

म. ग्रं. सं. ठाणे

सन

विषय

लेखक

१०/१ लोड्ये

१८८६

बाणित
ज्योतिष

मोरेधर लोड्ये

संग्रहालय क्रमांक

पुस्तकाचे नांव

१०/१ लोड्ये विज्ञान

३८

पुस्तक भाग २-

७७

३८

ग. ज्यो

म. ग्रं. सं. ठाणे

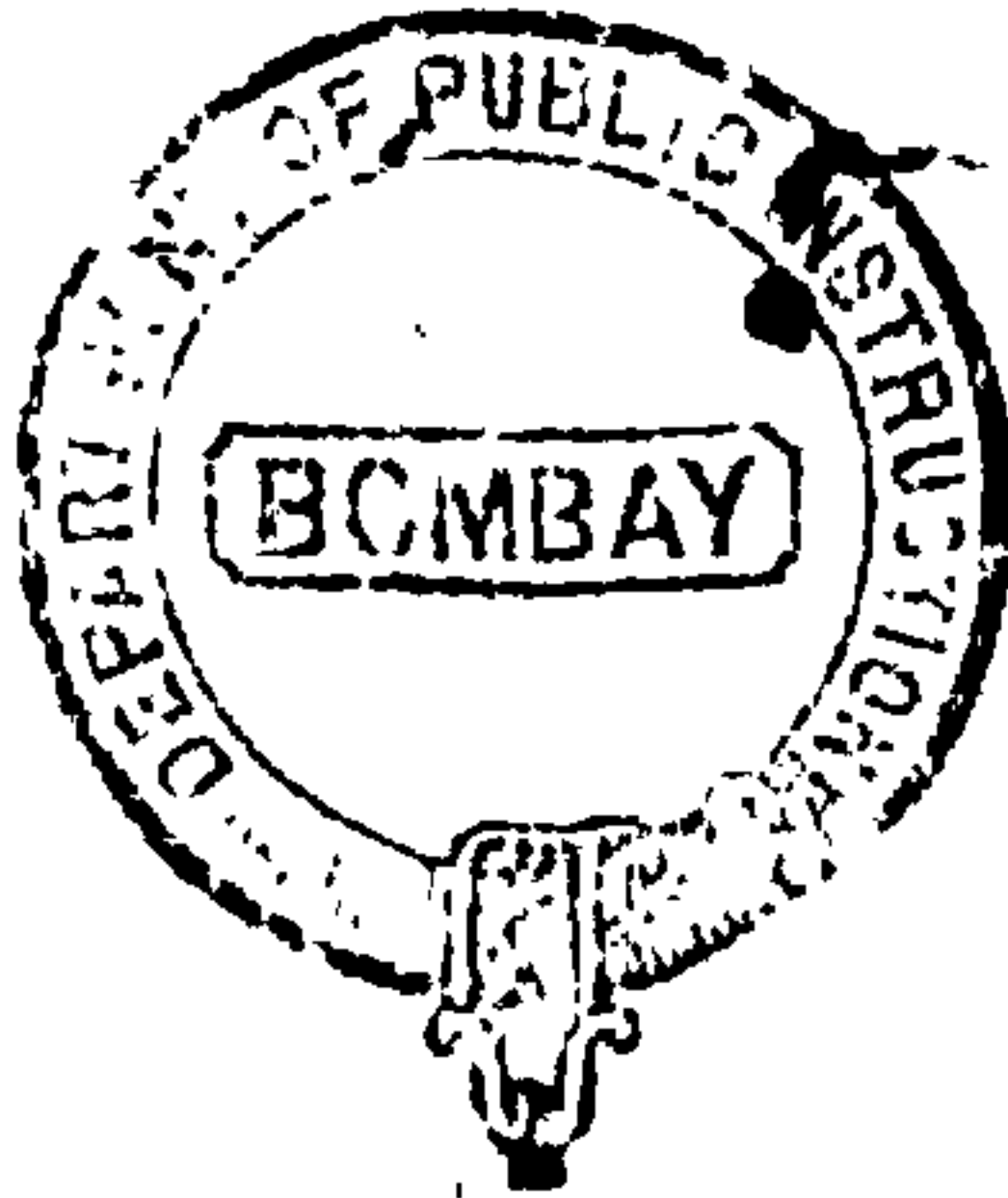
प्रयत्नानि-इथालि

स. नं. ७७

१८८३

तांडुळ्या हिशेबांचे

दुसरे पुस्तक.



किंमत दोन आणे.

The Department of Public Instruction,

MENTAL ARITHMETIC.

BOOK II
IN MARATHI.

तोंडच्या हिशेबांचें

दुसरें पुस्तक.

हें

रावजी मोरेश्वर देवकुळे

ह्यांनीं केलें.

चवथी व पांचवी इयत्ता शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांकरितां
आवृत्ति पहिली.-१२,००० प्रती.

ह्या पुस्तकाची मालकी सन १८६७च्या २५व्या आक्टाप्रमाणें नोंदिली आहे

मुंबई:

गवर्नमेंट सेंट्रल बुकडिपो.

सन १८८३ इ०.

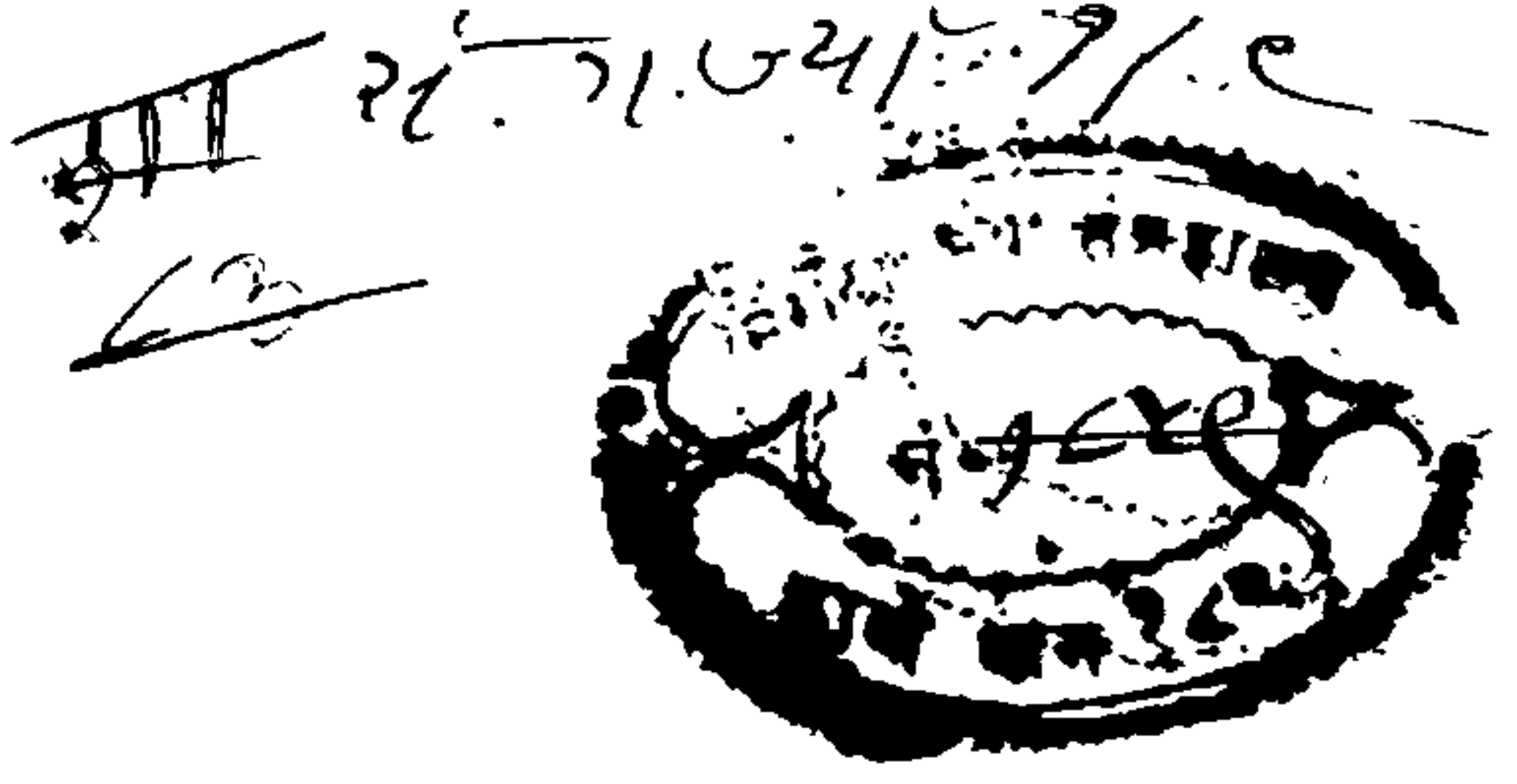
सर्व अधिकार सरकारानें आपल्याकडे ठेविले आहेत.

किंमत दोन आणे.



मुंबईत

“ निर्णयसागर ” छापखान्यांत छापिलें.



शिक्षकांस सूचना.



हें पुस्तक शिकविण्यास आरंभ करण्यापूर्वी शिक्षकांनीं तोंडच्या हिशेबांच्या पहिल्या पुस्तकांतील “ शिक्षकांस सूचना ” हें प्रकरण, ह्या पुस्तकांतील उपोद्घात आणि जागजागीं लिहिलेल्या टिपा, हीं सुद्धां सारीं लक्षपूर्वक वाचावीं; म्हणजे पुस्तक शिकविण्याचे कामीं त्यांस बरीच मदत होईल.

शिक्षकांस विनंती.



ह्या पुस्तकांत जे दोष दृष्टीस पडतील ते, व ज्या नवीन सूचना करणें योग्य वाटेल त्या कृपा करून ग्रंथकर्त्यांकडे अवश्य लिहून पाठवाव्या, म्हणजे तो अत्यंत आभारपूर्वक त्यांचा स्वीकार करून त्यांच्या योग्यायोग्यतेचा विचार करील.

उपोद्घात.

१ कोणत्याही विषयाचें विवेचन करण्यापूर्वी त्या विषयामध्ये कोणकोणत्या गोष्टींचा समावेश होतो हें ठरविलें पाहिजे. आतां “ तोंडचे हिशेब ” व “ तोंडच्या हिशेबांच्या चाली ” ह्यांचे अमुकच अर्थ आहेत असें निश्चयानें सांगतां येणार नाही. तथापि खालीं लिहिलेल्या व्याख्यांवरून व्यवहारांत त्यांचे अर्थ सामान्यतः काय समजतात हें ध्यानांत येईल.

“ ज्या हिशेबांची (म्हणजे अंकगणितसंबंधी प्रश्नांची) उत्तरें काढण्याकरितां अवश्य असणारी कृति, संख्या प्रत्यक्ष लिहितां, मनांत करून सामान्यस्मृतीच्या मनुष्यासही तीं उत्तरें काढितां येतात, त्या हिशेबांस ‘ तोंडचे हिशेब ’ म्हणावें. ” जसे “ १८॥ रुपयांस एक तोळा सोनें, तर १॥ गुंजेस काय किंमत पडेल ? ” “ २९७ व ३६६ ह्यांची बेरीज काय ? ” “ ५४२ व ३९८ ह्यांचें अंतर काय ? ” “ ४२८ व १२६ ह्यांचा गुणाकार काय ? ” “ ६३५७ ह्या संख्येला २५ नीं भागिलें असत भागाकार काय येईल व बाकी काय राहिल ? ” “ दरमहा दर शेंकडा १॥ रु० प्रमाणें ४५० रुपयांचें ५ महिन्यांचें व्याज किती ? ” इत्यादि.

“ विवक्षित प्रकारचे तोंडचे हिशेब अंकगणिताच्या अर्थप्रकरणास लक्षून असतील त्या प्रकरणावरून ठरलेल्या, त्या

* ह्या व्याख्येमध्ये “ सामान्यस्मृतीच्या ” हा शब्द घालण्याचा उद्देश असा कीं, अलौकिकस्मृतीचे कांहीं लोक दहा दहा अंकांच्या संख्यांची देखील बेरीज, वजाबाकी इत्यादि कृत्यें मनांत करूं शकतात. परंतु असल्या हिशेबांस “ तोंडचे हिशेब ” म्हणावयाचें नाहीं.

हिशेबांचीं उत्तरे काढण्याच्या सामान्य पद्धतींमध्ये जी (संख्यांची वेरीज इत्यादि) कृति करावी लागते, तीपेक्षां कमी कृतीच्या योगाने त्या हिशेबांचीं उत्तरे काढण्याच्या रीतीस, त्याप्रकारच्या 'तोंडच्या हिशेबांच्या चाली' म्हणावें." जसे, वरील पहिल्या हिशेबाच्या जातीच्या सर्व हिशेबांचीं उत्तरे काढण्याची सामान्य पद्धति त्रैराशिकावरून अशी ठरते की, "गुंजांची संख्या आणि रुपयांची संख्या ह्यांच्या गुणाकारास ९६ नीं भागून येतील ते उत्तरांतले रुपये समजावे; बाकी राहिल्यास तिच्या ९६ पटीला ९६ नीं भागून येतील ते उत्तरांतले आणे समजावे." इ०. आतां ही सामान्य पद्धति योजून सदरू हिशेबांचे उत्तर काढण्यास जी कृति करावी लागणार, तीपेक्षां "तोळ्याची किंमत दाखविणाऱ्या रुपयांच्या संख्येच्या दुपटीइतक्या पै ही एका गुंजेची किंमत समजावी," ह्या रीतीच्या योजनेनें त्याचें उत्तर काढण्यास फार थोडी कृति करावी लागेल. ह्या कृतीपेक्षां ही, "तोळ्याची किंमत दाखविणाऱ्या रुपयांच्या संख्येइतके पैसे ही १॥ गुंजेची किंमत समजावी," ह्या रीतीनें त्याचें उत्तर काढण्यास तर फारच थोडी कृति करावी लागेल. म्हणून ह्या दोन रीतींस "सदरू प्रकारच्या तोंडच्या हिशेबांच्या चाली" म्हणावें. दुसऱ्या हिशेबामध्ये बेरजेची सामान्य रीति योजून उत्तर काढण्यास जी कृति करावी लागणार, तीपेक्षां ३०० व ३६६ ह्यांच्या बेरजेत ३ वजा करणें ह्यांत फार थोडी कृति करावी लागते. म्हणून ह्या रीतीस अशा प्रकारच्या संख्यांच्या "बेरजेची चाल" म्हणावें. ह्याप्रमाणेंच इतर हिशेबांविषयी समजावें.

२ तोंडचे हिशेब व त्यांच्या चाली ह्यांच्या व्याख्यांवरून पाहतां सर्व प्रकारच्या तोंडच्या हिशेबांस लागू पडतील, अशा व्यापक

चाली बसविणें असंभाव्य आहे. कांहीं प्रकारच्या हिशेबांस लागू पडतील अशा मात्र चाली बसवितां येतात. हें पुढील लेखावरून ध्यानांत येईल.

लहान लहान संख्यांची बेरीज, वजाबाकी इत्यादि कृत्यें तोंडानें लवकर व बिनचूक करितां येणें हा वस्तुतः “तोंडचे हिशेब” ह्या विषयाचा मुख्य भाग. परंतु ही गोष्ट मुख्यत्वेकरून अभ्यासाच्या स्वाधीन आहे. ही विषयीं व्यापक चाली बसवितां येत नाहींत. विशेष प्रसंगीं लागू पडणाऱ्या अशा कांहीं बसवितां आल्या, त्या ह्या पुस्तकाच्या पहिल्या भागांत लिहिल्या आहेत.

व्यवहारामध्ये ज्या प्रकारचे हिशेब करण्याचा फार प्रसंग पडतो त्यांत मुख्यत्वेकरून मालाचा दर दिलेला असून, अमुक मालाची किंमत सांगावयाची किंवा अमुक किमतीला येणारा माल सांगावयाचा, असा उद्देश असतो. मालाचा दर सांगण्याच्या ही दोन रीति आहेत. पहिली रीति, माल दाखविणाऱ्या एका परिमाणास पडणारी किंमत सांगणें; जसें, “साखर दर पल्ल्यास ३२ रु० प्रमाणें मिळते” इत्यादि. दुसरी रीति, किंमत दाखविणाऱ्या एका परिमाणास येणारा माल सांगणें; जसें, “साखर दर रुपयास ००३॥॥ मिळते” इत्यादि.

दर सांगण्याचे हे दोन प्रकार आणि (अमुक मालाची किंमत किती? व अमुक किंमतीचा माल किती?) हे प्रश्नांचे दोन प्रकार, ह्यांवरून पाहतां व्यवहारांतल्या मुख्य हिशेबांचे चार प्रकार होतात. ते असे :-

पहिला प्रकार—माल दाखविणाऱ्या एका परिमाणास अमुक किंमत पडते, तर अमुक मालाची किंमत किती? जसें, दर पल्ल्यास ३२ रु० प्रमाणें वजनी ००१॥९ साखरेची किंमत किती

दुसरा प्रकार—किंमत दाखविणाऱ्या एका परिमाणास अमु

क माल मिळतो, तर अमुक किमतीस किती मिळेल ? जसें, दर रुपयास ८८३॥ साखर मिळते, तर ११॥११ ची किती मिळेल ?

तिसरा प्रकार—माल दाखविणाऱ्या एका परिमाणास अमुक किंमत पडते, तर अमुक किमतीचा माल किती ? जसें, दर पल्ल्यास ३२ रु० प्रमाणें ११॥११ ची साखर किती येईल ?

चवथा प्रकार—किंमत दाखविणाऱ्या एका परिमाणास अमुक माल मिळतो, तर अमुक मालाची किंमत किती ? जसें दर रुपयास वजनी ८८३॥ साखर, तर ८८१॥९ साखरेची किंमत किती ?

ह्यांपैकी तिसऱ्या व चवथ्या प्रकारच्या हिशेबांचीं उत्तरें काढण्यास जी कृति करावी लागणार, तीमध्ये सर्वत्र लागू पडेल असा संक्षेप होण्याचा मुळींच संभव नाही. म्हणून ह्या दोन प्रकारच्या हिशेबांविषयीं चाली बसविण्याचा यत्न करणें व्यर्थ आहे. आतां महाराष्ट्र देशांत चालू असणाऱ्या किंमत दाखविणाऱ्या परिमाणांचीं गुणोत्तरें व माल दाखविणाऱ्या परिमाणांचीं गुणोत्तरें ह्यांवरून पाहतां पहिल्या प्रकारच्या कांहीं हिशेबांविषयीं व दुसऱ्या प्रकारच्या थोड्याशा हिशेबांविषयीं मात्र चाली बसवितां येतात. त्या कशा बसवाव्या हें ह्या पुस्तकाच्या तिसऱ्या भागांत दाखविलें आहे.

३ पहिल्या प्रकारच्या हिशेबांविषयीं कोणती ही चाल “ मणावरून पासरीस अमुक चाल ” अशी दोन विशेषपरिमाणांस लक्षून लिहिण्यापेक्षां, “ ज्या परिमाणांचें गुणोत्तर ८ आहे त्यांपैकीं भारी परिमाणावरून हलक्यास अमुक चाल ” अशी त्या परिमाणांच्या गुणोत्तरास लक्षून लिहिणें जास्त सोईचें आहे. कारण तसें न केलें तर मणावरून पासरीस जी चाल

लेहिली असेल, तीच माशावरून गुंजेस, पासरीवरून अर्ध्या उव्वाशेरास, इत्यादि अनेक प्रसंगीं पुनः लिहावी लागेल. (ही गोष्ट दुसऱ्या भागाच्या दुसऱ्या प्रकरणांत गुणोत्तरें दाखविणाऱ्या संख्यांच्या पुढें लिहिलेल्या परिमाणांच्या जोड्यांवरून स्पष्ट दिसेल.) तथापि परिमाणांच्या गुणोत्तरांस लक्षून चाली लिहिणें ही व्यापकपद्धति तिसरी इयत्ता शिकणाऱ्या मुलांस दुर्बोध होईल; म्हणून त्यांच्याकरितां ती पद्धति न योजितां पहिल्या पुस्तकांत चाली लिहिल्या आहेत; आणि ह्या पुस्तकांत त्या व्यापकपद्धतीनें लिहिल्या आहेत.

४ चालींच्या कोष्टकामध्यें किंमत दाखविणाऱ्या रुपया, आणा इत्यादि अनेक परिमाणांवरून चाली बसविल्या आहेत. असें करण्यामध्ये उद्देश हा कीं, “दर माशास ११=॥११, तर गुंजेची किंमत किती ?” ह्याप्रमाणें किंमत दाखविणाऱ्या अनेक परिमाणांवरून दर सांगून दुसऱ्या परिमाणाची किंमत विचारिली असल्यास, केवळ रुपयावरून अथवा आण्यावरून बसविलेली चाल अग्रांठ विद्यार्थ्यांच्या उपयोगीं पडावयाची नाही; अशा प्रसंगीं “माशास जे रुपये असतील त्यांच्या दुप्पट आणे, आण्यांच्या निमपट पैसे व पैशांइतक्या टोल्या गुंजेस होतात ” हीच चाल फार उपयोगीं पडेल.

५ भारी परिमाणांच्या किमतींवरून हलक्यांच्या किमती काढण्याच्या चालींमध्ये किंमत दाखविणाऱ्या पै, टोली इत्यादि फार हलक्या परिमाणांवरून चाली बसविल्या नाहीत; हलक्या परिमाणांच्या किमतींवरून भारी परिमाणांच्या किमती काढण्याच्या चालींमध्ये रुपयावरून चाली बसविल्या नाहीत व ज्यांचीं गुणोत्तरें २, ३, ४, हीं आहेत त्यांच्या विषयी चाली मुळींच बसविल्या नाहीत. ह्या तीन ही गोष्टींचें कारण

हैं कीं, अशा प्रसंगीं कृतीचा कांहींच संक्षेप होत नाहीं (हें प्रत्यक्ष उदाहरणें घेतलीं असतां ध्यानांत येईल); म्हणून “तोंडच्या हिशेबाची चाल” ह्या शब्दाच्या व्याख्येवरून पाहतां असल्या हिशेबांच्या रीतींस चाली ही संज्ञाच शोभत नाहीं.

