष = अक्ष, [सि.१.उपसि.१]

∴ अअः सअः :: क्षक्षः अक्ष,

विनिमयाने, अअः क्षक्षः :: सअः अक्ष,

परंतु अअ = २कअ, कारण कअ = कअ, कारण क मध्यबिन्दु आहे,

व क्षक्ष = २कक्ष, कारण कक्ष = कक्ष, कारण क मध्यबिन्दु आहे.

∴ २कअ : २कक्ष :: सअ : अक्ष,

ह्रणजे कअ : कक्ष :: सअ : अक्ष. (१)

“ह्रणजे, कसः कअः :: सअः अक्ष. (२)”

कारण, सअ- सअ = सस, कारण सअ = सअ, [सि.१.उपसि.१]

व अक्ष- अक्ष = अअ, कारण अक्ष = अक्ष [सि.१.उपसि.१]

∴ ससः सअः :: अअः अक्ष,

विनिमयाने, ससः अअः :: सअः अक्ष,

परंतु सस = २कस, कारण कस = कस, कारण क मध्यबिन्दु आहे,

व अअ = २कअ, कारण कअ = कअ, कारण क मध्यबिन्दु आहे,

∴ २कस : २कअ :: सअ : अक्ष,

ह्रणजे कस : कृअ :: सअ : अक्ष. (२)

सिद्धान्त ३.

“ह्याप्रमाणेच सप : पर्म :: अअ : क्षक्ष.”

कारण, सप : पर्म :: सअ : अक्ष, [सि.५.]

व सअ : अक्ष :: अअ : क्षक्ष, [सि.२.]

∴ सप : पर्म :: अअ : क्षक्ष. [यूक्लिड, ५.७.]

“∴ सप + सप = अअ.”

कारण सप + सप : पर्म + पर्म :: अअ : क्षक्ष.

परंतु पर्म + पर्म = मर्म = क्षक्ष, [समान्तरता.]

∴ सप + सप : क्षक्ष :: अअ : क्षक्ष

∴ सप + सप = अअ.

“अअ > पघ.”

कारण, सप + सप + सघ + सघ > २ पघ,

परंतु सप + सप = अअ, [सि.३.]

सघ + सघ = अअ, [सि.३.]

∴ २ अअ > २ पघ

ह्रणजे अअ > पघ.

सिद्धान्त ४.

“∴ सब = अक.”

कारण सब + सब = अअ, [सि.३.]

= अक + अक,

= अक + अक,

परंतु सब = सब, [यूक्लिड, १.४.]

∴ २ सब = २ अक

ह्रणजे सब = अक.

(२०२)

शङ्कुच्छेद.

“पुनः सलः सक्षः :: सअः अक्ष,
६ - :: कसः कअ.”

ज्ञापिकेवर लम लम्ब काढ. आतां

सलः लम :: सअः अक्ष, [सि. १.]

परंतु लम = सक्ष, [समान्तरता.]

∴ सलः सक्ष :: सअः अक्ष,

परंतु कसः कअ :: सअः अक्ष, [सि. २.]

∴ सलः सक्ष :: कसः कअ, [यूक्लिड, ५. ७.]

∴ सल. अक = कस. सक्ष. [यूक्लिड, ६. १६.]

सिद्धान्त ५.

“ज्या अर्धी सप+घप > सघ, [यूक्लिड, १. २०.]
दोहों ही विषय बाजूंस सघ मिळीव, आतां +

सप+घप+सघ > सघ+सघ,

परंतु घप+सघ ह्मणजे सप,

∴ सप+सप > सघ+सघ,

परंतु सप+सप = अअ, [सि. ३.]

∴ अअ > सघ+सघ,

ह्मणजे सघ+सघ < अअ.

“ज्या अर्धी सघ+घप > सप, [यूक्लिड, १. २०.]”

सप मिळीव; आतां

सघ+घप+सप > सप+सप,

परंतु घप+सप ह्मणजे सघ,

∴ सघ+सघ > सप+सप,

परंतु सप+सप = अअ, [सि. ३.]

∴ सघ+सघ > अअ.

सिद्धान्त ६.

“ज्ञमप, ज्ञमर्ष त्रिकोण सरूप आहेत.”

कारण ज्ञमप कोन = ज्ञमर्ष कोन, [समकोणता.]

व मज्ञप कोन उभय त्रिकोणांस साधारण आहे,

अवशिष्ट ज्ञपम कोन = अवशिष्ट ज्ञपर्म कोन [यूक्लिड, १. ३२.]

∴ ज्ञप : ज्ञर्ष :: मप : मर्ष, [यूक्लिड, ६. ४.]

परंतु सप : मप :: सर्ष : मर्ष

विनिमयाने सप : सर्ष :: मप : मर्ष

∴ ज्ञप : ज्ञर्ष :: सप : सर्ष [यूक्लिड, ५. ७.]

“उपसि. ३. ऊर्ध्वमात्रेच्या अन्यस्थ स्पृशा इ.”

कारण, ऊर्ध्वमात्रा नाभींतून जाणारी असते व महत्तराक्षा-
वर लम्बरूपाने पडते. द्यास्तव तिच्या अन्यां पासून स्पृशा काढि-
ल्या, तर सज्ञ, सक्ष एकरूप होतील.

सिद्धान्त ७.

“ज्या अर्थी मपज्ञ, मपज्ञ त्रिकोण सरूप आहेत.”

कारण, पमज्ञ कोन = पमज्ञ कोन, [समकोणता.]

व मपज्ञ कोन = मपज्ञ कोन, [यूक्लिड, १. १५.]

∴ अवशिष्ट मज्ञप कोन = मज्ञप कोन. [यूक्लिड, १. ३२.]

उपसि. सपज्ञ कोन = उपज्ञ कोन.

कारण, सपज्ञ कोन = सर्षज्ञ कोन, [यूक्लिड, ६. ७.]

परंतु सर्षज्ञ कोन = उपज्ञ कोन, [यूक्लिड, १. १५.]

∴ सपज्ञ कोन = उपज्ञ कोन.

आणखी उपज्ञ कोनही = सपज्ञ कोन.

सिद्धान्त ९.

“कटः कस :: कक्षः कन.”

कारण सट+सटः सट-सटः :: क्षन+क्षनः क्षन-क्षनः;

अर्थात् क्ष-कडे वादीव; क्षट क्षट-बरोबर कर. [यूक्लिड, १. ३.]

आतां, सट+सट = सट+सट, कारण सट = सट;

= २ कट, कारण कट = कट.

अथवा, सट+सट = सस+सक्ष+क्षट+सट,

= सस+सक्ष+क्षट+सक्ष+क्षट,

= सस+सक्ष+सक्ष+क्षट+क्षट,

= सस+सक्ष+सक्ष [सि. १. उपसि. १]+

क्षट+क्षट,

= क्षक्ष+क्षट+क्षट,

= कक्ष+कक्ष+क्षट+क्षट,

= कक्ष+कक्ष+क्षट+क्षट,

= कक्ष+क्षट+कक्ष+क्षट,

= कट+कट,

= २ कट.

सट-सट = सस,

= कस+कस, कारण, कस = कस.

= २ कस.

क्षन+क्षन = क्षक्ष,

= कक्ष+कक्ष, कारण कक्ष = कक्ष.

= २ कक्ष.

क्षन-क्षन.

क्षन-बरोबर क्षन कर;

आतां, क्षन-क्षन = क्षन-क्षन = नन = २ कन.

द्यास्तव, २ कटः ० २ कसः ० २ कक्षः २ कन,
ह्रणजे कटः कसः ० कक्षः कन.

सिद्धान्त १०.

“ ∴ कघट कोन कारकोन आहे.”

कारण कट. कन = कघ,

ह्रणजे कटः कघ ० ० कघः कन,

∴ घटक त्रिकोण घकन त्रिकोणाशीं सरूप झाला. [यूक्लिड, ६.६]

∴ कट-समोरील कघट कोन कारकोन आहे, कारण कघ-समोरील कनघ कोन कारकोन आहे.

किंवा [यूक्लिड, ६.८. उपसि.] वरून कघट कोन कारकोन आहे.

सिद्धान्त ११.

“ उपसि. सर्गः सर्प ० ० कसः कअ.”

कारण, ज्याअर्थी पग संपर्क लम्ब सपर्स त्रिकोणाच्या सपर्स कोनाचे दोन समान भाग करितो,

∴ सर्गः सर्ग ० ० सर्पः सर्प; [यूक्लिड, ६.३]

∴ सर्गः सर्ग + सर्ग ० ० सर्पः सर्प + सर्प,

ह्रणजे सर्गः सर्स ० ० सर्पः अअ, [सि. ३.]

विनिमयानें, सर्गः सर्प ० ०, सर्सः अअ,

ह्रणजे सर्गः सर्प ० ० २ कसः २ कअ

∴ कसः कअ.

सिद्धान्त १२.

“ ∴ सर्ग-सर्गः सर्ग + सर्ग ० ० क्षन-क्षनः क्षन + क्षन.”

सर्ग- पासून सर्ग- लांबीचा तुकडा सर्ग बरोबर पाड; असाच

(२०६)

शङ्कुच्छेद.

क्षन-पासून क्षन-बरोबर क्षन कर. आतां

सग - सग = सग-सग = गग = २ कग,

सग + सग = सस = २ कस,

क्षन - क्षन = क्षन-क्षन = नन = २ कन,

क्षन + क्षन = क्षक्ष = २ कक्ष.

२ कग : सस :: २ कन : क्षक्ष.

आदेशानेवविनिमयाने २ कग : २ कन :: २ कस : २ कक्ष

ह्मणजे कग : कन :: कस : कक्ष.

“ नग : कन :: बकै : अकै.”

कारण कन-कग : कन :: कअ-कस : कअ,

परंतु कन-कग ह्मणजे नग,

व कअ-कस ह्मणजे बकै, [सि. ४.]

∴ नग : कन :: बकै : अकै.

सिद्धान्त १३.

टन. नग व टन. कन ह्या दोहों ही गुणक्षेत्रांची उंची ए-
कच टन आहे,

∴ टन. नग : टन. कन :: नग : कन, [यूक्लिड, ६. १.]

परंतु नग : कन :: बकै : अकै, [सि. १२.]

∴ टन. नग : टन. कन :: बकै : अकै. [यूक्लिड, ५. ७.]

“ पनै : अन. अन :: बकै : अकै.”

कारण पग हा संपर्क लम्ब आहे,

∴ टपग कोन काटकोन आहे,

∴ टन. नग = पनै, [यूक्लिड ६. ८, उपसि.]

टघक कोन काटकोन आहे, [सि. १०.]

∴ टन. कन = घनै. [यूक्लिड, ६. ८, उपसि.]

∴ टन. नग : टन. कन :: बकै : अकै,

स्रणजे पनैः घनैः : बकैः अकैः.

अघ, अघ सांध. आतां,

अघअकोन काटकोन आहे, [यूक्लिड, ३.३१.]

∴ घनै = अन.अन, [यूक्लिड, ६.८, उपसि.]

∴ पनै : अन.अन :: बकैः अकैः.

“उपसि. १. पनः घनः : बकः अकः.”

कारण, पनैः घनैः : बकैः अकैः,

∴ ह्या अनुपातस्थ पदांचें वर्गमूळ ही अनुपातस्थ असलें पाहिजे हें स्पष्टच आहे.

“उपसि. २. पनैः घनैः : बकैः अकैः, ३.”

परंतु घनै = घकै - कनै, [यूक्लिड, १. ४७.]

= अकै - कनै, [यूक्लिड, १. लक्ष. १५.]

∴ पनै : अकै - कनै : : बकैः अकैः,

∴ पनै : अकै - कनै - पनै : : बकैः अकै - बकै;

परंतु अकै - कनै - पनै = अकै - (कनै + पनै),

= अकै - कपै, [यूक्लिड, १. ४७.]

= अकै - कपै,

∴ पनै : अकै - कपै : : बकैः अकै - बकै.

विनिमयानें, पनैः बकैः : अकै - कपै : अकै - बकै.

आतां पनै नेहमीं बकै-पेक्षां लघुतर असणार,

कारण बक हा केन्द्रस्थ लम्ब आहे;

व अनुपातांतील पहिलें पद जर दुसऱ्या पेक्षां लघुतर असेल तर तिसरें ही पद चौथ्या पदापेक्षां लघुतर असलें पाहिजे, ह्यास्तव अकै - कपै हें अनुपातपद अकै - बकै ह्या अनुपातपदापेक्षां लघुतर आहे.

परंतु अकै उभयपदांस साधारण आहे, यास्तव कपै बकै-पेक्षां महत्तर असल्या वांचून अकै व कपै ह्यांचें व्यवकलन अकै

(२०८)

शङ्कुच्छेद.

व बक^३ ह्यांच्या अवकलनापेक्षां लघुतर होणें अशक्य आहे,

∴ कप^३ > बक^३,
ह्रणजे बक^३ < कप^३,
ह्रणजे बक < कप.
∴ बक ह्रसिष्ठ इ.

सिद्धान्त १४.

“ कट : कयु :: पन : घन,
:: कर : कघ.”

कारण, टनप व टकट त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ टन : नप :: टक : कट; (यूक्लिड, ६.४.)

व टनघ, टकयु त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ टन : नघ :: टक : कयु; (यूक्लिड ६.४.)

∴ नघ : नप :: कयु : कट,

ह्रणजे कट : कयु :: नप : नघ.

परंतु कर : कघ :: नप : नघ, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ कट : कयु :: कर : कघ. [यूक्लिड, ५.७.]

“ करट कोन काटकोन आहे. ”

कारण कघट कोन काटकोन आहे, [सि.१०.]

∴ कघयुकोनही काटकोन आहे,

परंतु कघयुकोन = करट कोन,

कारण रट घयु-शीं समान्तर आहे,

∴ करट कोन काटकोन आहे.

“ विषमापूर्णाकक्षाच्या अंशाच धर्मा विषयीं इ.”

सि.१४. आकृ.पहा. पन, पन निर्णायिका महत्तराक्षावर
व लघुतराक्षावर क्रमानें काट; प बिन्दुस्थ स्पृशीला त्यांना ट, ट
बिन्दूंत मिळू दे. आतां टपन, टटन त्रिकोण सरूप आहेत. कारण

न, क बिन्दुस्थ कोन काटकोन आहेत, व ट बिन्दुस्थ कोन उभय साधारण आहे,

∴ अवशिष्ट टपन कोन = अवशिष्ट टटक कोन. [यूक्लिड, १.३३]

∴ कट : कट :: पन : नट, [यूक्लिड, ६. ४.]

विनिमयाने, कट : पन :: कट : नट,

कट. कन : पन. कन :: कट. कन : नट. कन,

कारण अनुपातांतील पहिल्या व दुसऱ्या पदास एखाद्या राशीने गुणिले, व तिसऱ्या व चौथ्या पदास दुसऱ्या एखाद्या राशीने गुणिले, तरी प्रमाणसाम्य नष्ट होत नसते.

∴ कट. कन : पन :: कट. कन : नट. कन,

विनिमयाने, कट. कन : कट. कन :: पन : नट. कन,

:: बकै : अकै; [सि. १३.]

परंतु कट. कन = अकै, [सि. ९.]

∴ कट. कन = बकै.

सिद्धान्त १५.

“∴ सक : सक :: सय : यउ.”

कारण, सक = सक, व सय = यउ,

$$\therefore \frac{\text{सक}}{\text{सक}} = १ = \frac{\text{सय}}{\text{यउ}} = १$$

$$\therefore \frac{\text{सक}}{\text{सक}} = \frac{\text{सय}}{\text{यउ}},$$

ह्मणजे सक : सक :: सय : यउ.

“∴ कय = ३ सउ = कअ.”

कारण, कय सउ-शीं समान्तर आहे

∴ एकस, उसस त्रिकोण सरूप आहेत;

कारण एकस कोन = उसस कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

(२०८)

शङ्कुच्छेद.

च बर्कै ह्यांच्या व्यवकलनापेक्षां लघुतर होणे अशक्य आहे,

∴ कपै > बर्कै,

ह्रणजे बर्कै < कपै,

ह्रणजे बक < कप.

∴ बक ह्रसिष्ठ इ.

सिद्धान्त १४.

“ कट : कयु :: पन : घन,
:: कर : कघ.”

कारण, टनप व टकट त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ टन : नप :: टक : कट; (यूक्लिड, ६.४.)

व टनघ, टकयु त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ टन : नघ :: टक : कयु; (यूक्लिड ६.४.)

∴ नघ : नप :: कयु : कट,

ह्रणजे कट : कयु :: नप : नघ.

