

म. ग्रं. सं. ठाणे

३०

सन

१९८१

विषय

लेखक

डॉ. रो. उ. शर्मा

दलगे

ठाणे

संग्रहालय क्रमांक

पुस्तकाचे नांव

इंग्लिश साहित्य उभयपक्षी

उदाहरण साहित्य भाग २

५३

डा. ज्या

दिनांक १८९१

मुंबई इलाख्यातील सरकारी विद्याशाळाखातें.



अंकगणित. सं. ग. ३/११

उपपत्ति व उदाहरणें ह्यांसहित
भाग दुसरा.

हे पुस्तक,

केरो लक्ष्मण छत्रे,

L.A.I.

पुणे कॉलेजांतील गणितशास्त्राचे माजी प्रोफेसर

With the additions ह्यांनीं केले. तें,

Improvements बल्लाल धारप,

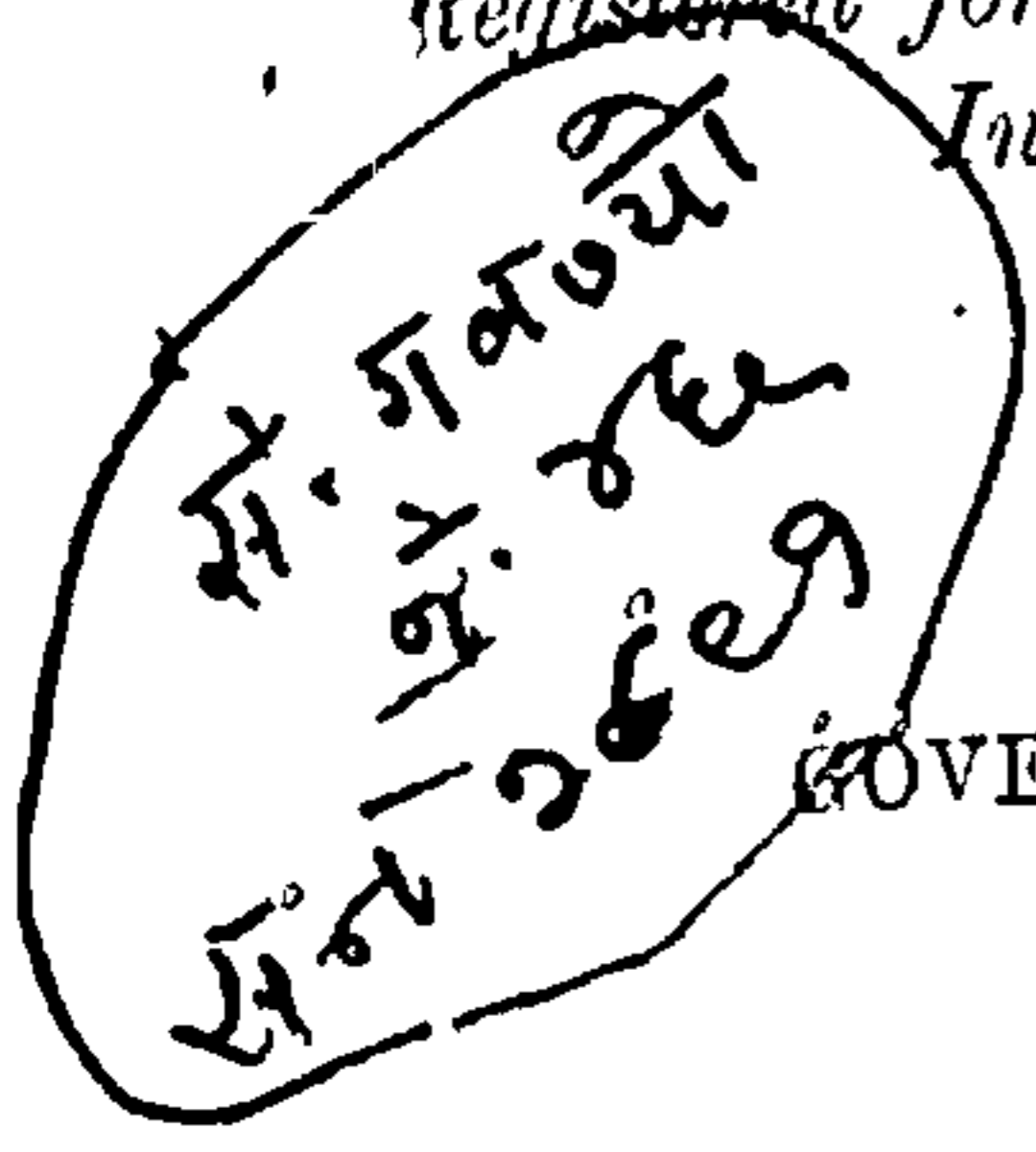
the subject विज्ञान, ज्योतिष, व
BY

MORO BALLAL DHARAP

TEACHER OF NATURAL PHILOSOPHY, ASTRONOMY AND
ARITHMETIC IN THE POONA TRAINING COLLEGE.

Revised Third Edition.—15,000 Copies.

Registered for Copy-right under the Government of
India's Act XXV. of 1867.



BY

GOVERNMENT CENTRAL BOOK DEPÔT.

1891.

[All rights reserved.]

Price 9 Annas.

AY!

THE "NIRNAYA-SAGAR" PRESS.

सन १८९९

मुंबई इलाख्यातील सरकारी विद्याशाळाखातें.

अंकगणित. सं. ग. डी. पो. ३/११

उपपत्ति व उदाहरणें ह्यांसहित

भाग दुसरा.

हे पुस्तक,

केरो लक्ष्मण छत्रे,

डॅक्कन कॉलेजांतील गणितशास्त्राचे माजी प्रोफेसर
ह्यांनीं केले. ते,

मोरो बहाळ धारप,

पूना ट्रेनिंग कॉलेजांतील पदार्थविज्ञान, ज्योतिष, व
अंकगणित, ह्या शास्त्रांचे अध्यापक
ह्यांनीं

तपासून, विषयाच्या प्रतिपादनपद्धतींत सुधारणा करून,
त्याला पुष्कळ प्रकारचीं उदाहरणें जोडून, वाढविलें.

सुधारलेली तिसरी आवृत्ति.—१५,००० प्रती.

ह्या पुस्तकाची मालकी सन १८६७ च्या २५ व्या
आक्टाप्रमाणें नोंदिली आहे.

मुंबई:

गवर्नमेंट सेंट्रल बुक डीपो.

सन १८९१ इ०.

या पुस्तकासंबंधी सर्व अधिकार सरकारांनीं आपणाकडे ठेविले आहेत.

किंमत ९ आणे.

प्रस्तावना.

परम मान्य गुरु कै० केरो लक्ष्मण छत्रे देकन कॉलेजांतील गणितशास्त्राचे माजी प्रोफेसर ह्यांनीं विद्येच्या प्रसारानें आवश्यक झाल्यावरून ज्या सुधारणा आरंभिल्या, आणि रावसाहेब सीताराम विश्वनाथ पटवर्धन एज्युकेशनल इन्स्पेक्टर दक्षिण भाग ह्यांनीं पूना ट्रेनिंग कॉलेजाचे प्रिन्सिपाल असतेवेळीं ज्या शेवटास नेण्याचें काम मजकडे सोंविल्यावरून मीं त्यांचे नजरेखालीं वीढविल्या, त्या सुधारणा ह्ये गवृत्तींत वन्याच अंशीं शेवटास पोंचविल्या आहेत.

ह्या पुस्तकांत अंकगणितांतील लक्षणें यथायोग्य विचारानें दिलीं आहेत, लक्ष्यलक्षणांची फोड जेथल्या तेथें करून दाखविली आहे, आणि ह्यांतील प्रत्येक रीतीची उपपत्ति अगर सिद्धता ही मूलतत्वांच्या आधारांनें सांगितली आहे. सारांश अंकगणित हें शास्त्र आहे अशा दृष्टीनें ह्या विषयाचें प्रतिपादन पूर्णपणें करण्याचा प्रयत्न ह्या पुस्तकांत केला आहे.

अंकगणित ही कला आहे अशा दृष्टीनें त्यांतील रीति सिद्धवत् घेऊन त्यांचा उपयोगच विद्यार्थ्यांकडून करविला, तर तो गणिती बनतो, पण सांगकाम्याच्या योग्यतेचा बनतो, विचारशील अगर चौकस बनत नाही. पण अंकगणित हें शास्त्र आहे अशा दृष्टीनें त्याच रीतीची अगर नियमाची उपपत्ति त्याला शिकवूं लागता, हाणजे त्याला त्या विषयाकडे चिंत्ताची एकाग्रता कळावी लागते, त्यांतील मुद्दे सूक्ष्म विचारानें तपासावे लागतात, त्यांचें आकलन ज्यानें होईल असें एक अनुमान तुम्ही सांगतां तसेंच दुसरे अनुमान त्यालाही बांधावेंसें वाटतें, आणि तें प्रत्येक अनुमान त्याच्या आधारांशीं ताडून पाहून जें खरें ठरेल तेंच अनुमान त्या रीतीच्या अगर नियमाच्या रूपानें स्वीकारावें लागतें. अशा रीतीनें विद्यार्थ्यांला विचार करण्याचा मार्ग लागला, हाणजे तो सहजच विचारशील निपजतो. तसेंच

मुंबई,

‘निर्णयसागर’ छापखान्यांत छापिलें.

प्रत्येक विचारार्ची साधकबाधकें पाहण्याची संवय झाली, हाणजे सहजच तो विचक्षण किंवा चौकस निपजतो. अशा सुशिक्षित विद्यार्थ्यांला जर एकाद्या रीतीचा विसर पडला, तर उपपत्तीच्या आधारानें ती रीति त्याला तावडतोव शोधून काढतां येते. सारांश अंकगणिताचा अभ्यास सोपपत्तिक करविला, तरच विद्यार्थ्यांच्या बुद्धीचा पूर्णपणें विकास होतो. हाणून कोणतीही रीति अगर नियम असो, त्याची उपपत्ति पूर्ण विचारानें सांगावी असा प्रयत्न ह्या पुस्तकांत मुख्यत्वेकरून केला आहे.

ह्या पुस्तकांत अंकगणिताच्या व्यावहारिक उपयोगाकडेही भरपूर भर पुरविली आहे. गणिताची उदाहरणें तपासणाराला सहज समजत जावीं, ह्याकरितां प्रथम थोडक्यांत सूचना देऊन मग कृति करावी, ह्या प्रकारच्या समंजस रीतीनें तीं विद्यार्थ्यांना सोडवितां आलीं पाहिजेत. ह्या हेतूनें ह्या पुस्तकाच्या प्रत्येक प्रकरणांत वेगळाल्या प्रकारचीं उदाहरणें नवीन देऊन तीं त्या प्रकरणाला अनुरूप अशा समंजस रीतीनें सोडवून दाखविलीं आहेत. प्रत्येक प्रकरणाच्या शेवटीं जीं अभ्यासाकरितां उदाहरणें दिलीं आहेत त्यांत देखील निवडक उदाहरणांची पुष्कळ भर घातली आहे, ह्यामुळे ह्या पुस्तकांतला उदाहरणसंग्रह देखील ह्याच्या उपपत्तीच्या अंगाप्रमाणेंच पुष्कळ मोठा झाला आहे. ह्या दुसऱ्याच भागांतलीं उदाहरणें मोजलीं तर सोडवून दाखविलेलीं सुमारें ३॥ शें भरतील व अभ्यासाकरितां दिलेलीं सुमारें २ हजार भरतील. जीं अंकगणितें त्यांतील उदाहरणांकरितांच शिक्षक लोक वांपरीत असतात, त्यांशीं ह्या पुस्तकांतला उदाहरणसंग्रह ताडून पाहिला, तर व्यवहारोपयोगित्व, काठिण्य, विस्तार, अशा प्रत्येक गुणांत हा उदाहरणसंग्रह भरपूर आहे असें दिसून येईल.