भाग पहिला.

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार हीं कृत्यें तोंडानें करण्याविषयीं कांहीं चाली.*

१ तीन तीन चार चार अंकांच्या दोन संख्यांची बेरीज

* शिक्षकांस सूचना—तोंडच्या हिशेबांच्या पहिल्या पुस्तकांतील “शिक्षकांस सूचना ह्या प्रकरणांतल्या यादीमध्ये सुचविलेल्या युक्ति तिसरी इयत्ता शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांस बहुतकरून दोन दोन व क्वचित् तीन तीन अंकांच्या संख्यांनां लागू करावयास शिकवावयाच्या, असें तेथें सुचविलेंच आहे. एथें चवथी व पांचवी इयत्ता शिकणाऱ्यांस त्या तीन तीन चार चार अंकांच्या पूर्णसंख्यांनां व कांहीं अपूर्णसंख्यांनां ही लागू करण्यास शिकवावें. त्या यादींतल्या युक्तींचीं सामान्यस्वरूपें विद्यार्थ्यांच्या ध्यानांत यावीं म्हणून ह्या पुस्तकामध्ये त्या ही पुनः लिहिल्या आहेत.

चालींची योजना विद्यार्थ्यांस करितां आल्याखेरीज त्यांजकडून त्या नुसत्या पाठ करवूं नयेत, किंबहुना योजना करितां करितांच त्यांनां त्या पाठ होतील असें करावें; आणि त्यांच्या उपपत्तीकडे त्यांचें लक्ष जाईल असा हळू हळू यत्न करावा. ह्या सूचनेकडे शिक्षकांचें पूर्ण लक्ष असलें पाहिजे.

तीस पाडे, पावकीं, निमकीं, पाऊणकीं, सवाइकीं, दीडकीं, अडीचकीं, अकरकीं, एकोत्रीं हीं विद्यार्थ्यांस पाठ राहतील तरच ह्या चालींचा सोपेपणा त्यांच्या अनुभवास येईल. ह्याकरितां तोंडच्या हिशेबांसाठीं नेमिल्या वेळापैकीं महिन्यांतून एक तास तरी त्यांच्या आवृत्तीकडे अवश्य खर्चावा.

किंवा वजाबाकी तोंडानें करावयाची असल्यास, एकीमध्ये दुसरीतले नुसते शेंकडे* मिळवून किंवा वजा करून एक संख्या मनांत तयार करावी; नंतर तीमध्ये दुसरीचा राहिलेला भाग मिळवावा किंवा वजा करावा. ह्याप्रमाणें एकीमध्ये दुसरीचा जेवढा भाग प्रत्येक वेळीं मिळवितां किंवा वजा करितां येईल, तेवढा कोणत्या ही अनुक्रमानें मिळवून किंवा वजा करून प्रत्येक वेळीं निरनिराळी संख्या मनांत तयार करित चलावें. जसें ३५४९ ह्या संख्येमध्ये ९२३६ ही संख्या मिळवावयाची किंवा वजा करावयाची; तर आधीं ३५४९ व ९२०० ह्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी मनांत तयार करावी; नंतर ती संख्या व ३६ ह्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करावी. (अथवा आधीं ३६ घेऊन मग ९२०० घेतले तरी चालेल.)

(तिसरी इयत्ता शिकत असतां दोन दोन अंकांच्या संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी तोंडानें करण्याचा अभ्यास मुलांना बराच झालेला असतो; आणि वरील कलमांत सांगितलेल्या कृतींत प्रत्येक वेळीं पराकाष्ठा दोन दोन अंकांच्याच संख्यांची बेरीज अथवा वजाबाकी करावी लागते; व प्रत्येक वेळीं दोन दोन संख्यांचें मात्र स्मरण ठेवावें लागतें. ह्यामुळें चुकी पडण्याचा संभव कमी असतो. हा वरच्या कलमांतल्या रीतीपासून फायदा आहे.)

ह्या कलमांतली रीति अपूर्णसंख्यांस ही लागू करावी. जसें ५॥-॥ ह्या संख्येंत ०॥-॥ मिळवावयाचे; तर आधीं नुसते

* चार अंकांची संख्या असल्यास तींतील सहस्र व शेंकडे मिळून शेंकड्यांचीच एक संख्या मानावी आणि तशीच वाचावी. जसें ७२९ ही संख्या “सात हजार दोनशें एक्याण्णव” अशी वाचूं नये, “दहात्तरशें एक्याण्णव” अशी वाचावी. ह्या पुस्तकामध्ये सर्व “शेंकडे” ह्या शब्दामध्येच सहस्रांचाही समावेश केला आहे.

॥ मिळवून बेरीज मनांत तयार करावी; नंतर तीमध्ये ८॥ मिळवावा. ह्याप्रमाणेच वजाबाकीविषयी ही समजावे.

२ नुसते दशक, नुसते सहस्र, नुसते शेंकडे इत्यादिकांपेक्षा किंचित् कमी असणारी संख्या दुसऱ्या एखाद्या संख्येमध्ये मिळवावयाची असल्यास, ते दशक, शेंकडे अथवा सहस्रच दुसरीमध्ये मिळवावे; आणि असें केल्यामुळे जी संख्या जास्त मिळविली जाईल, ती आलेल्या बेरजेतून वजा करावी. जसें ३९८ ही संख्या एखाद्या संख्येत मिळवावयाची असल्यास, ती ४ शेंकड्यांपेक्षा किंचित् कमी आहे, म्हणून ४०० मिळवून आलेल्या बेरजेतून (जास्त मिळविलेले) २ वजा करावे.

अशीच चाल, ॥३॥ ही संख्या दुसरीत मिळवावयाची, अशा प्रसंगी ही योजावी. एथें ॥३॥ ह्या संख्येचे ठिकाणी एक मिळवून आलेल्या बेरजेतून जास्त मिळविलेला ८॥ वजा करावा.

३ नुसते दशक, नुसते शेंकडे इत्यादिकांपेक्षा किंचित् कमी असणारी संख्या दुसऱ्या एखाद्या संख्येतून वजा करावयाची असल्यास, ते दशक अथवा शेंकडेच दुसरीतून वजा करावे; आणि असें केल्यामुळे जी संख्या जास्त वजा केली जाईल, ती राहिलेल्या बाकीत मिळवावी. जसें, १३९६ ही संख्या दुसऱ्या एखाद्या संख्येतून वजा करावयाची असल्यास, १४०० वजा करून आलेल्या बाकीमध्ये (जास्त वजा केलेले) ४ मिळवावे.

अशीच चाल, ॥३॥ ही संख्या दुसरीतून वजा करावयाची, अशा प्रसंगी ही योजावी. एथें १ वजा करून राहिलेल्या बाकीमध्ये (जास्त वजा केलेला) १ मिळवावा.

४ वजाबाकीकरिता दिलेल्या दोन संख्यांतील उजवेकडची कांहीं स्थाने मिळून होणाऱ्या संख्यांचें अंतर थोडें असून धा-

कटीतील ती संख्या मोठी असेल, तर त्या स्थानीं शून्येच आ-
हेत असें समजून त्या संख्यांची वजाबाकी करावी, आणि रा-
हिलेल्या बाकींतून तें थोडें अंतर वजा करावें. जसें, २९६४ व
१३६८ ह्या संख्यांची वजाबाकी करावयाची. एथें ६४ व ६८
ह्यांचें अंतर (४ हें) थोडें असून धाकटीतली (६८ ही) संख्या
मोठी आहे; म्हणून २९०० व १३०० ह्यांचीच वजाबाकी
(१६०० ही) तयार करून तींतून तें (४ हें) थोडें अंतर
वजा करावें.

अशीच चाल, १५१=॥ व १२१=॥॥ ह्यांची वजाबाकी करा-
वयाची, अशा प्रसंगीं ही योजावी. एथें १५ व १२ ह्यांचें अं-
तर ३ ह्यांतून १=॥ व १=॥॥ ह्यांचें अंतर ०१ हें वजा करावें.

५. तीन अथवा चार अंकांच्या संख्येची पावपट, निमपट,
पाऊणपट, सव्वापट, दीडपट, अथवा अडीचपट करावयाची
असल्यास पहिल्यानें (सहस्रांसहित) शेंकड्यांची ती पट क-
रून तितके शेंकडे मानावे, आणि त्यांमध्ये राहिलेल्या संख्ये-
ची ती पट मिळवावी. जसें ७२५ ह्या संख्येची पावपट करा-

* कोणत्याही संख्येची पावपट करणें म्हणजे तिला ४ नीं भाग-
णें, निमपट करणें म्हणजे २ नीं भागणें, पाऊणपट करणें म्हणजे
तिपटीस ४ नीं भागणें (अथवा ४ नीं भागून येणाऱ्या भागाकारास
३ नीं गुणणें), सव्वापट करणें म्हणजे पांचपटीस ४ नीं भागणें
(अथवा ४ नीं भागून येणाऱ्या भागाकारास ५ नीं गुणणें), दीडपट
करणें म्हणजे तिपटीस २ नीं भागणें (किंवा २ नीं भागून येणाऱ्या
भागाकारास ३ नीं गुणणें), आणि अडीचपट करणें म्हणजे पांचपटी-
स २ नीं भागणें (अथवा २ नीं भागून येणाऱ्या भागाकारास ५ नीं
गुणणें) हे पावपट, निमपट इत्यादिकांचे अर्थ मुलांच्या ध्यानांत
आणून द्यावे.

† पावशेंकडा म्हणजे २५, अर्धा शेंकडा म्हणजे ५० व पाऊण
शेंकडा म्हणजे ७५, हे मुलांच्या ध्यानांत आणून द्यावे.

वयाची; तर ७ पाव १॥ शेंकडे म्हणजे १७५, ह्या संख्येत २५ ची पावपट ६॥ हो मिळविली, तेव्हां १८१॥ ही ७२५ ची पावपट झाली. तसेंच ६५४३ ह्या संख्येची सव्वापट करावयाची; तर ६५ सवे ८१॥ शेंकडे म्हणजे ८१२५, ह्या संख्येत ४३ ची सव्वापट ५३॥ ही मिळविली, तेव्हां ८१७८॥ ही ६५४३ ह्या संख्येची सव्वापट झाली.

ह्याप्रमाणेंच ३७॥, ५८॥, ६३॥ इत्यादि भागानुबंधपूर्ण संख्यांच्या ही पावपट, निमपट इत्यादि पटी कराव्या.

६ कोणत्या ही संख्येला ५ नीं गुणावयाचें असल्यास गुण्यावर पूज्य घेऊन त्याला २ नीं भागावें, अथवा गुण्याची निमपट करून तितके दशक* समजावे, म्हणजे तो गुणार होईल.

कोणत्याही संख्येला १५ नीं गुणावयाचें असल्यास गुण्याची दीडपट करून तितके दशक मानावे, म्हणजे तो गुणाकार होईल.

कोणत्या ही संख्येला २५ नीं गुणावयाचें असल्यास गुण्याची पावपट करून तितके शेंकडे मानावे, ५० नीं गुणावयाचें असल्यास गुण्याची निमपट करून तितके शेंकडे मानावे, व ७५ नीं गुणावयाचें असल्यास गुण्याची पाऊणपट करून तितके शेंकडे मानावे, म्हणजे तो गुणाकार होईल.

कोणत्या ही संख्येला १२५ नीं गुणावयाचें असल्यास गुण्याची सव्वापट करून तितके शेंकडे मानावे, म्हणजे तो गुणाकार होईल; अथवा गुण्यास ८ नीं भागून येणाऱ्या भागाकारा-इतके सहस्र व बाकी राहिल तिच्या सव्वापटीइतके शेंकडे ह्यांची बेरीज करावी, म्हणजे तो गुणाकार होईल. जसें १८७

* पाव दशक म्हणजे २॥, अर्धा दशक म्हणजे ५ व पाऊण दशक म्हणजे ७॥ हे मुलांच्या ध्यानांत आणून द्यावे.

ह्या संख्येला १२५ नीं गुणावयाचें; तर गुण्यास ८ नीं भागून येणारा भागाकार २३ हे सहस्र, व बाकी ३ राहिली हिची सव्वापट ३॥ हे शेंकडे, ह्यांची बेरीज २३३७५ हा इच्छिलेला गुणाकार होय.

कोणत्याही संख्येला ६२५ नीं गुणावयाचें असल्यास गुण्याची निमपट करून तिची सवाई करावी आणि तितके सहस्र हा गुणाकार समजावा; अथवा गुण्यास १६ नीं भागून येणाऱ्या भागाकाराइतके दशसहस्र व बाकी राहिल तिच्या ६। पटीइतके शेंकडे ह्यांची बेरीज हा गुणाकार समजावा. जसें ७२९ ह्या संख्येला ६२५ नीं गुणावयाचें, तर गुण्याला १६ नीं भागून आलेला भागाकार ४५ इतके दशसहस्र व बाकी ९ हिची ६। पट ५६। इतके शेंकडे ह्यांची बेरीज ४५५६२५ हा गुणाकार होय.

७ कोणत्या ही संख्येला १५०, १७५, २२५, २७५ इत्यादि संख्यांनीं गुणावयाचें असल्यास, गुण्याला १॥, १॥॥, २।, २॥॥ इत्यादि संख्यांनीं गुणून आलेल्या गुणाकाराइतके शेंकडे हा गुणाकार समजावा.

८. २५, ५०, ७५, १०० इत्यादि ज्या ज्या संख्यांनीं तीन तीन चार चार अंकांच्या संख्यांनां तोंडानें गुणितां येतें, त्यांच्या जवळच्या एखाद्या संख्येनें गुणावयाचें असल्यास, गुणवत्त सदरू संख्यांपैकीं जिच्या जवळ असेल, तिनेंच गुण्यास गुणावें; व असें केल्यामुळे गुण्याची जी जास्त किंवा कमी पट झाली असेल, ती आलेल्या गुणाकारांत अनुक्रमें वजा करावी किंवा मिळवावी. जसें, ७६ नीं गुणावयाचें असल्यास, आधीं गुण्याला ७५ नीं गुणून आलेल्या गुणाकारांत गुण्याची एकपट (कमी झाली आहे ती) मिळवावी. १२३ नीं गुणावयाचें अ

सल्यास, १२५ नीं गुणून आलेल्या गुणाकारांत गुण्याची दुप्पट (जास्त झाली आहे ती) वजा करावी. ४९९ नीं गुणावयाचें असल्यास ५०० नीं गुणून आलेल्या गुणाकारांत गुण्याची एकपट (जास्त झाली आहे ती) वजा करावी.

अशीच चाल गुणक $||\equiv||$ अथवा $९\frac{२४}{२५}$ अशा प्रकारचा (म्हणजे अपूर्णाक किंवा भागानुबंधपूर्णाक असून कोणत्या तरी पूर्णसंख्येपेक्षां किंचित् कमी) असेल अशा प्रसंगीं ही योजावी.

९. गुणक ३॥ असल्यास गुण्याच्या निमपटीची पाऊणपट करून तितके दशक मानावे. गुणक ६॥ असल्यास गुण्याच्या निमपटीची सव्वापट करून तितके दशक मानावे. गुणक ७॥ असल्यास गुण्याची पाऊणपट करून तितके दशक मानावे. गुणक १२॥ असल्यास गुण्याची सव्वापट करून तितके दशक मानावे. गुणक १८॥ असल्यास गुण्याच्या पावपटीची पाऊणपट करून तितके शेंकडे मानावे. ह्या प्रमाणेंच ३१, ३७॥, ५६॥, ६२॥, ९३॥, ११२॥ इत्यादि गुणक असल्यास गुण्याच्या पावपटीची सव्वापट, निमपटीची पाऊणपट इत्यादि पटी करून तितके शेंकडे मानावे. जसें ८७ ला ५६॥ नीं गुणावयाचें तर (५६॥ ही शेंकड्याच्या पाऊणपटीची म्हणजे ७५ ची पाऊणपट आहे, म्हणून) ८७ ची पाऊणपट ६५ व ६५ ची पाऊणपट ४८॥ \equiv इतके शेंकडे म्हणजे ४८९३॥* हा इच्छिलेला गुणाकार होय.

* शेंकड्याचा $\frac{१}{२}$ (अथवा षोडशांश) ६॥, शेंकड्याचे $\frac{१}{३}$ (अथवा अष्टमांश) १२॥ इत्यादि शेंकड्याच्या १५ आण्यापर्यंत किमती; व दशकाचा $\frac{१}{२}$ (अथवा षोडशांश) $\cdot ||\equiv$, दशकाचे $\frac{१}{३}$ (अथवा अष्टमांश) १॥ इत्यादि दशकाच्या पंधरा आण्यापर्यंत किमती मुलांकरून पाठ कराव्या.

१०. गुण्य हा गुणक व गुणक हा गुण्य मानिला तरी गुणाकार बदलत नाही. म्हणून ज्या ज्या संख्यांनी गुणण्याच्या चाली मागे सांगितल्या आहेत, त्या त्या संख्या गुण्यस्थानी असल्या तरी त्या गुणकस्थानीच आहेत असे समजून त्यांना त्या चाली लागू कराव्या. जसे ७५ ह्या संख्येला ६७ नीं गुणावयाचे. एथे ७५ हा गुण्य असतांही तो गुणकच आहे असे समजून त्याने ६ व्या कलमांतल्या चालीप्रमाणे ६७ स गुणावे.

(ह्या भागांत ह्यापुढे लिहिलेल्या कलमांचा अभ्यास चवथी इयत्ता शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांनी न केला तरी चालेल.)

११. व्याख्या—कोणत्याही संख्येला तिनेच गुणिले असतां जो गुणाकार येतो त्याला त्या मूळसंख्येचा वर्ग म्हणतात. जसे १५ ह्या संख्येला १५ नीं गुणिले असतां येणारा गुणाकार २२५ हा १५ चा वर्ग होय.

एकोत्रीं हे एकापासून शंभरपर्यंत सर्व संख्यांचे वर्गच आहेत.

एकोत्र्यांच्या साहाय्याने तीन तीन अंकांच्या संख्यांचे व चार चार अंकांच्या ही कांहीं संख्यांचे वर्ग तोंडाने करितां येण्याजोग्या कांहीं चाली आहेत, त्या उदाहरणांच्या योगाने दाखवितों.

पहिली चालः—३२४ ह्या संख्येचा वर्ग करावयाचा. तर तिचे ३०० व २४ हे (अथवा ३२० व ४ हे) दोन भाग कल्पून त्या दोन्ही भागांचे वर्ग व त्या दोन्ही भागांच्या गुणाकाराची दुप्पट ह्यांची बेरीज करावी; तो इच्छिलेला वर्ग होईल.

दुसरी चाल—(जिचा वर्ग करावयाचा ती संख्या नुसते शेंकडे, नुसते सहस्र इत्यादिकांपेक्षा किंचित् कमी असल्यास पुढील उदाहरणांत दाखविलेली चाल योजावी.) ४९७ ह्या

संख्येचा वर्ग करावयाचा. तर (ही संख्या ५०० व ३ ह्यांच्या अंतराबरोबर आहे, म्हणून) ५०० व ३ ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजेतून ५०० व ३ ह्यांच्याच गुणाकाराची दुप्पट वजा करावी. बाकी राहिल तो ४९७ चा वर्ग येईल.

तिसरी चाल-(नुसते शेंकडे, नुसते सहस्र इत्यादिकांच्या जवळच्या संख्यांचे वर्ग पुढील उदाहरणांत दाखविलेल्या चालीने ही थोडक्यांत करितां येतात.) ३८४ ह्या संख्येचा वर्ग करावयाचा; तर ३८४ मध्ये १६ (ही लहानशी संख्या) मिळविल्याने ४०० ही नुसत्या शेंकड्यांची संख्या उत्पन्न होते; सबब ४०० आणि (३८४ व १६ ह्यांचे अंतर) ३६८ ह्या दोहोंचा गुणाकार करून त्यांत १६ चा वर्ग मिळविल्याने ३८४ चा वर्ग येईल.

ह्याप्रमाणेच ४१२ चा वर्ग करावयाचा. तर ४१२ तून १२ (ही लहानशी संख्या) वजा केल्याने ४०० ही नुसत्या शेंकड्यांची संख्या तयार होते; म्हणून ४०० व (४१२ आणि १२ ह्यांची बेरीज) ४२४ ह्यांच्या गुणाकारांत १२ चा वर्ग मिळविल्याने ४१२ चा वर्ग येईल.

१२ दोन दोन स्थानांच्या संख्यांचे कोणत्या तरी एकाच स्थानचे अंक भिन्न असल्यास (जसे ६२ व ६७, ३७ व ६७), आणि तीन तीन स्थानांच्या संख्यांचे नुसते एक स्थानचे किंवा नुसते शत स्थानचे अंक भिन्न असल्यास (जसे ५३४ व ५३६, ३७६ व ५७६) त्यांचा गुणाकार पुढील उदाहरणांत दाखविलेल्या चालीने तोंडाने करितां येईल.

पहिले उदाहरण—६२ व ६७ ह्यांचा गुणाकार करावयाचा. तर (१) ६० चा वर्ग, (२) २ व ७ ह्यांचा गुणाकार, आणि (३) २ व ७ ह्यांची बेरीज आणि ६० ह्यांचा गुणाकार, ह्या

तीन संख्यांची बेरीज केल्यानें इच्छिलेला गुणाकार येईल.