परंतु कर : कघ :: नप : नघ, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ कट : कयु :: कर : कघ. [यूक्लिड, ५.७.]

“ करट कोन काटकोन आहे. ”

कारण कघट कोन काटकोन आहे, [सि. १०.]

∴ कघयुकोनही काटकोन आहे,

परंतु कघयु कोन = करट कोन,

कारण रट घयु-शीं समान्तर आहे,

∴ करट कोन काटकोन आहे.

“ विषमापूर्णाकक्षाच्या अशाच धर्मा विषयीं इ. ”

सि. १४. आकृ. पहा. पन, पन निर्णायिका महत्तराक्षावर
व लघुतराक्षावर क्रमानें काट; प बिन्दुस्थ स्पृशीला त्यांना ट, ट
बिन्दूंत मिळू दे. आतां टपन, टटन त्रिकोण सरूप आहेत. कारण

न, क बिन्दुस्थ कोन काटकोन आहेत, व ट बिन्दुस्थ कोन उभय
साधारण आहे,

∴ अवशिष्ट टपन कोन = अवशिष्ट टट क कोन. [यूक्लिड, १.३३]

∴ कट : कट :: पन : नट, [यूक्लिड, ६.६.]

विनिमयाने, कट : पन :: कट : नट,

कट. कन : पन. कन :: कट. कन : नट. कन,

कारण अनुपातांतील पहिल्या व दुसऱ्या पदास एखाद्या राशीने
गुणिले, व तिसऱ्या व चौथ्या पदास दुसऱ्या एखाद्या राशीने
गुणिले, तरी प्रमाणसाम्य नष्ट होत नसते.

∴ कट. कन : पन :: कट. कन : नट. कन,

विनिमयाने, कट. कन : कट. कन :: पन : नट. कन,

:: बकै : अकै; [सि. १३.]

परंतु कट. कन = अकै, [सि. ९.]

∴ कट. कन = बकै.

सिद्धान्त १५.

“∴ सक : सक :: सय : यउ.”

कारण, सक = सक, व सय = यउ,

$$\therefore \frac{\text{सक}}{\text{सक}} = १ = \frac{\text{सय}}{\text{यउ}} = १$$

$$\therefore \frac{\text{सक}}{\text{सक}} = \frac{\text{सय}}{\text{यउ}},$$

ह्मणजे सक : सक :: सय : यउ.

“∴ कय = ३ सउ = कअ.”

कारण, कय सउ-शीं समान्तर आहे

∴ यकस, उर्सस त्रिकोण सरूप आहेत;

कारण यकस कोन = उर्सस कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

व य सक कोन उभय साधारण आहे,

व कयस कोन = सउस कोन.

∴ कयः कसः :: सउः सस, [यूक्लिड, ६.४.]

विनिमयाने, कयः सउः :: कसः सस;

परंतु कस = ३ सस, कारण कस = कस;

∴ कय = ३ सउ = ३ अअ = कअ.

“ ह्याप्रमाणेच कय = कअ.”

सप, सप सांध; सय व सप उ बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढीच.
कय सांध. आतां,

ज्या अर्धी सपर्य कोन = उपर्य कोन, [सि. ७. उपसि.]

व सयप कोन = उर्यप कोन, [समकोणता.]

व पर्य बाजू सपर्य व उपर्य त्रिकोणांस साधारण आहे,

∴ सपर्य त्रिकोण = उपर्य त्रिकोण, सर्वांशीं, [यूक्लिड, १. २६.]

∴ सप = उप.

सप मिळीच, आतां

सप + सप = उप + सप,

अअ = उस. [सि. ३.]

पुनः, ∴ सक = सक, व सय = उय,

∴ सकः सक :: सयः उय [प्रमाणसाम्य.]

∴ कय सउ-शीं समान्तर आहे. [यूक्लिड, ६. २.]

∴ यकस, उसस त्रिकोण सरूप आहेत,

कारण यकस कोन = उसस कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

व यसक कोन उभय साधारण आहे

व कयस कोन = सउस कोन.

∴ कयः कसः :: सउः सस,

विनिमयाने कयः सउः :: कसः सस;

परंतु कस = ३ सस, कारण कस = कस,

∴ कर्य = ३ सउ,
∴ कर्य = ३ सउ = ३ अअ = कअ = कअ.

सिद्धान्त १६.

“ओ बिन्दु जर मऐम वर्तुळाच्या बाहेर असेल, तर ओस ओऐ-पेक्षां मोठी असते हें स्पष्टच आहे.”

कारण ओऐ ओस-चा एकदेश आहे,

∴ ओस > ओऐ.

“जेव्हां ओ बिन्दु मऐम वर्तुळाच्या आंत असेल इ०.”
ओस सांध; ओस-स मऐम वर्तुळास ऐ बिन्दूंत मिळूंदे; हें ध्व-
नित आहेच.

आतां असें मनांत आण कीं जर ओ बिन्दु ऊनसंपूर्णकक्षा-
वर असतां, तर

ओस + ओस = अअ = सऐ, [सि.३.]

असें झालें असतें; परंतु तो तर ऊनसंपूर्णकक्षाच्या बाहेर आहे

∴ ओस + ओस > अअ किंवा सऐ. [सि.५.]

परंतु स ऐ ह्यणजे सओ + ओऐ,

∴ ओस + ओस > सओ + ओऐ,

ह्यणजे ओस > ओऐ.

उभयपक्षां ही ओस > ओऐ असते हें तात्पर्य.

ह्यास्तव दुसरें वर्तुळ पहिल्यास छेदीलच इ०.

“ह्या प्रमाणीच ओप प बिन्दुस्थ स्पृक होईल!” ती अशी-

कारण सर्प + सर्प = अअ; [सि.३.]

परंतु अअ = सम, [यूक्लिड, १. लक्षणा १५.]

∴ सर्प + सर्प = सम;

परंतु सम ह्यणजे सर्प + पर्म,

∴ सर्प + सर्प = सर्प + पर्म,

∴ सर्प = पर्म.

ह्यास्तव, सर्प, ओर्प = मर्प, ओर्प, अनुक्रमे,

व ओस = ओर्म, [यूक्लिड, १. लक्ष. १५.]

∴ ओर्पस कोन = ओर्मस कोन, [यूक्लिड, १.८.]

∴ ओर्प ही प बिन्दुस्थ स्पृक् झाली. [सि. ७. उपसि.]

सिद्धान्त १७.

“ ह्याप्रमाणेच ओस = ओर्म. ”

कारण ओर्प, पस = ओर्प, पर्म, अनुक्रमे,

व ओर्पस कोन = ओर्मस कोन, [सि. ७. उपसि.]

∴ ओस = ओर्म, [यूक्लिड, १. ४.]

व ओसर्प कोन = ओर्मर्प कोन. [यूक्लिड, १. ४.]

“ ओम = ओर्म. ”

कारण ओस = ओम,

व ओस = ओर्म,

∴ ओम = ओर्म.

“ ∴ ओसप कोन = ओसर्प कोन. ”

कारण ओमस कोन = ओर्मस कोन. [यूक्लिड, १. ८.]

सिद्धान्त १८

जर ओल निर्णायिका ओ विप्रतिच्छेद बिन्दूतून जात नसेल, तर तिला टओ-स क्षत्र बिन्दूत व टओ-स च बिन्दूत छेदूंदे. - आतां, ओल अर्-वर लम्बरूपानें पडते व घन-शीं समान्तर आहे,

∴ ओल ट, घनट त्रिकोण सरूप आहेत, कारण ओल कोन उभय साधारण आहे, ओल ट कोन = घनट कोन, ∴ अवशिष्ट - टओल कोन = अवशिष्ट टघन कोन [यूक्लिड, १. ३२ अथवा २९. १; आणखी क्षत्रलट, व घनट त्रिकोण सरूप आहेत.

∴ ओल : टल :: घन : टन [यूक्लिड, ६.४.]

विनिमयाने, ओल : घन :: टल : टन;

आणखी, क्षल : टल :: घन : टन, [यूक्लिड, ६.४.]

• विनिमयाने, क्षल : घन :: टल : टन;

∴ ओल : घन :: क्षल : घन, [यूक्लिड, ५.७.]

विनिमयाने, क्षल : ओल :: घन : घन;

:: बक : अक. [सि. १३. उपसि.] (१.)

ह्या प्रमाणेच ओलट, घनट त्रिकोणसरूप आहेत, व यलट, घनट त्रिकोणसरूप आहेत,

∴ ओल : घन :: टल : टन, [यूक्लिड, ६.४.]

व यल : घन :: टल : टन, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ यल : ओल :: घन : घन [यूक्लिड, ५.७.]

:: बक : अक; [सि. १३. उपसि.] (२.)

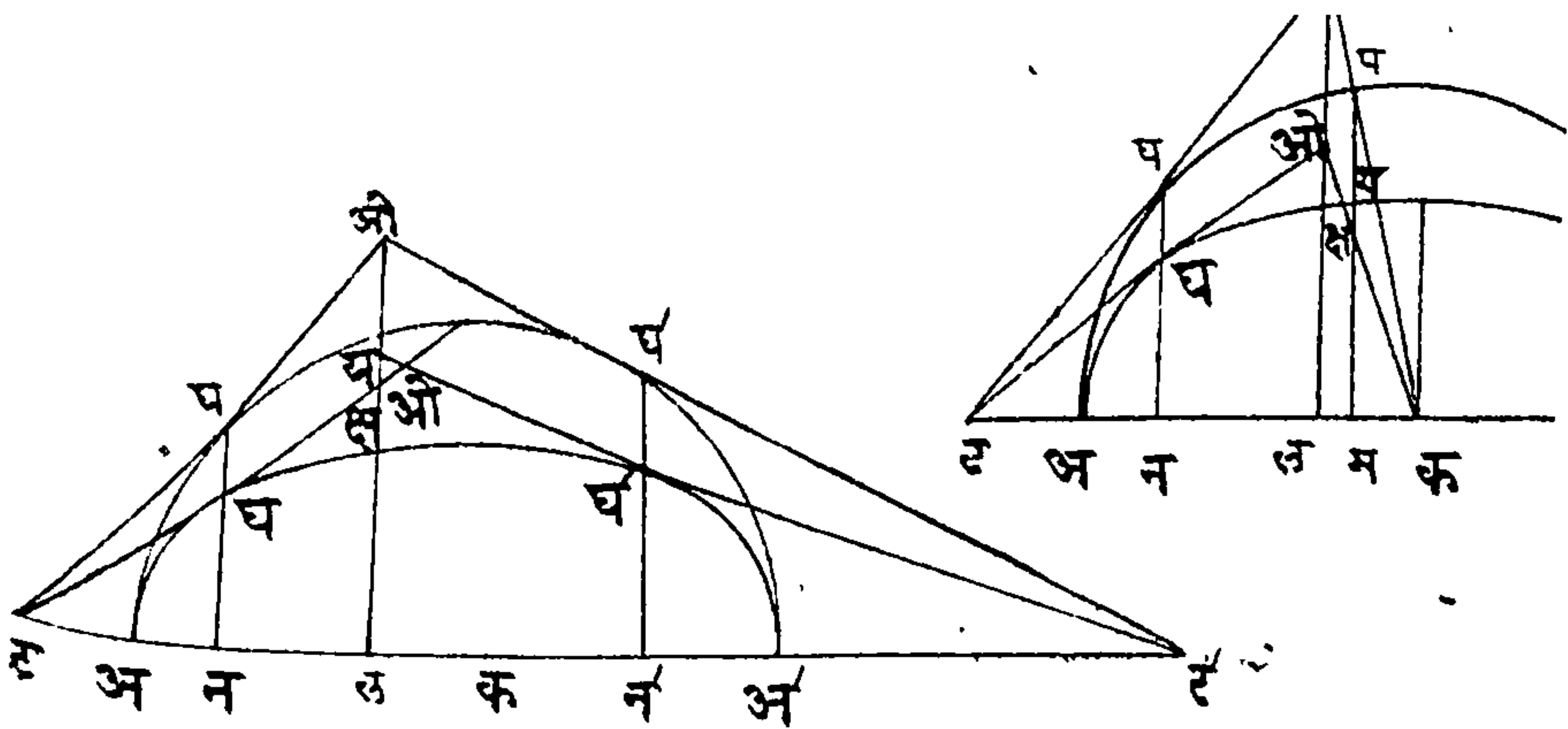
∴ (१) व (२) ह्यांपासून,

क्षल : ओल :: यल : ओल,

∴ क्षल = यल, एकदेश = सर्व, हे अशक्य.

∴ ओल ओ बिन्दूतून जाते.

पय निर्णायिकाप बिन्दूतून जात नसेल, तर तिला ओक-सक्ष बिन्दूत व ऊनसंपूर्णकक्षास य बिन्दूत छेदू दं. ओ



आतां ओलक, वनक त्रिकोण सरूप आहेत, व ओलक,
क्षनक त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ ओलक : वनक :: लक : नक, [यूक्लिड, ६.४.]

व ओलक : क्षनक :: लक : नक; [यूक्लिड, ६.४.]

∴ ओलक : ओलक :: क्षनक : वनक, [यूक्लिड, ५.७.]

:: वक : अक;

परंतु घर्घ व घर्घ वाढविल्या असतां महत्तराक्षारस एकाच
(८) बिन्दूंत मिळतील, व वन घन-शीं समान्तर आहे, [सि. २९ -
दरील टीप पहा.]

∴ वदन त्रिकोण घदन त्रिकोणाशीं सरूप आहे,

व घदन त्रिकोण घदन त्रिकोणाशीं सरूप आहे,

∴ वनक : घनक :: दनक : दनक, [यूक्लिड, ६.४.]

व घनक : घनक :: दनक : दनक, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ वनक : वनक :: घनक : घनक, [यूक्लिड, ५.७.]

:: वक : अक,

∴ क्षनक : वनक :: घनक : वनक,

∴ क्षनक = घनक, सर्व = एकदेशा हे अशक्य,

∴ वनक निर्णायिका व बिन्दूंतून जाते.

“ (५.) घव = घव ”

घक, घक, सांध. आतां

घक = घक, [त्रिज्या.]

ओघ = ओघ, कारण ह्या वर्तुळाच्या एकाच बाह्य बिन्दू पासून
स्पृशा काढिल्या आहेत, [यूक्लिड, ३.२५.]

ओक उभय साधारण आहे,

∴ ओघक त्रिकोण = ओघक त्रिकोण सर्वाशीं, [यूक्लिड, १.८.]

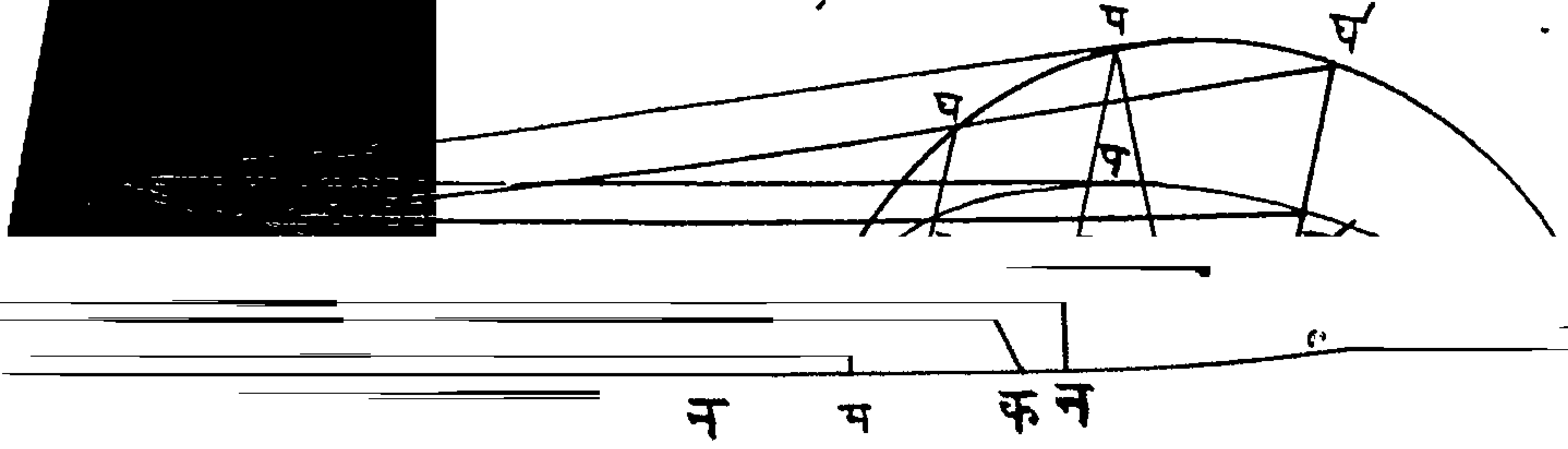
∴ घओक कोन = घओक कोन,

∴ घओघ त्रिकोण = घओघ त्रिकोण, सर्वाशीं [यूक्लिड, १.४.]