ह्या पुस्तकांत आणीकही कांहीं सुधारणा केलेल्या आहेत, उदाहरणार्थ $\frac{७ \text{ रुपये}}{२}$ असल्या भाज्यभाजकांचा भागाकार प्रत्यक्ष न करितां, तो ७ द्वितीयांश रुपये असा त्याच संख्यांच्या तोड-

जोडीच्या वाचणीने दाखविला, हणजे त्या भागाकाराला अपूर्णांक हणत असतात. तथापि एक वस्तूचे सारखे सारखे असे पाहिजे तितके भाग घेणे त्यास अपूर्णांक हणतात, असे अपूर्णांकांचें लक्षण देत असतात. एथें एक वस्तु किंवा भाज्यांतील एकं जे रुपये त्यांचे भाजकुइतकाले दोन दोन हिस्से करावे, व ते हिस्से भाज्याइतके ७ घ्यावे, हणजे ते हिस्से ३॥ रुपये हा भागाकार दाखवितात, हीच वरील वाचणीची खरी तोडजोड आहे. ही तोडजोड वरच्या लक्षणानें शिकवितां येत नसल्यामुळें तें निरुपयोगी ठरतें. हणून ही तोडजोड शिकवितां यावी असें अपूर्णांकांचें लक्षण बनवून तें ह्या पुस्तकांत दिलें आहे. व्यवहारी अपूर्णांकांचें स्वरूप स्पष्टपणें कळण्यासाठीं त्याचे अवयव दर्शविले आहेत, आणि व्यवहारी अपूर्णांक व पूर्णांक ह्यांचें सादृश्य उघड करून दाखविलें आहे.

दशांश अपूर्णांकांचीं मूळकृत्यें जीं वेरीज, वजावाकी, गुणाकार व भागाकार, तीं जर देवघेवीचीं परिमाणें देणाऱ्या दशांश स्थळापावेतोच संक्षिप्त रीतींनीं केलीं, तरच त्यांचीं उत्तरे थोड्या श्रमानें काढितां येतात. ही सोय होण्यासाठीं संक्षिप्त कृत्यांच्या रीति सुबोध करून सांगितल्या आहेत. तसेंच वरिष्ठ गणितांत जे नानाप्रकारचे उल्लेख उत्पन्न होत असतात ते सोडवून त्यांपासून इच्छिल्या स्थळापावेतो दशांश संख्या उत्पन्न करण्याच्या तोडजोडी सांगितल्या आहेत.

दशांशानंतर व्यावहारिक गणिताला किंवा मानगणिताला आरंभ केला आहे. ह्या गणितांत मध्यममानाचा उपयोग जागोजाग करावा लागतो, हणून त्याची माहिती प्रथम दिली आहे.

इंग्लंड, फ्रान्स, वगैरे सुधारलेल्या देशांत प्रमाणगणिताचीं कामें एकमानगणितानें करण्याचा प्रचार पडून तो दिवसानुदिवस वाढत चालला आहे. ह्या सोप्या गणिताची गोडी आपल्याही मुलांना लागली पाहिजे, हणून ह्या गणिताचें प्रकरण मध्यममानाच्या पुढें नवीन घालून, ह्या गणिताचा उपयोग पुष्कळ उदाहरणांनीं सदरवार करून दाखविला आहे.

व्यावहारिक गणिताचें जबरदस्त हत्यार हाटलें ह्मणजे प्रमाणगणित आहे, ह्मणून ह्या गणितासंबंधी माहिती ह्या पुस्तकांत पूर्णपणें दिली आहे. दोन गुणोत्तरांचा समव्यस्तपणा सांगण्याला, किंवा दोन महत्त्वांची बदलणूक सांगण्याला, इंग्रजी भाषेंत ठरलेली शास्त्रीय परिभाषा आहे. त्याच नमुन्याने मराठीमध्ये परिभाषा योजून तिचा उपयोग पुष्कळ प्रमाणांशीं करून दाखविला आहे. साध्या प्रमाणांतल्या साध्या राशींच्या जागीं सावयव राशि मांडले, ह्मणजे एकाच त्रैराशिकानें बहुराशिक संडवितां येतें. ह्या युक्तीचा उपयोग कितीएक उदाहरणांत करून दाखविला आहे. अशा रीतीने सामान्य व्यवहाराची माहिती साधेप्रमाण, संयुक्तप्रमाण, व प्रमाणभाग, ह्या तीन प्रकरणांनीं दिली आहे.

अडत, देलाली, नफातोटा, व्याज, कसर, विभाज्य, इत्यादिकांचीं जीं मानें तीं व्यापारी लोक दरशेंकड्यावर पहात असतात. तशींच देशांतील लोकांची वाढ, स्त्रीपुरुषांच्या संख्या, वेगळाले धंदे करणाऱ्या लोकांच्या संख्या, असलीं देशस्थितिरीतीचीं दर्शक जीं मानें तींही शोधक विद्वान देशांतील एकंदर लोकसंख्येच्या दरशेंकड्यावरच पहात असतात. ह्मणून ह्या एकंदर प्रकरणांचा समावेश शतमान गणितांत केला आहे. ह्या गणितांत त्यांतील प्रत्येक प्रकरणाची माहिती पूर्णपणें दिली आहे, आणि त्यासंबंधी उदाहरणेंही परोपरीचे उपयोग दाखविणारीं अशीं चांगलीं निवडक दिलीं आहेत.

घातप्रकरण व मूलप्रकरण ह्या दोहोंत बरीच उपयोगी माहिती घालून तीं प्रकरणें पूर्णपणें व्यवहारोपयोगी केलीं आहेत.

आकारमापनाच्या प्रकरणांत काटकोनचौकोन, समांतरभुज चौकोन, त्रिकोण, व नियमित बहुकोण, ह्यांच्या क्षेत्रफळांचे नियम सिद्ध करून त्यांचे उपयोग करून दाखविले आहेत. वर्तुळसंबंधी बहुकोनांचा सिद्धांत (ग) ह्याचा उपयोग करून दाखवून त्यापासून वर्तुळाची परिघमिति उत्पन्न करून दाखविली आहे, आणि काटकोनचौकोनी भरींवाच्या घनफळाचा

नियम समजावून त्याचाही उपयोग दाखविला आहे. ह्याप्रमाणें क्षेत्रफळ, रेखाफळ, व घनफळ, ह्या तिहींची अत्यंत उपयोगाची माहिती दिल्यानंतर ह्या प्रकरणांत जागोजाग उपयोगी पडणाऱ्या द्वादशांश गुणाकारांची माहिती दिली आहे. अशा रीतीने हें पुस्तक उपयोगाचें करण्यासाठी ह्यांत अनेक प्रकारच्या सुधारणा केल्या आहेत.

ह्या सुधारणा करण्यांत कॉर्नेवेल आणि फिच, जे. ब्रूक-स्मिथ, जे. हॉव्लिन स्मिथ, आणि गर्दलस्तोन, ह्यांच्या अंकगणितांची आणि चार्लस देव्हिस ह्यांच्या भूमितीची अशी मदत घेतली आहे. ह्या मंदतीबद्दल मी ह्या ग्रंथकारांचे आभार मानितों.

ह्या पुस्तकांत कोणाला कांहीं दोष आढळल्यास ते व कोणाला कांहीं सुधारणा करणें योग्य वाटल्यास त्या त्यांनी कृपा करून लिहून पाठवाव्या. त्यांचा आभारपूर्वक स्वीकार करून विचार करण्यांत येईल.

पुणे, तारीख ७ जून }
सन्-१८९१.

मोरो बहाळ धारप.

अनुक्रमणिका.

पृष्ठ.

व्यवहारी अपूर्णांक.—लेखन, वाचनाचे प्रकार, अवयव, पदे, अपूर्णाकांचे प्रकार, व भेद. ...	१
रूपांतर प्रकार दहा.	११
मिळवणी.	२७
वजावाकी.	३०
गुणाकार.	३३
भागाकार.	३६
मिश्र अपूर्णांक व उल्लिख सोडविणे. ...	३८
व्यवहारी अपूर्णाकाचा रूपभेद किंवा विवि- धाशी संबंधः	४४
दशांश अपूर्णांक.—वाचन व लेखन.	५६
मिळवणी व वजावाकी.	६३
गुणाकार.	६४
भागाकार.	६६
व्यवहारी अपूर्णाकास दशांश अपूर्णाकाचे रूप देणे.	७०
आवर्त दशांश.	७४
आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकाचे रूप देणे.	७६
आवर्त दशांशांचीं बिनकसर कृत्ये.	७९
दशांश अपूर्णाकांचीं संक्षिप्त कृत्ये व कसर. ...	८१
संक्षिप्त बेरीज व वजावाकी.	८३
संक्षिप्त गुणाकार.	८३
संक्षिप्त भागाकार.	८५

दशांश अपूर्णाकाचा रूपभेद किंवा विविधांशीं	
संबंध.	९१
मध्यममान किंवा सरासरी.	९९
एकमानगणित.	१०१
प्रमाणगणित.	११८
गुणोत्तर व प्रमाण.—गुणोत्तराचें लेखन, वाचन, प्रकार, व विशेष; प्रमाण, समानतेचीं प्रत्यक्ष प्रमाणें, व प्रमाणाचे नियम पांच.	११९
सुद्धे प्रमाण अथवा त्रैराशिक.—राशींचीं नांवें, संबंधी राशि, सजातीय राशि, महत्त्वे व त्यांचेबदल, समप्रमाण, व्यस्तप्रमाण, त्रै- राशिकाची रीति, उदाहरणें सार्धीं, व सावयव संख्यांचीं.	१३६
संयुक्त प्रमाण अथवा बहुराशिक.	१६७
प्रमाणभाग अथवा सर्कतवांटणी.	१७७
शतमानगणित.	१९२
अडत, दलाली, विभा, व कसर.	१९९
नफातोटा.	२०५
सरळव्याज.—प्रकार १ ला, समंजस क्रम १ ला व २ रा, रीति व पद्धति, तृतीयांशादि रीति, प्रकार २ रा ३ रा व ४ था....	२१५
चक्रवाढ व्याज.—प्रकार १ ला, रीति व पद्धति; प्रकार २ रा व ३ रा....	२३१
कसर आणि आजची किंमत.—खरी कसर व्या- पारी कसर, व देण्याच्या चिठ्ठ्या.	२४१
ठेव.—नियमित व सासान्य, ठेवीचा भाव व दलाली.	२५१

करण:-वातविषयक नियम सामान्य पांच, आणि

द्विपद संख्येचा वर्ग व घन ह्यांचे दोन. २७१

मूलप्रकरण. २८०

वर्गमूळाविषयी नियम व रीति. २८४

घनमूळाविषयी नियम व रीति. २९०

घनमूळ काढण्याची हार्नरची रीति. २९५

मूलविषयक सामान्य विचार.... ३०१

श्रेढी-गणितश्रेढी. ३०३

भूमितिश्रेढी. ३०९

आकारमापन किंवा रेखापळ, क्षेत्रफळ, व घनफळ,

आणि द्वादशांश गुणाकार. ३१३

प्रश्नसमुदाय. ३३८

सोडविलेले प्रश्न. ३५८

अभ्यासाकरिता दिलेल्या उदाहरणांची उत्तरे. ३८९

अंकगणित.

भाग २ रा.

व्यवहारी अपूर्णांक.

एकंच्या एकें, दोनें, त्रीक, चोक, इत्यादि पुण्या पटीला पूर्ण (पूर्ण परिमाण) हणून, त्या पूर्णांच्या संख्येला पूर्णांक (पूर्ण संख्या) हणतात; तसेंच एकंच्या प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ, इत्यादि अंशाला किंवा अपुण्या पटीला अपूर्ण (अपूर्ण परिमाण) हणून, त्या अपूर्णांच्या संख्येला अपूर्णांक (अपूर्ण संख्या) हणतात.

संख्या उत्पन्न होण्याचीं कृत्यें वांटणी व मोजणी अशीं दोन आहेत. हींच दोन कृत्यें भाज्याच्या जातीचा भागाकार आणि भाववाचक भागाकार ह्या दोन रूपांनीं दाखविलीं जातात.