दुसरें उदाहरण—३७ व ६७ ह्यांचा गुणाकार करावयाचा तर (१) ३० व ६० ह्यांचा गुणाकार, (२) ७ चा वर्ग आणि (३) ३० व ६० ह्यांची बेरीज आणि ७ ह्यांचा गुणाकार ह्या तीन संख्यांची बेरीज केल्यानें इच्छिलेला गुणाकार येईल.

तिसरें उदाहरण—५३४ व ५३६ ह्यांचा गुणाकार करावयाचा. तर (१) ५३० चा वर्ग, (२) ४ व ६ ह्यांचा गुणाकार आणि (३) ४ व ६ ह्यांची बेरीज आणि ५३० ह्यांचा गुणाकार ह्या तीन संख्यांची बेरीज केल्यानें इच्छिलेला गुणाकार येईल.

चवथें उदाहरण—३७६ व ५७६ ह्यांचा गुणाकार करावयाचा. तर (१) ३०० व ५०० ह्यांचा गुणाकार, (२) ७६ चा वर्ग, आणि (३) ३०० व ५०० ह्यांची बेरीज आणि ७६ ह्यांचा गुणाकार ह्या तीन संख्यांची बेरीज केल्यानें इच्छिलेला गुणाकार येईल.

१३ कोणत्याही पूर्ण संख्येमध्ये अर्धा मिळवून होणाऱ्या संख्येचा वर्ग करण्याची सुलभ रीति:— ती पूर्णसंख्या व तीमध्ये १ मिळवून होणारी संख्या ह्यांचा गुणाकार करून त्यांत $\frac{१}{४}$ मिळवावा. जसें २५॥ चा वर्ग करावयाचा. तर २५ ही पूर्ण संख्या व तीमध्ये १ मिळवून होणारी संख्या २६ ह्यांचा गुणाकार ६५० ह्यामध्ये $\frac{१}{४}$ मिळविल्यानें ६५०॥ हा २५॥ चा वर्ग झाला.

१४ ज्यांचें अंतर २००पेक्षां जास्त नाहीं अशा (तीन तीन अंकांच्या) दोन संख्यांचा गुणाकार पुढील युक्तीनें तोंडानें करितां येईल.

दिलेल्या दोन संख्यांच्या अंतराचें अर्ध लहान संख्येंत मिळविल्यानें (किंवा मोठींतून वजा केल्यानें) जी संख्या उत्पन्न

होईल, तिच्या वर्गांतून त्या अंतराच्या अर्धाचा वर्ग वजा करावा. बाकी राहील तो इच्छिलेला गुणाकार होईल. जसें, ३६२ व ४८६ ह्यांचा गुणाकार करावयाचा. तर, ह्या दोन संख्यांचें अंतर १२४, ह्याचें अर्ध ६२, हें लहान संख्येंत मिळविल्यानें (अथवा मोठींतून वजा केल्यानें) ४२४ ही संख्या उत्पन्न होते. हिचे वर्गांतून अंतराचें अर्ध ६२ ह्याचा वर्ग वजा केल्यानें इच्छिलेला गुणाकार येईल.

अथवा दिलेल्या दोन संख्यांच्या बेरजेच्या अर्धाचा वर्ग करून त्यांत त्यांच्याच वजाबाकीच्या अर्धाचा वर्ग वजा करावा, बाकी राहील तो दिलेल्या दोन संख्यांचा गुणाकार होईल.

१५ एकाच संख्येच्या अनेक पटींची बेरीज अथवा वजाबाकी करावयाची असल्यास, आधीं त्या पट दाखविणाऱ्या संख्यांचीच बेरीज अथवा वजाबाकी करावी, आणि आलेल्या संख्येइतकी मूळसंख्येची पट करावी. जसें, ७६ ची ३२ पट व ७६ चीच २८ पट ह्यांची बेरीज करावयाची. तर ३२ व २८ ह्यांची बेरीज ६० इतकी ७६ ची पट करावी. तसेंच ७६ च्या ३२॥ पटींतून ७६ चीच २८॥ पट वजा करावयाची, तर ३२॥ व २८॥ ह्यांचें अंतर ४ इतकी ७६ ची पट करावी.

गुण्य हा गुणक व गुणक हा गुण्य मानिला तरी गुणाकार बदलत नाहीं. म्हणून एकच गुण्य व अनेक गुणक ह्यांच्या संबंधानें मागील कलमांत जी चाल सांगितली, तीच चाल अनेक गुण्य व एकच गुणक असतां ही लागू पडते. जसें ३२॥ च्या ७६ पटीमध्ये २७॥ ची ७६ पट मिळवावयाची, तर ३२॥ व २७॥ ह्यांची बेरीज ६० हिचीच ७६ पट करावी. ह्याप्रमाणेंच वजाबाकीविषयीं समजावें.

१६ अनेक संख्यांना एकाच भाजकानें भागून घेणाऱ्या

भागाकारांची बेरीज किंवा वजाबाकी करावयाची असल्यास, आधीं त्या भाज्यांचीच बेरीज किंवा वजाबाकी करून आलेल्या संख्येला त्या भाजकानें भागावें. जसें २४८ व १३६ ह्या दोन संख्यांना ४ नीं भागून येणाऱ्या भागाकारांची बेरीज करावयाची, तर आधीं भाज्यांचीच बेरीज ३८४ ही तयार करून तिला ४ नीं भागावें. ह्याप्रमाणेंच वजाबाकीविषयीं समजावें.

१७कोणत्याही संख्येला ५नीं भागावयाचें असल्यास, भाज्यांतील एकस्थानचा अंक कापून राहिलेल्या संख्येची दुप्पट करावी; आणि तीमध्ये कापिलेल्या अंकाला ५ नीं भागून आलेला भागाकार मिळवावा. तो इच्छिलेला भागाकार होईल; आणि कापिलेल्या संख्येला ५ नीं भागून राहिलेली बाकी ही इच्छिलेली बाकी होईल.

कोणत्याही संख्येला २५ नीं किंवा ५०नीं भागावयाचें असल्यास, भाज्यांतील एक व दहं ह्या दोन स्थानचे अंक कापून राहिलेल्या संख्येची, भाजक २५ असल्यास चौपट व ५० असल्यास दुप्पट करावी; आणि तीमध्ये कापिलेल्या संख्येला भाजकानें भागून आलेला भागाकार मिळवावा. तो इच्छिलेला भागाकार होईल; व कापिलेल्या संख्येला भाजकानें भागून राहिलेली बाकी ही इच्छिलेली बाकी होईल.

कोणत्याही संख्येला १२५ नीं भागावयाचें असल्यास भाज्यांतील एक, दहं व शतं ह्या तीन स्थानचे अंक कापून राहिलेल्या संख्येची ८ पट करावी, आणि तीमध्ये कापिलेल्या संख्येला १२५ नीं भागून आलेला भागाकार मिळवावा. तो इच्छिलेला भागाकार होईल; आणि कापिलेल्या संख्येला १२५ नीं भागून राहिलेली बाकी ही इच्छिलेली बाकी होईल.

उदाहरण- १५८३७ ह्या संख्येला ५ नीं भागावयाचें. तर ७ कापून राहिलेली संख्या १५८३ हिची दुप्पट ३१६६ व कापिलेला अंक ७ ह्याला ५ नीं भागून येणारा भागाकार १ यांची बेरीज ३१६७ हा इच्छिलेला भागाकार होय; आणि नां ५ नीं भागून राहिलेली बाकी २ ही इच्छिलेली बाकी होय.

१५८३७ ह्या संख्येला २५ नीं भागावयाचें. तर ३७ कापून राहिलेली संख्या १५८ हिची चौपट ६३२ व ३७ ह्या कापिलेल्या संख्येला २५ नीं भागून येणारा भागाकार १ यांची बेरीज ६३३ हा इच्छिलेला भागाकार होय; आणि ७ नां २५ नीं भागून राहिलेली बाकी १२ ही इच्छिलेली बाकी होय.

ह्याप्रमाणेंच ५० व १२५ ह्या भाजकांविषयीं समजावें.

१८ दोन संख्यांचा गुणाकार करून त्याला तिसऱ्या एका संख्येनें भागावयाचें आहे, आणि त्या दोहोंपैकीं एकीला त्या भाजकानें भाग तुटत आहे; तर आधीं तिला त्या भाजकानें भागावें, आणि मग आलेला भागाकार व राहिलेली संख्या ह्यांचा गुणाकार करावा. जसें, १९५ आणि २१८ ह्या संख्यांचा गुणाकार करून त्याला १३ नीं भागावयाचें आहे, व १९५ स १३ नीं भाग तुटत आहे; म्हणून आधीं १९५ स १३ नीं भागावें, आणि मग आलेला भागाकार १५ व राहिलेली संख्या २१८ ह्यांचा गुणाकार करावा.

बेरीज, वजावाकी, गुणाकार व भागाकार ह्यांविषयीं

तोंडचे हिशेव.

(हिशेब तोंडानें करीत असतां जी कृति करावयाची ती सारी संख्या प्रत्यक्ष न लिहितां व त्यांचा उच्चार ही न करितां केली पाहिजे.)

१
(१) ७ आणि २१ अष्टावीस, २८ आणि २१ एकूण पन्नास, असें २१७ पर्यंत लवकर लवकर म्हणत चला.

(२) ९ आणि २४ तेहतीस, ३३ आणि २४ सत्तावन असें २४९ पर्यंत जलदीनें म्हणत चला.

(३) ६ आणि २५ एकतीस, ३१ आणि २५ छप्पन्न, असें २५६ पर्यंत जलदीनें म्हणत चला.

(ह्याप्रमाणें १० पर्यंत कोणत्याही संख्येमध्ये ३० पर्यंत कोणतीही संख्या वारंवार मिळवून बेरजा सुमारे ३०० पर्यंत बऱ्याच जलदीनें म्हणतां याव्या)

(४) एकामध्ये २२ वारंवार मिळवून " १ आणि २२ तेवीस " इत्यादि सारें मोठ्यानें न म्हणतां, आलेल्या बेरजा मात्र २३, ४५, ६७ अशा २२१ पर्यंत लवकर लवकर म्हणत चला.

(ह्याप्रमाणें १० पर्यंत कोणत्या ही संख्येमध्ये ३० पर्यंत कोणती ही संख्या वारंवार मिळवून नुसत्या बेरजा सुमारे ३०० पर्यंत बऱ्याच जलदीनें म्हणतां याव्या.)

* " सात आणि एकवीस अष्टावीस " असलीं वाक्यें तोंडां म्हणावयाचीं असतां " सात नी एकवीस अष्टावीस " अशीं किं " सातन् एकवीस अष्टावीस " अशीं म्हणण्याची वहिवाट आहे, तें प्रमाणेंच म्हणावीं.

(५) १२ ह्या संख्येमध्ये ४२ वारंवार मिळवून बेरजा ४३२ पर्यंत सांगा.

(६) २४ ह्या संख्येमध्ये ५६ वारंवार मिळवून बेरजा ५८४ पर्यंत सांगा.

(ह्याप्रमाणे ३० पर्यंत कोणत्याही संख्येमध्ये दोन अंकांची कोणतीही संख्या वारंवार मिळवून बेरजा सुमारे १००० पर्यंत म्हणावयास सांगावे.)

(७) खाली लिहिलेल्या बेरजा लवकर लवकर करून दाखवा.

४२८+३२०,	१२७३+९४६,	२४२७+११३३,*
५८७+४३०,	१४३६+५६८,	२६५२+१८४४,
६२९+३७०,	१४४८+६५४,	२९३६+१६५१,
७६८+८६०,	५६२+१०५०,	२०७१+३१५३,
८३०+६३४,	८१९+१६७३,	२५४८+३७४६-

(८) ३१॥ ह्या संख्येमध्ये $\cdot \equiv$ वारंवार मिळवून बेरजा ३॥॥, ४८ \equiv ॥ अशा ७॥ \equiv ॥ पर्यंत म्हणत चला.

(९) ५॥=॥ ह्या संख्येमध्ये $\cdot \equiv$ वारंवार मिळवून बेरजा ६॥॥, ७ \equiv ॥ अशा १४॥ \equiv ॥ पर्यंत म्हणत चला.

(अशा अपूर्ण संख्यांच्याही बेरजा मुलांना म्हणतां याव्या.)

(१०) २६८ ह्या संख्येतून २४ जितके वेळां वजा जातात तितके वेळां वजा करून प्रत्येक वेळीं राहिलेली बाकी लवकर लवकर म्हणत चला.

(ह्याप्रमाणे तीन अंकांच्या कोणत्याही संख्येतून ३० पर्यंत

* तोंडच्या हिशेबांत ४ अंकांची संख्या वाचण्याचा प्रसंग आला असतां तींतील सहस्रांचा निराळा उच्चार करूं नये, शेंकड्यांवर उच्चार त्यांचा उच्चार करावा. जसें २४२७ ही संख्या “ दोन हजार चारशें सत्तावीस ” अशी लांबलचक म्हणूं नये, “ चोवीसशें सत्तावीस ” अशी थोडक्यांत म्हणावी.

कोणतीही संख्या वारंवार वजा करून बाक्या वऱ्याच जलदीने म्हणतां याव्या.)

(११) ५३२ ह्या संख्येंतून ५६ जितके वेळां वजा जातील तितके वेळां वजा करून प्रत्येक वेळीं राहिलेली बाकी म्हणत चला.

(ह्याप्रमाणें तीन अंकांच्या कोणत्याही संख्येंतून दोन अंकांची कोणतीही संख्या वारंवार वजा करून प्रत्येकवेळीं राहिलेली बाकी ह्मणावयास सांगावें.)

(१२) खालीं लिहिलेल्या वजाबाक्या लवकर लवकर करून दाखवा.

७३२-३६०,	१६२१-८४३,	२६१४-१२५६,
४७१-२५०,	१२२६-३२४,	३२२८-१७३१,
९२६-८४०,	८३९-५२८,	३६४९-२०३४,
६३१-४१०,	९५३-४३७,	३१२६-१३६२,
३६२-२८०,	६८९-६५६,	३४४६-२५३१-

(१३) ५ ह्या संख्येंतून ॥= जितके वेळां वजा जातात तितके वेळां वजा करून प्रत्येकवेळीं राहिलेली बाकी ४॥=३॥ अशी ह्मणत चला.

(१४) ७ ह्या संख्येंतून ॥=॥ जितके वेळां वजा जातात तितके वेळां वजा करून प्रत्येक वेळीं राहिलेली बाकी ६॥=५॥-अशी ह्मणत चला.

(ह्याप्रमाणें अपूर्ण संख्यांच्याही वजाबाक्या मुलांनां ह्मणतां याव्या)

२

खालीं लिहिलेल्या बेरजा अतिसंक्षिप्त रीतीनें करून दाखवा

८४३+७९९,	१२६३+१४९५,	३॥+४॥॥=॥,
५९८+३६१,	१६९२+१७५३,	१९॥॥=+६॥=॥,
९२६+८९१,	२४९९+१६३४,	२४॥॥॥+९॥॥=,
७८२+६९७,	३६८४+१२९५,	१९९॥॥=॥॥+२६॥=
३९३+४८९,	४०८९+१३६८,	१२८॥॥-+९९९॥॥=

भागाकारांची बेरीज आणि वजाबाकी अतिसंक्षिप्तरीतीने करून दाखवा.

(२) २८८ व ३३६ ह्या संख्यांच्या ४-नीं भागून घेणाऱ्या संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी अतिसंक्षिप्तरीतीने करून दाखवा.

२३८, ३५९, ६७४, ८९६ व २७५६ ह्या प्रत्येक संख्येला ५, २५, ५० व १२५ ह्या प्रत्येक संख्येने अतिसंक्षिप्तरीतीने भागून दाखवा.

१८.

खाली लिहिलेलीं कृत्ये अतिसंक्षिप्त रीतीने करून दाखवा.

(१) १७२५ ह्या संख्येला ६९ नीं गुणून २५ नीं भागा.

(२) ४९९ व ३२३ ह्यांच्या गुणाकाराला १७ नीं भागा.

(३) १६२ व २२४ ह्यांच्या गुणाकाराला १४ नीं भागून आलेल्या भागाकाराला २७ नीं भागा.

(४) ५६, ८१ व ११२ ह्यांच्या गुणाकाराला १६ व २८ ह्यांच्या गुणाकाराने भागा.

(५) ११९, २२५ व ३६५ ह्या संख्यांच्या गुणाकाराला २५, ७३ व १७ ह्यांच्या गुणाकाराने भागा.

(ह्याप्रमाणे बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इत्यादिकांविषयीं पृथक् पृथक् हिशेब करण्याचा अभ्यास मुलांना बराच झाला, म्हणजे ह्या सर्व कृत्यांचे मिश्रण करून खाली लिहिल्याप्रमाणे हिशेब विचारावे.)

(१) १२० मध्ये २२४ मिळवा, ३४ वजा करा, १० नीं भागा, ७५ नीं गुणा, २५ नीं भागा, उत्तर मांडा.

(२) २४॥ चा वर्ग करा, २४॥॥ मिळावा, अडीचपट करा, ३७॥ मिळवा, ६२॥ नीं गुणा, उत्तर मांड.

(३) ५३७ तून २३९ वजा करा, ३९५ मिळवा, २९९।= वजा करा, दसपट करा, उत्तर मांडा.

(४) ३८१ ह्या संख्येला ३ नीं भागा, १२३ मिळवा १२। नीं गुणा, ५० नीं भागा, उत्तर मांडा.

(५) ८९२ व ५०८ ह्या प्रत्येक संख्येला २५ नीं भागून आलेल्या भागाकारांची बेरीज करा, तिचा वर्ग करा, त्यांतून ५३७ वजा करा, उत्तर मांडा.

(६) दर बिघ्यास १ खंडी १९॥ मण ह्याप्रमाणें ५६ बिघ्यांमध्ये किती धान्य उत्पन्न होईल ?

(७) दर एकरास १८॥ ह्याप्रमाणें ६४ एकरांचा सारा किती झाला ?

(८) दर महिन्यास ६२।= प्रमाणें ६ वर्षे ८ महिने ह्यांचा खर्च किती ?

(९) दर खंडीस ११२॥ प्रमाणें ९६ खंडींचा आकार काय झाला ?

(१०) १ खंडी धान्य उत्पन्न व्हावयास १ एकर व ३७। गुंठे जमीन लागते, तर १४४ खंडी धान्य उत्पन्न व्हावयास किती एकर जमीन पाहिजे ?

भाग दुसरा.

प्रकरण पहिलें.

गुणोत्तर व कसर ह्यांविषयी.

१ गुणोत्तराची व्याख्या.—एकाच जातीच्या† दोन परिमाणांपैकी पहिलें दुसऱ्याच्या अमुक पटीबरोबर किंवा अमुक हिशशांबरोबर आहे हें दाखविणाऱ्या संख्येला त्या “दोन परिमाणांचें गुणोत्तर” अथवा “पहिल्याचें दुसऱ्याशीं गुणोत्तर” म्हणावें. जसें, तोळा व मासा ह्या एकाच जातीच्या दोन परिमाणांपैकी पहिलें तोळा हें परिमाण दुसऱ्याच्या म्हणजे माशाच्या १२ पटीबरोबर आहे, म्हणून “तोळा व मासा ह्यांचें गुणोत्तर” अथवा “तोळ्याचें माशाशीं गुणोत्तर १२ आहे” असें म्हणावें. तसेंच मासा हा तोळ्याच्या १२ व्या हिशशाबरोबर आहे, म्हणून “मासा व तोळा ह्यांचें गुणोत्तर” अथवा “माशाचें तोळ्याशीं गुणोत्तर $\frac{१}{१२}$ आहे” असें म्हणावें. ह्याप्रमाणेंच तोळा हा ३ गुंजांच्या ३२ पटीबरोबर आहे म्हणून “तोळ्याचें ३ गुंजांशीं गुणोत्तर ३२ आहे;” आणि “३ गुंजांचें तोळ्याशीं गुणोत्तर $\frac{१}{३२}$ आहे.”

२ गुणोत्तराच्या व्याख्येवरून उघड आहे कीं, भिन्नजाती-

* चवथी इयत्ता शिकणारांस हें प्रकरण समजावून देण्यास कठीण पडतें असें दिसेल, तर ह्यापैकीं चवथें व सहावें हीं कलमें शिकवावीं म्हणजे पुरे.

† शिक्षकांस सूचना—“एकाच जातीच्या परिमाणांपैकीं” ह्याचा अर्थ विद्यार्थ्यांच्या ध्यानांत आणून देण्याकरितां “परिमाणें” व त्यांच्या “अर्थदर्शक,” “भारदर्शक,” “रेषात्मक,” “क्षेत्रात्मक,” “अवकाशात्मक (ह्यांपैकींच केली,)” “कालदर्शक” इत्यादि जाति ह्या गोष्टी उदाहरणांच्या योगानें त्यांस समजावून द्याव्या.

च्या परिमाणांचें गुणोत्तर संभवत नाहीं. जसें, तोळा हें पदार्थांचें वजन दाखविणारें परिमाण व रुपया हें पदार्थांची किंमत दाखविणारें परिमाण, म्हणून तोळा व रुपया हीं भिन्न जातींचीं परिमाणें आहेत. ह्यांचें गुणोत्तर संभवत नाहीं. कारण कीं एका जातीच्या परिमाणाची कितीही पट केली तरी त्याच जातीचीं परिमाणें येतील, दुसऱ्या जातीचीं येणार नाहींत. म्हणून “तोळ्याच्या अमुक पटीबरोबर रुपया आहे” किंवा “रुपयाच्या अमुक पटीबरोबर तोळा आहे” असें दाखविणें संभवतच नाहीं.