(२१६)

शङ्कुच्छेद.

घघ = घघ,
व घघओ कोन = घघओ कोन.



घघ, घघ ज्या वाढविल्यावर महत्तराक्षास एकाचट विन्दूंत
मिळतील [सि.२९. वरील टीपपहा.]. प, प बिन्दुस्थ स्पृशा वाढ-
विल्यावर महत्तराक्षास एकाच ट विन्दूंत मिळतील [सि.१०.]. प
बिन्दुस्थ स्पृक् घघ-शीं समान्तर आहे, कारण ती चतुर्थाच्या कप-
च्यासाच्या अन्यांतून काढिली आहे, म्हणून प बिन्दुस्थ कोन काट-
कोन आहेत, व व बिन्दुस्थ कोन बरोबर आहेत, म्हणून तेही काट-
कोन आहेत; म्हणून समान्तर इत्यादि सुगम आहे.

सिद्धान्त १९.

टप, टप, टड, टड ह्या स्पृशाट, ट बिन्दूंत महत्तराक्षास वा-
ढविलें असतां सि.१० वरून मिळतात.

“पनट, डरक त्रिकोण सरूप.”

कारण कड पट-शीं समान्तर आहे [लक्ष. ३६.], व टट
त्यांजवर पडते,

∴ डकर कोन = पटन कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

व डरक कोन = पनट कोन.

∴ अवशिष्ट कडर कोन = टपन कोन. [यूक्लिड, १. ३२.]

“ टप कड-शीं समान्तर आहे. ”

कारण, टन : कर :: नप : रड, [सि. १३. उपसि.]

∴ टपन त्रिकोण रडक त्रिकोणाशीं सरूप आहे. [यूक्लिड, ६. ६.]

∴ नप समोरील कोन = रड समोरील कोन,
हणजे प टन कोन = ड कर कोन,

∴ टप कड-शीं समान्तर आहे. [यूक्लिड, १. २८.]

“ प कड कोन काटकोन आहे. ”

कारण टप कड-शीं समान्तर आहे,

∴ टपक कोन = पकड कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

परंतु टपक कोन काटकोन आहे, [सि. १०.]

∴ पकड कोन ही काटकोन आहे.

“ कप टड-शीं समान्तर आहे. ”

कारण, पकड कोन काटकोन आहे,

व कडट कोन काटकोन आहे, [सि. १०.]

∴ पकड कोन = कडट कोन,

∴ कप टड-शीं समान्तर आहे. [यूक्लिड, १. २९.]

“ पकन त्रिकोण डटर त्रिकोणाशीं सरूप आहे इ. ”

कारण, पनक कोन = डटर कोन, [समकोणता.]

व पकन कोन = डटर कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

∴ अवशिष्ट कपन कोन = टडर कोन. [यूक्लिड, १. ३२.]

∴ नक : नप :: रट : रड, [यूक्लिड, ६. ४.]

विनिमयानें, नक : रट :: नप : रड,

:: नप : रड. [सि. १३. उपसि.]

“ कप डट-शीं समान्तर. ”

कारण, नक : रट :: नप : रड,

विनिमयानें, नक : नप :: रट : रड,

- ∴ कपन त्रिकोण टुडर त्रिकोणाशीं सरूप आहे, [यूक्लिड, ६. ६.]
 ∴ नप समोरील कोन = रड समोरील कोन,
 ह्यणजे पकन कोन = डुटर कोन,
 ∴ कप डुट-शीं समान्तर आहे. [यूक्लिड, १-२८.]
 ∴ कप कड-शीं सहचरित झाली. [लक्ष्म. ३६.]

सिद्धान्त २०.

“ह्या प्रमाणींच डरै : रडै : : बकै : अकै.”

कारण, डर : रड : : बक : अक, [सि. १३. उपसि. १.]

∴ डरै : रडै : : बकै : अकै.

“पनै + डरै : नपै + रडै : : बकै : अकै.”

ह्यणजे $\frac{\text{पनै} + \text{डरै}}{\text{नपै} + \text{रडै}} = \frac{\text{बकै}}{\text{अकै}}$;

परंतु नपै + रडै = करै + कनै, [सि. १९. उपसि. १]
 = अकै,

∴ $\frac{\text{पनै} + \text{डरै}}{\text{अकै}} = \frac{\text{बकै}}{\text{अकै}}$,

ह्यणजे पनै + डरै = बकै :

“कपै + कडै = अकै + बकै.”

कारण पनै + डरै = बकै,

व कनै + करै = अकै,

∴ पनै + कनै + डरै + करै = बकै + अकै;

परंतु पनै + कनै = कपै, [यूक्लिड, १. ४७.]

व डरै + करै = कडै, [यूक्लिड, १. ४७.]

∴ कपै + कडै = अकै + बकै.

सिद्धान्त २१.

“करैः कडैः :: करः कउ,” [यूक्लिड, ६.२०. उपसि.]

कारण, करः कड :: कडः कउ, [सि. १८.]

ह्रणजे कर. कउ = कडै; [यूक्लिड, ६.१७.]

दोहों ही बाजूंस कर-नें गुण; आतां

करै. कउ = कर. कडै,

कडै दुसऱ्या बाजूंस नेल्यावर,

$$\frac{\text{करै}}{\text{कडै}} = \frac{\text{कर}}{\text{कउ}}$$

ह्रणजे करैः कडैः :: करः कउ.

“करै : कडै :: करः कउ,

घवै : कडै :: युवः कयु.”

कारण करै = घवै, [समान्तरता.]

व घव कउ-शीं समान्तर आहे,

∴ युवः कयु :: युघः युउ, [यूक्लिड, ६.२.]

व करः कउ :: युघः युउ, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ करः कउ :: युवः कयु. [यूक्लिड, ५.७.]

∴ घवैः कडैः :: युवः कयु.

“कयुः कव :: कपैः कवै,” [यूक्लिड, ६.२०. उपसि.]

कारण, कयुः कप :: कपः कव, [सि. १८.]

ह्रणजे कयु. कव = कपै; [यूक्लिड, ६.१७.]

कव-नें गुण,

कयु. कवै = कव. कपै,

$$\text{ह्रणजे } \frac{\text{कयु}}{\text{कव}} = \frac{\text{कपै}}{\text{कवै}}$$

ह्रणजे कयुः कव :: कपैः कवै.

(२२०)

शङ्कुच्छेद.

“कयु-कवः : कयुः :: कर्पै-कर्वैः : कर्पै .

ह्यणजे, युवः कयुः :: पव.पवः : कर्पै.”

कारण, कर्पै = पव.पव + कर्वै, [यूक्लिड २.५.]

∴ कर्पै - कर्वै = पव.पव;

कयु-कव = युव,

∴ युवः कयुः :: पव.पवः : कर्पै.

“ह्यास्तव घर्चैः कडैः :: पव.पवः : कर्पै.”

कारण घर्चैः कडैः :: युवः कयुः,

व युवः कयुः :: पव.पवः : कर्पै,

∴ घर्चैः कडैः :: पव.पवः : कर्पै, [यूक्लिड ५.७.]

विनिमयाने, घर्चैः पव.पवः :: कडैः : कर्पै.

सिद्धान्त २२.

“∴ लल समान्तरभुजचौकोन = ४ पड समान्तरभुजचौकोन
= ४ अक.बक काटकोन चौकोन
= अअ.बब.”

कारण पक.पव डकड ह्यांचे क केन्द्रांत दोन समान भाग पडले आहेत [सि. १८. उपसि.],

∴ पड = पड = पड = पड [यूक्लिड, १.३६.]

∴ लल समान्तरभुजचौकोन = पड + पड + पड + पड,

= ४ पड समान्तरभुजचौकोन,

= ४ कट.डर काटकोन चौकोन,

= ४ अक.बक काटकोन चौकोन,

= अअ.बब काटकोन चौकोन.

“उपसि. पफ. कड = पड समान्तरभुजचौकोनाचे क्षेत्र

= अक.बक.”

कारण, ३ पफ. कड = ३ पड समान्तरभुजचौकोन,

$$\therefore \frac{1}{2} \text{पफ.कड} + \frac{1}{2} \text{पफ.कड} = \frac{1}{2} \text{पड समान्तरभुज चौकोन} \\ + \frac{1}{2} \text{पड समान्तरभुज चौकोन}$$

$$\text{एवमजे पफ.कड} = \text{पड समान्तरभुज चौकोन};$$

$$\text{पड समान्तरभुज चौकोन} = \text{अक.बक, हे सिद्ध केले आहेच.}$$

$$\therefore \text{पफ.कड} = \text{पड समान्तरभुज चौकोन,} \\ = \text{अक.बक.}$$

सिद्धान्त २३.

यूक्लिड, ३.२२. च्या प्रतिसिद्धान्तावरून नखफग चतुर्भुज जासभोवतीं वर्तुळ काढिता येईल.

वर्तुळ फ बिन्दूंतून जात नसेल तर फ बिन्दूंतून जाते असें मान.

$$\text{आतां गनख कोन} + \text{खफग कोन} = २ \text{ काटकोन};$$

परंतु गनख कोन + खफग कोन = २ काटकोन हे सिद्ध केले आहे;

गनख कोन उभय साधारण आहे; तो काढून घेतल्यावर खफग कोन = खफग कोन, हे अशक्य; [यूक्लिड, १.१६.]

ह्या प्रमाणेच फ बिन्दु फ बिन्दूच्या पलीकडे घेऊन दारखवितां येईल.

ह्यास्तच वर्तुळ फ बिन्दूंतून न जातां फ बिन्दूंतूनच जाईल.

$$\text{"पग.पफ} = \text{परख.पन, [यूक्लिड, ३.३६. उपसि.]}$$

$$= \text{कट.कन.}"$$

कारण परख = कट, कारण पट डड-शीं समान्तर आहे, [क. ३६. पहा.],

व पन = कन, स्पष्टच आहे.

$$[\text{पफ.पग} = \text{अकै.}]$$

पन-ला डड-स ख बिन्दूंत मिळे पर्यंत वाढीच, व प-बिन्दुस्थ स्पृशीला वाढविलेल्या महत्तराक्षास ट बिन्दूंत मिळू दे. गरख सांध.

(२२२)

शङ्कुच्छेद.

आतां गर्भ-स व्यास कल्पून काटिलेले वर्तुळ फ, न बिन्दूतून जा-
ईल [यूक्लिड, ३. २१. प्रतिसिद्धान्त.]. कारण गफर्भ कोन व
गनर्भ कोन काटकोन आहेत;

∴ पफ.पग = पन.पर्य, [यूक्लिड, ३. २६. उपसि.]
= कन.कद, [समसमद्विभुजता, क. ३६. पहा.]
= अकै, [सि. ९.]

सिद्धान्त २४.

“∴ पफ कड- वर लम्बरूपानें पडते,”

कारण पफ हा संपर्कलम्ब आहे, सणून प बिन्दुस्थ कोन काट-
कोन आहेत, सणून फ बिन्दुस्थ कोन ही काटकोन आहेत. [यूक्लि-
ड, १. २९. व लक्ष. १०.]

“∴ पफ.कड = अक.बक.”

कारण पफ.कड = अक.बक, [सि. २२. उपसि.]

परंतु कड = कड, [सि. १८. उपसि.]

∴ पफ.कड = अक.बक.

“ कड : पग :: अक : बक. (१) ”

कारण, पफ.कड = अक.बक, [सि. २२. उपसि.]

$$\text{सणजे } \frac{\text{पफ}}{\text{बक}} = \frac{\text{अक}}{\text{कड}},$$

व पफ.पग = बक.बक, [सि. २३.]

$$\text{सणजे } \frac{\text{पफ}}{\text{बक}} = \frac{\text{बक}}{\text{पग}},$$

$$\text{व्यास्तव } \frac{\text{बक}}{\text{पग}} = \frac{\text{अक}}{\text{कड}},$$

$$\text{सणजे } \frac{\text{कड}}{\text{पग}} = \frac{\text{अक}}{\text{बक}},$$

ह्रणजे कड : षग :: अक : बक (१.)

“ हा सिद्धान्त १५ व्याच्या इ०.” सि. १५. आक. पहा.

पफ डड-वर लम्बरूप काढ. आतां पसय, पस्यत्रि-
कोण पफई त्रिकोणाशां सरूप आहेत,

कारण, पयस कोन = पर्यस कोन, [समकोणता.]

= पफई कोन,

व सपय कोन = सपय कोन, [सि. ७.]

= पईफ कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

∴ अवशिष्टपसय कोन = अवशिष्टपस्यत्रि कोन, [यूक्लिड, १. ३२.]

= अवशिष्टपफई कोन, [यूक्लिड, १. ३२.]

∴ सप : सय :: पई : पफ, [यूक्लिड, ६. ४.]

व सप : स्यत्रि :: पई : पफ, [यूक्लिड, ६. ४.]

∴ गुणून, सप.सप : सय.स्यत्रि :: पई^३ : पफ^३;

परंतु, पई^३ = अक^३, कारण पई = अक, [सि. १५. उपसि.]

व सय.स्यत्रि = बक^३; [सि. १५.]

∴ सप.सप : बक^३ :: अक^३ : पफ^३;

आणखी, पफ.कड = पफ.कड = अक.बक, [सि. २२. उपसि.]

व क. ३६.]

ह्रणजे, अक : पफ :: कड : बक,

अक^३ : पफ^३ :: कड^३ : बक^३;

∴ सप.सप : बक^३ :: अक^३ : पफ^३,

:: कड^३ : बक^३,

ह्रणजे, सप.सप = कड^३.

सिद्धान्त २६.

समापूर्णाकक्षांतील सि. १९ सारखा आहे. यास्तव तिकडे जी टी-
प दिली आहे तीच एथे ही लागू आहे.

सिद्धान्त २७.

“ज्याअर्थां पहयु त्रिकोण पफक त्रिकोणाशीं सरूप आहे.”

कारण, पहयु कोन काटकोन आहे, [यूक्लिड, ३.३१.]

∴ पहयुकोन = पफक कोन,

व हपयु कोन उभय साधारण आहे

∴ अवशिष्ट पयुहकोन = अवशिष्ट पफककोन. [यूक्लिड, १.३२.]

∴ ते त्रिकोण सरूप आहेत.

समान कोना समोरीलबाजू समप्रमाण असताना,

∴ पयु : पहः :: कप : पफ, [यूक्लिड, ६.४.]

ह्यणजे पयु.पफ = पह.कप, [यूक्लिड ६.१६.]

= २कडे. [सि. २६.]

सिद्धान्त २८.

“पऐयु व पईफ त्रिकोण सरूप आहेत.”

कारण, पऐयु कोन काटकोन आहे, [यूक्लिड, ३.३१.]

व पफई कोन काटकोन आहे,

∴ पऐयु कोन = पफईकोन;

व ऐपयु कोन उभय साधारण आहे,

∴ अवशिष्ट पयुऐ कोन = अवशिष्ट पईफकोन. [यूक्लिड, १.३२.]

∴ त्रिकोण सरूप आहेत.

सिद्धान्त २९.

“नप : नघ :: नप : नघ,”

कारण, नप : नघ :: बक : अक, [सि. १३. उपसि.]

व नप : नघ :: बक : अक, [सि. १३. उपसि.]