उदाहरणार्थ ६ केळ्यांची, २ मुलांमधली वांटणी काढून दाखविणें असतें, तेव्हां ती भागाकाराच्या पहिल्या रूपानें दाखविली जाते. जशी.—

$$\frac{६ \text{ केळीं}}{२} = ३ \text{ केळीं.}$$

६ केळ्यांची ३ केळ्यांच्या मापानें मोजणी काढून सांगणें असतें, तेव्हां ती भागाकाराच्या दुसऱ्या रूपानें दाखविली जाते. जशी:—

$$\frac{६ \text{ केळीं}}{३ \text{ केळीं}} = २$$

वांटणी दाखविणारा पहिल्या रूपाचा भागाकार हा नेहमीं भाज्याच्या जातीचा असतो, आणि मोजणी दाखविणारा दुसऱ्या रूपाचा भागाकार हा नेहमीं सामान्य संख्या असतो, तरी त्यांच्या भाज्यभाजकांना गु० भा० नि० ६ अन्वये साधारण

परिमाणानें भागिलें हणजे मोजणी दाखविणाराही भागाकार भाज्याच्या जातीचा हाणतां येतो. जसा.—

$$\frac{6}{3} = 2$$

भागाकाराच्या जातीचा भाज्य.— भागाकाराच्या जातीचा जो वांटणींतला भाज्य, किंवा साधारण परिमाणानें भागून आलेला जो मोजणींतला भाज्य, त्याला भागाकाराच्या जातीचा भाज्य हणावें. भा० जातीच्या भाज्याचा भाजक हा नेहमीं सामान्यसंख्या असावयाचा हें वर व्यक्त झालेंच आहे.

आतां वांटणीच्या कृत्यांतली संख्या ३ ही केळ्यांची किंवा १ केळ्याची १ पट ह्या पूर्णांची संख्या आहे. तशीच मोजणीच्या कृत्यांतली संख्या २ ही एकड्यांची किंवा १ ची १ पट ह्या पूर्णांची संख्या आहे. ह्याच कारणानें ह्यांना पूर्ण संख्या किंवा पूर्णांक हणतात. एकंच्या पटींच्या संख्या किंवा पूर्ण संख्या ह्या मुख्यत्वेकरून पूर्वीच्या भागीं विचारांत घेतल्या. तशाच एकंच्या अंशांच्या संख्या किंवा अपूर्ण संख्या ह्या मुख्यत्वेकरून ह्या भागीं विचारांत घेणें आहेत. पूर्ण संख्या ह्या प्रत्यक्ष भागाकारानें उत्पन्न कराव्या लागतात. पण अपूर्ण संख्या ह्या भागाकाराच्या जातीचा भाज्य व त्याचा सामान्यसंख्यारूपी भाजक ह्यांच्या विशेष प्रकारच्या वाचणीवरूनच मनांत आणावयाच्या असतात. हा प्रकार कळण्यासाठीं पुढील लक्षणें पहा.

अंश व छेद.— एकंचे (अगर संख्येचे) कांहीं समान भाग कल्पिले हणजे त्यांतील एका भागाला, त्या एकंचा (अगर संख्येचा) त्या भागसंख्ये इतक्यावा अंश (भाग, हिस्सा किंवा वांट) हणतात, आणि त्या भागसंख्येला किंवा भाजकसंख्येला छेद हणतात.

अंशाचें लेखन व्यवहारी किंवा सामान्य.— ज्याचा अंश लिहावयाचा तें ओळीवर मांडून त्याच्याखालीं छेद मांडतात. जसें.— १चे २ समान भाग कल्पून त्यांतील १ भाग लिहिणें असला, हणजे तो $\frac{1}{2}$ * असा लिहितात. १ छकडीचे

* हें लेखन १ भागिले २ असें वाचावें, किंवा १ छेद २ असे वाचावें;

३ समान भाग कल्पून त्यांतील १ भाग लिहिणें असला, तर तो $\frac{१}{३}$ असा लिहितात. तसेंच १ रुपयाच्या ४ समान भागांपैकीं १ भाग लिहिणें असला, तर तो $\frac{१}{४}$ असा लिहितात.

अंशाचें वाचनं.— वरील अंश हे एक द्वितीयांश (? एकं), १ तृतीयांशछकडी, व १ चतुर्थांशरुपया, ह्या रीतीनें वाचतात. किंवा १ चा द्वितीय अंश, १ छकडीचा ३ रा. भाग, व १ रुपयाचा ४ था हिस्सा, ह्या रीतीनें वाचतात.

अपूर्ण.— एकंच्या अंशाला अपूर्ण (अपूर्ण परिमाण) हाणावें. वरील उदाहरणें पहा.

अपूर्ण ही त्यांच्या छेदाइतकींच १ एकंमधें असावयाचीं. उदाहरणार्थ १ केळ्यांत $\frac{१}{२}$ केळें ह्या एवढालीं अपूर्ण २ असावयाचीं, $\frac{१}{३}$ केळें ह्या एवढालीं अपूर्ण ३ असावयाचीं हें उघड आहे.

$\frac{१}{२}$ केळें व $\frac{१}{३}$ केळें ह्या अपूर्ण परिमाणांत पहिल्यापेक्षां दुसरें लहान आहे, असें छेदांवरून किंवा भागसंख्यांवरून ठरतें. ह्यावरून एकाच नांवाच्या अपूर्ण परिमाणांत ज्याचा छेद लहान तें अपूर्ण परिमाण मोठें, ज्याचा छेद मोठा तें अपूर्ण परिमाण लहान, व ज्यांचे छेद समान तींच अपूर्ण परिमाणें समान असतील, असें प्रत्यक्ष आढळतें. अर्थात् छेद हा अपूर्ण परिमाणाचा महत्वदर्शक असतो.

सूचना.— $\frac{६}{३}$ ह्यांचा भागाकार मनांत आणण्यासाठीं ६ ह्या भागाकाराच्या जातीच्या भाज्यांतील प्रत्येक एकंचा द्वितीयांश (छेदाइतक्याचा अंश) एकेक घेतलेला कल्पिला, तर ते अंश मिळून ६ द्वितीयांशएकं (६ अर्धेएकं) ही संख्या बनते, किंवा ६ चा द्वितीयांश एक बनतो. ह्या उदाहरणावरून पुढचें अपूर्णांकाचें लक्षण मनांत आणा.

अपूर्णांक.— भागाकाराच्या जातीच्या भाज्यांतील प्रत्येक एकंचा छेदाइतक्याचा एकेक अंश मिळून जी संख्या बनते तिला, किंवा त्या भाज्याच्या त्या छेदाइतक्याच्या एका अंशाला, अपूर्णांक किंवा भाग ह्णतात.

लेखन.— व्यवहारांत ओळीवर भाज्य व खालीं भाजक मांडून त्यांच्या संबंधानें अपूर्णांक किंवा भाग दाखवितात. जसे.—

$$६, \frac{२}{३}, \text{ आणि } \frac{३}{४}.$$

एकंखालीं छेद मांडला, ह्मणजे त्यानें त्या एकंचा त्या छेदाइतक्यावा एकच अंश दाखविला जातो. तसाच ६ इ० भाज्याखालीं २ इ० भावसंख्यारूपी भाजक (ह० छेद) मांडला, ह्मणजे त्यानें त्या भाज्यांतील प्रत्येक एकंचा त्या छेदाइतक्यावा एकेकच अंश दाखविला जातो. ह्यामुळे ह्या मांडणींत भाज्यांतील एकंची संख्या जी ६ ती द्वितीयांशएकं ह्यांची संख्या होते, छकड्यांची संख्या जी २ ती तृतीयांशछकड्या ह्यांची संख्या होते, आणि रुपयांची संख्या जी ३ ती चतुर्थांशरुपये ह्यांची संख्या होते. ह्याप्रमाणें भाज्याखालीं भाजक मांडल्यानें

भाज्यांतील एकंची जी संख्या ती $\frac{\text{एकं}}{\text{भाजक}}$ ह्या अंशांची (अपूर्णांची) संख्या होते, ह्मणून ह्या मांडणींत भाज्यांतील एकंची जी संख्या (६ इ०) तिला अपूर्णांक (ह० अपूर्णांची संख्या) असें ह्मणतात. तसेंच भाज्यांतील प्रत्येक एकंचा भाजकाइतक्यावा एकेक भाग घेतला ह्मणजे त्या भाज्याच्या त्या भाजकाइतक्या समान भागांपैकीं एक भाग मिळतो. हा भाग भाज्यभाजकांचा भागाकार दाखवितो, ह्मणून ह्या मांडणीला किंवा अपूर्णांकाला भागही ह्मणतात. ह्याप्रमाणें प्रत्येक अपूर्णांक हा अंशांची संख्या दाखवितो, आणि संख्येचा अंशही दाखवितो. ह्मणून,

वाचनाचे २ प्रकार.— वरील अपूर्णांक हे ६ द्वितीयांश (१ एकं), २ तृतीयांशछकड्या, आणि ३ चतुर्थांशरुपये, असे अंशाच्या संख्या समजून वाचतात; आणि ६ चा द्वितीयांश, २ छकड्यांचा तृतीयांश, आणि ३ रुपयांचा चतुर्थांश असे संख्यांचे अंश समजूनही वाचतात.

पहिल्या वाचणीवरून लक्षांत येईल कीं, वरील अपूर्णांकांत अनुक्रमें द्वितीयांश (एकं), तृतीयांशछकड्या, व चतुर्थांशरुपये हीं अपूर्ण परिमाणें आहेत, आणि ६, २, व ३ ह्या त्यांच्या संख्या आहेत. ह्मणून,

फल १ लं.— अपूर्णक हे पूर्णाकांच्याच नमुन्याने अपूर्ण परिमाणांच्या संख्या अगर राशि दाखवितात.

संख्यापरिमाणे.— अपूर्णक हे अपूर्ण परिमाणांचे राशि दाखवितात, हणजे अपूर्ण परिमाणे हीं त्या राशींचीं मोजणीचीं परिमाणे दाखवितात. वरच्या अपूर्णाकांत हीं मोजणीचीं परिमाणे त्यांतील एकंच्या १ द्वितीयांश पट, १ तृतीयांश पट, व १ चतुर्थांश पट, अशीं अनुक्रमे आहेत. अर्थात् १ द्वितीयांश इत्यादि अपूर्ण पटींना संख्यापरिमाणे हे नांव अपूर्णाकांत किंवा अपूर्ण राशींत येते.

अवयव.— एकं, त्याची अपूर्ण पट दाखविणारे संख्यापरिमाण, व त्याची पट दाखविणारी संख्या, असे तीन अवयव अपूर्णाकांत असतात; आणि एकं, व संख्यापरिमाण, असे दोन अवयव अपूर्ण परिमाणांत असतात.

दुसऱ्या वाचणींत पूर्णसंख्या व संख्यापरिमाण ह्या दोन अवयवांमध्ये चकार योजिला आहे. ह्याच रीतीने अपूर्णाकाचे पहिल्या वाचणींत दिसणारे तिन्ही अवयव त्यांच्यामध्ये चकार योजून मांडावे, हणजे ती मांडणी त्या अपूर्णाकांचा पहिल्या वाचणीचा अर्थ दाखविते. जसा.—

$\frac{६}{२} = १$ च्या $\frac{३}{२}$ चे ६ गुण किंवा मोजे.

$\frac{२४}{३} = ८०$ च्या $\frac{३}{४}$ चे २

$\frac{३६}{४} = ९०$ च्या $\frac{३}{४}$ चे ३

वरच्या पहिल्या वाचणीच्या अर्थांत पहिले एकं, त्या पुढची संख्यापरिमाणे, व त्या पुढच्या संख्या, हे अवयव च्या, चे इ० चकारांनीं वेगळे झाले आहेत, आणि ह्यांतले पहिले दोन अवयव अपूर्णपरिमाणाचे आहेत. हे अवयव मूळच्या अपूर्णाकांतच मनांत आणून वाचा.