३ दोन परिमाणांचें गुणोत्तर दाखविणाऱ्या संख्येला त्या परिमाणांचें अथवा दुसरें कोणतेंही नांव द्यावयाचें नाहीं, तीं नुसती संख्या असते, हें गुणोत्तराच्या व्याख्येवरून स्पष्ट आहे. जसें “१२ पायलींचें २ पायलींशीं गुणोत्तर ६ आहे” ह्या वाक्याचा अर्थ (गुणोत्तराच्या व्याख्येवरून) “१२ पायली २ पायलींच्या ६ पटीबरोबर आहेत” असा होतो. एथें गुणोत्तर दाखविणाऱ्या ६ ह्या संख्येला पायली (इत्यादि कांहीं) नांव दिलें, तर “६ पायली पटीबरोबर” असें झणावें लागेल; परंतु “पट करणें” ह्याच्या व्याख्येवरून पाहतां “६ पायली पट करणें” ह्याचा कांहीं अर्थच नाहीं.

४ दोन परिमाणांचें गुणोत्तर काढण्याची रीति— ज्या दोन परिमाणांचें गुणोत्तर काढावयाचें असेल, तीं एका नांवाचीं नसल्यास आधीं एका नांवाचीं करावीं. नंतर “अमुक दोन परिमाणांचें गुणोत्तर काढा” असें सांगितलें असल्यास, पहिल्या परिमाणसंख्येला दुसऱ्या परिमाणसंख्येनें भागावें, भागाकार येईल तें गुणोत्तर झालें; आणि “अमुक परिमाणांचें अमुक परिमाणाशीं गुणोत्तर काढा” असें सांगितलें असल्यास, त्याला “चें” हा प्रत्यय लाविला असेल त्याच्या संख्येस, ज्याला

“ शी ” हा प्रत्यय लाविला असेल त्याच्या संख्येने भागावे ; भागाकार येईल तें गुणोत्तर झालें.

उदाहरणें:— (१) वजनी खंडी व शेर ह्यांचें गुणोत्तर काढावयाचें. तर, खंडी म्हणजे ८०० शेर व ८०० शेरांस १ शेरानें भागिलें असतां भागाकार ८०० येतो; म्हणून खंडी व शेर ह्यांचें गुणोत्तर ८०० होय.

(२) रेंसाचें दामाशीं गुणोत्तर काढावयाचें. तर, रेंस म्हणजे $\frac{१}{२५}$ आणा व दाम म्हणजे $\frac{१}{३}$ आणा, आणि $\frac{१}{२५}$ आण्याला $\frac{१}{३}$ आण्यानें भागिलें असतां भागाकार $\frac{३}{२५}$ येतो; म्हणून रेंसाचें दामाशीं गुणोत्तर $\frac{३}{२५}$ हें होय.

(३) पैशीं टोलीचें गुणोत्तर काढावयाचें. तर, पै म्हणजे $\frac{१}{३२}$ आणा व टोली म्हणजे $\frac{१}{३२}$ आणा, आणि $\frac{१}{३२}$ आण्याला $\frac{१}{३२}$ आण्यानें भागिलें असतां भागाकार $\frac{३२}{३२}$ येतो; म्हणून पैशीं टोलीचें गुणोत्तर $\frac{३२}{३२}$ हें होय.

(४) पळ्याचें ७॥ शेरांशीं गुणोत्तर काढावयाचें. तर, पळ्याचे शेर १२०, आणि १२० शेरांस ७॥ शेरांनीं भागिलें असतां भागाकार १६ येतो; म्हणून पळ्याचें ७॥ शेरांशीं गुणोत्तर १६ हें होय.

(५) ६ बारुले मणांचें ५ सोळूले मणांशीं गुणोत्तर काढावयाचें. तर, ६ बारुले मणांच्या पायली ७२ व पांच सोळूले मणांच्या पायली ८०, आणि ७२ पायलींना ८० पायलींनीं भागिलें असतां भागाकार $\frac{९}{१०}$ येतो; म्हणून ६ बारुले मणांचें ५ सोळूले मणांशीं गुणोत्तर $\frac{९}{१०}$ हें होय.

५ गुणोत्तराची व्याख्या आणि तें काढण्याची रीति ह्यांवरून ध्यानांत येईल कीं “ तोळ्याचें गुंजेशीं गुणोत्तर काय ? ” व “ तोळ्याच्या गुंजा किती ? ” ह्या दोन्हीं प्रकारच्या प्रश्नांचा

अर्थ एकच आहे. कां कीं तोळा ह्या परिमाणामध्ये गुंज हीं परिमाणें किती आहेत हें ठरवावयाचें, हाच दोन्ही प्रश्नांचा उद्देश आहे. म्हणून “पैचें दामाशीं गुणोत्तर २॥” आणि “पैचे दाम २॥” हीं दोन्ही वाक्ये एकाच अर्थाचीं आहेत.

६ कसर— व्यवहारामध्ये पदार्थांची किंमत देण्याचे वेळीं पैसा, पै, टोली इत्यादिकांपैकीं अमुक परिमाणापेक्षां हलकें परिमाण योजावयाचें नाहीं असें देणाराच्या व घेणाराच्या मता-
नें ठरलेलें असतें. अशा प्रसंगीं जें सर्वांत हलकें परिमाण यो-
जावयाचें असा संकेत असेल, त्याचा अर्धापेक्षां कमी अपूर्णाक
असल्यास तो सोडून देतात; आणि अर्धापेक्षां जास्त अपूर्णाक
असल्यास त्याचे ठिकाणीं तें सारें पुरें परिमाण धरितात. जसें
२५ रु० १२ आणे १३ पै ही किंमत द्यावयाची आहे, आणि
पैशापेक्षां हलकें नाणें देण्याची सोय नाहीं; तर, १३ पै ही किं-
मत आधेल्यापेक्षां कमी आहे, म्हणून सोडून देतात; परंतु सदरू
किमतीमध्ये २३ पै असल्या तर, त्या आधेल्यापेक्षां जास्त
आहेत, म्हणून त्यांचे ठिकाणीं १ पैसा धरून एकंदर २५॥१॥
ही किंमत देतात. ह्याप्रमाणेंच पै, टोली इत्यादिकांच्या कस-
रीविषयीं समजावें.

पहिल्या प्रकरणाविषयीं प्रश्न.

- | | |
|---|--|
| (१) यार्ड व इंच ह्यांचें गुणोत्तर काय ? | (४) गुंठ्याचें एकराशीं गुणो-
त्तर काय ? |
| (२) गजाचें त्रितीशीं गुणोत्तर काय ? | (५) ८७॥ रेंसांच्या पै व दाम
किती ? |
| (३) चाहुराचें विध्याशीं गुणो-
त्तर काय ? | (६) १६॥ पैच्या टोल्या व रेंस
किती ? |

(७) बारुल्या खंडीचें चिपट्या-
शीं गुणोत्तर काय? मापट्या-
शीं गुणोत्तर काय?

(८) सोळूल्या खंडीचें चिप-
ट्याशीं व मापट्याशीं गुणो-
त्तर काय?

(९) बारुले खंडीचें व सोळूले
खंडीचें शेरशीं गुणोत्तर काय?

(१०) पळ्याचें अच्छेराशीं,
पावशेराशीं व छटाकाशीं
गुणोत्तर काय?

(११) ३ टांकाशीं २ शेरांचें
गुणोत्तर काय?

(१२) शेराशीं २ तोळ्यांचें
गुणोत्तर काय?

(१३) ८ पौंडांचें १५ शिलि-
गांशीं गुणोत्तर काय?

(१४) मण व सव्वाशेर, आणि
खंडी व पासरी ह्यांचीं गुणो-
त्तरें सांगा.

(१५) १०५ दामांचें पैशीं व
टोलीशीं गुणोत्तर सांगा.

(१६) ५५ दामांचे पैसे कि-
ती? ३७॥ रेंसांचे पैसे
किती?

(१७) ६२॥ रेंसांच्या टोल्या
किती व पै किती?

(१८) ४४ टोल्यांच्या पै किती
व पैसे किती?

(१९) ३१॥ पैंच्या टोल्या कि-
ती व पैसे किती?

(२०) २७॥ दाम, २६॥ रेंस
२२॥ टोल्या व ११॥ पै ही
प्रत्येक किंमत पैशापेक्षां क-
मी परिमाण न योजितां द्या-
वयाची आहे. तर कसरीची
धरसोड करून प्रत्येक कि-
मतीबद्दल किती किती पैसे.
द्यावे?

पुढील प्रश्नांचीं उत्तरें चवथी इयत्ता शिकणाऱ्या
विद्यार्थ्यांनीं न दिलीं तरी चालेल.

(२१) ५५ दाम व ३७॥ रेंस
ह्यांची बेरीज किती पै होईल
व तिचें ३ आप्यांशीं गुणो-
त्तर काय?

(२२) ६२॥ रेंसांचें टोलीशीं व
१॥ पैशीं गुणोत्तर काय?

(२३) ४४ टोल्यांमध्ये १३॥
पै वजा केल्या तर बाकी

किती टोल्या राहतील? व
त्यांचें २ पैशीं गुणोत्तर काय?

(२४) मासा, पायली, शेर,
तास, मण, महिना व पळा
ह्यांपैकीं कोणाचें कोणाशीं
गुणोत्तर काढणें संभवतें हें
सांगून काढून दाखवा.

(२५) ३१॥ रेंस व ४२॥ दाम

मिळून किती पै व किती टोल्या होतील ?

(२६) १३५ दामांतून १८॥
पैसे वजा केले तर बाकी किती पैसे राहतील ?

(२७) १४॥ पैशांतून ३१॥ पै
वजा केल्या तर बाकी किती पै व किती टोल्या राहतील ?

(२८) १८॥॥ दाम व ६॥॥ पै
मिळून किती पैसे व किती टोल्या होतील ?

(२९) ३७॥ दाम व ६२॥

रेंस मिळून किती टोल्या, व पैसे होतील ?

(३०) शेवटच्या पांच उदाहरणांच्या उत्तरांतल्या किमती, पैशापेक्षां हलकें परिमाण न योजितां, पैपेक्षां हलकें परिमाण न योजितां व टोलीपेक्षां हलकें परिमाण न योजितां यावयाच्या आहेत. तर कसरीची धरसोड करून ती प्रत्येक किंमत तीन तीन रूपांनीं सांगा.

प्रकरण दुसरें.

शिक्षकांस सूचना.— पुढें लिहिलेल्या चालींच्या यादीमध्ये (१), (२), अशा ज्या कंसामध्ये संख्या घातल्या आहेत, त्या पहिली चाल, दुसरी चाल, असा चालींचा अनुक्रम दाखविणाऱ्या आहेत असें समजावें. त्यांच्या पुढें, ज्या गुणोत्तरांस लक्षून चाली लिहावयाच्या तीं गुणोत्तरें “गुणोत्तर ८”, “गुणोत्तर १२” अशीं लिहिलीं आहेत. ह्या गुणोत्तर दाखविणाऱ्या प्रत्येक संख्येच्या पुढें, ज्या ज्या परिमाणांचें गुणोत्तर ती संख्या दाखविते त्यांच्या कांहीं जोड्या “आटकी व खंडी,” “मण व पायली” अशा लिहिल्या आहेत. नंतर, ती गुणोत्तर दाखविणारी प्रत्येक संख्या परिमाणांच्या ज्या जोड्यांचें गुणोत्तर दाखविते, त्या प्रत्येक जोडीपैकीं भारी परिमाणाच्या किंमतीवरून हलक्या परिमाणाची किंमत काढण्याकरितां कच्चांच्या व इतर चाली लिहिल्या आहेत ; आणि त्यांच्या पुढें हलक्या परिमाणाच्या किंमतीवरून भारी परिमा-

णाची किंमत काढण्याच्या चाली लिहिल्या आहेत. हें सारें आधीं मुलांच्या ध्यानांत आणून द्यावें. तसेंच “ भारीवरून हलक्यास रुपयांच्या दुप्पट आणे ” इत्यादि वाक्यांचा अर्थ, एका भारी परिमाणाची किंमत दाखविणाऱ्या रुपयांच्या संख्येच्या दुपटीइतकें आणे ही एका हलक्या परिमाणाची किंमत होय ” इत्यादि प्रकारचा आहे, हें उदाहरणांच्या योगानें मुलांस समजावून द्यावें. सारांश ही सारी व्यवस्था मुलांच्या ध्यानांत आणून दिल्याखेरीज त्यांना चाली पाठ करावयास लावूं नये; आणि चालींची योजना करितां करितांच त्या मुलांना पाठ होतील असें करण्याविषयीं व चालींच्या उपपत्तीकडे हळूहळू त्यांचें लक्ष लावण्याविषयीं शिक्षकांनीं करवेल तितका यत्न केला पाहिजे.

एका परिमाणाची किंमत दिली असतां तीवरून त्याच जातीच्या दुसऱ्या परिमाणाची किंमत काढण्याविषयीं तोंडच्या हिशेबांच्या चाली.

(१) गुणोत्तर ८- आटकी* व मण, मण व पासरी, शेर व अदपाव, मासा व गुंज, बाल व उडीद, घनगज व घनहात, खंडी व पल्ला अथवा फरा, पायली व मापटें अथवा टिपरी, शेर व कोळवें.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांच्या दुप्पट आणे.

८ कच्चांस रुपया. आण्यांच्या निमपट पैसे किंवा

॥ कच्चास आणा. १॥ पट पै.

पैशांच्या इतक्याच टोल्या.

* आटकी हें वजन दाखविणारें परिमाण आहे; हें सोलापुरास व इतर कांहीं ठिकाणीं चालू आहे. ह्याला “ आटकी खंडी ” किंवा “ ओझें ” असेंही म्हणतात.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या निमपट रुपये.

पैशांच्या दुप्पट आणे.

पैंच्या निमपट आणे व दुप्पट पै;

किंवा $\frac{२}{३}$ पट आणे.

(२) गुणोत्तर १२-तोळा व मासा, फूट व इंच, हात व तसू, वारुला मण व पायली, वर्ष व महिना.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांच्या इतकेच आणे व चौपट

१२ कच्चांस रुपया. पै; किंवा रुपयांस पाउणानें ($\frac{३}{४}$ नीं)

॥॥ कच्चास आणा. भागून येतील ते आणे.

१ कच्चास १६ पै. आण्यांस ३ नीं भागून येतील ते

पैसे; किंवा आण्यांच्या इतक्याच पै.

पैशांच्या पावपट पै; किंवा $\frac{२}{३}$ पट

टोल्या.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या पाऊणपट रुपये.

पैशांच्या तिप्पट आणे.

पैंच्या इतकेच आणे.

(३) गुणोत्तर १६-वजनी मण व अडिस्त्री, शेर व छटाक, रती व तंडुल, वारूँ व गिराँ, गुंठा व आणा, सोळूला मण व पायली, फरा व पायली, पायली व चिपटें.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांइतकेच आणे.

१६ कच्चांस रुपया. आण्यांच्या पावपट पैसे.

१ कच्चास आणा. पैशांच्या निमपट टोल्या.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या इतके रुपये.

पैशांच्या चौपट आणे; किंवा पाव-पट रुपये.

पैंच्या इतकेच आणे व चौपट पै.

* वार म्हणजे याड व गरा म्हणजे वाराचा सांळावा हिस्सा.

(४) गुणोत्तर २०—खंडी व मण, बिघा व पांड, पांड व चौरसकाठी, रीम व दस्ता, शेंकडा व पाचुंदा.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांच्या पाऊणपट आणे व १।
 २० कच्चांस रुपया. पट रेंस; किंवा पाऊणपट आणे व
 १। कच्चास आणा. १।। पट दाम; किंवा २० पट
 १ कच्चास २० रेंस रेंस; किंवा २४ पट दाम.
 किंवा २४ दाम. आप्यांच्या १। पट रेंस; किंवा १।।
 पट दाम.

हलक्यावरून भारीस—आप्यांच्या १। पट रुपये.
 पैशांच्या ५ पट आणे.
 पैच्या दुप्पट आप्यांत चौपट पै कमी.

(५) गुणोत्तर २४—पळा व पासरी, टांक व रती, गज व त-
 सू, हात व अंगुल, बारुला मण व अधोली, दस्ता व पान.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांच्या ३ पट आणे; किंवा ८
 २४ कच्चांस रुपया. पट पै.
 १।। कच्चास आणा. आप्यांस ६ नीं भागून येतील ते
 १ कच्चास ८ पै; किं- पैसे; किंवा निमे पै.
 वा २० दाम. पैशांना ३नीं भागून येतील त्या टोल्यां.

हलक्यावरून भारीस—आप्यांच्या १।। पट रुपये.
 पैशांच्या ६ पट आणे.
 पैच्या दुप्पट आणे.

(६) गुणोत्तर ३०—पळा व पायली, महिना व दिवस.
 भारीवरून हलक्यास—रुपयांच्या निमे आणे व रुपयांइ-

३० कच्चांस रुपया. तकेच दाम; किंवा १६ पट दाम.
 १ कच्चास अर्धा आ- आप्यांच्या इतकेच दाम.
 णा व १ दाम;
 किंवा १६ दाम.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या दुप्पट रुपयांत दुप्पट
आणे कमी.

पैशांच्या निमे रुपयांत निमे आणे
कमी.

पैंच्या २॥ पट आणे.

(७) गुणोत्तर ३२—आटकी व धडा, मण व सव्वाशेर,
मासा व उडीद, पायली व कोळवे.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांच्या निमे आणे.

३२ कच्चांस रुपया. आण्या इतक्याच टोल्या.

२ कच्चांस आणा. पैशांच्या पावपट टोल्या.

१ कच्चास अर्धा आणा.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या दुप्पट रुपये.

पैशांच्या निमे रुपये.

पैंच्या तिप्पट आण्यांत चौपट पै कमी.

(८) गुणोत्तर ३६—यार्ड अथवा वार व इंच.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांच्या $\frac{१}{३}$ पट आणे; किंवा

३६ कच्चांस रुपया. $\frac{१}{३}$ पट पै.

२१ कच्चांस आणा. आण्यांस ३ नीं भागून येतील

१ कच्चास $५\frac{१}{३}$ पै. त्या पै.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या २॥ पट रुपये.

पैशांच्या निमपट रुपये व तितकेच
आणे.

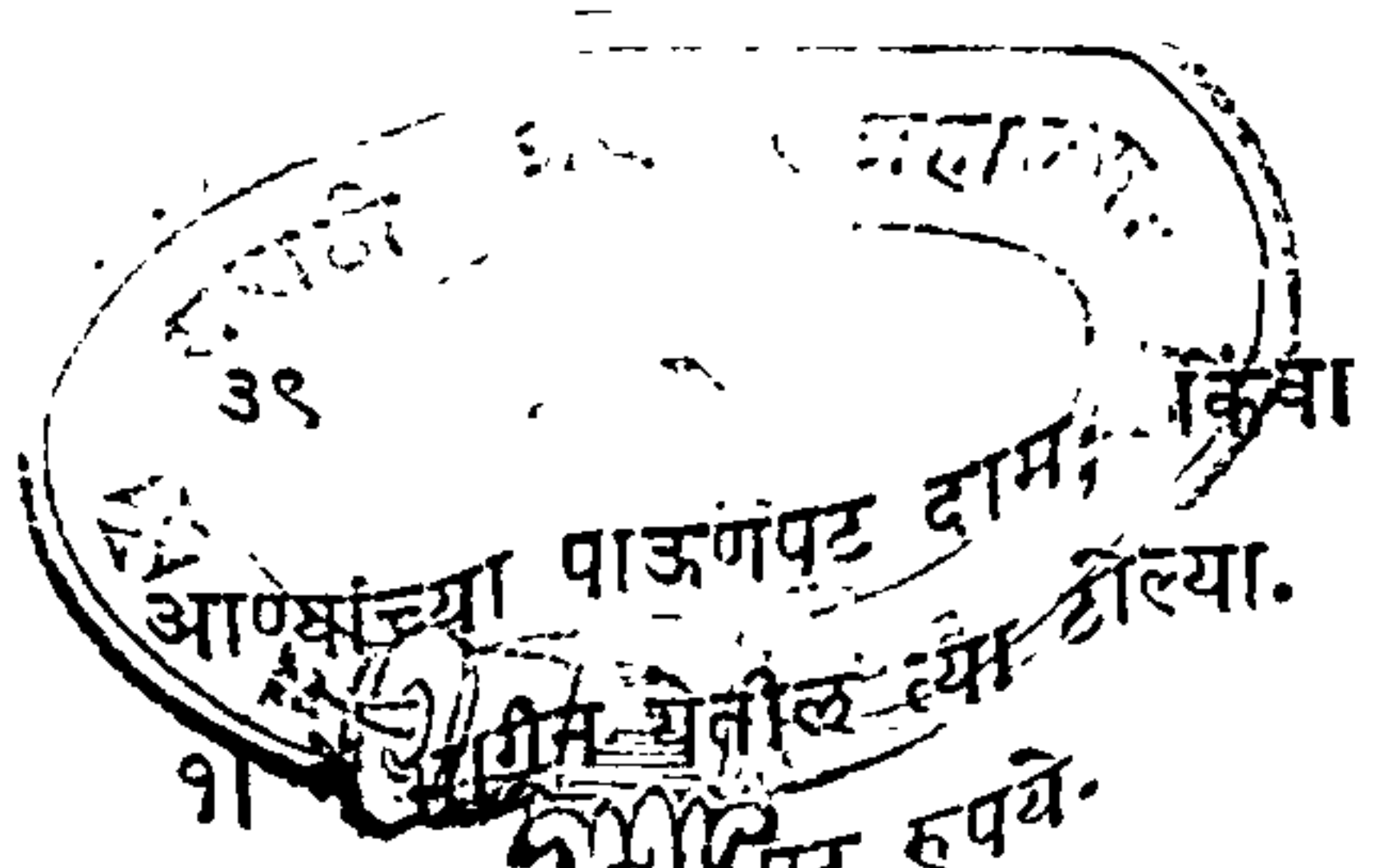
पैंच्या तिप्पट आणे.