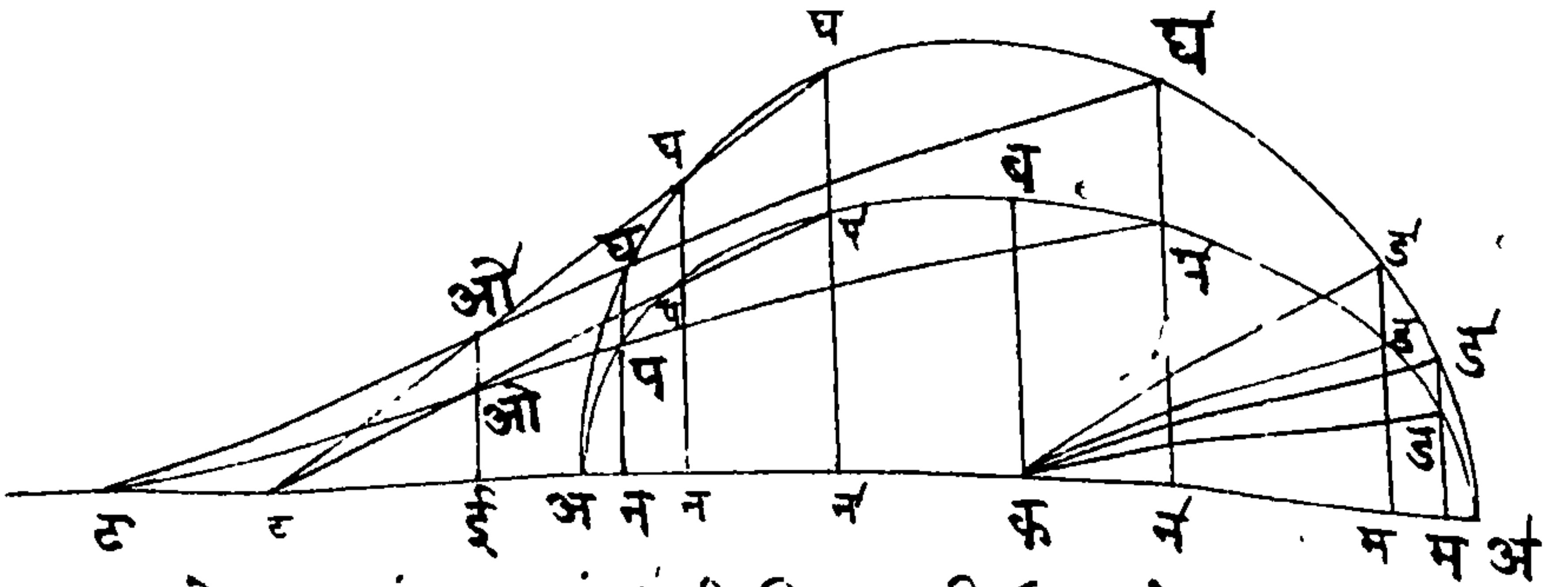
∴ नप : नघ :: नप : नघ. [यूक्लिड, ५.७.]

(२२६)

शङ्कुच्छेद.

विनिमयानें, टनः टनः :: टनः टनः,
∴ टन-टनः टनः :: टन-टनः टनः,
ह्रणजे टटः टनः :: टटः टनः
∴ टन = टन, एकदेश = सर्व, हें अशक्य
“ नपः नघः :: मडः मड, ”

कारण, नपः नघः :: बकः अक, [सि. १३. उपसि.]
व मडः मडः :: बकः अक, [सि. १३. उपसि.]
∴ नपः नघः :: मडः मड. [यूक्लिड ५.७.]
“ जर ओ बिन्दु ऊनसंपूर्णकक्षाच्या बाहेर इ. ”



ओ बिन्दु आंत असतांना जी सिद्धता दिली आहे तीच बाहेर असतांना जाणार्ची.

“ टओ^३ : टओ^३ :: कड^३ : कड^३ ”

कारण, टओओ व कडड त्रिकोण सरूप आहेत,
कारण टओ कड-शीं समान्तर.

∴ मकड कोन = ईटओ कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

व कड टओ-शीं समान्तर आहे,

∴ मकड कोन = ईटओ कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

∴ मकड कोन - मकड कोन = ईटओ कोन - ईटओ कोन,
ह्रणजे डकड कोन = ओटओ कोन;

आणखी कडकड कोन + मकड कोन = कडड कोन, [यूक्लिड, १. २२.]

य ईओ कोन + ईटओ कोन = टओओ कोन, [यूक्लिड, १.३२.]

∴ कडड कोन = टओओ कोन;

∴ अवशिष्ट कडड कोन = अवशिष्ट टओओकोन; [यूक्लिड, १.३२.]

∴ टओओ व कडड त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ टओ : टओ^३ :: कड : कड^३, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ टओ^३ : टओ^३ :: कड^३ : कड^३.

सिद्धान्त ३०.

समापूर्णकक्षांतील सिद्धान्त २० वरील टीपा पहा.

भाग ३.

विषमापूर्णकक्ष.

सिद्धान्त १,२.

ऊनसंपूर्णकक्षांतील सिद्धान्त १,२ ह्याप्रमाणेच आहेत; ह्यास्तव त्यांजवरील टीपा पहाव्या.

सिद्धान्त ३.

“∴ सप-सप : पम-पम :: अअ : क्षक्ष.”

$$\text{ह्यणजे } \frac{\text{सप-सप}}{\text{पम-पम}} = \frac{\text{अअ}}{\text{क्षक्ष}},$$

परंतु पम-पम = मम = क्षक्ष, [समान्तरता.]

$$\therefore \frac{\text{सप-सप}}{\text{क्षक्ष}} = \frac{\text{अअ}}{\text{क्षक्ष}},$$

ह्यणजे सप-सप = अअ.

“सल. अक = बकै.” सि. ४. आक. पहा.

सल अर्द्धी ऊर्द्धमात्रा काढ. ल बिन्दूतून ज्ञापिकेवर लम लम्बकाढ.

(१२८)

शङ्कुच्छेद.

आतां सलः लमः : सअः अक्षः [लक्ष.]

सलः सक्षः : सअः अक्षः,

:: कसः कअ, [सि.२. (२०)]

∴ सल.कअ = कस.सक्ष, [यूक्लिड, ६.१६.]

= कस (कस-कक्ष),

= कसै-कस.कक्ष,

= कसै-कअ, [सि.२.]

= बके. [क.४८.]

सिद्धान्त ४.

(१) घ बिन्दु जर विषमापूर्णाकक्षाच्या अन्तर्द्वेषागांत असून स-च्या अधिक जवळ असेल, तर

सघ-सघ > अक्ष.

सघ सांध. तसेच सघ सांध. सघ-ला वृत्तासर्प बिन्दूत मिळू दे. सर्प सांध. आतां

ज्या अर्थी सघ = सर्प + पघ,

व सघ > सर्प + पघ, [यूक्लिड, १.२०.]

∴ सघ-सघ > सर्प-सर्प,

परंतु सर्प-सर्प = अअ, [सि.३.]

∴ सघ-सघ > अअ.

(२) घ बिन्दु जर विषमापूर्णाकक्षाच्या बहिर्गोल भागांत असून स-च्या अधिक जवळ असेल, तर

सघ-सघ < अअ.

सघ, सघ सांध. सघ-ला वृत्तासर्प बिन्दूत मिळू दे. सर्प सांध. आतां,

सघ < सर्प + पघ, [यूक्लिड, १.२०.]

व सघ = सर्प + पघ,

∴ सघ-सघ ∟ सर्प-सर्प,
परंतु सर्प-सर्प = अर्ध, [सि.३.]

∴ सघ-सघ ∟ अर्ध.

सिद्धान्त ५, ६, ७ करितां ऊनसंपूर्णकक्षांतील सिद्धान्त ६, ७,
८ ह्यांजवरील टीपा पहा.

सिद्धान्त ८.

“सट-सट : सट+सट :: क्षन-क्षन : क्षन+क्षन”
सट रेघेतून सट तुकडा सट बरोबर कर. आतां अवशिष्ट
टट = २ कट,

∴ सट-सट = २ कट.

सट+सट = सस = २ कस, कारण कस = कस.

क्षन-क्षन = क्षक्ष = २ कक्ष, कारण कक्ष = कक्ष.

क्षन+क्षन = क्षक्ष+क्षन+क्षन,

= २ कक्ष+क्षन+क्षन,

= कक्ष+क्षन+कक्ष+क्षन,

= कन+कन,

= २ कन.

ह्यास्तव, २ कट : २ कस :: २ कक्ष : २ कन.

सिद्धान्त ९.

“∴ उपग कोन = सर्पट कोनाचा प्रपूरक.”

कारण, सर्पग कोन + उपग कोन = २ काटकोन; [यूक्लिड; १.१३]

परंतु सर्पग कोन = सर्पट कोन + टपग कोन,

∴ सर्पट कोन + टपग कोन + उपग कोन = २ काटकोन,

परंतु टपग कोन काटकोन आहे, कारण पग संपर्क लम्ब आहे,

∴ सर्पट कोन + उपग कोन = १ काटकोन,

(२३०)

शङ्कुच्छेद.

∴ उपग कोन = सर्पट कोनाचा प्रंपूरक.

“सर्ग+सगः सर्ग-सगः :: क्षन+क्षनः क्षन-क्षन,
ह्यणजे २कगः ससः :: २कनः क्षक्ष.”

कारण, सर्ग+सग = सस + सग + सग,
= २कस + सग + सग,
= कस + सग + कस + सग,
= कग + कग,
= २कग.

सर्ग-सग = सस, स्पष्ट आहे,
= २कस.

क्षन+क्षन = क्षक्ष + क्षन + क्षन,
= २कक्ष + क्षन + क्षन,
= कक्ष + क्षन + कक्ष + क्षन,
= कन + कन,
= २कन.

क्षन-क्षन = क्षक्ष = २कक्ष, स्पष्ट आहे.

ह्यास्तव, सर्ग+सगः सर्ग-सगः :: क्षन+क्षनः क्षन-क्षन.

ह्यणजे, २कगः ससः :: २कनः क्षक्ष,
विनिमयाने, २कगः २कनः :: ससः क्षक्ष,
ह्यणजे २कगः २कनः :: २कसः २कक्ष,
ह्यणजे, कगः कनः :: कसः कक्ष.

सिद्धान्त १०.

ऊनसंपूर्णकक्षांतील सि. १३ वरील टीपा पहा.

सिद्धान्त ११.

“उपसि. ह्यास्तव,

सर्गः सर्पः :: कसः कअ.”

कारण, पग संपर्कलम्ब सपउ कोनाचे दोन समान भागकरितो,

∴ सर्गः सगः :: सर्पः सप [यूक्लिड, ६.सि.अ.]

सर्गः सग-सग :: सर्पः सप-सप;

परंतु सप-सप = अअ, [सि.३.]

व सग-सग = सस,

∴ सर्गः सस :: सर्पः अअ,

विनिमयानें, सर्गः सर्पः :: ससः अअ,

:: २कसः २कअ;

:: कसः कअ.

सिद्धान्त १२.

दुसऱ्या भागांतिल सि.१५ सारखा आहे, ह्यास्तव तिकडील टीपा पहाव्या.

“ह्याप्रमाणेंच कर्ष = कअ.”

सर्षव पस ह्यांना उ बिन्दूंत मिळेपर्यंत वाढीव आतां

∴ सर्षकोन = उषकोन, [सि.६.]

व सर्षपकोन = उषपकोन, [समकोणता]

व पष चजू उषय साधारण आहे,

∴ सर्षत्रिकोण = उषत्रिकोण, सर्षाशीं,

∴ सर्ष = उष, व सर्ष = उष

आणखी, सर्ष-सप = सउ = सउ = अअ, [सि.३.]

∴ सक = कस, व सर्ष = यउ,

∴ सकः कस :: सर्षः यउ, [प्रमाणसाम्य]

∴ कर्ष सउ-शीं समान्तर आहे, [यूक्लिड, ६.२.]

∴ कर्षः सउ :: कसः सस, [प्रमाणसाम्य]

∴ कर्ष = ३ सउ = कअ.

सिद्धान्त १३.

“जर ओ बिन्दु मऐर्म वर्तुळाच्या आंत असेल, तर ओस
 ७ ओऐ-पेक्षां मोठी असते हें स्पष्ट आहे.”

कारण, ह्यापक्षां ओऐ ओस-चा एकदेश असते.

∴ ओस ७ ओऐ.

“परंतु ओ बिन्दु जर मऐर्म वर्तुळाच्या बाहेर असेल तरी दे-
 खील ओस ओऐ-पेक्षां मोठी असते.”

कारण, आतां असें मनांत आण कीं जर ओ बिन्दु विषमा-
 पूर्णाकक्षावर असता, तर

ओस-ओस = अअ, [सि.३.]

= सऐ, [रचना.]

असें झालें असतें; परंतु ओ बिन्दु तर विषमापूर्णाकक्षाच्या बाहेर
 आहे,

∴ ओस-ओस < अअ किंवा सऐ; [सि.४.]

परंतु सऐ ह्यणजे ओस-ओऐ,

∴ ओस-ओस < ओस-ओऐ;

आतां ह्या अन्तिम विषमीकरणांत ओस, ओस ह्यांचे व्य-
 वकलन, ओस, ओऐ ह्यांच्या व्यवकलनापेक्षां कमी आहे हें सिद्ध
 झालें; ओस ही दोहों ही विषमबाजूस साधारण आहे; यास्तव
 ओस ओऐ-पेक्षां मोठी असल्या वांचून प्रथम व्यवकलन द्वितीय
 व्यवकलनापेक्षां कमी होणें नाहींच,

∴ ओस ७ ओऐ.

उभयपक्षां ही ओस ओऐ-पेक्षां मोठी हें तासर्थ.

“ओ केन्द्र व ओस विज्या कल्पून काढिलेले दुसरे वर्तुळ
 पहिल्या वर्तुळास छेदीलच.”

कारण, ओस ही उभयपक्षां ओऐ-पेक्षां मोठी असते,

∴ दुसरें वर्तुळ पहिल्या वर्तुळास छेदीलच.
 “ ह्या प्रमाणेंच ओर्प ही र्प बिन्दुस्थ स्पृक् होईल ” ती अशी-
 कारण, सर्प-सर्प = अर्प = स ए, [सि. ४. व रचना.]
 = सर्प, [त्रिज्या.]

∴ सर्प = सर्प + सर्प,
 परंतु सर्प = सर्प + र्प,
 ∴ सर्प + र्प = सर्प + सर्प,
 ∴ र्प = सर्प.
 ∴ र्प, ओर्प = सर्प, ओर्प, अनुक्रमे,
 व ओर्म = ओर्स [त्रिज्या.]
 ∴ ओर्पर्प कोन = ओर्पर कोन [यूक्लिड, १.८.]
 ∴ ओर्प ही र्प बिन्दुस्थ स्पृक् झाली. [सि. ६.]
 “ प, र्प संपर्क बिन्दु इ. ”

जर ओ बिन्दु उपसंजिहानांनी निर्मितेल्या कोनाच्या आंत असे-
 ल तर स्पृग्द्वय वृत्ताच्या एकाच शारवेस स्पर्श करील; परंतु ओ बि-
 न्दु जर त्यांनी निर्मितेल्या बाह्य कोनाच्या आंत असेल, तर स्पृग्द्वय
 अग्निमुख शारवांस स्पर्श करील, हें तात्पर्य.

सिद्धान्त १५.

“ कट. कन : पनै :: कट. कन : कन. नट; ”
 दुसऱ्या भागांतील सि. १४ वरील टीपांतील ह्या परिपाकाव
 रील टीप पहा.

सिद्धान्त १६.

“ पनै-रनै = बकै,
 व डर्मै-रमै = अकै... ”
 कारण, रनक व ओअक त्रिकोण सरूप आहेत,

(२३४)

शङ्कु-च्छेद.

कारण, रनक कोन = ओअक कोन, [समकोणता.]

करन कोन = कओअ कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

व अवशिष्ट रकन कोन उभय साधारण आहे;

∴ रन : कन :: अओ : अक, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ रनै : कनै :: अओः अकै,

∴ बकै : अकै, [समान्तरता.]

व पनै : कनै - कअः :: बकै : अकै; [सि. १०.]

∴ पनै - रनै : अकै :: बकै : अकै;

∴ पनै - रनै = बकै.

पुनः, रमक व ओअक त्रिकोण सरूप आहेत,

कारण, मरक कोन = ओकअ कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

व रमक कोन = ओअक कोन, [समकोणता.]

∴ अवशिष्ट मकर कोन = अवशिष्ट कओअ कोन; [यूक्लिड, १.३२.]

∴ रम : कम :: अक : बक, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ रमै : कमै :: अकै : बकै,

व डमै : कमै - कअः :: अकै : बकै; [सि. १०.]

∴ डमै - रमै : बकै :: अकै : बकै

∴ डमै - रमै = अकै.

ह्यास्तव, पनै - रनै = बकै,

व डमै - रमै = अकै.

सिद्धान्त १७.

“कई : कओ :: कक्ष : कअ.”

कारण कईक्ष, कओअ त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ कई : कक्ष :: कओ : कअ, [यूक्लिड, ६.४.]

विनिमयाने, कई : कओ. : कक्ष : कअ.

“कओ = कसै.”

कारण, कओ^३ = कओ^३ + अओ^३, [यूक्लिड, १. ४७.]
 = कओ^३ + बकै, [समान्तरता.]
 = कसै. [क. ४८.]

सिद्धान्त १८.

“रनै : रमै :: बकै : अकै,”

कारण, कनर कअ ओ त्रिकोण सरूप आहेत,

∴ रनै : कनै : अओ^३ : अकै,

परंतु कनै = रमै, व अओ^३ = बकै, [समान्तरता.]