ह्या पहिल्या वाचणीच्या मांडणींत संख्यापरिमाण व संख्या हे पटी दाखविणारे अवयव आहेत, असे त्यांच्या मागच्या चकारांनीं दाखविलें जातें. ह्या प्रमाणे चकाराचा उपयोग पटी व अवयव दाखविण्यांत होतो हे लक्षांत ठेवा.

मुख्य अवयव.— मोजर्णांत संख्यापरिमाण हें एकंशीं जोडलें जाऊन त्या जोडाला परिमाण हें नांव येतें, ह्या दृष्टीनें अपूर्णाकाचे मुख्य अवयव अपूर्णपरिमाण व संख्या हे दोन होतात. तसेंच गुणाकारांत संख्यापरिमाण हें संख्येशीं जोडलें जातें, ह्या दृष्टीनें अपूर्णाकाचे मुख्य अवयव एक व अपूर्ण संख्या हे दोन होतात. जसे.—

$$\begin{array}{l} \frac{६}{२} = \frac{१}{२} \text{ चे } ६ \text{ पट; तसेंच } \frac{६}{२} = ३ \text{ चे } \frac{६}{२} \text{ पट.} \\ \frac{२४}{३} = \frac{८}{३} \text{ चे } २ \text{ " " } \frac{२४}{३} = ८ \text{ चे } \frac{२४}{३} \text{ " } \\ \text{व } \frac{३६}{४} = \frac{९}{४} \text{ चे } ३ \text{ " } \text{ व } \frac{३६}{४} = ९ \text{ चे } \frac{३६}{४} \text{ " } \end{array}$$

हे मुख्य अवयव मूळच्या अपूर्णाकांतच मनांत आणून वाचा.

सूचना.— अपूर्णाकांच्या अवयवांच्या शेवटीं गुण किंवा मोजें व पट हे शब्द वर लिहिले आहेत, हे तेंच मनांत समजतात, प्रत्यक्ष लिहित नसतात.

एथें अपूर्णाकाचें लक्षण, उदाहरणें, व वाचण्या, हीं पुन्हा पहा, ह्यणजे लक्षांत येईल कीं; भाज्याचे भाजकाइतके समान भाग करून त्यांतल्या एका भागाला आपण भागाकार ह्यणतो, ह्याच कल्पित भागाकाराला येथें अपूर्णाक ह्मंटलें आहे. आतां भाज्याचे भाजकाएवढाले भाग केले, तर त्या भागांच्या संख्येलाही आपण भागाकार ह्यणतो हा कल्पित भागाकार एथें कसा दाखविला जातो ही गोष्ट स्वतंत्रपणें विचारांत घेण्यासाठीं

६ आंबे
२ आंबे हे भाज्यभाजक घ्या. आंब्यांची जोडीही एका आंब्यांत
३ (ह्यणजे अर्धी) राहते, तर त्या जोड्या दोन आंब्यांत ३ राह-
तील आणि सहा आंब्यांत ६ राहतील. ह्यावरून $\frac{६ \text{ आंबे}}{२ \text{ आंबे}} = ३$ हा
भागाकार येईल हें उघड आहे. ह्यणून,

फल २ रें.— भाज्य ओळीवर लिहून तिच्याखाली भाजक लिहावा, हे दोन्ही परिमाणसंख्या असले तर त्यांचीं समान परिमाणें छेकून टाकावीं, ह्यणजे तो अपूर्णाक त्यांचा भागाकार दाखवील.

भाज्य भावसंख्या व भाजक परिमाणसंख्या असणें संभवत नाहीं, ह्मणून $\frac{६}{२}$ आवे असला अपूर्णांकही संभवत नाहीं.

पदे.— अपूर्णांकांतील ओळीवरच्या संख्येला अंश ह्मणतात, आणि अंश व छेद ह्यांना अपूर्णांकाचीं पदे ह्मणतात. जसें.— $\frac{३५}{४}$ ह्यांत ३ रु. ह्या पदाला अंश ह्मणतात आणि ४ ह्या पदाला छेद ह्मणतात.

अपूर्णांकाच्या पहिल्या वाचणींत अंश शब्दानें अपूर्ण परिमाण दर्शविलें जातें, दुसऱ्या वाचणींत अंश शब्दानें संख्येचा १ भाग (ह० भागाकार) दर्शविला जातो, आणि अपूर्णांकाचीं पदे सांगण्यांत अंश शब्दानें भा० जातीचा भाज्य (ओळीवरचा राशि) दर्शविला जातो. हे अर्थभेद लक्षांत ठेविले पाहिजेत.

अपूर्ण परिमाणाचीं पदे एक व छेद हीं आहेत.

भागाकाराला भाजकानें गुणिलें ह्मणजे भाज्य येतो. यथे अपूर्णांक व अपूर्ण परिमाण हीं भागाकार दाखवितात, ह्मणून

फल ३ रें.— अपूर्णांकाला त्याच्या छेदानें गुणिलें तर त्याचा अंश (ओळीवरची संख्या) येईल, तसेंच अपूर्ण परिमाणाला त्याच्या छेदानें गुणिलें तर त्याचा एक येईल.

$$उ० \quad \frac{३}{४} \times ४ = ३; \quad \frac{५}{८} \times ८ = ५.$$

व्युत्क्रम— अपूर्णांकाच्या पदांची अदलावदल केल्यानें जी संख्या होते, तिला त्या अपूर्णांकाचा व्युत्क्रम ह्मणतात. जसा:— $\frac{३}{४}$ चा व्युत्क्रम $\frac{४}{३}$ आहे, $\frac{५}{९}$ चा व्युत्क्रम $\frac{९}{५}$ आहे, किंवा ७ आहे, इ०

अपूर्णांकाचे प्रकार ६ कल्पितात ते असे.—

ज्या अपूर्णांकाचा अंश छेदापेक्षां लहान असतो, त्याला सम (वास्तविक) अपूर्णांक ह्मणतात. उदा० $\frac{३}{४}$.

ज्या अपूर्णांकाचा अंश छेदापेक्षां लहान नसतो, त्याला विषम (दिसाऊ) अपूर्णांक ह्मणतात. उ० $\frac{३}{२}$, $\frac{५}{२}$ इ०

पूर्णांक व अपूर्णांक हे दोन्ही दाखविणाऱ्या भागाकाराला पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक, भागानुबंध पूर्णांक, व उभयविध

संख्या, हीं नांवें येतात. उ० $२\frac{३}{४}$, $४\frac{५}{६}$ किंवा १ रुपयाचे $४\frac{५}{६}$, इ०

ज्या अपूर्णाकाचा एक पूर्णांक असतो, त्याला भागजाति (ह० पूर्णाचे भाग ह्या जातीचा) अपूर्णांक ह्मणतात. उ० $\frac{३}{४}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$ इ० अपूर्णाकांचे अर्थ १चे $\frac{३}{४}$, १चे $\frac{३}{४}$, १चे $\frac{५}{६}$ इ० होतात, ह्मणून हे भागजाति अपूर्णांक होत.

ज्या अपूर्णाकाचा एक अपूर्णांक (ह० भाग) असतो, त्याला प्रभागजाति (भागांचे भाग ह्या जातीचा) अपूर्णांक ह्मणतात ह्मणजे अपूर्णाकाचा अपूर्णांक ह्मणतात.

उ० $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$, | १ रु. च्या $\frac{५}{६}$ चे $\frac{३}{४}$ इ०

ज्या अपूर्णाकाचा अंश, छेद, अगर हे दोन्ही अपूर्णांक असतात त्याला मिश्र अपूर्णांक ह्मणतात. किंवा प्रमितिभागजाति (मोजदातीचा भागजाति) असें ह्मणतात.

उ० $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{२३}{४५}$, $\frac{५-३}{२\frac{३}{४}+\frac{५}{६}}$, इ०

भेद.—पूर्णाकाचे भेद स्थानिक (स्थलसंख्यांचीं परिमाणें दाखविणारे किंवा चिन्हसंख्येच्या घातांचीं परिमाणें दाखविणारे) आणि व्यवहारी (पाढ्यांतलीं किंवा विविधसंख्यांचीं परिमाणें दाखविणारे) असे दोन आहेत. उदाहरणार्थ २३४ पै आणि रु. २३४४ (ह्मणजे २ एकशेंब्याण्णवीं पई, ३ बारीं पै, ४ एकीं पै) ह्या संख्या ताडून पहा. ह्यांपैकीं शतं, दहं, आणि एकं, हीं पूर्ण १० च्या पद्धतींतलीं किंवा १० चे घात ह्या नेमक्या पटीचीं आहेत, ह्मणून ह्यांचीं महत्वं हीं स्थलांनीं दाखविलीं जातात. परंतु पैचीं एकशेंब्याण्णवीं किंवा रुपये, पैचीं बारीं किंवा आणे व पैचीं एकीं किंवा पै, हीं पूर्ण नेमक्या पटीचीं नाहींत; ह्मणून ह्यांचीं महत्वं पाढ्यांतल्या संख्यांनीं व नांवांनीं दाखवावीं लागतात. ह्याच नमुन्याचे अपूर्णाकाचे भेद स्थानिक अपूर्णांक आणि व्यवहारी अपूर्णांक असे दोन आहेत.

स्थानिक अपूर्णांक.—जीं अपूर्ण परिमाणें एकपासून नेमक्या पटींनीं घटत जातात, त्यांचीं नांवें व महत्वं हीं दाखविणारे

छेद हे स्थलांनीं दाखवून तेथें त्यांच्या संख्या मात्र लिहिल्या, ह्मणजे त्यांना स्थानिक अपूर्णांक हें नांव येतें. उदाहरणार्थ ४॥॥=१ ही चतुर्थांश संख्या आणि ४.५६७ ही दशांश संख्या पहा.

वरची पहिली संख्या ४ पूर्णांक, ३ चतुर्थांश, २ पौडशांश व १ चौसष्टांश अशी वाचतात, आणि दुसरी संख्या, ४ पूर्णांक, ५ दशांश, ६ शतांश व ७ सहस्रांश, अशी वाचतात. ह्या वाचणीवरून लक्षांत येईल कीं, पहिल्या संख्येंत १ एकचे चतुर्थांश ४, १ चतुर्थांशाचे पौडशांश ४, अशीं एकपासून चवथ्या हिशानें घटणारीं परिमाणें कल्पिलीं आहेत. ह्या परिमाणांचीं नांवें व महत्वे दाखविणारे छेद ४, १६, ६४ इ० हे एक पुढच्या १ ल्या, दुसऱ्या, इत्यादि स्थलांनीं दाखवून तेथें त्यांच्या संख्या दाखविणाऱ्या रेखा मात्र लिहिल्या आहेत, ह्मणून ही चतुर्थांश संख्या स्थानिक अपूर्णांकांची संख्या आहे. तसेंच दुसऱ्या संख्येंत १ एकचे दशांश १०, १ दशांशाचे शतांश १० अशीं दुहाव्या हिशानें घटणारीं अपूर्ण परिमाणें कल्पिलीं आहेत. ह्यांचीं नांवें व महत्वे दाखविणारे छेद १०, १००, १०००, इ० हे एकच्या स्थलांच्या दशांशचिन्हापुढच्या १ ल्या, २ व्या, इत्यादि स्थलांनीं दाखवून तेथें त्यांच्या संख्यांचे अंक मात्र मांडिले आहेत, ह्मणून ही दशांश संख्या स्थानिक अपूर्णांकांची संख्या आहे.

व्यवहारी अपूर्णांक.—ज्यांच्या अपूर्ण परिमाणांचीं महत्वे किंवा व्यवहारांतल्या विविध परिमाणांचीं नांवें हीं एकच्या प्रत्यक्ष छेदानें दाखविलीं असतात; त्यांना व्यवहारी किंवा सामान्य अपूर्णांक ह्मणतात.