(९) गुणोत्तर ४०—वजनी मण व शेर, एकर व गुंठा.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांच्या $\frac{१}{३}$ पट अथवा २॥ नीं

४० कच्चांस रुपया. भागून येतील ते आणे; किंवा १०

२॥ कच्चांस आणा. पट रेंस; किंवा १२ पट दाम.



१ कच्चास १० रेंस
किंवा १२ दाम.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या पाऊणपट रुपये.
पैशांच्या दसपट आणे.
पैच्या तिप्पट आणे व चौपट पै.

१०) गुणोत्तर ४८-तोळा व वाल, बारुला मण व शेर
गज व अंगुल.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांस ३ नीं भागून येतील ते
४८ कच्चांस रुपया. आणे; किंवा चौपट पै.
३ कच्चांस आणा. आण्यांच्या पावपट पै.
१ कच्चास ४ पै. पैशांस ६ नीं भागून येतील त्या टाल्या

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या तिप्पट रुपये.
पैशांच्या पाऊणपट रुपये.
पैच्या पावपट रुपये.

११) गुणोत्तर ६०-पळा व अधोली.
भारीवरून हलक्यास-रुपयांच्या पावपट आणे व निमे
६० कच्चांस रुपया. दाम; किंवा ८ पट दाम.
३॥ कच्चांस आणा. आण्यांच्या निमपट दाम.
१ कच्चास ८ दाम.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या चौपट रुपयांत चौपट
आणे कमी.
पैशांइतक्या रुपयांत तितकेंच आ-
णे कमी.

१२) गुणोत्तर ६४-आटकी व पासरी, मण व अर्धा स-
वाशेर, सोळूला मण व शेर

भारीवरून हलक्यास—रुपयांइतकेच पैसे.

६४ कच्चांस रुपया. आप्यांच्या निमपट टोल्या.

४ कच्चांस आणा. पैशांस ८ नीं भागून येतील त्य

१ कच्चास पैसा. टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आप्यांच्या चौपट रुपये.

पैशांइतकेच रुपये.

पैस ३ नीं भागून येतील ते रुपये.

(१३) गुणोत्तर ७२—शेर व टांक अथवा (गांवठी) तोळा.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांच्या ३ पट आणे.

७२ कच्चांस रुपया. आप्यांस ६ नीं भागून येतील त्या पै

४॥ कच्चांस आणा. पैशांस ९ नीं भागून येतील त्य

टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आप्यांच्या ४॥ पट रुपये.

पैशांइतकेच रुपये व दुप्पट आणे.

पैच्या ६ पट आणे.

(१४) गुणोत्तर ८०—खंडी व धडा, वजनी मण व अच्छेर,

(८० तोळ्यांचा) शेर व तोळा, रीम व छकडी.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस ५ नीं भागून येतील ते

८० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा ११ नीं भागून येतील

५ कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा ५ पट रेंस; किंवा ६

१ कच्चास ५ रेंस किंवा पट दाम.

सहा दाम.

आप्यांस २॥ नीं भागून किंवा

दुपटीस ५ नीं भागून येतील त्या

टोल्या; किंवा ३ पट दाम.

हलक्यावरून भारीस—आप्यांच्या ५ पट रुपये.

पैशांच्या ११ पट रुपये.

पैच्या ७ पट आप्यांत चौपट पै कमी.

(१५) गुणोत्तर ९६-तोळा व गुंज, बारूला मण व मापटें,
रीम व पंचकडी.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांस ६ नों भागून येतील ते
९६ कच्चांस रुपया. आणे; किंवा १॥ नें भागून येतील
६ कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा दुप्पट पै.
१ कच्चास २ पै. आण्यांस ८ नों भागून येतील त्या पै.
पैशांस १२ नों भागून येतील त्या
टोल्या.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या ६ पट रुपये.
पैशांच्या १॥ पट रुपये.
पैंच्या निमपट रुपये.

१६) गुणोत्तर १००-^{*}चव व दोकडा, टक्का व बदाम,
शेंकडा व एक.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांस ६। नों भागून येतील ते
१०० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा चौपट रेंस.
६। कच्चांस आणा. आण्यांच्या पावपट रेंस.
१ कच्चास ४ रेंस.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या ६। पट रुपये.
पैशांच्या १॥ पट रुपये व तितकेच
आणे.
पैंच्या निमे रुपये, तितकेच पैसे व
तितक्याच पै.

(१७) गुणोत्तर १२०-पळा व शेर, चाहूर व बिघा.

* चव व दोकडा ह्याविषयीं माहिती ह्या भागाच्या तिसऱ्या प्रक-
रणांत लिहिली आहे ती पहावी.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांस ७॥ नीं भागून येतील ते

१२० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा चौपट दाम.

७॥ कच्चांस आणा. आप्यांच्या पावपट दाम.

१ कच्चास ४ दाम.

हलक्यावरून भारीस-आप्यांच्या ७॥ पट रुपये.

पैशांच्या दुप्पट रुपयांत दुप्पट

आणे कमी.

पैंच्या दसपट आणे.

(१८) गुणोत्तर १२८-आटकी व अडिस्त्री, मुंबईची कैली

खंडी व पायली.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांच्या निमपट पैसे.

१२८ कच्चांस रुपया. आप्यांच्या पावपट टोल्या.

८ कच्चांस आणा.

१ कच्चास आधेला.

हलक्यावरून भारीस-आप्यांच्या ८ पट रुपये.

पैशांच्या दुप्पट रुपये.

पैंच्या ३ पट रुपये.

(१९) गुणोत्तर १४४-चौरस फूट व चौरस इंच, चौरस

हात व चौरस तसू.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांस ९ नीं भागून येतील ते आ-

१४४ कच्चांस रुपया. णे; किंवा रुपयांच्या ४ पट पै.

९ कच्चांस आणा.

१ कच्चास ४ पै.

आप्यांस १२नीं भागून येतील त्यापै.

हलक्यावरून भारीस-आप्यांच्या ९ पट रुपये.

पैशांच्या दुप्पट रुपये व चौपट आणे.

पैंच्या पाऊणपट रुपये.

२०) गुणोत्तर १६०—खंडी व पासरी, मण व पावशेर.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस १० नीं भागून येतील बे
 १६० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा २॥ नीं भागून येतील
 १० कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा २॥ पट रेंस; किंवा
 २॥ कच्चांस पैसा. ३ पट दाम.
 १ कच्चास २॥ रेंस किं- आण्यास ५ नीं भागून येतील त्या
 वा ३ दाम. टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या १० पट रुपये.

पैशांच्या २॥ पट रुपये

पैच्या ५ पट रुपये, किंवा १३
 पट आणे व ४ पट पै.

२१) गुणोत्तर १९२—बारूला मण व चिपटें.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस १२ नीं भागून येतील ते
 १९२ कच्चांस रुपया. आणे; किंवा ३ नीं भागून येतील ते
 १२ कच्चांस आणा. पैसे; किंवा रुपयांच्या इतक्याच पै.
 १ कच्चास पै. आण्यांस ६ नीं भागून येतील त्या
 टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या १२ पट रुपये.

पैशांच्या ३ पट रुपये.

पैच्या इतकेच रुपये.

२२) गुणोत्तर २००—हजार व पाचुंदा.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस १२॥ नीं भागून येतील
 २०० कच्चांस रुपया. ते आणे; किंवा दुप्पट रेंस
 १२॥ कच्चांस आणा. आण्यांस ८ नीं भागून येतील ते
 १ कच्चास २ रेंस. रेंस.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या १२॥ पट रुपये.

पैशांच्या तिप्पट रुपये व दुप्पट
आणे.

पैंच्या इतकेच रुपये, निमे आणे व
दुप्पट पै.

(२३) गुणोत्तर २४०-पळा व अच्छेर, बारुली खंडी व
पायली, गठी व पान.

भारीवरून हलक्यास- रुपयांस १५ नीं भागून येतील ते
२४० कच्चांस रुपया. आणे, किंवा १॥ नीं भागून येतील
१५ कच्चांस आणा; त्या पै; किंवा दुप्पट दाम.
१ कच्चास २ दाम. आण्यांस ८ नीं भागून येतील ते
दाम.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या १५ पट रुपये.

पैशांच्या चौपट रुपयांत चौपट
आणे कमी.

पैंच्या १॥ पट रुपये.

(२४) गुणोत्तर २५६-आटकी व सव्वाशेर, गुंठा व चौरस
आणा, सोळूला मण व चिपटें.

भारीवरून हलक्यास-रुपयांस १६ नीं भागून येतील ते
२५६ कच्चांस रुपया. आणे, किंवा ४ नीं भागून येतील
१६ कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा रुपयांच्या इतक्याच
४ कच्चांस पैसा. दमड्या.
१ कच्चास दमडी. आण्यांस ८ नीं भागून येतील त्या
टोल्या.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या १६ पट रुपये.

पैशांच्या ४ पट रुपये.

पैंच्या ४ पट रुपये.

(२५) गुणोत्तर ३२०—वजनी खंडी व अडिस्त्री, वजनी मण व अदपाव.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस २० नों भागून येतील ते ३२० कच्चांस रुपया. आणे, किंवा ५ नों भागून येतील २० कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा ११ पट रेंस; किंवा ५ कच्चांस पैसा. ११ पट दाम.
१ कच्चास ११ रेंस आण्यांस १० नों भागून येतील किंवा ११ दाम. त्या टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या २० पट रुपये. पैशांच्या ५ पट रुपये. पैंच्या $\frac{५}{३}$ पट रुपये.

(२६) गुणोत्तर ३६०—वर्ष व दिवस.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस २२११ नों भागून येतील ३६० कच्चांस रुपया. ते आणे; किंवा रुपयांस पाऊणानें २२११ कच्चांस आणा. भागून म्हणजे $\frac{५}{३}$ नों गुणून येतील १ कच्चास $\frac{५}{३}$ दाम. ते दाम.
आण्यांस १२ नों भागून येतील ते दाम.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या २२११ पट रुपये. पैशांच्या ६ पट रुपयांत ६ पट आणे कमी.
पैंच्या दुप्पट रुपयांत दुप्पट आणे कमी.

(२७) गुणोत्तर ४००—बिघा व चौरस काठी.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस २५ नों भागून येतील ते ४०० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा ६१ नों भागून येतील २५ कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा रुपयांइतकेच रेंस.
६१ कच्चांस पैसा. आण्यांस १६ नों भागून येतील १ कच्चास रेंस. ते रेंस.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या २५ पट रुपये.

पैशांच्या ६१ पट रुपये.

पैच्या दुप्पट रुपये, तितकेच अ.
व चौपट पै.

(२८) गुणोत्तर ४८०—घळा व पावशेर, रीम व पान.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस ३० नीं भागून येतील
४८० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा ७॥ नीं भागून येतील
३० कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा २॥ नीं भागून येतील
७॥ कच्चांस पैसा. तेल त्या पै; किंवा रुपयांस इतकेच
२॥ कच्चांस पै. दाम.
१ कच्चास दाम. आण्यांस १६ नीं भागून येतील
दाम; किंवा १५ नीं भागून येतील
त्या टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या ३० पट रुपये.

पैशांच्या ७॥ पट रुपये.

पैच्या २॥ पट रुपये.

(२९) गुणोत्तर ५१२—आटकी व अर्धा सव्वाशेर, मुंबईच
कैली खंडी व शेर.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस ३२ नीं भागून येतील
५१२ कच्चांस रुपया. आणे; किंवा ८ नीं भागून येतील
३२ कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा रुपयांस इतक्याच टोल्या
८ कच्चांस पैसा. आण्यांस १६ नीं भागून येतील त्या
१ कच्चास टोली. टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या ३२ पट रुपये.

पैशांच्या ८ पट रुपये.

पैच्या ३ पट रुपये.

(३०) गुणोत्तर ६४०—मण व छटाक, खंडी व सव्वाशेर
एकर व आणा.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस ४० नीं भागून येतील ते
 ६४० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा १० नीं भागून येतील
 ४० कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा ११ नीं भागून येतील
 १० कच्चांस पैसा. त्या टोल्या; किंवा पाऊणपट दाम.
 १ कच्चास पाऊण दाम. आण्यांस २० नीं भागून येतील
 त्या टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या ४० पट रुपये.
 पैशांच्या १० पट रुपये.
 पैच्या $\frac{१}{३}$ पट रुपये.

(३१) गुणोत्तर ८००—वजनी खंडी व शेर.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस ५० नीं भागून येतील ते
 ८०० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा १२॥ नीं भागून ये-
 ५० कच्चांस आणा. तील ते पैसे; किंवा निमपट रेंस.
 १२॥ कच्चांस पैसा. आण्यांस ३२ नीं भागून येतील ते
 १ कच्चास अर्धा रेंस. रेंस; किंवा २५ नीं भागून येतील
 त्या टोल्या.

हलक्यावरून भारीस—आण्यांच्या ५० पट रुपये.
 पैशांच्या १२॥ पट रुपये.
 पैच्या ४ पट रुपये, दुष्पट आणे व
 ८ पट पै.

(३२) गुणोत्तर ९६०—बारुली खंडी व शेर, पळा व कोळवे.

भारीवरून हलक्यास—रुपयांस ६० नीं भागून येतील ते
 ९६० कच्चांस रुपया. आणे; किंवा १५ नीं भागून येतील
 ६० कच्चांस आणा. ते पैसे; किंवा ५ नीं भागून येतील
 १५ कच्चांस पैसा. त्या पै, किंवा निमे दाम.
 ५ कच्चांस पै. आण्यांस ३२ नीं भागून येतील ते
 १ कच्चास अर्धा दाम. दाम; किंवा ३० नीं भागून येतील
 त्या टोल्या.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांच्या ६० पट रुपये.

पैशांच्या १५ पट रुपये.

पैच्या ५ पट रुपये.

(३३) गुणोत्तर १०००-हजार व एक (कडव्याची पेंडी वगैरे.)

भारीवरून हलक्यास-रुपयांस २॥ नीं भागून अथवा

१००० कच्चांस रुपया. रुपयांच्या दुपटीस ५ नीं भागून

६२॥ कच्चांस आणा. येतील ते रेंस.

२॥ कच्चांस रेंस. आण्यांस ४० नीं भागून येतील

१ कच्चास ३ रेंस. ते रेंस.

हलक्यावरून भारीस-आण्यांची निमपट करून सवां

करावी, तितके रुपयांचे शेंकडे सम

जावे.

पैशांच्या १६ पट रुपयांत ६ पट

आणे कमी.

पैच्या ५ पट रुपये, तिप्पट आणे

व चौपट पै.

चालींची योजना.

१ ह्या पुस्तकांत भारी परिमाणांच्या किमतींवरून हलक्य परिमाणांच्या किमती काढण्याकरिता ज्या चाली लिहिल्य आहेत, त्यांची योजना करण्याची सामान्य रीति अशी:- ज्या परिमाणांची किंमत विचारिली असेल त्यांच्या संख्येने दरांतील रुपयांस गुणून त्या गुणाकारास त्या हिशेबांतलें भारी परिमाण व हलकें परिमाण ह्यांच्या गुणोत्तरानें भागवें.

भागाकारादिके उत्तरांतले रुपये झाले. बाकी राहिल्यास
 आणे, पैसे, पै वगैरे उत्पन्न करण्याकरितां चालीमध्ये ज्या
 तजविर्जी सांगितल्या असतील त्या अनुक्रमानें योजाव्या. जसें,
 “दर बारुल्या खंडीस ४२॥ ६० प्रमाणें ६॥२ (म्हणजे ११
 पायली) ह्यांची किंमत काढावयाची.” तर, प्रथम ४२॥ व
 ११ ह्यांचा गुणाकार ४६७॥, ह्यास बारुली खंडी व पायली
 ह्यांचें गुणोत्तर २४० ह्यानें भागिलें असतां येणारा भागाकार
 १ हा उत्तरांतला रुपया झाला. बाकी २२७॥ राहिले;
 त्यांस, आणे उत्पन्न करण्याकरितां (चालींत लिहिल्याप्रमाणें)
 १५ नां भागिलें असतां येणारा भागाकार १५ हे उत्तरांतले
 आणे झाले. पुनः बाकी २॥ राहिले; त्यांस, पै उत्पन्न कर-
 ण्याकरितां (चालींत लिहिल्याप्रमाणें) १॥ नें भागिलें (अथवा
 बाकीच्या चौपटीस ५ नां भागिलें) असतां येणारा भागाकार
 २ ह्या उत्तरांतल्या पै झाल्या. म्हणून एकंदर १॥३=६२ ही
 अकरा पायलींची किंमत झाली.

अथवा पहिल्यानें एकाच हलक्या परिमाणाची किंमत चाली-
 च्या योगानें काढून तिला त्या हलक्या परिमाणांच्या संख्येनें
 गुणावें. म्हणजे इच्छिलेली किंमत निघेल. जसें, सदहू उदा-
 हरणांत चालीच्या आधारानें एका पायलीची किंमत ६=॥१
 निघते. हिची ११ पट केल्यानें ११ पायलींची किंमत निघेल.

२ चालींच्या यादीमध्ये कच्चांच्या रूपानें ज्या चाली लि-
 हिल्या आहेत, त्या भारी परिमाणांच्या किमतींवरून हल-
 क्यांच्या किमती काढण्याच्या आपल्या देशांतल्या जुन्या रीति
 होत. ह्यांची योजना बहुतेक वर सांगितल्याप्रमाणेंच कराव-
 याची. तथापि त्यांची रचना व योजना स्पष्ट करून दाखवितों.

प्रथमतः दरांतिल रुपयांची संख्या व हलक्या परिमाणांची
 संख्या ह्यांचा गुणाकार करितात. ह्या गुणाकाराला वस्तुतः

कोणत्याच परिमाणाचें नांव देतां येत नाहीं (ती नुसती संख्या असते). म्हणून त्याला “कच्चे” अशी (फार योग्य) संज्ञा देतात; आणि त्या कच्चांपैकीं, त्या हिशेबांतील भारी परिमाण व हलकें परिमाण ह्यांच्या गुणोत्तरा इतक्या “कच्चांस रुपया”, त्यांच्या षोडशांशा इतक्या “कच्चांस आणा” इत्यादि प्रकारच्या चाली बसवून, त्या त्या संख्यांनीं एकंदर कच्चांस व त्यांतून राहणाऱ्या बाक्यांस अनुक्रमें भागितात आणि उत्तरांतील रुपये, आणे इत्यादि उत्पन्न करितात. जसें, पहिल्या कलमांतील उदाहरणांत दरांतल्या रुपयांची संख्या ४२॥ व हलक्या परिमाणांची संख्या ११ ह्यांचा गुणाकार ४६७॥ हे कच्चे झाले. ह्यांपैकीं दर २४० कच्चांस रुपया, म्हणून त्यांना २४० नीं भागिलें असतां येणारा भागाकार १ हा उत्तरांतला रुपया झाला. बाकी २२७॥ राहिले; ह्यांपैकीं दर १५ कच्चांस आणा, म्हणून त्यांना १५ नीं भागिलें. इत्यादि बहुतेक कृति वर सांगितल्याप्रमाणेंच करून उत्तरांतले रुपये, आणे इत्यादि उत्पन्न करावयाचे.

३ पहिल्या कलमांत सांगितल्या प्रकारच्या हिशेबांमध्ये रुपये, आणे इत्यादि अनेक परिमाणांनीं दर सांगितला असेल, तर प्रथमतः त्यांतील रुपये हाच दर आहे असें मानून पहिल्या कलमांत लिहिल्याप्रमाणें हलक्या परिमाणाची किंमत काढावी. पुनः दरांतले आणे हाच दर मानून हलक्या परिमाणाची किंमत काढावी. ह्याप्रमाणें दरांतील प्रत्येक परिमाणावरून किंमत काढून त्या सर्व किमतींची बेरीज करावी, म्हणजे इच्छिलेली किंमत येईल. जसें, “वजनी मणास २५॥॥=१ प्रमाणें ४४१॥ ह्याची किंमत काढावयाची.” तर, प्रथमतः २५ रु० हाच दर मानिला असतां चालीप्रमाणें सव्वाशेराची किंमत ०॥०॥ येते; व ०॥॥=॥ हाच दर मानिला असतां सव्वा

शेराची किंमत १४॥ टोल्या येते; म्हणून दिलेल्या दरानें एकंदर किंमत ०॥०॥ व ६॥ टोल्या ही झाली.

४ भारी परिमाणाची किंमत सांगून तीवरून अनेक नांवांच्या हलक्या परिमाणांची किंमत विचारिली असल्यास, प्रत्येक नांवाच्या हलक्या परिमाणाची निरनिराळी किंमत काढून त्या सर्व किमतींची बेरीज करावी, ह्मणजे ती इच्छिलेली किंमत होईल. जसें, “दर तोळ्यास १८॥= प्रमाणें ०१॥= (एक मासा व तीन गुंजां) ह्यांची किंमत काढावयाची”. तर, प्रथमतः दिलेल्या दरानें एक माशाची किंमत (चालीच्या योजनेनें) काढिली ती १॥०॥ आली, नंतर तीन गुंजांची किंमत काढिली ती ०॥१॥ व ६ टोल्या ही आली; म्हणून एकंदर किंमत २०॥०॥ व ६ टोल्या ही झाली.