∴ रनै : रमै :: बकै : अकै. [१.]

“रनै-पनै : रमै-डमै :: बकै : अकै,”

कारण, रनै-पनै = बकै, [सि. १६.]

व रमै-डमै = अकै, [सि. १६.]

∴ रनै-पनै : बकै :: रमै-डमै : अकै, [प्रमाणसाम्य.]

विनिमयाने, रनै-पनै : रमै-डमै :: बकै : अकै. [२.]

“पनै : डमै :: बकै : अकै.”

कारण, [१.] व [२.] ह्यांजपासून,

$$\frac{\text{रनै}}{\text{रमै}} = \frac{\text{रनै-पनै}}{\text{रमै-डमै}} = \frac{\text{बकै}}{\text{अकै}},$$

$$= \frac{\text{पनै}}{\text{डमै}} = \frac{\text{बकै}}{\text{अकै}}$$

∴ पनै : डमै :: बकै : अकै.

सिद्धान्त १९.

“सरूप त्रिकोणावरून,”

ह्रणजे रघुघ, रघुघ त्रिकोण, व रउघ, रउघ त्रिकोण सरूप आहेत, हे कसे ते खाली लिहित्या प्रमाणे.

(२३६)

शङ्कुच्छेद.

कारण, रघुघ कोन = रघुघ कोन [यूक्लिड, १. २९.]

घुघरकोन = उघघ = रघघु (यूक्लिड, १. १५. व व्युत्क्रमकोणता)

व र बिन्दुस्थ कोन उभय साधारण आहे

∴ रघुघ, रघुघ त्रिकोण सरूप आहेत.

रउघ त्रिकोण रउघ त्रिकोणाशीं सरूप आहे

कारण,

र बिन्दुस्थ कोन उभय साधारण आहे,

रघउ कोन = घुघर कोन = रघउ कोन (यूक्लिड, १. १५. व -
व्युत्क्रमकोणता.)

व रउघ कोन = रउघ कोन (यूक्लिड, १. २९.)

∴ घर : घघु :: घर : घघु [यूक्लिड, ६. ४.]

व घर : घउ :: घर : घउ. [यूक्लिड, ६. ४.]

“परंतु घर. घर = घर. घघ + घर. घर,

व घर. घर = घर. घघ + घर. घर.”

कारण घर ह्यणजे घघ + घर,

व घर ह्यणजे घघ + घर;

∴ घर. घर = घर (घघ + घर),

= घर. घघ + घर. घर;

व घर. घर = घर (घघ + घर),

= घर. घघ + घर. घर,

= घर. घघ + घर. घर.

“∴ घर. घघ = घर. घघ.”

कारण, घर. घर = घर. घर,

∴ घर. घघ + घर. घर = घर. घघ + घर. घर.

∴ घर. घघ = घर. घघ

ह्यणजे घर = घर.

“उपसि. २. रघ : वर :: लघ : पल, इ०”

कारण, कपः पलः :: कवः वर, [यूक्लिड, ६.४.]

विनिमयाने, कपः कवः :: पलः वरः;

व कपः पलः :: कवः वर, [यूक्लिड, ६.४.]

विनिमयाने, कपः कवः :: पलः वर,

ह्यास्तव, पलः वरः :: पलः वर,

ह्यणजे रवः रघः :: पलः पल.

परंतु पल = पल, [उपसि.१.]

∴ रव = वर;

व रघ = घर;

∴ अवशिष्ट घव = अवशिष्ट घव.

सिद्धान्त २०

“संरूपं त्रिकोणा वस्तुन,”

ह्यणजे युघर व ईपल त्रिकोण संरूप आहेत, ते असे-
युघउ ईपई-शीं समान्तर आहे,

∴ घयुर कोन = पईल कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

व लपल रघर-शीं समान्तर आहे,

∴ पलई कोन = घरयु कोन; [यूक्लिड, १.२९.]

∴ अवशिष्ट ईपल कोन = युघर कोन; [यूक्लिड, १.३२.]

आणखी घरउ व पलई त्रिकोण संरूप आहेत, ते असे-
रघर लपल-शीं समान्तर आहे,

∴ घरउ कोन = पलई कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

व ईपई युघउ-शीं समान्तर आहे,

∴ घउर कोन = पईल कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

∴ अवशिष्ट रघउ कोन = अवशिष्ट लपई कोन. [यूक्लिड, १.३२.]

“उपसि. जर घ प सहचरित विषमापूर्णकक्षास इ०, तर
घर. घर = पलै, ”

घबिन्दूतून घयुउ निर्णायिका काढ. आतां,
 घ रघु त्रिकोण घयुरत्रिकोणाशीं सरूप आहे,
 कारण, घ रघु कोन = घ रघु कोन, [यूक्लिड, १.१५.]
 व युघउ घयुउ-शीं समान्तर आहे,

∴ रघयु कोन = रघयु कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

∴ अवशिष्ट घयुरकोन = अवशिष्ट घयुरकोन. [यूक्लिड, १.३२.]
 परंतु घयुर त्रिकोण ईपल त्रिकोणाशीं सरूप आहे हे
 सिद्ध केले

∴ घ रघु त्रिकोण ईपल त्रिकोणाशीं सरूप आहे.

“पुनः घ रउ त्रिकोण घ रउ त्रिकोणाशीं सरूप आहे,”

कारण, र घउ कोन = युघर कोन, [यूक्लिड, १.१५.]

परंतु युघर कोन = र घउ कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

∴ र घउ कोन = र घउ कोन;

व रउघ कोन = रउघ कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

व घ रउ कोन = घ रउ कोन;

परंतु घ रउ त्रिकोण पलई त्रिकोणाशीं सरूप आहे हे सिद्ध केले,

∴ घ रउ त्रिकोण पलई त्रिकोणाशीं सरूप आहे.

ह्यास्तव,

घरः घयुः :: पलः पई, [यूक्लिड, ६.४.]

व घरः घउः :: पलः पई, [यूक्लिड, ६.४.]

∴ गुणून,

घर.घरः घयु.घउः :: पल.पलः पई.पई;

परंतु घयु.घउ = बकै = पई.पई, [सि.१६. उपसि.]

∴ घर.घरः बकैः :: पल.पलः बकै,

∴ घर.घर = पल.पल,

= पलै. [सि.१९. उपसि.१.]

सिद्धान्त २१.

“संरूप त्रिकोणां वस्तुन” ह्यणजे पहरे व ओकओ त्रिकोण संरूप आहेत; ते असे

ओओ रर-शीं समान्तर आहे.

∴ कओओ कोन = हरप कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

व ओकओ कोन = रहप कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

∴ अवशिष्ट कओओ कोन = अवशिष्ट हरप कोन. [यूक्लिड, १.३२.]

आणखी कपर व कओओ त्रिकोण संरूप आहेत,

कारण, कओओ कोन = ररप कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

ओकओ कोन = परवर कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

∴ अवशिष्ट कओओ कोन = अवशिष्ट ररप कोन. [यूक्लिड, १.३२.]

सिद्धान्त २२.

“ह्याप्रमाणेच कल = २ करव = २ पह,”

कारण, परव कल-शीं समान्तर आहे,

∴ कल : करव :: लल : पल, [यूक्लिड, ६.२.]

परंतु लल = २ पल, [सि. १९. उपसि. १.]

∴ कल = २ करव = २ पह:

“कल. कल = कसै,

= कओ. कओ.”

कारण, कसै = अकै + बकै, [क. ५६.]

= अकै + भओ, [समान्तरता.]

= कओ, [यूक्लिड, १.४७.]

= कओ. कओ.

सिद्धान्त २४.

“करै-कपै = नरै-नपै
= बकै.”

कारण, करै = कनै + नरै, [यूक्लिड, १. ४७.]

व कपै = कनै + नपै, [यूक्लिड, १. ४७.]

∴ करै-कपै = नरै-नपै,

= बकै. [सि. १६.]

“द्याप्रमाणेच करै = कडै + अकै.”

कारण, करै = कमै + रमै, [यूक्लिड, १. ४७.]

व कडै = कमै + मडै, [यूक्लिड, १. ४७.]

∴ करै-कडै = रमै-मडै,

= अकै; [सि. १६.]

∴ करै = कडै + अकै.

सिद्धान्त २५.

“उपसि. पफ.पग = बकै.”

व [पफ.पग = अकै]

पग संपर्कलम्ब काठ. त्याला वाढीव, वडेंड-स फ बिन्दूंत व बब-स ग बिन्दूंत मिळूं दे. पन निर्णायिका अअ-वर काठ. पन-ला वाढविलेल्या डड-स स्व बिन्दूंत मिळूं दे. गरव सांध. पन निर्णायिका बब-वर काठ; तिला डड-स स्व बिन्दूंत मिळूं दे. पट स्पृशेला वाढविलेल्या बब-स ट बिन्दूंत मिळूं दे. आतां

फ, न बिन्दुस्थ कोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव गरव व्यास कल्पून काढिलेलें वर्तुळ फ, न, ग, स्व बिन्दूंतून जाईल, [यूक्लिड, ३. ३१. प्रतिसिद्धान्त.]

∴ पफ.पग = परव.पन, [यूक्लिड, ३. ३५.]

= कट. कन, [समसमद्विभुजता.]

= बकै. [सि. १५.]

पुनः फ, न बिन्दुस्थ कोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव फग नख चतुर्भुजासमोवतीं वर्तुळ काठितां येईल, [यूक्लिड, ३.२२. प्रतिस्ति.]

∴ पफ. पग = पख. पन, [यूक्लिड, ३.२६. उपसि.]

= कट. कन, [समसमद्विभुजता]

= अकै. [सि. ८.]

सिद्धान्त २६.

“ रवै : पलै :: कवै : कपै ६० ”

कारण, लप रव-शीं समान्तर आहे,

∴ कपल कोन = कवर कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

व कलप कोन = करव कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

व रकव कोन उभय साधारण आहे,

∴ कलप, करव त्रिकोण सरूप आहेत;

∴ रव : कव :: पल : कप, [यूक्लिड, ६: ४.]

∴ रवै : कवै :: पलै : कपै,

विनिमयाने, रवै : पलै :: कवै : कपै.

∴ रवै-पलै : पलै :: कवै-कपै : कपै;

परंतु रघ. घर = पलै, [सि. २०.]

व रघ. घर + घवै = रवै, [यूक्लिड, २. ५.]

∴ रघ. घर = रवै-घवै,

∴ रवै-घवै = पलै,

∴ रवै-पलै = घवै.

“ उपसि. घवै : कवै+कपै :: कडै : कपै. ”

कारण, रवै : पलै :: कवै : कपै,

संकलनाने, रवै+पलै : पलै :: कवै+कपै : कपै;

व घर्ष. घर्ष = पल्लै; [सि. २०. उपसि.]

परंतु घर्ष. घर्ष + रवै = घर्वै; [यूक्लिड, २. ६.]

∴ पल्लै + रवै = घर्वै;

∴ घर्वै : पल्लै :: कर्वै + कर्पै : कर्पै.

परंतु पड हा समान्तरभुज चौकोन आहे, [सि. २३.]

∴ पल्ल = कड,

∴ पल्लै = कडै;

∴ घर्वै : कडै :: कर्वै + कर्पै : कर्पै,

विनिमयाने, घर्वै : कर्वै + कर्पै :: कडै : कर्पै.

सिद्धान्त २७.

“ रर-चे घ बिन्दूंत दोन समान भाग झाले ”

कारण, घघ रर-शीं समान्तर आहे,

∴ रघ : घर :: रघ :: घर; [यूक्लिड, ६. २.]

परंतु रघ = घर, [सि. १९. उपसि. १.]

∴ रघ = घर.

“ रवघ रर-शीं समान्तर आहे, ”

कारण, ररव = ररव, [सि. १९. उपसि. २.]

व रघ = घर, सिद्ध केले

∴ ररव : ररव :: रघ : घर, [प्रमाणसाम्य]

∴ रवघ रर-शीं समान्तर आहे. [यूक्लिड, ६. २.]

सिद्धान्त २८

“ रओ : ओई :: पल्ल : पयु, ”

कारण, रओई, लपयु त्रिकोण सस्वरूप आहेत, कारण
रओ लप-शीं समान्तर आहे,

∴ रओ कोन = लपकोन, [यूक्लिड, १. २९.]

व ईओई युपउ-शीं समान्तर आहे,

∴ रईओ कोन = लयुपकोन, [यूक्लिड, १.२९.]

∴ अवशिष्ट युपल कोन = अवशिष्ट ईओर कोन, [यूक्लिड, १.३२.]

∴ रओः ओईः : पलः पयु. [यूक्लिड, ६.४.]

“व रओः ओईः : पलः पउ,”

कारण रओई, लपउ त्रिकोण सरूप आहेत, कारण

ओरई कोन = पलउ कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

ओईर कोन = पउल कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

∴ अवशिष्ट रओई कोन = अवशिष्ट लपउ कोन, [यूक्लिड, १.३२.]

∴ रओः ओईः : पलः पउ. [यूक्लिड, ६.४.]

सिद्धान्त २९.

ऊनसंपूर्णकक्षाचा सिद्धान्त २६ वरील टीपा पहा.

सिद्धान्त ३०

“पहयु, पफक त्रिकोण सरूप आहेत,”

कारण, पहयु कोन सामिबर्तुलांत आहे

∴ तो काटकोन आहे; [यूक्लिड, ३.३१.]

व पफक कोन काटकोन आहे [रचना.]

∴ पहयुकोन = पफक कोन,

व हपयु कोन = फपक कोन. [यूक्लिड, १.१५.]

∴ अवशिष्ट पयुह कोन = पकफ कोन.

सिद्धान्त ३१.

“पऐयु, पईफ त्रिकोण सरूप आहेत, ३०”

कारण, पऐयु कोन सामिबर्तुलांत आहे,

∴ तो काटकोन आहे, [यूक्लिड, ३.३१.]

व प फई कोन काटकोन आहे, [रचना.]

∴ प ऐ यु कोन = प फई कोन;

पुनः, पट ही स्पृक आहे व प ग हा संपर्क लम्ब आहे,

∴ युपट कोन = फपट कोन; [समकोणता.]

परंतु पट ही स्पृक आहे,

∴ सपट कोन = सपट कोन, [सि. ६.]

∴ युपट कोन—सपटकोन ह्यणजे युप ऐ कोन,

व फपट कोन—सपटकोन ह्यणजे फपई कोन,

∴ युप ऐ कोन = फपई कोन;

∴ अवशिष्ट पयु ऐ कोन = अवशिष्ट पई फ कोन, [यूक्लिड, १. ३२.]

∴ प ऐ यु, प फई त्रिकोण सरूप इ०.

सिद्धान्त ३२.

“सरूप त्रिकोणां वरून” ह्यणजे प ऐ उ व क ई क्ष त्रिकोण सरूप आहेत ह्यणून,

कारण, प उ ऐ कोन = क ई ई कोन, [समकोणता.]

व उ प ऐ कोन = ई क क्ष कोन, [यूक्लिड, १. २९.]

∴ अवशिष्ट प ऐ उ कोन = अवशिष्ट क ई क्ष कोन, [यूक्लिड, १. ३२.]

∴ त्रिकोण सरूप इ०.

“ ∴ सप = प ऐ. ”

कारण, प ऐ : प उ :: क ई : क क्ष, [यूक्लिड, ६. ४.]

:: क अ : क क्ष. [सि. १७.]

∴ प ऐ : प उ :: क अ : क क्ष;

परंतु सप : प उ :: स अ : अ क्ष, [सि. १.]

:: क अ : क क्ष, [सि. २.]

∴ सप : प उ :: क अ : क क्ष.

त्यास्तव प ऐ : प उ :: सप : प उ, [यूक्लिड, ५. ७.]

$$\text{ह्यणजे } \frac{\text{पऐ}}{\text{पउ}} = \frac{\text{सप}}{\text{पउ}}$$

$$\therefore \text{सप} = \text{पऐ.}$$

“ह्याप्रमाणेच सप = पऐ.”

षउउ दुसऱ्या जापिकेवर लम्बरूप काढ. आतां पउऐ व कईक्ष त्रिकोणं सरूप आहेत,

कारण पउऐ कोन = कईक्ष कोन, [समकोणता.]

व उपऐ कोन = कईक्ष कोन, [यूक्लिड, १.२९.]