पुढच्या उदाहरणांत स्थानिक अपूर्णांक व विविध पूर्णांक हे व्यवहारी अपूर्णांकांत मांडून दाखविले आहेत, ते तपासून पहा.

$$१० = \frac{१}{४}; ११० = \frac{२}{४}; १०१ = \frac{१}{१६}; १०२ = \frac{२}{१६};$$

$$१०१ = \frac{१}{६४}; १११० = \frac{३}{६४}; १०१०१ = \frac{११०१}{७२}; १०१०४ = \frac{२२१०४}{७२};$$

$$४॥॥=१ = ४ + \frac{३}{४} + \frac{२}{१६} + \frac{१}{६४}$$

$$४.५६७ = ४ + \frac{५}{१०} + \frac{६}{१००} + \frac{७}{१०००};$$

$$२५० \ ३ \ आ० \ ४ \ पै = २५० + \frac{३५}{९६} + \frac{४५}{९६२}$$

$$किंवा \quad \quad \quad \quad \quad = (२ + \frac{३}{९६} + \frac{४}{९६२}) ५०.$$

$$५ \ दिवस \ ६ \ तास = ५ \ दि + \frac{६६}{२४} = (५ + \frac{६}{२४}) दिवस.$$

$$किंवा \quad \quad \quad \quad \quad = ५ \frac{६}{२४} दिवस.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. अ.

१. $\frac{४}{९६}$, $\frac{६५}{८}$, $\frac{१५५५५}{१२५५५}$ व $\frac{५}{४५}$ ह्या प्रत्येक जोडींत भा० जातीचा भाज्य कोणता ? त्याचा भाजक किंवा छेद कोणता ? आणि भाज्यभाजकांचा अशक्य संबंध कोणता ?

२. भा० जातीचा भाज्य १२ एकडे ह्यांचा एकेक १७ वा अंश घेतला, आणि १००१ एकडे ह्यांचा एकेक १०००० वा अंश घेतला, तर कोणते अपूर्णांक होतील ?

३. एक पंचमांश, एक पाव, नऊ अर्धुके, तेवीस तिसरे वांटे, पंचविसांचा एकूणपन्नासावा हिस्सा, आणि पांचशें नव्वदांचा प्रयुतांश, हे अंकांनीं मांडा.

४. $\frac{१४}{४}$, $\frac{३०}{९०}$, $\frac{२अडे}{४}$, $\frac{४ \times २}{६}$, $\frac{८हात}{२}$, व $\frac{५मण}{९२}$; हे अपूर्णांक पहिले प्रकारानें किंवा अंशांच्या संख्या समजून वाचा.

५. वरील अपूर्णांक हे पहिल्या वाचणीच्या अर्थाप्रमाणें अवयवांत विभागून मांडा, आणि त्या अवयवांचीं नांवे सांगा.

६. वरील अपूर्णांक हे अपूर्ण परिमाण, व संख्या, ह्या दोन अवयवांत विभागून मांडा; आणि त्या अपूर्णपरिमाणांच्या छेदांनीं उजळणींतलीं अगर विविधांतलीं त्यांचीं कोणतीं नांवे दाखविलीं जातात तीं सांगा.

७. वरील अपूर्णांक हे एक व अपूर्णसंख्या ह्या दोन अवयवांत विभागून मांडा, आणि त्या एकला त्या अपूर्णसंख्येंतील अंश व छेद ह्यांतून गुणक कोण आहे व भाजक कोण आहे तें सांगून, त्यांच्या किंमती काढा.

८. वरील अपूर्णांक हे दुसऱ्या प्रकारानें किंवा संख्येचे अंश समजून वाचा, त्यांतील अंश व छेद हीं पदे दाखवा, आणि अंशांना छेदांनीं भागून त्यांच्या किंमती काढा.

९. $\frac{१०}{१५}$, $\frac{८५}{६०}$, $३\frac{१}{२}$, $\frac{८८}{११}$, $\frac{८९}{११}$, $\frac{१२}{१२}$ व $\frac{९९}{१००}$;

ह्या प्रत्येक अपूर्णांकाचा प्रकार कोणता तो लक्षणावरून सांगा.

१०. $\frac{५}{६}$, $\frac{३}{६}$, $\frac{३ वारीं}{४}$, $\frac{५ रु.चे ४}{७}$, $\frac{४}{९}$,

२॥ मणांचे $\frac{४}{६}$, १चे $\frac{१२}{१५}$, $\frac{२\frac{३}{४}}{७\frac{२}{१०}}$, ८चे $\frac{६}{७}$;

ह्या अपूर्णांकांत एकंचे भाग कोणते, अपूर्णांचे भाग कोणते, व भागांच्या मोजदाती कोणत्या, तें पाहून ह्यांचे प्रकार सांगा.

११. ००६४, ०८०४९, ०॥=॥॥, ५॥=॥॥२ हे स्थानिक अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांच्या रांगांत मांडा.

१२. $४\frac{८}{१२}$ तोळे, $५\frac{३}{४}$ पेन्स, $६\frac{४}{१२}$ मण, $१\frac{२}{३}$ विती, $\frac{१५}{६०}$ घटिका, $\frac{५}{१२}$ वर्षे, $\frac{५}{६}$ अयनें, ह्या संयुक्त व अपूर्ण संख्यांचे अर्थ विविध परिमाणांच्या संख्यांनी सांगा.

पूर्णांकाखाली छेद १ लिहिला ह्मणजे त्यास अपूर्णांकाचें रूप येतें. हें रूप प्रथमांश दाखवितें.

(उ. $\frac{७}{१}$; $\frac{६}{१}$ इ०.)

व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूपांतर.

पहिल्या परिमाणसंख्येच्या बरोबरीची जी दुसरी परिमाणसंख्या येते, तिला पहिलीचें रूपांतर ह्मणतात, व दुसऱ्या परिमाणाचें रूप ह्मणतात. जसें—२ रुपयांचे पावले किंवा चतुर्थांश केले, ह्मणजे २ रुपयांना पावल्यांचें किंवा चतुर्थांशांचें रूप दिलें असें ह्मणतात, आणि २ रुपयांचें रूपांतर ८ पावले किंवा $\frac{८ रु.}{४}$ आहेत असें ह्मणतात. ह्या रूपांतरांचा उपयोग अपूर्णांकांची मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि कृत्यांत करावा लागतो.

प्रकार पहिला: पूर्णांकास इच्छिलेला अंक छेदस्थळीं येई असें हलक्या परिमाणाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.—इच्छिलेले छेदानें पूर्णांकास गुणून तो गुणाकार अंशस्थळीं लिहावा, व इच्छिलेला छेद छेदस्थळीं लिहावा.

उदाहरण. छेदस्थळीं ६ येतील असें ५ ह्या पूर्णाकास अपूर्णाकाचें रूप दे.

रीतीप्रमाणें. $५ = \frac{५ \times ६}{६} = \frac{३०}{६}$ हें उत्तर.

उपपत्ति— एका रुपयांत अधेल्या २ राहतात, पावले ४ राहतात, व चवळ ८ राहतात, तसेंच १ मध्ये द्वितीयांश दोन, तृतीयांश ३, चतुर्थांश ४, इ० राहतात. अशा रीतीनें कोणत्याही छेदाचीं परिमाणें त्या छेदाइतकींच १ मध्ये राहतात, हणून ह्या अपूर्ण परिमाणांचीं नांवें त्यांच्या छेदांनीं दाखविलीं जातात. ह्या विचारें पाहतां ६ हा छेद $\frac{१}{६}$ या परिमाणाला असावयाचा, हणून वरच्या उदाहरणांचा अर्थ ५ या पूर्णाकाचे पष्ठांश करणें असा होतो. १ मध्ये पष्ठांश ६ राहतात तेव्हां ५ मध्ये ३० राहतील. येथें $\frac{१}{६}$ हें परिमाण व ३० ही संख्या आहे. हीं गुण्यगुणकाप्रमाणें जोडलीं हणजे $\frac{३०}{६}$ असें रूप येतें. यांत दिलेला पूर्णाक व छेद यांचा गुणाकार अंशस्थळीं आला आहे. व दिलेला छेद छेदस्थळीं आला आहे. याप्रमाणेंच कोणत्याही उदाहरणांत येईल, हणून हीच कृति वरील रीतींत सांगितली आहे.

विविधांत भारी परिमाणाचे संख्येला हलक्या परिमाणाचें रूप देतों त्याच नमुन्याचा हा प्रकार आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. क.

१. ८ आणि २७ ह्यांस प्रत्येकीं ५ आणि २७ हे छेद येतील अशीं अपूर्णाकरूपें दे.

२. ३४ आणि १३५ ह्यांस प्रत्येकीं ११ आणि १८ हे छेद येतील अशीं अपूर्णाकरूपें दे.

३. ६, ९, १२ आणि २० ह्यांच्या अपूर्णाकरूपांत सर्वास १५ छेद येतील असें कर.

४. २५, ३४, १७, १११ ह्यांस ३४ हे छेद येतील अशीं अपूर्णाकरूपें दे.

प्रकार दुसरा. भागानुबंध पूर्णांकास विषम अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

रीते.— पूर्णांकास अपूर्णांकांच्या छेदानें गुणून त्या गुणाकारांत अंश मिळवावा आणि त्या वेरजेखालीं अपूर्णांकाचा छेद लिहावा.

उदा. १ लें.— $७\frac{२}{३}$ ह्यांस विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

रीतीप्रमाणें. $७\frac{२}{३} = \frac{७ \times ३ + २}{३} = \frac{२१ + २}{३} = \frac{२३}{३}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.— $७\frac{२}{३}$ ह्यांस विषम अपूर्णांकाचें रूप देणें ह्याचा अर्थ ७ पूर्णांक व $\frac{२}{३}$ मिळून एक अपूर्णांक करणें असा आहे. सजातीय व समान अंशांच्या संख्येला अपूर्णांक हणतात. या लक्षणावरून ७ या पूर्णांकांचे तृतीयांश करावे तेव्हां त्यांत $\frac{२}{३}$ मिळून एक अपूर्णांक होईल हें उघड आहे. पहिल्या प्रकाराप्रमाणें ७ ना तृतीयांशाचें रूप देतां $७ = \frac{७ \times ३}{३}$ असें येतें. या वरोवरींत $\frac{२}{३}$ मिळविले हणजे—

$$७\frac{२}{३} = \frac{७ \times ३}{३} + \frac{२}{३} = \frac{२३}{३}$$

हें इच्छिलें रूप येतें. येथें जो कृति केली तीच असल्या कोणत्याही उदाहरणांत केली पाहिजे, हणून हीच कृति वरील रीतींत सांगितली आहे.

हा प्रकार विविधांतल्या उतरत्या भांजणी सारखाच हुबेहूब आहे.

उदा. २ रें.— २॥ ह्यांस विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

रीतीप्रमाणें. $२॥ = २\frac{१}{२} = \frac{२ \times २ + १}{२} = \frac{५}{२}$ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ख.

खालीं दिलेल्या संख्यांस विषम अपूर्णांकांचीं रूपें दे.

१.	$३\frac{३}{६}$	८.	$१५५\frac{११}{१५}$	१५.	२१.
२.	$६०\frac{२५}{५०}$	९.	$१२८\frac{१३}{१३}$	१६.	३॥.
३.	$२२१\frac{४}{९९}$	१०.	$३७\frac{१५६}{६६६}$	१७.	४॥॥.
४.	$१३\frac{१५५}{९६}$	११.	$२००\frac{२०६}{६६६}$	१८.	५८.
५.	$३२\frac{११३}{३३}$	१२.	$१२५\frac{२५५}{२५५}$	१९.	७८=
६.	$२००\frac{२३०}{३३०}$	१३.	$५१४\frac{५६}{५६}$	२०.	८८.
७.	$७१\frac{१११}{१२}$	१४.	$१०१\frac{१५९}{२९}$	२१.	९८॥॥.