५ हलक्या परिमाणांच्या किमतीवरून भारी परिमाणांच्या किमती काढण्याकरितां लिहिलेल्या चालींची योजना करण्याची सामान्यरीति अशी:— भारी परिमाणांच्या संख्येइतकी दिलेल्या दराची पट करून तोच दिलेला दर मानावा, आणि त्याच दरानें चालीच्या आधारानें एका भारी परिमाणाची किंमत काढावी. ती इच्छिलेली किंमत होईल. जसें, “दर गुंजेस ०॥०॥ प्रमाणें ३ तोळ्यांची किंमत काढावयाची.” तर प्रथम ०॥०॥ ची तिप्पट केली ती ०॥०॥ आली. हाच दर मानून १ तोळ्याची किंमत चालीच्या आधारानें काढिली ती ६३ रुपये आली. हीच इच्छिलेली किंमत होय.

अथवा प्रथमतः दिलेल्या दरानें एका भारी परिमाणाची किंमत काढून तिची भारी परिमाणांच्या संख्येइतकी पट करावी. जसें, सदरहू उदाहरणांत दिलेल्या दरानें एका तोळ्याची किंमत (३॥ ह्यांची ६ पट ह्मणजे) २१ रुपये झाली. हिची तिप्पट केल्यानें इच्छिलेली किंमत निघेल.

६ हलक्या परिमाणाची किंमत आणे, पै इत्यादि अनेक परिमाणांच्या योगानें सांगितली असल्यास, त्या प्रत्येकावरून भारी परिमाणांच्या निरनिराळ्या किमती काढून त्या सर्वांची बेरीज करावी. जसें, “ दर रोज ८=॥२॥ ह्याप्रमाणें १ महिन्याची मजूरी काढावयाची,” तर प्रथमतः ८=॥ हाच दर मानिला असतां ४॥= हा एका महिन्याचा आकार होतो; आणि २॥ पै हाच दर मानिला असतां १=॥ हा एक महिन्याचा आकार होतो. म्हणून एकंदर ५८=॥ हा दिलेल्या दरानें महिन्याचा आकार झाला.

७ हलक्या परिमाणांच्या किमतीवरून अनेक नांवांच्या भारी परिमाणांची मिळून किंमत काढावयाची असल्यास, प्रत्येक नांवाच्या भारी परिमाणांची निरनिराळी किंमत काढून त्या सर्व किमतींची बेरीज घ्यावी. जसें दर पायलीस १=॥३॥ प्रमाणें बारूले मापें १॥४॥ खंडींची किंमत काढावयाची”. तर, प्रथमतः चालीच्या आधारानें एका खंडीची किंमत काढिली, ती ८६।६० आली; नंतर १९॥ मणांची किंमत काढिली, ती ८४६=॥ ६० आली. म्हणून एकंदर किंमत १७०।=॥ ६० झाली.

* ८ मार्गील सात कलमांमध्ये चालींच्या योजनेच्या ज्या रीति सांगितल्या त्या सामान्यरीति होत. परंतु कित्येक हिशेबांमध्ये अशा कांहीं युक्तींची योजना होण्याचा संभव असतो कीं, त्या सामान्यरीतींनुसार अनुसरून चालींची योजना केल्यानें उत्तर काढण्यास जो श्रम व काळ लागणार, त्यापेक्षां फारच थो-

* शिक्षकांस सूचना— हिशेब करितेवेळीं त्यांमध्ये ह्या कलमांत दाखविलेल्या युक्तींच्या सारख्या युक्ति लागू होऊन किंवा नाही हे शोधून काढण्याकडे विद्यार्थ्यांचें लक्ष व्हावयाचे. लक्षात घ्याव्याचे कि शिक्षकांनीं करवेल तितका यत्न केला पाहिजे.



डा श्रम व काळ त्या युक्तास अनुसरून चालींची योजना केल्याने लागेल.

जसे, पहिल्या कलमांतील हिशेब करितेवेळीं प्रथमतः एका मणाची किंमत काढून तींत एका पायलीची किंमत वजा केली असतां फार अल्पश्रमानें उत्तर निघेल. तिसऱ्या कलमांतील हिशेबामध्ये २६ रु० हाच दर मानून सव्वाशेराची किंमत काढिली असतां १॥ येते, हींतून, ४-॥ ह्या दरानें सव्वाशेराची किंमत १॥ टोली येते, ती वजा केली असतां इच्छिलेली किंमत थोडक्यांत निघेल. चवथ्या कलमांतील हिशेबांत प्रथम १॥ माशाची किंमत (म्हणजे तोळ्याच्या किमतीचा अष्टमांश) काढून तींतून एका गुंजेची किंमत वजा केली असतां इच्छिलेली किंमत थोडक्यांत निघेल. सातव्या कलमांतील उदाहरणांत आधीं २ खंडींची किंमत काढून तींत अदमणाची किंमत वजा केली असतां थोडक्या श्रमानें उत्तर निघेल.

“ दर एकरास १५॥=॥ रु० तर २॥ गुंठ्यांची किंमत काढावयाची”. ह्या हिशेबांत ४० ह्या संख्येला लक्षून बसविलेल्या चालीची योजना करून एका एकराची किंमत काढणें इत्यादि सामान्यरीतीपेक्षां (२॥ गुंठे हे एकराच्या षोडशांशाबरोबर आहेत, म्हणून) १६ ह्या संख्येस लक्षून बसविलेली चाल योजणें फार सोईचें आहे. ह्याच हिशेबामध्ये ३३॥ गुंठ्यांची किंमत काढावयाची असेल, तर प्रथम एकराच्या किमतीची पाऊणपट करावी म्हणजे ती पाऊण एकराची किंमत होईल. नंतर ८ ह्या गुणोत्तराच्या चालीच्या योजनेनें पाऊण एकराच्या किमतीवरून ३॥ गुंठ्यांची किंमत काढावी; आणि मग दोन्ही किमतींची बेरीज करावी. (अंकगणितांत “ हिस्तेरशी ” म्हणून जें प्रकरण आहे, त्याचा विषय

ह्या उदाहरणांत दाखविलेल्या प्रकारचाच आहे. म्हणून तें प्रकरण ज्यांस चांगलें समजलें असेल, त्यांस असल्या युक्तींपासून किती उपयोग होतो हें सहज समजेल.) “ दररोज २१ पैसे, तर २ महिने ४ दिवस इतक्या काळाची मजूरी काढावयाची.” ह्या हिशेबांत २ महिन्यांचा व ४ दिवसांचा निरनिराळा हिशेब करून बेरीज करण्यापेक्षां एकंदर ६४ दिवसांचा हिशेब करण्यांत मोठी सोय आहे. कारण दिवसास जितके पैसे तितकेच रुपये २ महिने ४ दिवस ह्यांस होतात. तसेंच “ दर वजनी शेरस ३॥ पै, तर ८२।६ (सव्वादोन मण सहा शेर) ह्यांची किंमत काढावयाची.” एथें ९६ शेरांची किंमत काढावयाची आहे; म्हणून “ पैच्या निमे रुपये ” ह्या चालीची योजना फारच सोईची आहे.

सारांश अशा प्रकारच्या युक्ति पुष्कळ हिशेबांत निघण्याचा संभव असतो. त्या शोधून काढण्याकडे विद्यार्थ्यांनी लक्ष पोंचविलें पाहिजे.

९ पदार्थांची किंमत सांगावयाची ती, ज्या ठिकाणीं किंमत दाखविणारीं जीं परिमाणें चालू असतील, त्या ठिकाणीं त्याच परिमाणांच्या योगानें सांगितली, तर मात्र व्यवहारांत उपयोगीं पडते. जसें, “ दर एकरास ८४॥ रु० प्रमाणें १० एकर व १॥ गुंठा ह्यांची किंमत ८४८ रु० २ आणे, ८३ पै अशी सांगितली असतां पुणें मुक्कामीं (सरकारांत देण्या-घेण्यास मात्र उपयोगीं पडेल, इतर) व्यवहारांत उपयोगीं पडावयाची नाही. कांकीं तेथें “पै” हें परिमाण अद्यापि व्यवहारांत चालू नाही. पावआण्यापेक्षां कमी परिमाणें आधेला, दमडी, टोली हीं चालू आहेत. ह्याकरितां तेथें सदरहू रकमेपैकीं पैना पैसे व टोल्या ह्यांचें रूप देऊन ती रकम

८४८६=॥ रु० व ६३ टोल्या अशी सांगितली पाहिजे.

महाराष्ट्र देशामध्ये बहुतेक ठिकाणी किंमत दाखविणारी पावआण्यापेक्षां कमी परिमाणे मुख्यत्वेकरून पै किंवा आधेला, दमडी व टोली हीं चालू आहेत. म्हणून ज्यांत पदार्थाची किंमत काढावयाची आहे अशा प्रत्येक हिशेबाचे उत्तर मुख्यत्वेकरून रुपये, आणि व पै ह्यांच्या रूपाने आणि रुपये, आणि, पावआणे व टोल्या ह्यांच्या रूपाने, अशा दोन प्रकारांनी सांगण्याची वहिवाट ठेविली पाहिजे.

आतां पैपेक्षां आणि टोलीपेक्षां कमी किंमत देण्याची सोयच नसते, आणि मोठमोठ्या रकमा देतांना व्यवहारांत बहुधा पावआण्यापेक्षां कमी किंमत असेल ती कसरीच्या धरसोडीच्या नियमाप्रमाणे देतात. म्हणून किंमत दाखविणारी रकम कसरीची धरसोड न करितां व (ह्या भागाच्या पहिल्या प्रकरणातील ६ व्या कलमांत सांगितलेल्या धरसोडीच्या नियमाप्रमाणे) कसरीची धरसोड करून, अशा दोन्ही प्रकारांनी सांगितली पाहिजे.

सारांश ज्यांत पदार्थाची किंमत विचारिली आहे, अशा प्रत्येक हिशेबाचे उत्तर विद्यार्थ्यांना खाली लिहिलेल्या पांच प्रकारांपैकीं जितक्या प्रकारांनी सांगणे संभवेल तितक्या प्रकारांनी सांगतां आले पाहिजे. ते पांच प्रकार सदरहू हिशेबाच्या उत्तराने दाखवितो.

पहिला प्रकार— कसरीची धरसोड न करितां रुपये, आणि व पै ह्यांच्या योगाने सांगणे. जसें, ८४८ रु०, २ आणि, ८३ पै.
दुसरा प्रकार— कसरीची धरसोड करून रुपये, आणि व पै ह्यांच्या योगाने सांगणे. जसें ८४८ रु०, २ आणि, ८ पै.
तिसरा प्रकार— कसरीची धरसोड न करितां रुपये, आणि,

पावआणे व टोल्या ह्यांच्या योगानें सांगणें. जसें ८४८८=॥
रु० व ६३ टोल्या.

चवथा प्रकार— कसरीची धरसोड करून रुपये, आणे,
पावआणे व टोल्या ह्यांच्या योगानें सांगणें. जसें ८४८८=॥
व ६ टोल्या.

पांचवा प्रकार— कसरीची धरसोड करून रुपये, आणे व
पावआणे ह्यांच्या योगानें सांगणें. जसें ८४८८=॥ रु०.

तोंडचे हिशेब*.

- | | |
|---|---|
| (१) दर वजनी खंडीस ६५ रु०
प्रमाणें १॥ पासरीची किंमत
व १। शेराची किंमत सांगा. | (८) दर रीमास ५॥=, तर १
दस्त्यास व २॥ दस्त्यांस काय
पडेल ? |
| (२) दर गुंजेला ८=, तर १॥
तोळ्याची किंमत व २॥ मा-
शांची किंमत सांगा. | (९) दर पानास १॥ पैसा, तर
१ रीमाची किंमत व १। द-
स्त्याची किंमत सांगा. |
| (३) ६७॥ रु० साल, तर ३ दिव-
सांचा पगार सांगा. | (१०) ५७॥ रुपये पळा, तर १
शेराची किंमत, २। शेरांची
किंमत व ३॥। शेरांची किंमत
सांगा. |
| (४) दर मणीं २॥=, तर २॥
खंडींची किंमत सांगा व वाहले
मापें ३ शेरांची किंमत सांगा. | (११) ८० रु० शेर, तर १॥ टाका-
ची व २॥ छटाकांची किंमत सांगा. |
| (५) दररोज १॥=॥, तर १॥ व-
र्षाचा पगार किती ? | (१२) दर माशाला १॥=, तर
२ तोळ्यांची किंमत व अर्ध्या
गुंजेची किंमत सांगा. |
| (६) दर एकराला १३५ रुपये,
तर १। गुंठ्याची किं० सांगा. | (१३) ७२ रुपये आटकी, तर १।
पासरीची व १ अडिस्त्रीची
किंमत सांगा. |
| (७) दर चौरस काठीला १-१, तर
१॥ विध्याची किंमत व २
पांडांची किंमत सांगा. | |

* शिक्षकांस सूचना—ह्या भागाच्या दुसऱ्या प्रकरणांतल्या ५व्या क-
लमामध्ये सांगितलेल्या पांच प्रकारांपैकीं जितक्या प्रकारांनीं प्रत्येक हि-
शेवाचें उत्तर सांगणें संभवेल तितक्या प्रकारांनीं मुलांकडून सांगवावें.

- (१४) दर तोळ्यास १। पैसा, तर ७२ तोळ्यांच्या शेराची व ८० तोळ्यांच्या शेराची किंमत सांगा.
- (१५) दर गुंजेला २॥ पैसे, तर २॥ तोळ्यांची किंमत सांगा.
- (१६) २२ ६० तोळा, तर २ माशांची किंमत व १॥ गुंजेची किंमत सांगा.
- (१७) दर गुंजेला ५॥ पै, तर ६ तोळ्यांची किंमत व ३॥ माशांची किंमत सांगा.
- (१८) २७॥ ६० तोळा, तर २ वालांची किंमत व ३ गुंजांची किंमत सांगा.
- (१९) दर गुंठघाला १॥-॥, तर २ एकरांची किंमत सांगा.
- (२०) २४ ६० एकर, तर १ गुंठ्याची किंमत सांगा.
- (२१) दररोज ८=॥, तर २ वर्षांची मजूरी सांगा.
- (२२) ७५ रुपये साल, तर २ दिवसांचा खर्च किती ?
- (२३) १५ रुपये हजार, तर २॥ पाचुंध्यांची किंमत व ३ पेंड्यांची किंमत सांगा.
- (२४) दर पेंडीला १॥ पैसा, तर २ हजार कडव्याची किंमत व २० पाचुंध्यांची किंमत सांगा.
- (२५) २२॥ ६० दरमहा, तर २ दिवसांचा पगार किती ?
- (२६) दर छटाकाला १, तर १॥ मणाची किंमत व २॥ शेरांची किंमत सांगा.
- (२७) दर छटाकाला २ पैसे, तर २ मणांची व ३। शेरांचो किंमत सांगा.
- (२८) ३॥ पैशांना पाचुंदा, तर २ हजार कडव्याची किंमत सांगा.
- (२९) ४२॥ ६० हजार, तर २॥ पाचुंध्यांची किंमत सांगा.
- (३०) ८७॥ ६० बावली खंडी, तर २ पायलीची व १ शेराची किंमत सांगा.
- (३१) दर शेराला ८=॥, तर बावल्या खंडीची किंमत व ३ मणांची किंमत सांगा.
- (३२) दर पायलीस ७ आणे ८ पै, तर सोळूले मापें खंडीची किंमत सांगा.
- (३३) ५२॥ ६० पल्ला, तर १॥ पायलीची किंमत सांगा.
- (३४) २॥ पैशांना शेर, तर २ पल्ल्यांची किंमत सांगा.
- (३५) दर टिपरीला ५ पै, तर १॥ फऱ्याची किंमत सांगा व ४ पायलींची किंमत सांगा.
- (३६) १२॥ ६० चव, तर १॥ चव व ३ दोकडे ह्यांची किंमत सांगा.
- (३७) दर दोकड्याला ८=॥, तर २ चवांची किंमत सांगा.
- (३८) ४॥ ६० वार, तर २ इंचांची किंमत व १॥ गिऱ्याची किंमत सांगा.
- (३९) दर इंचाला ८=॥, तर १॥ वाराची किंमत सांगा.
- (४०) दर गिऱ्याला २। पैसे, तर

- ३ वारांची किंमत सांगा.
- (४१) १०॥ ६० गज, तर २ तसूंची किंमत सांगा.
- (४२) ३॥ पैशांना तसू, तर ३ गजांची किंमत सांगा.
- (४३) दर इंचास २॥ पै, तर २ वारांची किंमत व १॥ फुटाची किंमत सांगा.
- (४४) दर चौरस हाताला २२॥ ६०, तर ९ चौरस तसूंची किंमत सांगा.
- (४५) दर चौरस इंचाला १॥ पै, तर २॥ चौरस फुटांची किंमत सांगा.
- (४६) दररोज ४॥ पै, तर २ वर्षांची मजूरी व ४ महिन्यांची मजूरी सांगा.
- (४७) १५ ६० शेर, तर १॥ छटाकाची किंमत व ३ तोळ्यांची किंमत सांगा.
- (४८) दर वालास ८=॥, तर २॥ तोळ्यांची किंमत, व १० माशांची किंमत सांगा.
- (४९) ८० ६० दरमहा, तर ३७॥ दिवसांचा पगार किती ?
- (५०) दर शेंकडा ७॥ रुपये, तर ३ नारळांची किंमत सांगा.

पुढें लिहिलेले हिशेब चवथी इयत्ता शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांनीं न केले तरी चालेल.

- (१) १७॥ ६० तोळा, तर १॥ माशाची किंमत व २॥ मासे १॥ गुंजा ह्यांची मिळून किंमत सांगा.
- (२) ११२॥ रुपये साल, तर ८ दिवसांचा खर्च व ७॥ दिवसांचा खर्च किती ?
- (३) ४३॥ रुपये पल्ला, तर पाऊण-शेराची व ७५ शेरांची किंमत सांगा.
- (४) दर गुंजेला ३॥ पैसे, तर ११॥ मासे व १॥ गुंज ह्यांची मिळून किंमत सांगा.
- (५) दर खंडीला ७०॥—, तर १॥ पासरीची किंमत सांगा.
- (६) दर तोळ्यास २३॥=॥, तर १ माशाची किंमत व ३ गुंजांची किंमत सांगा.
- (७) १६० ६० चाहूर, तर ११७॥ विध्यांची किंमत व ३॥ विध्यांची किंमत सांगा.
- (८) दर तोळ्यास २१॥=॥, तर पाऊण माशाची व १॥ गुंजेची किंमत सांगा.
- (९) दर शेराला २॥ पैसे १ पै, तर २ पल्ल्यांची किंमत सांगा.
- (१०) ३२॥ ६० एकर, तर ३१ गुंध्यांची किंमत सांगा.
- (११) दरमणी १५॥=, तर वजनी ३॥ शेरांची किंमत सांगा.
- (१२) बाहल्या मणाला ९॥=

- तर पाऊण पायलीची किंमत (१९) २६। ६० पल्ला, तर ११। सांगा. पायलीची किंमत व १८।। पायलीची किंमत सांगा.
- (१३) १६।। ६० चव, तर ९३।। दोकड्यांचो किं० व ६२।। दोकड्यांची किंमत सांगा. (२०) दर पायलीस ८३। तर ३ पल्ले व ६। पायली ह्यांची किंमत किती ?
- (१४) १४।।-।। दरमहा, तर १।। दिवसाचा पगार किती ? (२१) दररोज १।। पै, तर १ वर्ष व २४ दिवस ह्यांची मिळून किंमत किती.
- (१५) दरसालास ८५।=, तर २२।। दिवसांचा व ६ दिवसांचा खर्च किती ? (२२) दर तोळ्यास २०।।=, तर ६।। गुंजांची किंमत सांगा.
- (१६) दर खंडीला २४।।=, तर १।। मणांची किंमत व १। मणाची किंमत सांगा. (२३) दर गुंजेला २। पैसे, तर ५ मासे व ४ गुंजा ह्यांची मिळून किंमत सांगा.
- (१७) २।। पैशांना शेर, तर १ पल्ला व ८ शेर ह्यांची मिळून किंमत किती ? (२४) ५७।। रुपये वजनी खंडी, तर ३७।। शेरांची किंमत सांगा.
- (१८) दररोज ३।। पैसे, तर २ महिने व ४ दिवस ह्यांची मिळून मजूरी किती ? (२५) दर शेरास १।। पैसे, तर वजनी ६ मण व १५ शेर ह्यांची मिळून किंमत किती ?

प्रकरण तिसरें.

सरळ व्याजाविषयीं कांहीं हिशेबांच्या चाली.

व्याजाच्या अमुक दरानें अमुक रुपये मुदलाचें अमुक मुदतीचें सरळव्याज काढावयाचें असल्यास, व्याजाचा दर दाखविणारी (रुपयांची, आण्यांची अथवा पैशांची) संख्या, मुदलाच्या रुपयांची संख्या आणि मुदत दाखविणारी (वर्षांची, महिन्यांची अथवा दिवसांची) संख्या, ह्या तीन संख्यांचा गुणाकार करून तितके कच्चे मानावे; नंतर त्या कच्चांस खाली लिहिलेल्या यादींतली जी योग्य असेल ती चाल लागू करून व्याज तयार करावें.