\therefore अवशिष्ट पऐउ कोन = अवशिष्ट कईक्ष कोन, [यूक्लिड, १.३२.]

$$\therefore \text{पऐ} : \text{पउ} :: \text{कई} : \text{कक्ष}, [\text{यूक्लिड}, ६.४.]$$

$$:: \text{कअ} : \text{कक्ष}. [\text{सि. १७.}]$$

$$\text{परंतु सप} : \text{पउ} :: \text{सप} : \text{पउ}, [\text{सि. १.}]$$

$$:: \text{सअ} : \text{अक्ष},$$

$$:: \text{कअ} : \text{कक्ष}; [\text{सि. २.}]$$

$$\therefore \text{पऐ} : \text{पउ} :: \text{सप} : \text{पउ}; [\text{यूक्लिड}, ५.७.]$$

$$\therefore \text{सप} = \text{पऐ.}$$

“परंतु करै - कई = रमै - डमै

$$= \text{कअ}; [\text{सि. १६.}]”$$

कारण, करै = रमै + कमै, [यूक्लिड, १.४७.]

व कई = डमै + कमै, [यूक्लिड, १.४७.]

$$\therefore \text{करै} - \text{कई} = \text{रमै} - \text{डमै},$$

$$= \text{कअ}. [\text{सि. १६.}]$$

कटीण शब्दांचा कोश.

अ.

अक्ष—*Axis.*अन्त्यस्थ—*At the extremity; अन्यांत असणारे.*अधराहत—*Having a dash below; खाली ज्यास आघात आहे तो जसें प*अभिमुख—*Opposite; समोरील.*अभिमुखकोणस्थ—*(Standing at the opposite angles; समोरील कोनांत असणारा.*अन्तर्भाव—*Inclusion.*अन्तरसाम्य—*Equality of distance.*अवशिष्ट—*Remaining.*अविशेष—*Not particular, any; पाहिजे तो.*अवरुद्ध—*Intercepted*अथार्थ—*Not true; खरा नव्हे.*अभिमुखशाखा—*Opposite branch; समोरील शाखा.*अभिन्न—*Not different; the same; constant.*अन्तिमपक्ष—*The last case.*अभिन्नप्रमाण—*Constant ratios; the same ratio.*

जसें १:२::२:४::४:८::८:१६इ०

अन्यतर—*The other of the two, when एकतर occurs in the same question. When alone one of the two. २. Either. दोहों पैकीं एक.*असन्नता—*Sameness.*अन्तान्तर—*An infinite distance. Infinity.*अन्तर—*१ Distance; २ Difference; १ लांबी. २ खजाबाकी.*अन्वर्त—*Concave*अन्वर्तता—*Concavity.*अनुपात—*Proportion. ह्या श-*

द्वान्त त्रैराशिक, पञ्चराशिक, सप्तराशिक इत्यादिकांचा समावेश होतो. मूळ शब्दाचा अर्थ एकामागून एक पडणे - जसे- २:४::३:६::५:१०::६:१२	बहुतां पैकीं एक.
अनुपातस्थ - <i>In proportion</i>	अन्यतरनाभिस्थकोन - <i>Angles at either foci.</i>
अनुपातपद - <i>Proportional</i>	दोहोंनाभीपैकीं एकानाभीजवळ असणारा कोन.
अनुपात्य.	अभिन्नप्रमाण - <i>The same ratio.</i> तेंच प्रमाण. जसे- २:४::३:६::५:१०::६:१२.
अनुपाततृतीयपद - <i>Third proportional.</i> तृतीयानुपात्य.	आदेशाने - <i>By substitution</i>
अनुपातमध्यमपद - <i>Mean proportional.</i> मध्यमानुपात्य.	आमुख - <i>Introduction.</i>
अनुपातचतुर्थपद - <i>Fourth proportional.</i> चतुर्थानुपात्य.	आद्यविषमापूर्णकक्ष - <i>The original Hyperbola.</i>
अखण्डानुपात - <i>Continued proportion.</i>	आन्तर - <i>Interior.</i> आंतील.
अखण्डानुपातपद - <i>Continual proportional.</i>	उ
अखण्डानुपात्य.	उपगा - <i>An asymptote</i>
अभिन्नराशि. <i>Constant quantity.</i>	उपसंजिहाना - <i>tote</i> जवळ येणारी रेघ
अनन्तवर्तुलमाला - <i>An infinite series of circles.</i>	उपस्पृक् - <i>Subtangent.</i>
अन्यतम - <i>One of many.</i>	उपसंपर्कलम्ब - <i>Subnormal.</i>
	उपकारकवर्तुल - <i>The auxiliary circle.</i>
	उपकुर्वाणवर्तुल - <i>A corollary.</i>
	उपसिद्धान्त - <i>A corollary.</i>
	उत्पादकरेघ - <i>The general line.</i>
	उत्पादना - <i>ing line.</i>
	उर्ध्वमात्रा - <i>Latus rectum.</i>
	उर्ध्वरेघ -

ऊर्ध्वशङ्कु - *The right-cone*
उभाशङ्कु.

ऊनसंपूर्णकक्ष - *Ellipse.*

ऊनतः (ऊनप्रमाणतः) संपूर्णकक्षा यस्य तद् वृत्तम्-

ऊनास्तव (ऊनप्रमाणास्तव)

संपूर्ण आहे कक्षा ज्याची किं-

वा ऊनशब्दाचा उच्चार झा-

ल्याबरोबर कमी कोण व को

णाहून इतक्यांची आकाङ्क्षा

आहे. अर्थात् नाभ्यन्तर शा-

पिकान्तरापेक्षा कमी; ह्यास्त-

व परिपूर्ण आहे कक्षा ज्याची.

That curve which

becomes complete

through a ratio

of less inequality.

पर्यायशब्द; ऊनप्रमाणापू-

र्णकक्ष, पूर्णकक्ष, अन्तः-

केन्द्र, (विसर्गमहाप्राणनिवार

णार्थ) अन्तर्गर्भ, भूकक्ष.

ऊनसंपूर्णकक्षमाला - *A series of Ellipses.*

ऊर्ध्वाधराहत - *Having a dash above & below.*

वर व खाली ज्याला आघात अ-

सतो तो जसें प'.

ऋ.

ऋणात्मक - *Negative.*

ए.

एकरूप - *Coinciding.*

एकदेश - *A portion of*

a whole. संगळ्यावस्तू-

चा कांही भाग.

एकतर - *One of the two.*

the first of the two.

एकतान - *Harmonic.*

एकतानश्रेढी - *Harmonic*

progression. कारण

एकाच अनुपातावर अवलंबू

न असते.

एकतानप्रमाण - *Harmonic*

ratio.

एककेन्द्र - *Having the*

same centre, con-

centric. समानकेन्द्र

एकनाभ - *Having the*

same focus, Confo-

ral; समाननाभिक, एक-

नाभिक.

एकसीम - *Conterminus.*

क.

केन्द्र - *Centre.*

कर्ण - 1 Diagonal. 2 Hy-

potenuse. द्विकोण-
दारण.

केन्द्रच्युति-*Eccentricity*,
केन्द्रापासून जाणें.

केन्द्रलशाङ्गुच्छेद-*Central
conic*. ज्यास केन्द्र आहे
तो- सकेन्द्र.

केन्द्रस्थकोन-*The angle
at the centre*. केन्द्राज-
वळ असणारा कोन.

कोणबिन्दु-*Angular po-
ints*.

क्षेत्र- 1. *Area*. 2. *Surface*
१ क्षेत्रफळ. २ पृष्ठभाग.

ग.

गुणक्षेत्र- *A rectangle*.
कारण- दोहों बाजूंचा गुणाकार
करून उत्पन्न होते. काटकोन-
चौकोन.

गोल- *A sphere*.

घ.

घातस्थ- *In involution*.

घनप्रमाण- *Triplicate -
ratio*.

च.

चतुर्भुज- *A quadrila-
teral*.

ज.

ज्ञापिका- *Directrix*. कारण
वृत्तकोणत्या बाजूस पसरतें द्या-
चें ज्ञान करून देते.

ज्या- *A chord*.

ज्ञापिकान्तर- *Distance
from the Directrix*.
ज्ञापिकेपासून जें अन्तर तें.

त.

तन्मयदशा- *Limiting -
position. Limit*.

द.

दैर्घ्य- *Length*. लांबी.

द्राघिष्ठ- *Longest*.

दीर्घतर- *Longer*.

द्वैत्रिज्य- *A sector*.

दीर्घवर्तुल- *Ellipse*.

ऊनसंपूर्णकक्षशब्दपहा.

द्विराहत- *Having two
dashes as प''*

ध.

ध्रुव- *Pole*.

ध्रुव- *Polar*.

धनात्मक- *Positive*.

न.

नाभि- *Focus*. चक्राची किं-
वा कमळाची अथवा मनु-

ध्यादिकांची नाभि मनांत
आणावी म्हणजे ध्यानांत
येईल.

नाभ्यन्तर - *Distance from
the focus; focal dis-
tance*. नाभीपासून जें अन्तर
असतें तें.

नाभिस्थकोन - *Angles at the
focus*.

नैकतान - *Anharmonic*.

नैकतान प्रमाण - *Anharmonic
ratio*.

निर्णायिका - *Ordinate* (कारण
निर्णायक - *Abseissa*) ह्यांच्या
योगानें एखाद्या बिन्दूचे स्था-
नाचा निर्णय करतां येतो. प्र-
भवापासून तो बिन्दु किती अ-
न्तरावर आहे हें काढितां येते.

नल - *A cylinder* - भरीव-
जाणावा.

प.

परिपाक - *Result*.

परिघस्थकोन - *Angle at
the circumference*.

परावृत्त होणे - *To recede*. मा-
गें हटणे.

परिमात्रा - *Parameter* मीय

ते अनयामात्रा; परि (परिपू-
र्णा) मात्राचस्यां द्विगुणनिर्णा-
यिकायाम् सा.

परिसूत्र - *Perimeter*.

पत्रपातळी - *Plane of the
paper*.

प्रभव - *Origin*

प्रपूरक - *Complement*.

प्रपूरक रूपी - *Complement-
ary*

परिभ्रमण - *Revolution*.

पार्श्वस्थ - *Adjacent*.

परिघेकदेश - *A part of
the circumference*.

प्रत्यनुमानानें - *Conversely*.

प्रमाणसाम्य - *Equality of
ratios*. जैसे - २:३ = १४:२१

प्रतिसिद्धान्त - *The converse
proposition*. प्रतिपक्ष,

प्रतिप्रसव, प्रत्युदाहरण इ.
शब्द मनांत आणावे.

प्रमाण - *Ratio*. कारण ह्या श-
ब्दांत मा (मोजणे) धातु आहे.

आपण एकरास दुसऱ्या रा-
शीनें मोजून पाहत असतो.

मग भाग तुरी अगरेन तुरी.
ह्यास्तव 'गुणोत्तर' शब्द घेतला

नाहीं.

परिच्छेद- *Limit.*परिशिष्ट- *Appendix.*

ब.

बहिर्गोल- *convex*. बाहेरून
न गोलाकार.बहिर्गोलता- *Convexity.*बैज- *Algebraic.*

म.

महत्तर- *Greater.*महत्तम- *Greatest.*मर्यादित- *Bounded by.*मध्यबिन्दु- *Middle point.*महत्तराक्ष- *Major axis.*कारण हा लघुतराक्षापेक्षां मोठा
असतो.

ल.

लघुतराक्ष- *The minor axis.*लघुतम- *Least.*लक्षण- *Definition.*लम्बरूप- *At right an-
gles.*

व.

वलमान वर्तुल- *Circle of
curvature.*वृत्त- *A curve.* समिताकाररेष. *A symmetrical**line.*विषमापूर्णकक्ष- *Hyper-
bola*. विषमतः (विषमप्र-

माणतः) असंपूर्णकक्षा य-

स्य. विषमास्तव (विषमप्र-

माणास्तव) असंपूर्ण आहे

कक्षाच्याची. किंवा विषम-

शब्द उच्चारिल्याबरोबर मोठें

कोण व कोणाहून ह्याची

आकाङ्क्षा राहते. अर्थात्

नाभ्यन्तर ज्ञापिकान्तरापे-

क्षां मोठें असते. *That**curve which re-**mains incomplete**from a ratio of gre-**ater inequality.* प-

र्यायशब्द. विषमप्रमाणा-

पूर्णकक्ष, द्व्यपूर्णकक्ष, ब-

हिःकेन्द्र, (विसर्गमहाप्राण-

निवारणार्थ) बहिर्गर्भ, वि-

श्वकक्ष, द्विकक्ष, विकक्ष.

विनिमयाने- *Alternately*

(lit. by exchange)

वर्तिका- *The harmonic*

pencil.

व्यवहारार्थ- *Practically.*

वर्ग- } *The square.*
वर्गक्षेत्र }

वर्गप्रमाण- *Duplicate ratio.*

विप्रतिच्छेदबिन्दु- *Point of intersection.* ही तिला व ती हिला जेथे छेदिते तो बिन्दु. छेदबिन्दु.

विप्रतिपात- *Inclination.*

विप्रतिपात रूपी कोन- *Angle of inclination.*

व्यतिक्रान्ताक्ष- *The transverse axis.*

व्यवकलन } *Difference.* वजा
व्यवकलित } वाकी. हे शब्द कचित् योजिले आ
हेत.

व्यतिहरण- *Reciprocation.*

व्यतिहत- *Reciprocal.*

व्युत्क्रमखण्ड- *Alternate segment.*

वैषम्य- *Inequality*

विषमीकरण- *Inequality of Algebra.*

वृत्तक- *An arc.*

वर्तविणो- *To trace out.*

विवेचन- *Investigation*

श.

शङ्कु - *A cone.* सूचि

शङ्कुच्छेद- *A conic section.* २ *A conic.* ३ *sections of the cone.*

शङ्कुक्ष- *The axis of the cone* शङ्कुचा अक्ष.

शङ्कुक्षेत्र- *Surface of the cone.* शङ्कुचा पृष्ठभाग.

श्रेणी- *A range.*

शाखा- *A branch.*

शिर- *Vertex.*

शिरस्थस्पर्क- *Tangent at the vertex.*

शिरस्थकोन- *Vertical Angle.*

स.

सनाभज्या- *The focal chord.* नाभी मधून जाणारी ज्या.

~~समापान्त~~ *The parabola.* समतः (समप्रमाणतः) असंपूर्णा कक्षायस्य. अथवा समाभ्याम् असंपूर्णा कक्षा यस्य. समास्तव (समप्रमाणास्तव) असंपूर्णा आहे कक्षा ज्याची.

<p>अथवा समशब्द उच्चारितेस मयीं समकोण व कोणाशीं ह्याची आकाङ्क्षा राहते. अर्था त् नाभ्यन्तर ज्ञापिकान्तरा- शीं सम; ह्यास्तव असंपूर्ण आहे कक्षा ज्याची. <i>That</i> <i>curve which remains</i> <i>incomplete from a</i> <i>ratio of equality.</i> प- र्यायशब्द - समप्रमाणा- पूर्णकक्ष, अपूर्णकक्ष, विश्वकेन्द्र, विश्वगर्भ, ए- ककक्ष, संकक्ष.</p>	<p>संपृक्त - <i>In contact with.</i> समप्रमाणश्रेणी - <i>Equira-</i> <i>tional or the Geo-</i> <i>metrical series.</i> कारण येथे प्रमाण एकच अस ते.</p>
<p>स्थायी - <i>Standing on.</i> जसे - वृत्तस्थायी बिन्दु, प- रिघस्थायी; वृत्तावर अस- णारा; परिघावर असणारा.</p>	<p>सरूप - <i>Similar.</i> सहचरित - <i>Conjugate.</i> सहचरितव्यास - <i>Conju-</i> <i>gate diameters.</i> सहचरितविषमापूर्णकक्ष - <i>The conjugate hy-</i> <i>perbola.</i></p>
<p>संमिताकार - <i>Symmetri-</i> <i>cal.</i></p>	<p>संस्था - <i>Locus. (Situation,</i> <i>position).</i> संस्थाव्याप्यसमीकरण - <i>Equ-</i> <i>ation to a curve.</i></p>
<p>संपर्क - <i>Contact.</i> संपर्कबिन्दु - <i>Point of con-</i> <i>tact.</i></p>	<p>समीकरणव्याप्यसंस्था - <i>The locus of an equation.</i> समभुजविषमापूर्णकक्ष - <i>The equilateral</i> <i>hyperbola.</i></p>
<p>संपर्कलम्ब - <i>The normal.</i> कारणहा लम्ब संपर्क बिन्दू- त स्पृशेवर लम्बरूपाने पडतो.</p>	<p>समकोण - <i>A right</i> <i>angle.</i></p>
<p>संपर्कज्या - <i>A chord of</i> <i>contact.</i></p>	<p>समकोणता - <i>The state</i> <i>of being right</i> <i>angles.</i></p>

समकोणायतविषमापूर्ण-
कक्ष— *The rectangular hyperbola.*

संकलन { *Sum.* बेरीज. हे
संकलित } शब्द कचित् योजिले
आहेत.