प्रकार तिसरा. विप्रस अपूर्णोकास पूर्णोकाचें, अथवा भागानुबंध पूर्णोकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.— अंशास छेदानें भागून भागाकार येईल तो पूर्णोका समजावा. बाकी राहिल्यास तो पूर्णोका व $\frac{\text{बाकी}}{\text{छेद}}$ हा अपूर्णोका मिळून भागानुबंध पूर्णोका समजावा.

$$\text{उ. १ लें.} - \frac{४५}{५} = ९. \quad \text{उ. २ रें.} - \frac{११३}{१५} = ७\frac{८}{१५}.$$

$$\text{उ. ३ रें.} - \frac{५}{४} = १. \quad \text{उ. ४ थें.} - \frac{७}{३} = २\frac{१}{३}.$$

उपपत्ति.— विप्रम अपूर्णोकांत अंशापेक्षां छेद नेहेमीं कमी असतो ह्मणून त्याचा त्यास भाग बरोबर जातो किंवा कांहीं एक शेष उतरतात. शेष राहून त्याचा भाग पूर्णोकांस जोडावा लागतो तेव्हां भागानुबंध पूर्णोका होतो.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ग.

खाली दिलेले विप्रम अपूर्णोकांस भागानुबंध पूर्णोकांचीं रूपें दे.

१.	$\frac{३७}{५}$	८.	$\frac{३०}{२}$	१६.	$\frac{३५७७}{१०८३}$
२.	$\frac{७३}{११}$	९.	$\frac{८१}{१६}$	१६.	$\frac{४१४८}{११७}$
३.	$\frac{३१३}{१३}$	१०.	$\frac{३२९०}{१२३३}$	१७.	$\frac{४६४१}{२२१}$
४.	$\frac{२२९१}{८७}$	११.	$\frac{१०२३३}{३२५७}$	१८.	$\frac{८२}{१६}$
५.	$\frac{१२४७}{७७}$	१२.	$\frac{३९२७}{७५}$	१९.	$\frac{१३१}{६४}$
६.	$\frac{३१३६}{९५}$	१३.	$\frac{६०००}{३७५}$	२०.	$\frac{१३}{८}$
७.	$\frac{४१}{४}$	१४.	$\frac{३०००}{७५}$	२१.	$\frac{५१}{६}$

प्रकार चवथा. अपूर्णोकास पूर्णोकांनं गुणावयाचा.

रीति १ ली.— दिलेल्या पूर्णोकांनं अंशास गुणावें.

अथवा

रीति २ री.— दिलेल्या पूर्णोकांनं छेदाला भाग तुटल्यास भागावें.

उदाहरण १ लें.— $\frac{३}{८}$ ह्यांस २ ह्यांनीं गुण.

रीति १ ली प्र. $\frac{३}{८} \times २ = \frac{३ \times २}{८} = \frac{६}{८}$ हें उत्तर.

रीति २ री प्र. $\frac{३}{८} \times २ = \frac{३}{८ \div २} = \frac{३}{४}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.— एका भाज्यराशीचे कांहीं समान भाग केले

आहेत अशी कल्पना करा. आतां भागसंख्या काईम ठेवून भाज्य दुप्पट अगर तिप्पट केला तर प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पट होईल, आणि भाज्य कायम ठेवून भागसंख्या निमे अगर तृतीयांश केली तरी प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पटच होईल, ही गोष्ट थोड्या विचारानें कळणारी आहे. भाज्य, भागसंख्या, व एक भाग, ह्यांनाच अंश, छेद, व अपूर्णांक, हीं नांवें दिलेलीं आहेत. ह्यावरून

अपूर्णांकाचा नियम १ ला.— छेद कायम ठेवून अंश गुणला, किंवा अंश कायम ठेवून छेद भागला, तर अपूर्णांक गुणला जाईल.

ह्यांचे कृति, वरील रीतींत सांगितल्या आहेत ह्मणून त्या शुद्ध आहेत.

उपपत्ति २ री.— एक ह्या राशीचे कांहीं समान भाग केलेले कल्पा. आतां एक हा राशि कायम ठेवून भागसंख्या निमे अगर तृतीयांश केली तर प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पट मोठाला होईल, आणि भागसंख्या दुप्पट अगर तिप्पट केली तर, प्रत्येक भाग निमे अगर तृतीयांश होईल. भागसंख्या व एक भाग ह्यांना छेद व अपूर्णपरिमाण हीं नांवें आपण देतो. ह्यावरून,

अपूर्णपरिमाणाचा नियम.— एक कायम ठेवून छेद भागला तर अपूर्णपरिमाणाची तितकी पट होईल, व छेद गुणला तर अपूर्णपरिमाणाचा तितक्यावा हिस्सा होईल.

अपूर्णपरिमाणाच्या संख्येनें अपूर्णांक दाखविला जातो, ह्यावरून संख्या व अपूर्णपरिमाण ह्यांतून कोणाचीही पट केल्यानें अपूर्णांकाची पट होईल हें उघड आहे.

उदाहरणार्थ $\frac{3}{4}$ या अपूर्णांकांत ३ ही संख्या व $\frac{1}{4}$ हें परिमाण आहे, ह्मणून ३ ची दुप्पट करून ती $\frac{3}{2}$ या परिमाणाला जोडावी, अगर $\frac{3}{4}$ या परिमाणाची दुप्पट करून ती ३ या संख्येला जोडावी, ह्मणजे $\frac{3}{4}$ ची २ पट होईल. आतां अपूर्णपरिमाणाच्या नियमाप्रमाणें परिमाणाच्या छेदास पूर्णांकानें भागिलें.

असतां तं त्या पूर्णाका इतके पट होते. ह्यणून $\frac{3}{2} \times 2 = \frac{6}{2}$ व $\frac{3}{2}$ अशां दोन रूपें येतात. ह्याच कृति, हरएक उदाहरणांत केल्या पाहिजेत ह्यणून वरील रीति खऱ्या आहेत.

उ. २ रें. $\frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$; उ. ४ थें. $\frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$.

उ. ३ रें. $\frac{6}{2} \times 4 = \frac{24}{2} = 12$; उ. ५ वें. $\frac{3}{2} \times 6 = \frac{18}{2} = 9$.

प्रकार पांचवा. अपूर्णाकास पूर्णाकानें भागावयाचा.

रीति १ ली.— दिलेल्या पूर्णाकानें छेदाला गुणावें.

अथवा

रीति २ री.— दिलेल्या पूर्णाकानें अंशास भाग तुटल्यास भागावें.

उदा. १ लें.— $\frac{8}{3}$ यांचा २ नीं भाग.

रीति १ ली प्र. $\frac{8}{3} \div 2 = \frac{8}{3 \times 2} = \frac{8}{6}$ हें उत्तर.

रीति २ री प्र. $\frac{8}{3} \div 2 = \frac{8 \div 2}{3} = \frac{4}{3}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.— पूर्वीचा भाज्य राशि कायम ठेवून भाग संख्या दुप्पट अगर तिप्पट केली तर प्रत्येक भाग निमें अगर तृतीयांश होईल, आणि भाग संख्या कायम ठेवून भाज्य राशि निमें अगर तृतीयांश केला तरी प्रत्येक भाग निमें अगर तृतीयांशच होईल. ह्यणून पूर्वीचे नामनिर्देशावरून,

अपूर्णाकाचा नियम २ रा.— अंश कायम ठेवून छेद गुणला, किंवा छेद कायम ठेवून अंश भागला तर अपूर्णाक भागला जाईल.

ह्याच दोन कृति, वरील रीतींत सांगितल्या आहेत, ह्यणून त्या शुद्ध आहेत.

उपपत्ति २ री.— ही चवथ्या प्रकाराच्या २ व्या उपपत्तीच्या आधारें विद्यार्थीनीं सांगावी.

उ. २ रें. $\frac{6}{2} \div 6 = \frac{6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$; उ. ४ थें. $\frac{6}{2} \div 2 = \frac{6 \div 2}{2} = \frac{3}{2}$.

उ. ३ रें. $\frac{6}{2} \div 4 = \frac{6}{2 \times 4} = \frac{6}{8}$; उ. ५ वें. $\frac{6}{2} \div 4 = \frac{6 \div 2}{4} = \frac{3}{4}$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. घ.

१. $\frac{3}{2}$ ह्यांस ९, १२, १८, २५ ह्यांनीं गुण व ५, ७, ८, १२ ह्यांनीं भाग.

२. $\frac{3}{4}$ ह्यांस ७, ८, ९, १६ ह्यांनीं गुण व ५, ८, १२, २५ ह्यांनीं भाग.

३. $\frac{३२}{३}$ ह्यांस २, ३, ४, ५, ७ ह्यांनीं गुण व ६, ९ ह्यांनीं भाग.

४. $\frac{३२}{३}$ ह्यांस ७, ८, ९, १०, ११ ह्यांनीं भाग व ३, ४ ह्यांनीं गुण.

प्रकार सहावा. अपूर्णांकाला नेमलेल्या छेदाचें किंवा अंशाचें रूप देण्याचें.

रीति.— अंश व छेद ह्या दोहोंस एकाच संख्येनें गुणिलें किंवा भागिलें तर त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाहीं. ह्या नियमाचे आधारे नेमलेल्या स्थलीं नेमलेला अंक आणावा.

उदा.— $\frac{५}{७}$ ह्या अपूर्णांकाला छेद १४ येईल असें रूप दे, आणि $\frac{३६}{४८}$ च्या वरोवरीचा व १८ ह्या अंशाचा अपूर्णांक उत्पन्न कर.

नेमलेला छेद १४ हा ७ चे २ पट आहे, आणि अंश १८ हा ३६ चा २ रा हिस्सा आहे. ह्मणून रीतीप्रमाणें.

$$\frac{५}{७} = \frac{५ \times २}{७ \times २} = \frac{१०}{१४}; \quad \frac{३६}{४८} = \frac{३६ \div २}{४८ \div २} = \frac{१८}{२४}$$

उपपत्ति.— इष्ट संख्येनें अंश गुणला, ह्मणजे अपूर्णांकाची तितकीच पट होते (प्र. ४ री. १). नंतर, इष्ट संख्येनें छेद गुणला ह्मणजे त्या पटीचा तितक्यावाच हिस्सा होतो (प्र. ५ री. १). अपूर्णांकाची कांहीं पट करून त्या पटीचा तितक्यावाच हिस्सा काढिला, तर ह्या विरुद्ध कृत्यांनीं मूळचाच अपूर्णांक आला पाहिजे हें उघड आहे. अशाच रीतीनें प्रथम अंश भागून मग त्याच भाजकानें छेद भागिला असतां अपूर्णांकाचा प्रथम हिस्सा होऊन नंतर त्या हिश्याची तितकीच पट होते, ह्मणून ह्याही विरुद्ध कृत्यांनीं अपूर्णांकाची किंमत पूर्ववत् राहते हें सिद्ध आहे. ह्यावरून अपूर्णांकाचे अंशछेदास एकाच संख्येनें गुणिलें अगर भागिलें, तर त्याची किंमत बदलणार नाहीं हें उघड आहे.

उ. ३ रें. $\frac{७}{१२}$, $\frac{९}{१६}$ व $\frac{८}{२७}$ ह्या अपूर्णांकांना ४३२ हा छेद आणा.

आतां $४३२ \div १२ = ३६$ ह्मणून $\frac{७}{१२} = \frac{७ \times ३६}{१२ \times ३६} = \frac{२५२}{४३२};$

तसेंच $४३२ \div १६ = २७$,, $\frac{९}{१६} = \frac{९ \times २७}{१६ \times २७} = \frac{२४३}{४३२};$

व. $४३२ \div २७ = १६$,, $\frac{८}{२७} = \frac{८ \times १६}{२७ \times १६} = \frac{१२८}{४३२}.$

उ. ४ थें. $३\frac{७}{८}$ ची ४ पट आणि $\frac{३५}{६४}$ चा ७ वा हिस्सा ह्यांच्या किंमती काढा.

$$३\frac{७}{८} \times ४ = \frac{३१}{८} \times ४ = \frac{३१}{२} = १५\frac{१}{२}; \frac{३५}{६४} \div ७ = \frac{५}{६४}$$

अभ्यासाकरिता उदाहरणे. उ.