- (१) दर साल दर शेंकडा अमुक रुपये प्रमाणें अमुक वर्षांचें सरळ व्याज काढावयाचें— १०० कच्चांस रुपया, ६। कच्चांस आणा, दर कच्चांस ४ रेंस.
- (२) दर साल दर शेंकडा अमुक रुपये प्र० अमुक महिन्यांचें स० व्या० का०— १२०० कच्चांस रुपया, ७५ कच्चांस आणा, १८॥ कच्चांस पैसा, ६। कच्चांस पै, ३ कच्चांस रेंस, २॥ कच्चांस दाम.
- (३) दर साल दर शेंकडा अमुक रुपये प्र० अमुक दिवसांचें स० व्या० का०— २२५० कच्चांस आणा, ५६२॥ कच्चांस पैसा, १८७॥ कच्चांस पै, ९० कच्चांस रेंस, ७५ कच्चांस दाम.
- (४) दर महा दर शेंकडा अमुक रुपये प्र० अमुक वर्षांचें स० व्या० का०— कच्चांची तिप्पट करून तीपैकीं २५ कच्चांस रुपया व दर कच्चांस १६ रेंस समजावे.
- (५) दर महा दर शेंकडा अमुक रुपये प्र० अमुक महिन्यांचें स० व्या० का०— १०० कच्चांस रुपया, ६। कच्चांस आणा, दर कच्चांस ४ रेंस.
- (६) दर महा दर शेंकडा अमुक रुपये प्र० अमुक दिवसांचें स० व्या० का०— ३००० कच्चांस रुपया, १८७॥ कच्चांस आणा, ७॥ कच्चांस रेंस, ६। कच्चांस दाम.
- (७) दर महा दर शेंकडा अमुक आणे प्र० अमुक वर्षांचें स० व्या० का०— दर कच्चांस ३ रेंस, अथवा कच्चांची पाऊणपट करून तीपैकीं १०० कच्चांस रुपया ६। कच्चांस आणा, दर कच्चांस ४ रेंस.
- (८) दर महा दर शेंकडा अमुक आणे प्र० अमुक महिन्यांचें स० व्या० का०— १६०० कच्चांस रुपया, १००

कच्चांस आणा, २५ कच्चांस पैसा, ६। कच्चांस दमडी.

(९) दर महा दर शेंकडा अमुक आणे प्र० अमुक दिव-
सांचें स० व्या० का०— ७५० कच्चांस पैसा, २५० कच्चां-
स पै, १२० कच्चांस रेंस, १०० कच्चांस दाम.

(१०) दर महा दर रुपयास अमुक पैसे प्र० अमुक वर्षां-
चें स० व्या० का०— कच्चांच्या तिप्पट आणे.

(११) दर महा दर रुपयास अमुक पैसे प्र० अमुक म-
हिन्यांचें स० व्या० का०— कच्चांच्या इतकेच पैसे.

(१२) दर महा दर रुपयास अमुक पैसे प्र० अमुक दि-
वसांचें स० व्या० का०— ३० कच्चांस पैसा, १० कच्चांस
पै, ४ कच्चांस दाम.

ह्या कोष्टकामध्ये सर्वत्र ३० दिवसांचा माहिना व १२ म-
हिन्यांचें (म्हणजे ३६० दिवसांचें) वर्ष मानिलें आहे; आणि
मुद्दल दाखविणारी संख्या सर्वत्र रुपयांचीच आहे असें मा-
निलें आहे; ह्या दोन गोष्टींकडे विद्यार्थ्यांचें पूर्ण लक्ष असलें
पाहिजे.

“ एकोत्र्याचें व्याज,” “ दुहोत्र्याचें व्याज ” इत्यादि श-
ब्दांचा अर्थ “ दरमहा दर शेंकडा १ रुपया व्याज,”
“ दरमहा दर शेंकडा दोन रुपये व्याज ” इत्यादि प्र-
कारचा समजावा.

“ अमुक टक्यांचें व्याज ” ह्याचा अर्थ “ दरसाल दर
शेंकडा अमुक (रुपये) प्रमाणें व्याज ” असा समजावा.

पुढील चालींचा अभ्यास चवथी इयत्ता शिकणाऱ्या विद्या-
र्थ्यांनीं न केला तरी चालेल.

सरळ व्याजाच्या संबधानें आणखी चाली.

(१) व्याजाच्या (दर शेंकडा) अमुक रुपये दरानें कोण-

त्याही मुदलाची अमुकपट (रास) होण्यास लागणारी मुदत काढण्याची चाल:- मुदलाची पट दाखविणाऱ्या संख्येपेक्षां १ कमी इतकी १०० ची पट करून तिला दर दाखविणाऱ्या रुपयांच्या संख्येनें भागावे. व्याजाचा दर “ दरमहा दरशेंकडा ” असा सांगितला असेल, तर भागाकाराइतके माहिने ही इच्छिलेली मुदत होईल; आणि व्याजाचा दर “ दरसाल दर शेंकडा ” असा सांगितला असेल, तर भागाकाराइतकें वर्षे ही इच्छिलेली मुदत होईल.

जसे, “ दरमहा दरशेंकडा ॥ प्रमाणें सरळ व्याजाने ७३८॥ रुपये मुदलाची दामदुप्पट होण्यास लागणारी मुदत काढावयाची.” तर मुदलाची पट दाखविणारी संख्या २ हीपेक्षां १ कमी इतकी १०० ची पट केली असतां १०० च येतात; हिला दर दाखविणारी रुपयांची संख्या $\frac{1}{2}$ हिनें भागिलें असतां २०० हा भागाकार आला. आतां व्याजाचा दर “ दरमहा ” सांगितला आहे; म्हणून २०० माहिने (अथवा १६॥२ वर्षे) ही इच्छिलेली मुदत झाली.

(२) अमुक मुदतींत सरळ व्याजानें कोणत्याही मुदलाची अमुक पट (रास) होण्यास लागणारा व्याजाचा दर काढण्याची चाल:- मुदलाची पट दाखविणाऱ्या संख्येपेक्षां १ कमी इतकी १०० ची पट करून तिला मुदतीनें भागावे. मुदत माहिण्यांची असल्यास भागाकाराइतके रुपये हा दरमहा दर-शेंकडा व्याजाचा दर समजावा; आणि मुदत वर्षांची संख्या असल्यास भागाकाराइतके रुपये हा दरसाल दरशेंकडा व्याजाचा दर समजावा.

जसे, “ १६ वर्षांमध्ये सरळव्याजानें ५३७। रुपये मुदलाची दामतिप्पट होण्यास लागणारा व्याजाचा दर काढावयाचा.” तर

मुदलाची पट दाखविणारी संख्या ३ हीपेक्षां १ कमी इतकी १००ची पट केली असतां २०० येतात. हिला मुदत दाखविणारी संख्या १६ हिनें भागिलें असतां भागाकार १२॥ येतो. आतां मुदत वर्षांची संख्या आहे; म्हणून दरसाल दरशेंकडा १२॥ हा इच्छिलेला व्याजाचा दर होय.

वरच्या दोन चालींच्या योजनेमध्ये मुद्दल मुळींच घ्यावें लागलें नाहीं, ह्यावरून मुद्दल बदललें तरी ह्या चालींच्या योजनेनें आलेलीं उत्तरे बदलावयाचीं नाहींत, हें लक्षांत ठेवावें.

मोत्यांचे चव तयार करणें ह्याविषयीं.

“चव” आणि “दोकडा” हे शब्द मोत्यांच्या संबंधानें योजितात. परंतु हीं मोत्यांचें प्रत्यक्ष वजन दाखविणारीं परिमाणें नाहींत. सुमारें $9\frac{1}{3}$ गुंज वजनाचें “रती” ह्या नांवाचें एक वजन दाखविणारें परिमाण मानिलें आहे, तें व त्याचा षोडशांश तंडुल ह्या परिमाणांनीं मोत्यांचें वजन दाखवितात. नंतर सारख्या वजनाच्या मोत्यांची संख्या व त्यांचें वजन दाखविणारी रतींची संख्या, ह्यांपासून पुढें दाखविलेल्या रीतीनें चव तयार करितात, आणि त्या चवांवर मोत्यांचा भाव सांगतात.

चव तयार करण्याची रीति—एका मोत्याचें किंवा सारख्या वजनाच्या अनेक मोत्यांचें मिळून वजन दाखविणाऱ्या रतींच्या संख्येचा वर्ग करून त्याला $\frac{५५}{६६}$ नीं गुणावें व त्या गुणाकाराला मोत्यांच्या संख्येनें भागावें. भागाकाराइतके त्या एक किंवा अनेक मोत्यांचे चव होतील.

जसें, सारख्या वजनांच्या मोत्यांच्या एका जोडीचें वजन ८ रती आहे; तर तिचे $८ \times \frac{५५}{६६} \div २ = १८\frac{१}{३}$ चव (किंवा १८ चव

* मोत्यांचें वजन गुंजांनीं दाखविलें असल्यास, गुंजांच्या संख्येची पाऊणपट केली म्हणजे ती रतींची संख्या होते.

आणि $३३\frac{१}{३}$ दोकडे) झाले. तसेंच सारख्या वजनांच्या मोत्यांच्या एका चौकड्याचें वजन ५॥ चव आहे, तर त्याचे $(५॥)^२$ $\times \frac{५५}{६} \div ४ = ४\frac{५११}{१५३६}$ चव (अथवा ४ चव आणि $३३\frac{१०३}{३८४}$ दोकडे) झाले.

चव करण्याची दुसरी रीति— एका मोत्याचें अथवा सारख्या वजनाच्या अनेक मोत्यांचें मिळून वजन दाखविणाऱ्या रतींच्या संख्येच्या वर्गाचें अर्ध, अर्धाचा अष्टमांश व त्या अष्टमांशाचा षष्ठांश ह्या तिहींच्या बेरजेला मोत्यांच्या संख्येनें भागवें. भागाकाराइतके चव होतात.

जसें, “ सारख्या वजनांच्या मोत्यांच्या एका चौकड्याचें वजन १२ रती आहे, त्याचे चव करावयाचे.” तर १२ च वर्ग १४४ ह्याचें अर्ध ७२, अर्धाचा अष्टमांश ९ आणि अष्टमांशाचा षष्ठांश १॥ ह्या तीन संख्यांची बेरीज $७२+९+१॥ = ८२॥$ ह्यांस मोत्यांची संख्या ४ हिनें भागिलें, तेव्हां २०॥ चव (किंवा २० चव आणि ६२॥ दोकडे) झाले.

($\frac{५५}{६} = \frac{१}{२} + \frac{१}{३}$ चा $\frac{१}{२} + \frac{१}{३}$ च्या $\frac{१}{२}$ चा $\frac{१}{३}$. म्हणजे कोणत्याही संख्येचे $\frac{५५}{६}$ हे, त्या संख्येचें अर्ध, अर्धाचा अष्टमांश, आणि अर्धाचर अष्टमांशाचा षष्ठांश ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहेत. ह्यांवरून वरील दोन रीति अर्थतः एकच आहेत हें स्पष्ट झालें.)

चव करण्याच्या ह्या दोन रीतींविषयीं ध्यानांत ठेवण्याजोग एक गोष्ट आहे. ती ही कीं, ज्यांचीं वजनें वस्तुतः सारखीं नाहींत अशा अनेक मोत्यांचीं वजनें सारखींच आहेत असें मानून त्यांचें एकत्र वजन केलें आणि वरील रीतींप्रमाणें त्यांचे चव तयार केले, तर त्या चवांच्या संख्येपेक्षां, प्रत्येक मोत्याचे निराळे चव करून त्यांची बेरीज केली असतां येणारी चवांची संख्या जास्त असते.

जसें दोन रती वजनाचें एक व तीन रती वजनाचें एक अशां
ने मोत्यें सारख्या वजनाचीं मानून त्यांचें एकत्र वजन केलें,
आणि रीतीप्रमाणें चव केले, तर $५^२ \times \frac{५५}{६६} \div २ = ७\frac{३१}{२२}$ चव
येतात; आणि प्रत्येक मोत्याचे निरनिराळें चव करून त्यांची
बेरीज केली, तर $२^२ \times \frac{५५}{६६} + ३^२ \times \frac{५५}{६६} = (२^२ + ३^२) \times \frac{५५}{६६} =$
 $७\frac{३१}{२२}$ चव येतात. ही संख्या, एकत्र वजन करून आलेल्या
($७\frac{३१}{२२}$ ह्या) चवांच्या संख्येपेक्षां $\frac{५५}{६६}$ चवांनीं जास्त आहे.

त्यांचीं वजनें सारखीं नाहींत अशा मोत्यांचे निरनिराळे चव
करून त्यांची बेरीज केली असतां येणारी चवांची संख्या, त्यांचें
एकत्र वजन करून येणाऱ्या चवांच्या संख्येपेक्षां किती जास्त
येते हें काढण्याची एक सामान्य रीति आहे, ती येणेंप्रमाणें:—

प्रत्येक मोत्याचें वजन दाखविणाऱ्या रतींच्या संख्यांच्या व-
गांची बेरीज करून तिची मोत्यांच्या संख्येपेक्षां १ कमी इ-
तकी पट करावी; आणि तींतून, त्या वजन दाखविणाऱ्या रतींच्या
संख्यांपैकीं प्रत्येक दोन दोन संख्यांच्या गुणाकारांच्या बेरजेची
दुप्पट वजा करावी; व बाकी राहिल तिला $\frac{५५}{६६}$ नीं गुणून मो-
त्यांच्या संख्येनें भागावें. भागाकाराइतके चवांनीं निरनिराळ्या
चवांची बेरीज जास्त असते.

जसें, “ १ रती, २ रती व ३ रती हीं तीन मोत्यांचीं वजनें
आहेत. ह्यांचे निरनिराळे चव करून येणारी बेरीज ही, एकत्र
वजन करून येणाऱ्या चवांपेक्षां किती चवांनीं जास्त आहे, हें
ठरवावयाचें. ” तर $१^२ + २^२ + ३^२ = १४$, हिची मोत्यांच्या
संख्येपेक्षां १ कमी पट (म्हणजे एथें दुप्पट) केली, ती २८
झाली. हींतून, वजनें दाखविणाऱ्या रतींच्या प्रत्येक दोन दोन
संख्यांचे गुणाकार १×२ , २×३ , व १×३ ह्यांची बेरीज ११,
हिची दुप्पट २२ ही वजा करून बाकी ६ राहिली. हिला

$\frac{५५}{६६}$ नीं गुणून आलेल्या गुणाकारास मोत्यांची संख्या ३ हिने भागिलें. तेव्हां आलेला भागाकार $१\frac{७}{४८}$ इतक्या चवानीं जास्त आहे. ताळा करून पहावा.

तोंडचे हिशेव.

(१) दरसाल दरशेंकडा ४॥ रुपये प्रमाणें ५० रुपये मुदलाचें २ वर्षांचें सरळ व्याज काढा.

(२) दरसाल दरशेंकडा ७॥ प्रमाणें ८० रुपये मुदलाचें २॥ वर्षांचें सरळ व्याज काढा.

(३) दरमहा दरशेंकडा ०॥= प्रमाणें १२० रुपयांचें ४ महिन्यांचें व्याज काढा.

(४) दरसाल दरशेंकडा ९ प्रमाणें १६० रुपयांचें १ वर्ष ५ महिने इतक्या मुदतीचें सरळ व्याज काढा.

(५) दरसाल दरशेंकडा १० प्रमाणें ४० रुपयांचें २ वर्ष २ महिने इतक्या मुदतीचें सरळ व्याज काढा.

(६) दरसाल दरशेंकडा १२ प्रमाणें ६२॥ रुपयांचें ५ वर्ष १॥ महिना इतक्या मुदतीचें सरळ व्याज काढा.

(७) दरमहा दरशेंकडा ०॥॥ प्रमाणें २५० रुपयांचें ६ दिवसांचें व्याज काढा.

(८) दरमहा दरशेंकडा ०॥ प्रमाणें १६० रुपयांचें ५ महिन्यांचें व्याज काढा.

(९) दरमहा दरशेंकडा ०॥ प्रमाणें २०० रुपयांचें २ महिने १० दिवस इतक्या मुदतीचें व्याज काढा.

(१०) दरसाल दरशेंकडा ३॥ प्रमाणें ४०० रुपयांचें ३ वर्ष, ११ महिने, २० दिवस ह्यांचें सरळ व्याज काढा.

(११) दरसाल दरशेंकडा १५ प्रमाणें ५०० रुपयांचें १ वर्ष, ५ महिने, २५ दिवस ह्यांचें सरळ व्याज काढा.

(१२) दरसाल दरशेंकडा ६ प्रमाणें ७५ रुपयांचें ११॥
महिन्यांचें व्याज काढा.

(१३) दरमहा दरशेंकडा ॥ प्रमाणें २५ रुपयांचें २४
दिवसांचें व्याज काढा.

(१४) दरमहा दर रुपयास १॥ पैसा प्रमाणें ३० रुप-
यांचें ८ महिन्यांचें व्याज काढा.

दरमहा दर रुपयास २॥ पैसे प्रमाणें ४८ रुपयांचें १ वर्ष
८ महिने इतक्या मुदतीचें व्याज काढा.

(१६) दरमहा दर रुपयास १॥ पैसा प्रमाणें ६४ रुप-
यांचें २ वर्षे ४ महिने इतक्या मुदतीचें व्याज काढा.

(१७) दरमहा दर रुपयास २ पैसे प्रमाणें १०० रुप-
यांचें ४॥ महिन्यांचें व्याज काढा.

(१८) दरमहा दर रुपयास २॥ पैसे प्रमाणें ८० रुप-
यांचें ८ दिवसांचें व्याज काढा.

(१९) दुहोत्र्याप्रमाणें ३५० रुपयांचें २॥ महिन्यांचें व्याज
काढा.

(२०) एकोत्र्याप्रमाणें ४०० रुपयांचें २० दिवसांचें व्या-
ज काढा.

(२१) दिढोत्र्याप्रमाणें २० रुपयांचें ६॥ महिन्यांचें व्याज
काढा.

(२२) तिहोत्र्याप्रमाणें ४० रुपयांचें २॥ महिन्यांचें व्याज
काढा.

(२३) नऊ टके प्रमाणें २०० रुपयांचें ४॥ वर्षांचें सरळ
व्याज काढा.

(२४) ३॥॥ टके प्रमाणें ५०० रुपयांचें ८ महिन्यांचें
व्याज काढा.

(२५) चार टक्के प्रमाणें ८०० रुपयांचें ३॥ महिन्यांचे व्याज काढा.

पुढील उदाहरणें चवथी इयत्ता शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांनीं न केलीं तरी चालेल.

१ खालीं लिहिलेल्या व्याजाच्या प्रत्येक दरानें कोणत्याही मुदलाची सरळव्याजानें दामदुप्पट होण्यास लागणाऱ्या मुदती सांगा.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| (१) दरसाल दरशें० ५ प्रमाणें. | (९) दुहोऱ्याचे व्याजानें. |
| (२) दरसाल दरशेंकडा ६। प्र० | (१०) एकोऱ्याचे व्याजानें. |
| (३) दरमहा दरशेंकडा ०।।= प्र० | (११) ४ टक्क्यांचे व्याजानें. |
| (४) दरसाल दरशेंकडा ३।। प्र० | (१२) दरसाल दरशेंकडा ८ प्र० |
| (५) दरमहा दरशेंकडा ०।।० प्र० | (१३) दरसाल दरशेंकडा १२।। प्र० |
| (६) दरमहा दरशेंकडा ०।- प्र० | (१४) दरसाल दरशेंकडा ७। प्र० |
| (७) दरसाल दरशेंकडा १५ प्र० | (१५) दरमहा दरशेंकडा ०।= प्र० |
| (८) सवोऱ्याचे व्याजानें. | |

२ पहिल्या प्रश्नांतल्या प्रत्येक हिशेबांत ७५१।। रु० मुदलाच्या १।। पटीइतकी रास व त्याच मुदलाच्या अडीचपटीइतकी रास व्हावयास पाहिजे असल्यास मुदत किती असली पाहिजे ?

३ सडिसात वर्षें, १२।। वर्षें, २५ वर्षें, १६ वर्षें, ८० महिने, ६। वर्षें, ३१। वर्षें, ४० वर्षें, ३७।। वर्षें, आणि २० वर्षें ह्या प्रत्येक मुदतीमध्ये कोणत्याही मुदलाची सरळव्याजानें दामदुप्पट होण्यास व्याजाचा दर कोणता असावा ?

४ तिसऱ्या प्रश्नांतल्या प्रत्येक हिशेबामध्ये ३९४।। रुपयांचे मुदलाच्या सव्वापटीइतकी रास व त्याच मुदलाच्या १।। पटीइतकी रास व्हावयास पाहिजे असल्यास व्याजाचा दर कोणता असावा ?

५ मागच्या चारही प्रश्नांतलीं मुदलें पांचपांचशें रुपयांनीं वाढविलीं, किंवा दोनदोनशें रुपयांनीं कमी केलीं, तर त्यांच्या उत्तरांत फरक पडेल किंवा नाहीं ?

६ खालीं लिहिलेल्या हिशेबांतील मोत्यांचे चव करून दाखवा.

- | | |
|--|--|
| (१) १ मोतीं, वजन २ रती. | (६) मोत्यांची जोडी, प्रत्येकाचें वजन ९ रती. |
| (२) २ मोत्यें, प्रत्येकाचें वजन १॥ रती. | (७) १ मोतीं, वजन ४॥ रती. |
| (३) ३ मोत्यें, प्रत्येकाचें वजन २ रती. | (८) ३ मोत्यें, प्रत्येकाचें वजन ३ रती. |
| (४) सारख्या वजनाच्या मोत्यांचा चौकडा, एकंदर वजन ९ रती. | (९) ५ मोत्यें, प्रत्येकाचें वजन ३ $\frac{१}{२}$ रती. |
| (५) सारख्या वजनाच्या मोत्यांची जोडी, एकंदर वजन १२ रती. | (१०) वरील प्रत्येक हिशेबांतल्या प्रत्येक मोत्याचें वजन दुप्पट मानून त्या हिशेबांतले चव करून दाखवा. |

७ मागच्या प्रश्नांतल्या पहिल्या पांच हिशेबांतील मोत्यांचा भाव दर चवास १० रु० प्रमाणें व बाकीच्या हिशेबांतील मोत्यांचा भाव दर चवास १२॥ रुपये आहे, असें समजून त्यांच्या किंमती काढा.