समानान्तरश्रेढी— *The —
equi different or
arithmetical pro-
gression.* कारण अन्त
र (व्यवकलन) अभिन्न अ
सते.

सामि— (अव्यय) *Half.* सं-
स्कृतांत अव्ययांचा व ना-
मांचा समास होतो. अन्त-
रङ्ग, बहिरङ्ग, अधोमुख,
विष्वक्सेन, भूरिमाय, चि-
रमित्त्र इ० मनांत आणावे.

सामिसंकलित— *Semi-sum.*

सामिसहचरितव्यास— *Se-
mi-conjugate di-
ameters.*

सामिवर्तुल— *Semicircle.*

सामिलघुतराक्ष— *Semi-
minor axis.*

सामिमहत्तराक्ष— *Semi-
Major axis.*

सामिव्यवकलित— *Semi-
difference.*

साम्यक्ष— *Semi-axis.*

समावधि— *Equidistant;*
सारख्या अन्तरावर असणारे.

संपूरक— *Supplement.*

संपूरकरूपी— *Supple-
mentary.* इंग्रजी
complement व
supplement श-

ब्दांतील उपसर्ग *con* व

sub जितके कार्य करिता

त तितकेच संपूरक व संपू-

रक शब्दांतील उपसर्ग का-

र्य करितात. तात्पर्य केवळ

इतरेतर संज्ञाभेद मात्र द-

र्शवितात. ह्यास्तव भर-

तीचा कोन हा शब्द वर्ज्य के-

ला. कोन शब्दाची द्विरुक्ति

होते.

स्वसहचरित— *Self-con-
jugate.*

सामिसहचरिताक्ष— *Semi-
conjugate axis.*

सर्वसाधारण— *Common
to all.*

स्थिर— *Fixed*

स्पृक् - *A tangent.* स्पृशा. समप्रमाण } 1 Homologus.
 स्पृग्द्वय - *Two tangents.* समस्थित } 2 Proportional.
A pair of tangents. समसमद्विभुजता - *The*
 समीपतर - *Nearer.* *state of being a*
 स्पृक्त्व - *The state of be-* *parallelogram.*
ing a tangent.
 सिद्धता - *Demonstration.* ह. ह्रसिष्ठ - *Shortest.* सर्वातलहान.

वर्णयोजना.

अ	A	ज	J	स	S
ब	B	ख	K	ट	T
क	C	ल	L	थु	U
ड	D	म	M	व	V
इ	E	न	N	उ	W
फ	F	ओ	O	क्ष	X
ग	G	प	P	य	Y
ह	H	घ	Q	ज्ञ.	Z
ऐ	I	र	R		

आश्रयदात्यांची नांवे.

प्रती.	नांवे.	प्रती.	नांवे.
	इंदूर.	१	डाक्टर आत्माराम पांडुरंग.
५	इंदूर दरबार	१	डाक्टर सरवाराम अर्जुन.
१	मिनिस्टर.	१	डाक्टर अण्णा मोरेश्वर कुंटे.
१	डाक्टर गणपतसिंग.	१	रा.रा. श्रीराम वासुदेव आठले.
	मुंबई.	१	रा.रा. विष्णु महादेव नामजोशी.
१	प्रोफेसर रामकृष्ण गोपाळ भांडारकर	१	रा.रा. नगिनदास हरि वल्लभदास.
	एम्. ए.	१	रा.रा. शामराव विठ्ठल वकील.
१	प्रोफेसर महादेव मोरेश्वर कुंटे.बी.ए.	१	रा.रा. मोरोबा विनोबा मांडवीकर.
२	मिस्टर गोविंद विठ्ठल करकरे बी.ए.	१	रा.रा. माधवराव आपाजी करंजीकर.
१	रा.रा. रंगनाथ नरसिंह मुधोळकर	१	रा.रा. सदाशिव वामन काणे.
	र बी. ए.	१	रा.रा. गंगाराम बापसोबा रेळे.
१	रा.रा. पांडुरंग सदाशिव पाठक बी.ए.		बी. ए.
१	रा.रा. गणेश श्रीकृष्ण खापरडे बी.ए.	१	रा.रा. गजानन बाबाजी.
१	रा.रा. बळवत नारायण डबीर.	१	रा.रा. कृष्णाशास्त्री गोडबोले.
१	रा.रा. गणेश कृष्ण देशमुख.	१	रा.रा. भिकुराघोबा देवनळकर.
१	रा.रा. नारायण गोपाळ फाटक.	१	रा.रा. गोविंद केशव साबदे.
१	रा.रा. चिंतामण विनायक वैद्य.	१	रा.रा. गोविंद वासुदेव कानिटकर
१	रा.रा. सदाशिव महादेव गोडबोले.		बी. ए. एल्. एल्. बी.
१	रा. स. हरी रामकृष्ण सामंत.	१	रा.रा. बाळकृष्ण आत्माराम गुप्ते.
१	रा.रा. राजाराम राघोबा गव्हाणकर.	१	रा.रा. कृष्णाजी महादेव जोगळे.
१	रा.रा. नारायण गोपाळ राजे.		कर बी. ए.
१	रा.रा. रामचंद्र रघुनाथ शिरगांवकर	१	रा.रा. राजाराम रामकृष्ण भागवत.
१	रा.रा. काशिनाथ त्रिंबक तेलंग.	१	रा.रा. गणपतराव भिकाजी गुंजीकर
	एम्. ए. एल्. एल्. बी.		र बी. ए.

प्रती.	नावे
१	रा.रा.शिवराम वामन साधलै.
१	रा.रा. नारायणराव पांडुरंग इंदूर लकर.
१	रा.रा. गणेश गोविंद नाडकर्णी.
१	रा.रा. वासुदेव मोरेश्वर पोतदार गि. प्रा. स्कू.
१	रा.रा. काशिनाथगणेश केळकर बी.ए.
१	रा.रा. महादेव भास्कर चौबळ. बी.ए.
१	रा.रा. गणपतराव माधवराव धैर्यवान.

सुरत.

१	रा.रा. विठ्ठल नारायण पाठक एम्.ए.
---	----------------------------------

अमदाबाद.

१	रा.रा. अब्बाजी विष्णु काथवटे बी.ए.
---	------------------------------------

१	रा.रा. वासुदेव दिनकर परांजपे ओळरसीयर.
१	रा.रा. रामचंद्र मोरेश्वर बापट पो-ष्टमास्तर.

अहमदनगर.

१	रा.रा. नारायणबाळकृष्ण गोडबो-ले. बी.ए.
---	---------------------------------------

अलिबाग.

१	रावसाहेब साबाजीराव विन्तामण चिहनीस बी.ए.
१	रा.रा. बाळ रामचंद्र दींदे.

प्रती	नावे
१	रा.रा. वामन खंडेराव वैद्य.
१	रा.रा. विठ्ठल महादेव धामणकर.
१	रा.रा. सिताराम विठ्ठल.
१	रा.रा. सदाशिव वासुदेव लेले.
१	रा.रा. महादेव सिताराम कीर्तने.
१	रा.रा. महादेव वासुदेव फडके.
१	रा.रा. जगन्नाथ लक्ष्मण.
१	रा.रा. रामचंद्र यशवंत चौबळ.
१	रा.रा. विनायक मल्हार नाडकर.
१	रा.रा. बाळकृष्ण विश्वनाथ क-मवंत.
१	रा.रा. गणपत रघुनाथ पेठे.
१	रा.रा. रामचंद्र बाजीराव प्रधान.
१	रा.रा. रामचंद्र रघुनाथ अंतुरकर.

नाशीक.

४	रावबहादूर गोपाळराव हरी देशमुख.
१	रावसाहेब प्रल्हाद कृष्ण शहाणे. मामलेदार.
१	रा.रा. द्वारकानाथ राघोबा तरखड-कर.
१	रा.रा. नरहर पुरुषोत्तमटिळक बी.ए.
१	रा.रा. गणेश व्यंकटेश जोशी बी.ए.
१	रा.रा. गंगाधर काशिनाथ वकील.
१	रा.रा. केवळराम भाई साहेब.
१	रा.रा. बजाभाऊ राजेंद्र.
१	रा.रा. गंगाधर नरसिंह केतकर.

आश्रयदात्यांची नांवे.

प्रती.	नांवे.	प्रती.	नांवे.
	इंदूर.		
५	इंदूर दरबार.	१	डाक्टर आत्माराम पांडुरंग.
१	मिनिस्टर.	१	डाक्टर सरवाराम अर्जुन.
१	डाक्टर गणपतसिंग.	१	डाक्टर अण्णा मोरेश्वर कुंटे.
	मुंबई.	१	रा.रा. श्रीराम वासुदेव आठले.
१	प्रोफेसर रामकृष्ण गोपाळ भांडारकर	१	रा.रा. विष्णु महादेव नामजोशी.
	एम्. ए.	१	रा.रा. नगिनदास हरिवल्लभदास.
१	प्रोफेसर महादेव मोरेश्वर कुंटे.बी.ए.	१	रा.रा. शामराव विठ्ठल वकील.
२	मिस्टर गोविंद विठ्ठल करकरे बी.ए.	१	रा.रा. मोरोबा विनोबा मांडवीकर.
१	रा.रा. रंगनाथ नरसिंह मुधोळकर	१	रा.रा. माधवराव आपाजी करंजीकर.
	र बी. ए.	१	रा.रा. सदाशिव धामन काणे.
१	रा.रा. पांडुरंग सदाशिव पाठक बी.ए.	१	रा.रा. गंगाराम बापसोबा रेळे.
१	रा.रा. गणेश श्रीकृष्ण खापरडे बी.ए.		बी. ए.
१	रा.रा. बळवत नारायण डबीर.	१	रा.रा. गजानन बाबाजी.
१	रा.रा. गणेशकृष्ण देशमुख.	१	रा.रा. कृष्णशास्त्री गोडबोले.
१	रा.रा. नारायण गोपाळ फाटक.	१	रा.रा. भिकुराघोबा देवनळकर.
१	रा.रा. चिंतामण विनायक वैद्य.	१	रा.रा. गोविंद केशव साबदे.
१	रा.रा. सदाशिव महादेव गोडबोले.	१	रा.रा. गोविंद वासुदेव कानिटकर
१	रा. स. हरी रामकृष्ण सामंत.		बी. ए. एल्. एल्. बी.
१	रा.रा. राजाराम राघोबा गव्हाणकर.	१	रा.रा. बाळकृष्ण आत्माराम गुप्ते.
१	रा.रा. नारायण गोपाळ राजे.	१	रा.रा. कृष्णाजी महादेव जीगळे.
१	रा.रा. रामचंद्र रघुनाथ शिरगांवकर		कर बी. ए.
१	रा.रा. काशिनाथ त्रिंबक तेलंग.	१	रा.रा. राजाराम रामकृष्ण भागवत.
	एम्. ए. एल्. एल्. बी.	१	रा.रा. गणपतराव भिकाजी गुंजीकर
			र बी. ए.

प्रती. नांवे

१ रा.रा.शिवराम वामन साधले.

१ रा.रा. नारायणराव पांडुरंग इंदूर-
लकर.

१ रा.रा. गणेश गोविंद नाडकर्णी.

१ रा.रा. वासुदेव मोरेश्वर पोतदार
गि. प्रा. स्कू.

१ रा.रा. काशिनाथगणेश केळकर बी.ए.

१ रा.रा. महादेव भास्कर चौबळ. बी.ए.

१ रा.रा. गणपतराव माधवराव धैर्यवान.

सुरत.

१ रा.रा. विठ्ठल नारायण पाठक
एम्. ए.

अमदाबाद.

१ रा.रा. अब्बाजी विष्णु काथवटे बी.
ए.

१ रा.रा. वासुदेव दिनकर परांजपे
ओळरसीयर.

१ रा.रा. रामचंद्र मोरेश्वर बापट पो-
ष्टमास्तर.

अहमदनगर.

१ रा.रा. नारायणबाळकृष्ण गोडबो-
ले. बी. ए.

अलिबाग.

१ रा.रा. साहेब साबाजीराव विन्तामण
चिहनीस बी. ए.

१ रा.रा. बाळ रामचंद्र दोंदे.

प्रती नांवे

१ रा.रा. वामन खंडेराव वैद्य.

१ रा.रा. विठ्ठल महादेव धामणकर.

१ रा.रा. सिताराम विठ्ठल.

१ रा.रा. सदाशिव वासुदेव लेले.

१ रा.रा. महादेव सिताराम कीर्तने.

१ रा.रा. महादेव वासुदेव फडके.

१ रा.रा. जगन्नाथ लक्ष्मण.

१ रा.रा. रामचंद्र यशवंत चौबळ.

१ रा.रा. विनायक मल्हार नाडकर.

१ रा.रा. बाळकृष्ण विश्वनाथ क-
मवंत.

१ रा.रा. गणपत रघुनाथ पेठे.

१ रा.रा. रामचंद्र बाजीराव प्रधान.

१ रा.रा. रामचंद्र रघुनाथ अंतुरकर.

नाशीक.

४ रा.रा. बहादूर गोपाळराव हरी देवामुख.

१ रा.रा. साहेब प्रल्हाद कृष्ण शहाणे.
मामलेदार.

१ रा.रा. द्वारकानाथ राघोबा तरखड-
कर.

१ रा.रा. नरहर पुरुषोत्तम टिळक बी.ए.

१ रा.रा. गणेश व्यंकटेश जोशी बी.ए.

१ रा.रा. गंगाधर काशिनाथ वकील.

१ रा.रा. केवळराम भाई साहेब.

१ रा.रा. बजाभाऊ राजेंद्र.

१ रा.रा. गंगाधर नरसिंह केतकर.

(२५८)

शकुच्छेद.

- प्रती नांवे
- १ रा.रा. नारायण बल्लाळ हेडमा-
स्तर शा.१
- १ रा.रा. त्रिंबक गौतम हे. मा. शा. २
- १ रा.रा. दाजीबा गोळे वकील.
- १ रा.रा. रावजी नारायण शा. २
- १ रा.रा. सिताराम बाळकृष्णाशा. पं-
चवटी.
- १ रा.रा. गणेश पांडुरंग वैद्य वकील
- १ रा.रा. पुरुषोत्तम पंत वकील.
- १ रा.रा. गंगाधर विष्णु भागवताचा
वाडा.
- १ रा.रा. मोरोबाजी नामजोशी.
- १ रा.रा. सोनाजी मोरेश्वर वकील.
- १ रा.रा. वासुदेवराव निरंतर वकील
- १ रा.रा. यज्ञेश्वर बाळकृष्णादीक्षित.
- १ रा.रा. साहेब राजाराम खंडेराव वै-
द्य.
- १ रा.रा. अण्णाजी वामन गोखले.
- १ रा.रा. दादाजी सखाराम देशपांडे
- १ रा.रा. रघुनाथ सिताराम दशापुत्र.
शरणपुरी.
- १ मिस्तर एच. एम्. खिस्ती.
- १ — लुकस मुल्ला.
- १ — काशिनाथ शिवाजी.
- १ — साम्युएल बेल.
- १ — एम्. गोरे.

- प्रती नांवे
- मालेगांव (क्यांप)
- १ मिस्तर जेम्स वार.
- भिवंडी.
- १ रा.रा. साहेब रघुनाथ शिवराम टिप
णीस. बी. ए. एल्. एल्. बी.
- १ रा.रा. साहेब यशवंतराव दत्तात्रय
मामलेदार.
- १ रा.रा. रामचंद्र गंगाधर घनवट-
कर.
- १ रा.रा. गोपाळ काशिनाथ लिमये.
- १ रा.रा. गणपतराव रावजी मांडे,
वकील.
- १ मेहेरबान हाजी बाकीर साहेब फकी.
- १ मेहेरबान हाजी अमीन साहेब ख-
तीब.
- १ मेहेरबान हाजी गुलाम हुसेन फकी.
- १ रा.रा. आत्माराम रामचंद्र वकील.
- १ रा.रा. चिमणाजी रघुनाथ वकील.
- १ रा.रा. लक्ष्मण रामकृष्ण कांड.
- १ रा.रा. भालचंद्र यज्ञेश्वर लेले.
- १ डाक्टर बाळकृष्ण सुदामजी.
- १ नेटिव जनरल लायब्री.
- १ रा.रा. गणेश रामचंद्र डोंगरे.
- १ रा.रा. भास्कर बल्लाळ खरे वकील.
- १ रा.रा. महार अनंत गेके.
- १ रा.रा. वासुदेव रामचंद्र कर्वे.