१. $\frac{५}{६}$, $\frac{११}{१२}$, व $\frac{१३}{१४}$ ह्या अपूर्णाकांना ८४ छेद येईल अशी त्यांच्या बरोवरीचीं रूपें द्या. (प्रकार १० सूचना २ री पहा.)

२. $\frac{७}{१३}$, $\frac{१६}{२५}$, व $\frac{४९}{६५}$ ह्या अपूर्णाकांचा असा रूपभेद करा कीं, त्यांना ३२५ हा साधारण छेद यावा.

३. $\frac{१४}{१७}$, $\frac{१८}{२५}$, $\frac{२१}{३२}$, व $\frac{२७}{३५}$ ह्यांना ७५६ हा साधारण अंश येईल असे त्यांच्या बरोवरीचे अपूर्णाक उत्पन्न करा. (प्रकार १० सूचना ३ री पहा.)

४. $\frac{११२}{११}$, $\frac{४२५}{३५७}$, व $\frac{३३४१}{५१४०}$ ह्यांना अनुक्रमें १३, २१, व २० हे छेद येतील अशीं रूपें द्या.

५. $१७\frac{२}{३}$, $२५\frac{४}{६}$, व $१३\frac{५}{६}$ ह्यांना साधारण छेद १८ येईल अशीं विषम अपूर्णाकांचीं रूपें द्या.

६. $४१\frac{७}{८}$, $२३\frac{११}{१२}$, $७\frac{१५}{१६}$, व $९\frac{२}{३}$ ह्या सर्वांना २४० छेद येईल अशीं भागजाति अपूर्णाकांचीं रूपें द्या.

पुढील अपूर्णाकांच्या किंमती काढा.

$$७. \frac{१७}{२४} \times ८; \frac{१२}{१३} \times १३; \frac{८}{११} \times १२; ५\frac{१३}{३५} \times ७; ९\frac{८}{१७} \times १७; ६\frac{४}{५} \times ११.$$

$$८. \frac{४५}{४९} \div ९; \frac{१५}{१९} \div ७; \frac{११७}{१२०} \div १३; \frac{१४३}{२००} \div ११; ७\frac{६}{७} \div १२; ९\frac{१२}{१७} \div १५.$$

प्रकार सातवा. अपूर्णाकांस संक्षेपरूपें द्यावयाचा.

रीति १ ली.— अपूर्णाकाचा अंश व छेद ह्यांस जो साधारण भाजक असेल त्यानें भागावें. जो नवा अपूर्णाक येईल त्याचे अंश व छेद ह्यांस पुन्हा साधारण भाजकानें भागावें. ह्याप्रमाणें साधारण भाजक आढळेनासा होई तोंपर्यंत भागीत जावें ह्मणजे अपूर्णाकाला संक्षेपरूप येतें.

उपपत्ति.— अंश व छेद ह्या दोहींस एकाच संख्येनें भागलें

असतां त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही, हें सहावे प्रकारावरून लक्षांत आलेच असेल. ह्मणून वर सांगितलेल्या रीतीप्रमाणें केले ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णांकाची किंमत न बदलतां त्याला अतिसंक्षेपरूपही देतां येतें.

उ. $\frac{२७०}{३७५}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.

$$\frac{२७०}{३७५} = \frac{२७० \div ५}{३७५ \div ५} = \frac{५४}{७५} = \frac{५४ \div ३}{७५ \div ३} = \frac{१८}{२५} \text{ हें उत्तर.}$$

रीति २ री.—अंश व छेद ह्यांचा दृढभाजक (साधारण अवयवांचा गुणाकार) काढून त्यानें ते भागून एकदम अतिसंक्षेपरूप द्यावें.

ह्या रीतीनें कृत्य फार लांब पडतें, ह्मणून लोक दृढभाजक काढण्याच्या खटपटींत बहुधा पडतु नाहींत. परंतु एकाद्या अपूर्णांकास अतिसंक्षेपरूपच द्यावयाचें असलें ह्मणजे, तेथें दृढभाजकाचाच उपयोग करितात. उदाहरण $\frac{२५९१}{४१८१}$ ह्यांचे अंश व छेद ह्यांस ११३ ह्यांनीं भागून $\frac{२३}{३७}$ हें अतिसंक्षेपरूप येतें, परंतु ही भाजक संख्या दृढभाजक काढल्यावांचून समजणें कठीण ह्मणून अशा ठिकाणीं दृढभाजकच काढावा लागतो.

उ. २ रें. $\frac{४११७}{६४८७}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.

आतां ४११७ आणि ६४८७ ह्यांचा दृढभाजक १७९ आहे. ह्मणून $\frac{४११७}{६४८७} = \frac{२३}{३७}$ हें उत्तर.

उ. ३ रें. $\frac{१३५३६}{१७४८४}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.

—अंश व छेद ह्यांचा दृढभाजक ५६४ आहे. ह्मणून $\frac{१३५३६}{१७४८४} = \frac{२४}{३१}$ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. च.

पुढील अपूर्णांकांस संक्षेपरूपें दे.

१.	$\frac{३२४}{७२०}$;	$\frac{७२०}{८५६}$;	$\frac{३२४}{३९२}$;	$\frac{१५८४}{५२४०}$.
२.	$\frac{१२९६}{१६२०}$;	$\frac{३४५२}{२१७८}$;	$\frac{४२५}{१२१०}$;	$\frac{१२९६}{१७२८}$.
३.	$\frac{१८७२}{२०१६}$;	$\frac{९९०}{१२३५}$;	$\frac{३०००}{३३७५}$;	$\frac{२५२२}{१४५६}$.
४.	$\frac{१४८५}{२१६०}$;	$\frac{८६४}{३०७२}$;	$\frac{३३००}{४२३५}$;	$\frac{५९३०}{८११८}$.
५.	$\frac{५५४४}{६५५२}$;	$\frac{७०४०}{७३९२}$;	$\frac{११३८५}{१६३३५}$;	$\frac{२२१७६}{२३३२८}$.

पुढील अपूर्णाकांस अतिसंक्षेपरूपें दे.

६.	$\frac{३२१}{७४९}$;	$\frac{५१०}{११२२}$;	$\frac{२९९}{५२९}$.
७.	$\frac{१४०७}{४३३२}$;	$\frac{१२०५}{३१७५}$;	$\frac{८२५१}{१४७१८}$;
८.	$\frac{६५०९}{७८८५}$;	$\frac{१५८२}{२२७०}$;	$\frac{१७१५}{२६१५}$.
९.	$\frac{३५७५}{४७१९}$;	$\frac{१२६१}{४४२३२}$;	$\frac{१०७५३}{२०४०५}$.

प्रकार आठवा. प्रभागजाति अपूर्णाकांस भागजाति अपूर्णाकांचें रूप द्यावयाचा.

रीति.— सर्व अंशांचा गुणाकार अंशस्थलीं लिहावा, आणि छेदांचा गुणाकार छेदस्थलीं लिहावा, हणजे इच्छिलें रूप येईल.

उ. १. लें.— $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{६}$ ह्या प्रभागजाति अपूर्णाकांस-भागजाति अपूर्णाकांचें रूप दे.

$$\frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६} = \frac{८}{९} \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.— $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{६}$ घ्यावयाचे हणजे $\frac{२}{३}$ ह्यांची $\frac{५}{६}$ पट घ्यावयाची, हणजे $\frac{२}{३}$ ह्यांच्या ४ पटीचा ५ वा हिस्सा घ्यावयाचा. आतां, चवथे प्रकाराप्रमाणें, जितकी पट करायाची तितक्यांनीं अंशास गुणावें असें आहे, आणि पांचवे प्रकाराप्रमाणें जितक्यावा हिस्सा घ्यावयाचा तितके पट छेद वाढवावा असें आहे, हणून वरची रीति अंशांनीं अंश गुणावे आणि छेदांनीं छेद गुणावे अशी निघाली. अथवा $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{६}$ याचा अर्थ $\frac{२}{३}$ चे पंचमांश ४ असा होतो. हणजे $\frac{२}{३}$ ह्या अपूर्ण एकला ५ नीं भागावें आणि भागाकाराची ४ पट करावी असा होतो. हीच कृति वरील रीतींत सांगितली आहे.

सूचना १. ली.— चा, चे यांनीं जोडलेल्या अवयवांत भागानुबंधपूर्णांक अगर नुसते पूर्णांक असले, तर त्यांस प्रथम विषम अपूर्णाकांचीं रूपें द्यावीं, आणि मग वरील रीति लावावी.

उ. २. रें. $\frac{२३}{४}$ चे ५ चे $\frac{३१}{२}$. ह्या प्रभागजाति अपूर्णाकांस भागजाति अपूर्णाकांचें रूप दे.

$$\begin{aligned} \text{सू. प्र. } \frac{२३}{४} \text{ चे } ५ \text{ चे } \frac{३१}{२} &= \frac{११}{४} \text{ चे } \frac{५}{१} \text{ चे } \frac{७}{२} = \frac{११ \times ५ \times ७}{४ \times १ \times २} \\ &= \frac{३८५}{२} = ४८\frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

सूचना २ री.— प्रभागजाति अपूर्णांकांत कोणताही अंश व कोणताही छेद ह्यांस संक्षेप गेल्यास त्यावा ह्यणजे अतिसंक्षेप-रूप येईल.

उ. ३ रें: $\frac{3}{8}$ चे $\frac{5}{9}$ चे $\frac{26}{9}$. ह्यास भागजातीचें रूप द्या.

सू. प्र. $\frac{3}{8}$ चे $\frac{5}{9}$ चे $\frac{26}{9}$ = $\frac{3}{9}$ चा $\frac{3}{9}$ चे $\frac{3}{9}$.
 $= \frac{3 \times 9 \times 3}{9 \times 9 \times 9} = \frac{81}{729} = \frac{1}{9}$ हें उत्तर.

उ. ४ थें. २॥ चा १० चे ४८ ह्या प्रभागजाति अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप दे.

हा प्रभागजाति व्यवहारी अपूर्णांकरूपानें लिहितां

$\frac{2}{9}$ चा $\frac{10}{8}$ चे $\frac{48}{9}$ = $\frac{2 \times 10 \times 48}{8 \times 8 \times 9}$
 $= \frac{960}{648} = 2\frac{40}{81}$ हें उत्तर.

टीप १ ली.— $\frac{2}{9}$ चे $\frac{10}{8}$ चा अर्थ $\frac{2}{9}$ ची $\frac{10}{8}$ पट असा होतो. कोणत्याही प्रभागजातीचा असाच अर्थ व्हावयाचा. ह्यावरून प्रभागजातीचा एक अवयव परिमाण किंवा गुण्य दाखवितो, दुसरा अवयव संख्या किंवा गुणक दाखवितो, आणि चा, चे, हे वर्ण \times ह्या गुणन चिन्हाचें कार्य करितात, असें लक्षांत पाहिजे.

टीप २ री.— परिमाणपरिमाणांचा गुणाकार संभवत नाहीं, ह्यावरून प्रभागजातीमध्ये एकच अवयव परिमाणवाचक संभवेल. अर्थात् वरच्या चवथ्या उदाहरणांत २॥ हे रूपये असले तर १० व ४८ हे भावसंख्या दाखविणारे असले पाहिजेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. छ.

पुढील प्रभागजाति अपूर्णांकांस भागजाति अपूर्णांकांचीं रूपें दे.