८ नथेच्या एका मेळांतील जोडी १६ रतींची आहे, चौकडा ८ रतींचा आहे, पिंपळ्यांचीं ३ मोत्यें एकंदर ६ रतींचीं आहेत आणि तुऱ्याचें एक मोतीं २ रतींचें आहे. तर सरसकट १२ रु० चवप्रमाणें त्या मेळाची किंमत किती होईल ?

९ सहाव्या प्रश्नांतली तिसरा, चवथा, पांचवा, सहावा, आठवा आणि नववा ह्या प्रत्येक हिशेबांतल्या प्रत्येक मोत्याचे निरनिराळे चव करून आलेली चवांची बेरीज व त्या त्या हिशेबांतल्या साऱ्या मोत्यांचें एकत्र वजन करून आलेले चव हीं सारखींच आहेत असें दाखवा.

१० पहिल्या व दुसऱ्या हिशेबांतल्या मोत्यांचें एकत्र वजन

करून चव केले तर ते आणि सर्वांच्या वास्तविक चवांची बेरीज ह्यांच्या मध्ये अंतर किती पडेल ? अशाच प्रश्नांचे उत्तर तिसऱ्या व चवथ्या हिशेबांतल्या मोत्यांच्या संबंधाने व पहिल्या, तिसऱ्या आणि पांचव्या हिशेबांतल्या मोत्यांच्या संबंधाने सांगता.

भाग तिसरा.

चालींच्या उपपत्तीविषयी काही सूचना.

१ पहिल्या भागांत अनेकस्थानात्मक संख्यांची बेरीज, वजाबाकी इत्यादि कृत्यांच्या संबंधाने ज्या चाली लिहिल्या आहेत, त्यांपैकी आरंभीच्या नऊ कलमांतील बहुतेक चालींची उपपत्ती त्यांतील मजकुरावरून स्पष्ट आहे. त्यांपैकी एक दोन चालींच्या उपपत्तीविषयी मात्र थोडी सूचना करणे अवश्य दिसते.

पांचव्या कलमांतील “गुण्यास ८ नीं भागून” इत्यादि ह्या १२५ नीं गुणण्याच्या चालीच्या उदाहरणांतील गुण्य ८७ ह्याची सहस्रपट ८७ सहस्र होते. सहस्र ही संख्या दिलेला गुण्य १२५ ह्याच्या ८ पटीबरोबर आहे. म्हणून ८७ सहस्र हा गुणाकार इच्छिलेल्या गुणाकाराच्या ८ पटीबरोबर आहे म्हणून ८७ सहस्र $\div ८ = १०\frac{७}{८}$ सहस्र हा इच्छिलेला गुणाकार झाला. आतां अष्टमांश सहस्र म्हणजे १। शेंकडा. म्हणून

* शिक्षकांस सूचना—हा भाग शिक्षकांच्या मदतीवाचून विद्यार्थ्यांना समजावयास कठीण पडेल. म्हणून, चालींची उपपत्ति समजण्याची विद्यार्थ्यांस उत्कंठा उत्पन्न झाली असें दिसेल, आणि चालींची योजना शिकवितेसमयीं उपपत्तीविषयीं थोडथोडी सूचना करून करून त्यांस उपपत्ति समजण्याची योग्यता आली अशी शिक्षकाची खात्री होईल, तेव्हां त्यांनीं त्यांस हा भाग शिकवावा; आणि शेवटी लिहिलेल्या प्रश्नांचीं उत्तरे त्यांजकडून तयार करवावीं.

सात अष्टमांश सहस्र म्हणजे $7 \times 91 = 637$ शेंकडे. म्हणून १० (म्हणजे गुण्यास ८ नीं भागून येणाऱ्या भागाकाराइतके) सहस्र व ८॥ (म्हणजे गुण्यास ८ नीं भागून राहणाऱ्या बाकीच्या १ पटीइतके) शेंकडे, ह्यांची बेरीज हा इच्छिलेला गुणाकार होय.

६२५ नीं गुण्याची पहिली चाल वर सांगितल्याप्रमाणेंच वसवावयाची. “ गुण्याच्या अर्धांची सव्वापट ” इत्यादि ह्या ६२५ नीं गुण्याच्या चालीची उपपत्ति अशी कीं, ६२५ ही संख्या सहस्राच्या अर्धांची (म्हणजे ५०० ची) १ पट आहे; म्हणून गुण्याच्या सहस्रपटीच्या अर्धांची १ पट (अथवा गुण्याच्या अर्धांच्या १ पटीची सहस्रपट) ही गुण्याच्या ६२५ पटीबरोबर आहे.

नवव्या कलमांतल्या चालींची उपपत्ति, ३॥ हे दशकाच्या निमपटीच्या पाऊणपटीबरोबर आहेत, ६२॥ हे शेंकड्याच्या निमपटीच्या सव्वापटीबरोबर आहेत, इत्यादि गोष्टींवरून स्पष्ट दिसेल.

दहावें, अकरावें, बारावें आणि तेरावें ह्या कलमांतील चालींची उपपत्ति बीजगणिताच्या माहितीचांचून पूर्णपणें समजावयाची नाहीं. तथापि खालीं लिहिलेले सामान्य सिद्धांत लक्षपूर्वक वाचावे, म्हणजे त्या चालींच्या उपपत्तीविषयीं बरीच समजूत पडेल.

सिद्धांत पहिला—दोन संख्यांच्या बेरजेचा वर्ग हा, त्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व त्याच संख्यांच्या गुणाकाराची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर असतो. जसें, $(7 + 3)^2 = 7^2 + 3^2 + 7 \times 3 \times 2$.

सि० दुसरा—दोन संख्यांच्या अंतराचा वर्ग हा, त्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व त्याच संख्यांच्या गुणाकाराची दु-

षष्ट ह्यांच्या वजाबाकीबरोबर असतो. जसें, $(७-३)^२=७^२+३^२-७\times ३\times २$.

सि० तिसरा-दोन संख्यांच्या वर्गांचें अंतर हें, त्याच दोन संख्यांची बेरीज व त्यांचेंच अंतर ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें. जसें, $७^२-३^२=(७+३)+(७-३)$.

सि० चवथा-विवक्षित संख्येंत दोन निरनिराळ्या संख्या मिळविल्यानें ज्या दोन बेरजा येतात, त्यांचा गुणाकार हा, विवक्षितसंख्येचा वर्ग, मिळविलेल्या दोन संख्यांचा गुणाकार, आणि मिळविलेल्या दोन संख्यांची बेरीज व विवक्षित संख्या ह्यांचा गुणाकार; ह्या तिहींच्या बेरजेबरोबर असतो. जसें $(७+३)\times(७+५)=, ७^२+३\times ५+(३+५)\times ७$.

सि० पांचवा-दोन असमान संख्यांची बेरीज आणि त्यांचेंच अंतर ह्यांची बेरीज मोठ्या संख्येच्या दुपटीबरोबर असते. जसें, $(७+३)+(७-३)=७\times २$.

सि० सहावा-दोन असमान संख्यांची बेरीज आणि त्यांचेंच अंतर ह्यांची वजाबाकी लहान संख्येच्या दुपटीबरोबर असते. जसें, $(७+३)-(७-३)=३\times २$.

पांचव्या आणि सहाव्या सिद्धांतांवरून स्पष्ट आहे कीं, दोन संख्यांच्या अंतराचें अर्ध लहान संख्येंत मिळविल्यानें किंवा मोठींतून वजा केल्यानें त्या मूळसंख्यांच्या बेरजेचें अर्ध उत्पन्न होतें. ह्यावरून पाहतां तेराव्या कलमांतील दोन चाली वस्तुतः भिन्न नाहींत; तीं एकाच चालीचीं दोन स्वरूपें आहेत. तथापि पहिलें स्वरूप योजनेला सुगम व दुसरें समजण्याला सुगम असें वाटल्यावरून तीं दोन्ही स्वरूपें लिहिलीं आहेत.

चवदाव्या आणि पंधराव्या कलमांतील चाली पुढें लिहिलेल्या सामान्य सिद्धांतावर अवलंबून आहेत.

सि० सातवा— दोन संख्यांचा गुणाकार हा, त्यांपैकीं कोणत्या तरी एकीच्या अनेक (समान अथवा असमान) भागांपैकीं प्रत्येक भाग व दुसरी संख्या ह्यांच्या गुणाकारांच्या बेरजेबरोबर असतो. जसें $90 \times 6 = 7 \times 6 + 3 \times 6$; म्हणजे 90 आणि 6 ह्या दोन संख्यांचा गुणाकार हा, 90 च्या 7 आणि 3 ह्या दोन भागांपैकीं प्रत्येक भाग व 6 ह्यांच्या गुणाकारांच्या बेरजेबरोबर आहे. 90 चे 2, 3 व 4 हे तीन भाग मानिले, तर ही $90 \times 6 = 2 \times 6 + 3 \times 6 + 4 \times 6$.

$90 \times 6 = 7 \times 6 + 3 \times 6$. ह्या दोन समान संख्यांतून 7×6 ही संख्या वजा केली असतां $90 \times 6 - 7 \times 6 = 3 \times 6 = (90 - 7) \times 6$.

सोळाव्या आणि सतराव्या कलमांतील चाली पुढील सिद्धांतांवर अवलंबून आहेत.

सि० आठवा—भाज्यास भाजकानें भागून आलेला भागाकार हा, भाज्याच्या अनेक (समान अथवा असमान) भागांपैकीं प्रत्येकास भाजकानें भागून आलेल्या भागाकारांच्या बेरजेबरोबर असतो. जसें, $\frac{84}{6} = \frac{30}{6} + \frac{12}{6}$; म्हणजे 84 ह्या संख्येला 6 नीं भागून येणारा भागाकार हा, 84 च्या 30 व 12 ह्या दोन भागांपैकीं प्रत्येकाला 6 नीं भागून येणाऱ्या भागाकारांच्या बेरजेबरोबर आहे. 84 चे 30, 12 व 6 हे तीन भाग मानिले; तर $\frac{84}{6} = \frac{30}{6} + \frac{12}{6} + \frac{6}{6}$.

$\frac{84}{6} = \frac{30}{6} + \frac{12}{6}$ ह्या दोन समान संख्यांमध्ये $\frac{30}{6}$ ही संख्या वजा केली असतां $\frac{84}{6} - \frac{30}{6} = \frac{12}{6} = \frac{84 - 30}{6}$.

सि० नववा—भाज्यास भाजकानें भागून येणारा भागाकार हा, त्याच भाज्यास त्याच भाजकाच्या कांहीं पटीनें भागून येणाऱ्या भागाकाराच्या तितक्याच पटीबरोबर असतो. जसें, $\frac{84}{6} =$

णारी (रुपयांची, आप्यांची, अथवा पैशांची) संख्या, मुद्दल दाखविणारी (रुपयांची) संख्या आणि मुदत दाखविणारी (वर्षांची महिन्यांची अथवा दिवसांची) संख्या ह्या तीन संख्यांचा गुणाकार करावाच लागतो. म्हणून सदरहू “तीन संख्यांच्या गुणाकारातके कच्चे मानावे” असा सर्व हिशेबांस लक्षून आरंभी नियम लिहिला आहे. आतां त्या गुणाकारास निरनिराळ्या हिशेबांत निरनिराळ्या संख्यांनीं भागावें लागतें; म्हणून प्रत्येक हिशेबामध्ये रुपयांच्या रूपानें व्याज उत्पन्न करण्याकरितां सदरहू गुणाकारास ज्या संख्येनें भागिलें पाहिजे असें दिसेल, त्या संख्येइतक्या “कच्चांस रुपया” इत्यादिप्रकारच्या चाली बसविल्या आहेत. जसें, “दरमहा दरशेंकडा अमुक आणि दरानें अमुक रुपये मुदलाचें अमुक महिन्यांचें व्याज काढावयाचें”. एथें बहुराशिक रीतीवरून पाहतां, दर दाखविणारी आप्यांची संख्या, मुद्दल दाखविणारी रुपयांची संख्या, आणि मुदत दाखविणारी महिन्यांची संख्या, ह्यांच्या गुणाकारास १६०० ह्या संख्येनें भागिलें असतां रुपयांच्या रूपानें व्याज येईल. म्हणून सदरहू गुणाकारा इतक्या कच्चांपैकीं “१६०० कच्चांस रुपया” इत्यादिक चाल बसते.

दुसऱ्या भागाच्या तिसऱ्या प्रकरणामध्ये व्याजाच्या अमुक दरानें कोणत्याही मुदलाची सरळ व्याजानें अमुक पट रास होण्यास लागणारी मुदत काढण्याविषयी जी चाल लिहिली आहे, तिची उपपत्ति एका उदाहरणानें दर्शवितों.

उदाहरण—“दरसाल दरशेंकडा ५ रु० प्रमाणें सरळव्याजानें ४६३ रुपये मुदलाची २॥ पट रास होण्यास लागणारी मुदत काढावयाची.” आतां दिलेल्या मुदलाचें एका वर्षाचें व्याज $\frac{४६३ \times ५}{१००}$ रु० होतें; आणि मुदलाची २॥ पट रास होण्यास मुदलाच्या (२॥-१ म्हणजे) १॥ पटी इतकें व्याज झालें पाहिजे.

म्हणून त्रैराशिक रीतीच्या योजनेनें दिसेल कीं, $४६३ \times ११ \div \frac{४६३ \times ५}{१००} = \frac{४६३ \times ११ \times १००}{४६३ \times ५}$ (४६३ चा संक्षेप दिल्यानें) $\frac{११ \times १००}{५}$ इतकी वर्षे ही इच्छिलेली मुदत होय. एथें मुदलाच्या जितक्या पटीबरोबर रास पाहिजे होती, तीपेक्षां एक कमी इतकी १००ची पट करून तिला व्याजाच्या दरानें भागिल्यानें मुदत येते असें स्पष्ट दिसते. ह्यावरून दामदुपटीची वगैरे मुदत काढण्याची चाल उत्पन्न होते; आणि सदंहु कृतीमध्ये मुदलाचा संबंध सर्वांशीं नाहींसा होतो, ह्यामुळे मुदल किती ही असले तरी ती चाल लागू पडते.

ह्याप्रमाणेंच अमुक मुदतींत कोणत्याही मुदलाची सरळ व्याजानें अमुकपट रास होण्यास लागणारा व्याजाचा दर काढण्याच्या चालीची ही उपपत्ति करावी. एथें ही मुदलाच्या जितक्या पटीबरोबर रास व्हावयाची, तीपेक्षां एक कमी इतक्या पटीबरोबर त्या मुदलाचें दिलेल्या मुदतींत सरळ व्याज झालें पाहिजे; ह्या मानानें १०० चें एका मुदतीचें व्याज बहुराशिक रीतीनें काढूं लागावें. ह्याप्रमाणे मुदलाचा संक्षेप जाऊन ती दर काढण्याची चाल स्पष्ट दिसून येते.

तोंडचे हिशेब ह्या विषयावर.

स्फुट प्रश्न.

(१) “ तोंडचे हिशेब”, “ तोंडच्या हिशेबांच्या चाली”, “ गुणोत्तर”, “ वर्ग ” ह्या शब्दांचीं लक्षणें व उदाहरणें सांगा.

(२) सोळूले मापें खंडीच्या किमतीवरून शेराची व शेराच्या किमतीवरून खंडीची किंमत काढण्याच्या चाली तयार करून दाखवा.

(३) पल्ल्याच्या किमतीवरून छटाकाची व छटाकाच्या किमतीवरून पल्ल्याची किंमत काढण्याच्या चाली तयार करून दाखवा.

(४) बारूले व सोळूले मापें खंडी व चिपटें, आणि खंडी व मापटें, ह्यांपैकीं प्रत्येकाच्या किमतीवरून दुसऱ्याची किंमत काढण्याच्या चाली तयार करून दाखवा.

(५) पौंड, शिलिंग, पेन्स व फार्दिंग हीं किंमत दाखविणारीं परिमाणें मानून टन, हंड्रेड्वेट, क्वार्टर, पौंड, औंस व द्राम ह्या वजन दाखविणाऱ्या परिमाणांपैकीं प्रत्येकाच्या किमतीवरून इतरांच्या किमती काढण्याविषयीं (ज्या संभवतील त्या) चाली तयार करून दाखवा.

(६) पौंड, शिलिंग, पेन्स व फार्दिंग हीं किंमत दाखविणारीं परिमाणें मानून (ट्राय) पौंड, औंस, पेनिवेट व ग्रेन ह्या परिमाणांपैकीं प्रत्येकाच्या किमतीवरून इतरांच्या किमती काढण्याविषयीं (ज्या संभवतील त्या) चाली तयार करून दाखवा.

(७) खालीं लिहिलेलीं कृत्ये अतिसंक्षिप्तरीतीनें करून दाखवा. $५३२ \times १४४ \div २८८$; $४३६ \times १०२८ \div २१८$; $१२०१ \times १२०९ - १२००^२$; $८६४ \times ७६४ - ६४^२$; $१७६८ \times १७५९ - १७५९^२$.

(८) १३२६५, ४५७९१, २६९८१३, ५४२७८१४, ४१९६३९ ह्या प्रत्येक संख्येची पावपट, निमपट, पाऊणपट, सव्वापट, दीडपड आणि अडीचपट पावकीं, निमकीं, पाऊणकीं इत्यादिकांच्या योगानें थोडक्यांत करून दाखवा आणि ह्या कृत्यांची सामान्यरीति लिहा.

(९) दोन संख्यांच्या वर्गांचें अंतर काढण्याची अतिसंक्षिप्तरीति कोणती ? त्या रीतीनें २६८ व ७३२, १२९३ व ७९३, ८६३ व ११३७, १२७७ व १५७७ आणि २१८६ व ८१४ ह्या दोन दोन संख्यांच्या वर्गांचीं अंतरे काढून दाखवा.

(१०) “ अनेक संख्यांच्या वर्गांचा गुणाकार हा त्या संख्यांच्या गुणाकाराच्या वर्गाबरोबर असतो ” हा सिद्धांत

उदाहरणांच्या योगानें प्रत्ययास भागून दाखवा.

(११) “ भाज्याच्या वर्गाला भाजकाच्या वर्गानें भागून आलेला भागाकार हा, भाज्यास भाजकानें भागून आलेल्या भागाकाराच्या वर्गाबरोबर असतो.” हा सिद्धांत उदाहरणांच्या योगानें स्पष्ट करून दाखवा.

(१२) खाली लिहिलेली कृत्ये अतिसंक्षिप्त रीतीनें करून दाखवा.

$$४३२^२ \div २१६^२; ३२^२ \times १२५^२; २४८^२ \times १५^२ \div १२४^२;$$

$$३५^२ \times ६५४^२ \div ३२७^२; २८९ \times ६७ + ३३ \times १७^२.$$

(१३) १२६ खंडी १८ मण ह्या संख्येच्या ६८ पटीतून १२५ खंडी १३ मण ह्या संख्येची ६८ पट अतिसंक्षिप्त रीतीनें वजा करा.

(१४) ५१२ च्या १२४ पटीतून ४८ ची ३१ पट थोडक्यांत वजा करून दाखवा.

(१५) १९२च्या २८५ पटीमध्ये ६४ ची ४५ पट थोडक्यांत मिळवून दाखवा.

(१६) दोन संख्यांच्या बेरजेचा वर्ग आणि त्यांच्याच वर्गांची बेरीज ह्यांपैकीं मोठी संख्या कोणती ?

(१७) दोन संख्यांच्या बेरजेचा वर्ग आणि त्यांच्याच वर्गांची बेरीज ह्यांचें अंतर काढण्याची एखादी सुलभ रीति तयार करून दाखवा.

(१८) दोन संख्यांच्या बेरजेचा वर्ग आणि त्यांच्याच वजाबाकीचा वर्ग ह्यांचें अंतर काढण्याची एखादी सुलभ रीति तयार करून दाखवा.

(१९) दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज आणि त्यांच्याच वजाबाकीचा वर्ग ह्यांचें अंतर काढण्याची एखादी संक्षिप्तरीति तयार करून दाखवा.

(२०) मागच्या तीन प्रश्नांतल्या रीति खालीं लिहिलेल्या दोन दोन संख्यांना लागू करून दाखवा.

१२५ व ३६८; ९९ व १०२९; २४९९ व १६५१;

१९९ व ६३८२; ७५ व ५६४८.

(२१) एक मोती १० चवांचें आहे. तर त्याच्या दुपट वजनाचें मोती किती चवांचें भरेल ? १॥ पट वजनाचें मोती किती चवांचें भरेल ? तिप्पट वजनाचें मोती किती चवांचें भरेल ?

(२२) सारख्या वजनांच्या मोत्यांचा एक चौकडा ३० चवांचा आहे. तर त्या चौकड्यांतल्या प्रत्येक मोत्याच्या दुप्पट, २॥ पट अथवा चौपट ज्याचें वजन आहे अशा मोत्यांच्या चौकड्याचे चव किती होतील ?

(२३) २० चवांच्या एका मोत्याच्या वजनाइतकेंच सारख्या वजनाच्या दोन मोत्यांचें मिळून वजन आहे; तर त्यांचे चव किती होतील ?

(२४) २४ चवांची एक सारख्या वजनांच्या मोत्यांची जोडी आहे; तिच्या वजनाइतकेंच सारख्या वजनाच्या ६ मोत्यांचें मिळून वजन आहे. तर त्यांचे चव किती होतील ?

(२५) सारख्या वजनांच्या मोत्यांची संख्या कायम ठेवून प्रत्येकाचें वजन कांहींपट वाढविलें अथवा कमी केलें, तर चवांच्या संख्येमध्ये काय फरक होतो ? सारख्या वजनाच मोत्यांचें एकंदर वजन कायम ठेवून मोत्यांची संख्या मात्र कांहींपट वाढविली अथवा कमी केली, तर चवांच्या संख्येमध्ये काय फरक होतो ?

समाप्त.