पेण.

१ रावसाहेब भवानरावविष्णुमामलेदार

बदलापूर.

१ रा.रा. कृष्णाजी काशिनाथ ओक.

१ रा. रा. नारायण गोविंद ओक.

१ रा.रा. रामचंद्र महादेव ओक.

२ मेहेरबान हाजी बुराण साहेब.

२ मेहेरबान शमसुद्दिन रइस.

२ मेहेरबान अमीन बाळपाटील डाव-
खरे.

१ मेहेरबान अजमुदीन गोरे.

१ मेहेरबान अह्मदखे खरबे.

कल्याण.

१ रा.रा. गोविंद महादेवचांदोरकर.

१ रावसाहेब बळवंतआत्माराममामलेदार

१ रा.रा. रामचंद्र गणेश कातरणे.

१ रा.रा. हरी बाबा काळे.

१ रा.रा. बाळाजी गोविंद पिंपळखरे.

१ रा.रा. गोविंद बळवंत पटवर्धन.

१ रा.रा. मोरो वामन कीर्तने बी.ए.

१ रा.रा. गोपाळ रामचंद्र वझे.

१ रा.रा. आपाजी विश्वनाथगडकरी.

१ रा.रा. विनायक गणेश गडकरी.

१ रा.रा. रामचंद्र दाजी वकील.

१ रा.रा. नारायण बाजी वकील.

१ रा.रा. विष्णु बह्दाळ फडके.

१ रा.रा. रामचंद्र भास्कर आगलावे.

१ रा.रा. कृष्णराव विनायकफाडकर.

१ रा.रा. विठ्ठल गणेश जोशी माल-
गुणकर.

१ रा.रा. आत्माराम गणेशशृंगारपुरे.

१ रा.रा. वामनाजी विठ्ठल मुल्हेरकर.

१ रा.रा. कृष्णाजीपांडुरंग पिंपळखरे.

१ रा.रा. श्रीनिवास वासुदेव कोर्डे.

१ रा.रा. हरि लक्ष्मण खरे.

१ रा.रा. त्रिंबक जनार्दन बर्वे.

१ रा.रा. कृष्णाजीशिवरामकेळकर.

१ रा.रा. विनायकगंगाधरबीरगांवकर.

१ रा.रा. सदाशिव बाळकृष्णवकील.

१ रा.रा. रघुनाथ जयराम वकील.

१ रा.रा. गणेश त्रिंबक टकले.

१ रा.रा. दामोदर गणेश जोशी.

१ रा.रा. वासुदेव हरी भिडे.

१ रा.रा. सदाशिव धोंडदेव साठ्ये.

१ रा.रा. मोरो गंगाधर साठे.

१ रा.रा. महादेव भिकाजी जोशी.

१ रा.रा. बाळकृष्णविष्णु.

१ रा.रा. केशव सदाशिव.

१ रा.रा. परशुराम पांडुरंगनाजर.

१ रा.रा. लक्ष्मण सरवाराम देशमुख.

१ रा.रा. विनायकगणेशगोकटे पोस्टमाब.

१ रा.रा. काशिनाथ दाजी करमरकर.

१ मेहेरबान काजी गुलाम मुरतुजा.

१ मेहेरबान गुलामहुसेन मिरशिंगे.

- १ मेहेरबान महमुदमियां अतसखान
 १ मेहेरबान शेकसाहेब कडते.
 १ मेहेरबान महमद सर्दद फकी.
 १ मेहेरबान गुलाम मोहिदीन फकी.
 १ मेहेरबान हाजीबावनमिया फरीद.
 १ मेहेरबान हाजी पाचुदीन धुरु.
 १ मेहेरबान शेक साहेब कामळे.
 १ मेहेरबान अबदुलकादीर दोड.
 १ मेहेरबान बापासाहेब डोलारे.
 १ मेहेरबान अमीरसाहेब कुंगळे.
 १ मेहेरबान हाजी शीदीक महमद फरीद.
 १ मेहेरबान हाजी बदरुदीन फाळके.
 १ रा. भिकाजी विठ्ठी थोरान.
 १ मेहेरबान मियासाहेब खोत.
 १ मे. इस्मायल अह्मीखान चौधरी.
 १ मेहेरबान काजी इमाम उदीन.
 १ मेहेरबान शेक अह्मी गुजर.
 १ मेहेरबान जाफर मिया.
 १ शेट शिव नारायण श्रीराम.
 २ ठकर ठाकरसी खेमजी.
 १ शेट भगवानदास दगडुचंद.
 १ शेट राधाकिसन हारभगत.
 १ सा. लुळसीदास आत्माराम.
 १ ठकर काकु त्रिकम.
 १ शेट देवजी पितांबर.
 १ रा. रा. अण्णाजी गोपाळ सोना
 रीकर.

- १ रा. रा. बाबाजी हरी माळकर.
 १ रा. रा. गोपाळ कृष्ण किरकिरे.
 २ मे. नौरोजी बाळाभाई पारशी.
 १ रा. अण्णाजी खेमजी पाठारे.
 १ रा. काशिनाथ मनाजी पाठारे.
 १ रा. काशिनाथ गोविंद करणीक.
 १ रा. रा. गोविंद मुकुंद ची. का.
 १ रा. रा. त्रिंबक सदाशिव दळवी.
 १ रा. रा. सरवाराम धोडदेव गुहे.
 १ मे. भिकाजी जीजीभाई पारशी.
 १ मे. रुस्तमजी दादाभाई पारशी.
 १ मे. जमशेटजी खरसेटजी पारशी.

ठाणें.

- १ रा. रा. गणेश जनार्दन अगाशे.
 बी. ए.
 १ रा. रा. वामन अपाजी गुप्ते मेटे.
 कर.
 १ रा. रा. वासुदेव शिवाजी नाबर
 टिठवाळें.
 १ रा. रा. परशुराम शंकर.
 मुंबई - १ डाक्टर गोपाळ शिवराम.
 पुणे - १ रा. रा. काशिनाथ नारायण भा-
 नगांवकर.
 भिवंडी - १ रा. रा. पांडुरंगरामचंद्र
 " १ रा. रा. रामभाऊबाबाज
 नाशिक - १ रा. रा. विनायक आ. मह.
 बदलापूर - १ रा. रा. शाळामास्तर.

भाग ३.

सिद्धान्त २०.

“उपसि.घर = घर” व “घघ = घघ.” सि. २० आकृ.पहा.
घ बिन्दूतून घ'यु' निर्णयिका काढ; तिला उपगांसउ', यु' बिन्दूत
क्रमाने छेदूंदे. आतां - घर यु', घर यु' त्रिकोण सरूप आहेत व तसेंच
घ'र उ', घर उ' त्रिकोण सरूप आहेत.

∴ घर : घ'यु' :: घर : घ'यु', [यूक्लिड, ६.४.]

व घर : घ'उ' :: घर : घ'उ', [यूक्लिड, ६.४.]

∴ गुणून, घर.घर : घ'यु'.घ'उ' :: घर.घर : घ'यु'.घ'उ',

परंतु घ'यु'.घ'उ' = बकै, व घ'यु'.घ'उ' = बकै; [सि.१६.]

∴ घर.घघ = घर.घर.घर (घ'घ - घर) = घर(घ'घ - घर),

घर.घघ - घर.घर = घर.घ'घ - घर.घर,

∴ घर.घघ = घर.घ'घ, ∴ घर = घर.

घर = घर [सि.१९.], ∴ घघ = घघ.

सिद्धान्त २०.

“ओ बिन्दु विषमापूर्णकक्षाच्या बाहेर इ०.”

ओघ.ओघ = ओव^२ - घव^२ [यूक्लिड, २.६.]

ओर.ओर = ओव^२ - रव^२ [यूक्लिड, २.६.]

व्यवकलनाने, ओर.ओर - ओघओघ = -रव^२ + घव^२

∴ ओघ.ओघ = ओर.ओर + रव^२ - घव^२,

= ओर.ओर + घर.घर, [यूक्लिड, २.५]

= ओर.ओर + पल^२ [सि.२०.]

∴ ओर : ओई :: पल : पयु, [ओरई-पलयु-त्रिकोणसारूप्य]

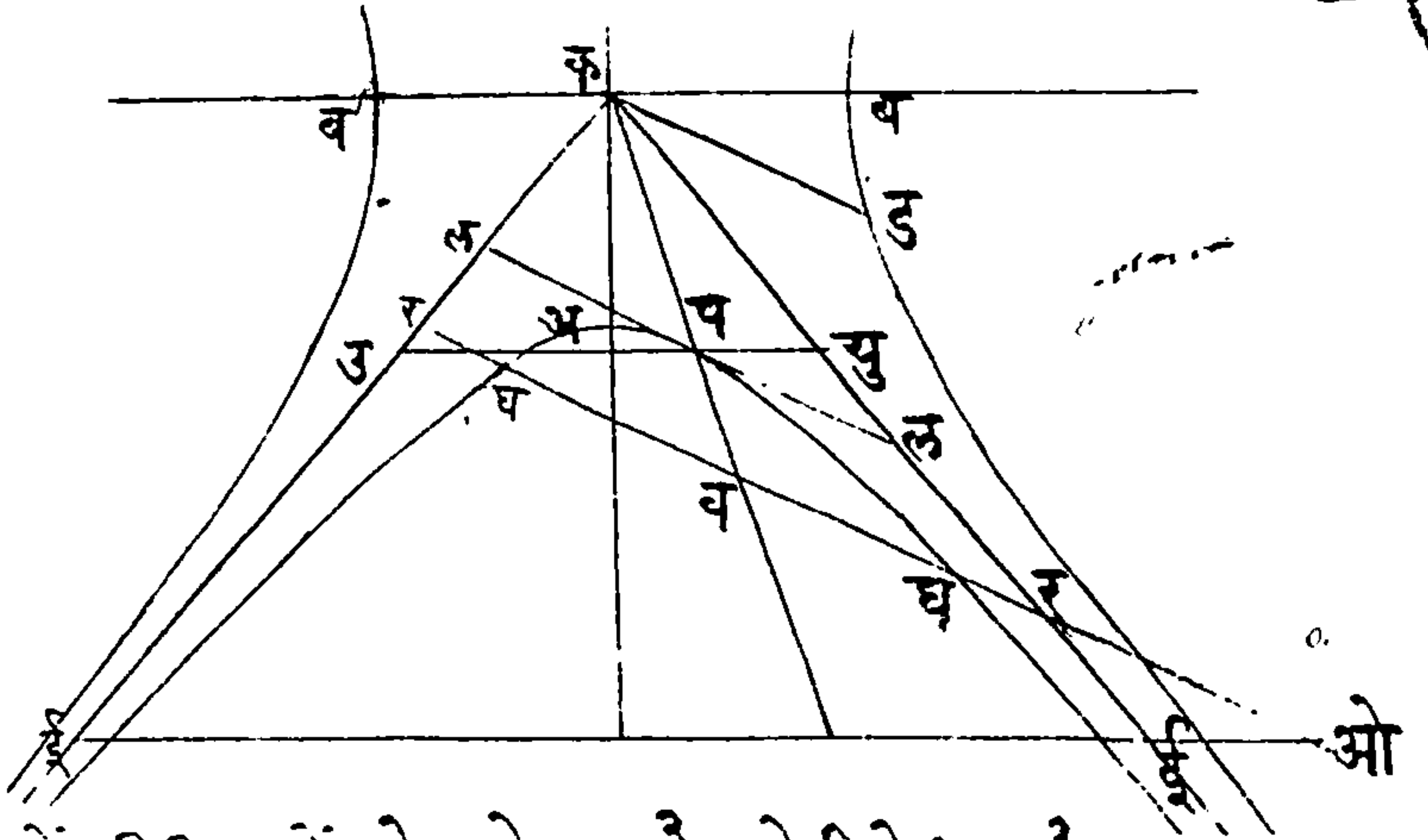
व ओर : ओई :: पल : पउ [ओरई-पलउ-त्रिकोणसारूप्य]

गुणून, ओर.ओर : ओई.ओई :: पल^२ : पयु.पउ,

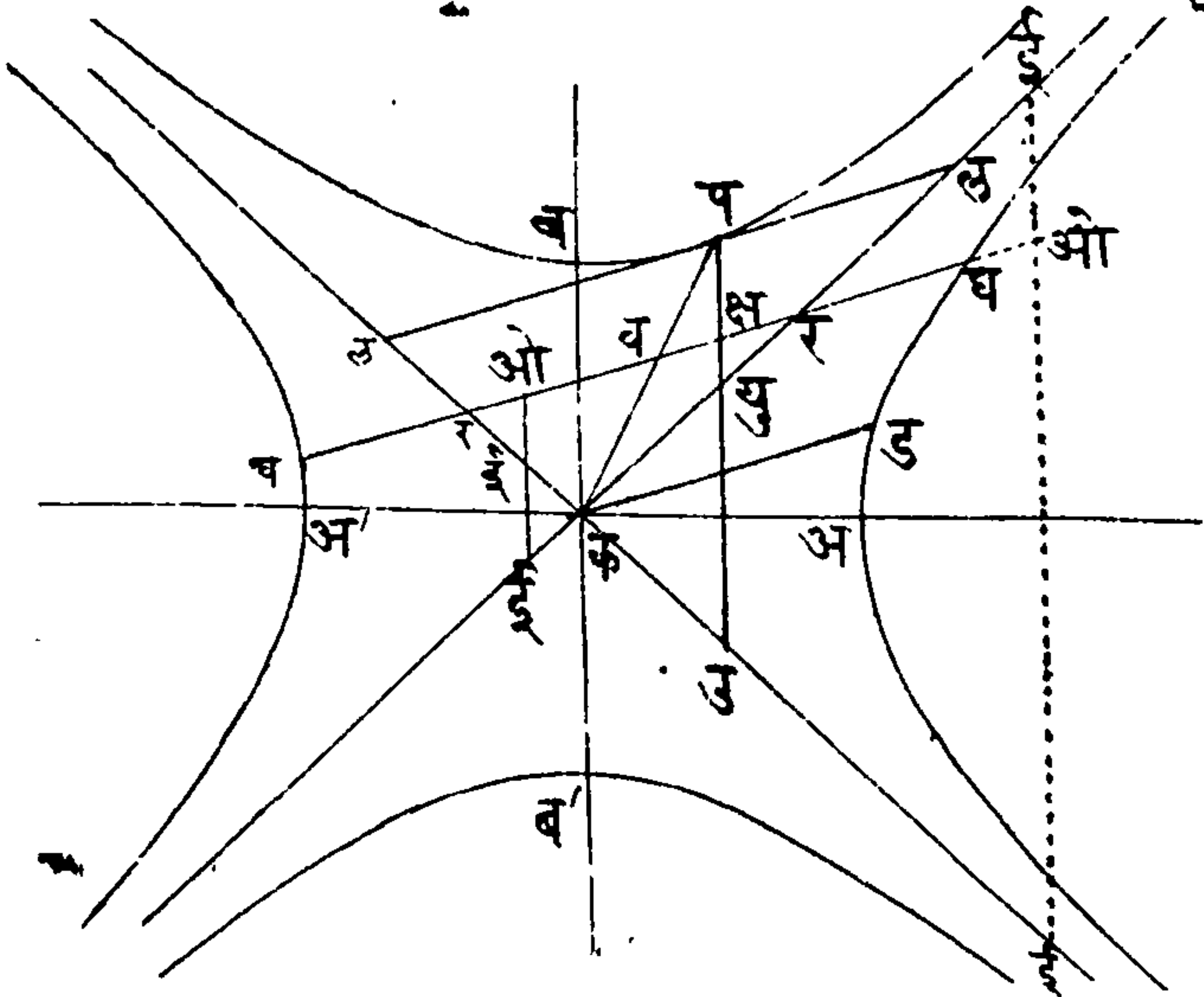
(२६२)

अवशिष्ट टीपा.

परंतु पयु.पउ = बक^२ [सि.१६.] व पल^२ = कड^२ [सि.२३.]



आदेशाने व विनिमयाने, ओर.ओर : कड^२ :: ओई.ओई : बक^२,
 ∴ ओर.ओर + पल^२ : कड^२ :: ओई.ओई + लक^२ : बक^२
 अथवा ओघ.ओघ : कड^२ :: ओई.ओई + बक^२ : बक^२.
 असेंच ओघ'.ओघ' : कड^२ :: ओई.ओई + बक^२ : बक^२.
 हास्तव ओघ.ओघ : ओघ'.ओघ' :: कड^२ : कड^२ ? [यूक्लिड, ५.७]



सिद्धता मूळांत व टीपांत दिली आहे तीच अतिविस्तारास्तव जाणावी.