१. $\frac{3}{8}$ चे $\frac{5}{9}$ चे ४; $\frac{3}{8}$ चे $\frac{5}{9}$ चे $\frac{63}{8}$ चे $\frac{5}{9}$ चे ३.
२. $\frac{2}{9}$ चा $\frac{10}{8}$ चे $2\frac{1}{2}$; $\frac{2}{9}$ चे $\frac{10}{8}$ चे $\frac{5}{4}$; $\frac{2}{9}$ चे $2\frac{10}{9}$ चे $5\frac{2}{9}$.
३. $\frac{2}{9}$ चे $\frac{5}{9}$ चे $\frac{10}{9}$; $\frac{2}{9}$ चे $\frac{5}{9}$ चे $3\frac{1}{9}$; $\frac{2}{9}$ चे $3\frac{10}{9}$ चे १०.
४. $2\frac{2}{9}$ चे $\frac{10}{8}$ चे $6\frac{1}{9}$; $\frac{3}{8}$ चे $\frac{5}{9}$ चे $6\frac{1}{9}$; $3\frac{3}{9}$ चे $1\frac{5}{9}$ चे $3\frac{5}{9}$.
५. $\frac{6}{9}$ चे $1\frac{1}{9}$ चे ९ चे $6\frac{1}{9}$; $\frac{9}{9}$ चे $2\frac{2}{9}$ चा $1\frac{1}{9}$ चे $1\frac{1}{9}$.
६. $\frac{3}{8}$ चे $2\frac{10}{9}$ चे $\frac{5}{4}$ चे ७; $\frac{3}{8}$ चे $6\frac{1}{9}$ चे $1\frac{3}{8}$ चे $2\frac{6}{9}$.

७. $\frac{3}{9}$ चे $9\frac{2}{3}$ चे $5\frac{2}{3}$ चा $\frac{9}{8}$; $9\frac{2}{3}$ चे $2\frac{1}{3}$ चे $3\frac{3}{8}$ चे $4\frac{5}{8}$.
 ८. $3\frac{5}{8}$ चे $2\frac{9}{8}$ चे $\frac{3}{8}$ चे $\frac{9}{8}$; $\frac{9}{9}$ चे $2\frac{9}{2}$ चे $\frac{3}{6}$ चे $10\frac{1}{2}$.
 ९. २॥ चे ३॥॥ चे $2\frac{3}{4}$ चे ७; ५॥ चे ३॥- चे $2\frac{3}{4}$ चे ७.
 १०. $9\frac{3}{4}$ चे 6 चे 1 चे ५; ॥०-चा 6 -चा 1 -चा 6 -
 ११. 561 चे ३ चे ७॥; 6 -चा 6 -चा 6 -चे ५॥.

प्रकार नववा. मिश्र अपूर्णाकांस भागजाति अपूर्णाकांचें रूप द्यावयाचा.

रीति.— अंशाचे अंश आणि छेदाचे छेद यांचा गुणाकार अंशस्थानी लिहावा, आणि अंशाचे छेद आणि छेदाचे अंश यांचा गुणाकार छेदस्थानी लिहावा, ह्मणजे मिश्र अपूर्णाकांस भागजाति अपूर्णाकांचें रूप येतें. जसें.—

उदा. १ लें. $\frac{2\frac{3}{4}}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15} = \frac{90}{15 \times 2} = \frac{45}{2}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.— या उदाहरणाचा अर्थ $\frac{2}{3}$ ह्यांस $\frac{4}{5}$ ह्यांनीं भागावयाचें असा आहे. आतां $\frac{4}{5}$ चे ५ पट ४ आहेत ह्यावरून हें स्पष्ट आहे कीं $\frac{2}{3}$ ह्यांस ४ च्या पंचमांशांनीं भागण्याबद्दल नुसत्या ४ नींच जर भागलें तर भाजक ५ ह्या छेदाइतके पट मोठा घेतला जाईल ह्मणून भागाकार यावा त्याच्या पांचव्या हिश्याइतका लहान येईल (भा. प्र. २) ह्मणून पहिल्यानेंच $\frac{2}{3}$ ह्यांची ५ पट केली आणि नंतर त्यास ४ नीं भागलें ह्मणजे अपूर्णाकाचे किंमतींत फरक पडणार नाही.

सूचना.— सातवे प्रकारावरून असेही लक्षांत येईल कीं मिश्र अपूर्णाकांचे अंश व छेद यांत अंशाअंशांत व छेदाछेदांत संक्षेप गेला असतां बेलाशक द्यावा.

उदा. २ रें. $\frac{2\frac{5}{6}}{7} = \frac{2 \times 5}{6 \times 7} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21} = \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$.

उदा. ३ रें. $\frac{3\frac{5}{8}}{4} = \frac{3 \times 5}{8 \times 4} = \frac{15}{32} = \frac{15 \times 3}{32 \times 3} = \frac{45}{96} = 2\frac{9}{32}$.

उदा. ४ थें. $\frac{2\frac{6}{10}}{20\frac{9}{5}} = \frac{2 \times 6}{10 \times 9} = \frac{12}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} = \frac{2 \times 2}{15 \times 2} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

प्रकार दाहावा. अपूर्णांकांस समच्छेदरूपें देण्याचा, ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णांकांची परिमाणें सारखां करण्याचा.

रीति.— अतिसंक्षेपरूपी अपूर्णांकांस लघुतम समच्छेदरूपें देणें असलीं तर त्या सर्वांच्या छेदांचा ल. सा. भा. अवयव-रूपांत काढावा, त्या अवयवांतून प्रत्येकाच्या छेदाचे अवयव वगळून बाकी अवयव ज्याच्या त्याच्या अंशछेदांना गुणक द्यावे, ह्मणजे सर्वांच्या छेदस्थळीं तो ल. सा. भा. येऊन ते छेद समान होतील.

उदा. $\frac{३}{८}, \frac{११}{१२}, \frac{८}{१५}, व \frac{१७}{२१}$ ह्यांना लघुतम समच्छेदरूपें दे.
छेद.

$४ \times \frac{३}{८} \frac{१२}{१२} \frac{१५}{१५} \frac{२१}{२१}; \therefore$ छे. ल. सा. भा. = ४.३.२.५.७

ह्यांतून ८ चे अवयव ४.२ हे वगळतां ३.५.७ = १०५ हा पहिल्या अपूर्णांकाच्या अंशछेदांना गुणक आला. ह्याप्रमाणें दुसऱ्याच्या अंशछेदांचा गुणक २.५.७ = ७० आला, तिसऱ्याच्यांचा ४.२.७ = ५६ आला, आणि चवथ्यांच्यांचा ४.२.५ = ४० आला ह्मणून रूपांतर प्रकार ६ प्रमाणें.

$$\begin{aligned} \frac{३}{८} &= \frac{३}{८} \times \frac{१०५}{१०५} = \frac{३१५}{८४०}; \\ \frac{११}{१२} &= \frac{११}{१२} \times \frac{७०}{७०} = \frac{७७०}{८४०}; \\ \frac{८}{१५} &= \frac{८}{१५} \times \frac{५६}{५६} = \frac{४४८}{८४०}; \\ \frac{१७}{२१} &= \frac{१७}{२१} \times \frac{४०}{४०} = \frac{६८०}{८४०}. \end{aligned}$$

उपपत्ति.— दिलेल्या अपूर्णांकांस लघुतम समच्छेदरूपें देणें, ह्याचा अर्थ त्या अपूर्णांकांच्या किंमती पूर्ववत् राखून व त्यांचे छेद राखवतील तितके लहान राखून सम (एकसारखे) करणें, असा आहे. ह्मणजे ते अपूर्णांक लघुतम सम (साधारण) छेदाचे करणें असा आहे. दिलेले अपूर्णांक हे वरच्याप्रमाणें अतिसंक्षेपरूपी असले ह्मणजे त्यांच्या अंशछेदांना एकाच संख्येनें भागतां येत नाहीं, गुणतां मात्र येतें.

अपूर्णांकांचा अंश व छेद ह्या दोहोंस एकाच संख्येनें गुणलें,

तर त्या अपूर्णाकाची किंमत न बदलतां त्याचा छेद बदलतो. ह्यावरून ह्याच रीतीनें वेगळाल्या अपूर्णाकांच्या अंशच्छेदांस वेगळाले गुणक देऊन, त्यांना मूळच्याच किंमतींचीं लघुतम समच्छेदरूपें देतां येतील हें उघड आहे. ह्या रूपांतील लघुतम समच्छेद हा प्रत्येकाच्या छेदाची लघुतमपट असावयाचा, त्या अर्थी तो सर्वांच्या छेदांचा ल.सा.भा. असला पाहिजे. ह्मणून दिलेल्या अपूर्णाकांच्या छेदांचा ल.सा.भा. काढण्यास वरील रीतींत सांगितलें आहे.

दुसरें, ह्या ल.सा.भा.च्या अवयवांतून एका अपूर्णाकाच्या छेदाचे अवयव वजा केले ह्मणजे जे अवयव बाकी राहतात, ते त्या छेदाच्या कितीपट हा ल.सा.भा. आहे हें दाखवितात. ह्मणून ह्या अवयवांच्या संख्येनें त्या अपूर्णाकाचे अंशच्छेद गुणले असतां त्याची किंमत पूर्ववत् राहून, त्याच्या छेदस्थळीं हा ल.सा.भा. येईल. हीच कृति दिलेल्या प्रत्येक अपूर्णाकाशीं करून त्यांचे छेदस्थळीं हाच ल.सा.भा. आणण्यास वरील रीतींत सांगितलें आहे, ह्मणून ती शुद्ध आहे.

तिसरें, उदाहरणांतील अपूर्णाक जर अतिसंक्षेपरूप दिलेले नसले तर त्यांच्या अंशच्छेदांतले जे साधारण अवयव ते छेदांच्या ल.सा.भा.च्यांत राहतील, ह्यामुळे त्यांना लघुतम समच्छेदरूपें येणार नाहींत, नुसतीं समच्छेदरूपें येतील. ह्मणजे त्यांच्या छेदस्थळीं त्यांच्या अतिसंक्षेपरूपांच्या लघुतम समच्छेदाची त्या साधारण अवयवाइतकी पट येईल. उदाहरणार्थ $\frac{4}{9}$ व $\frac{9}{28}$ हे अपूर्णाक, आणि $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{8}$ हीं त्यांचीं अतिसंक्षेपरूपें, ह्यांना वरील रीतीनें समच्छेदरूपें देऊन, त्यांना येणारे छेद तपासून पहा. असा प्रकार हरएक उदाहरणांत घडावयाचा, ह्मणून लघुतम समच्छेदरूपें देण्याला अतिसंक्षेपरूपी अपूर्णाक घ्यावे असें वरील रीतींत सुचविलें आहे.

सूचना २ ली.— पहिल्या अपूर्णाकाला छेद येईल तोच पुढील अपूर्णाकांना मांडीत जावा, ह्मणजे बरेच गुणाकार करणें टळतील.

सूचना २ री.— अपूर्णांकांचे छेद सारखे झाले हणजे एक छेद हीं अपूर्ण परिमाणें किंवा अंश एकसारखे होतात, हणून ज्याची अंशसंख्या मोठी तो अपूर्ण राशि मोठा, व ज्याची अंशसंख्या लहान तो अपूर्ण राशि लहान, असा अंशांच्या संख्यांवरून अपूर्णांकांच्या राशींचा लहानमोठेपणा कळतो. वरील अपूर्णांक हे प्रथम लहान व पुढें मोठा असे मांडले तर

$$\frac{३१५}{८४०}, \frac{४४८}{८४०}, \frac{६८०}{८४०}, \text{ व } \frac{७७०}{८४०};$$

$$\text{हणजे } \frac{३}{८}, \frac{८}{१५}, \frac{१७}{२१}, \text{ व } \frac{११}{१२};$$

असा त्यांचा क्रम येतो. ह्यावरून $\frac{३}{८}$ हा सर्वांत लहान, व $\frac{११}{१२}$ हा सर्वांत मोठा, असे ठरते.

सूचना ३ री.— आतां $\frac{३}{८}$ व $\frac{३}{८}$ हे समान अंशांचे अपूर्णांक पहा. ह्या दोहोंच्या संख्या समान आहेत तरी पहिल्याच्या द्वितीयांश ह्या परिमाणापेक्षा दुसऱ्याचे चतुर्थांश हें परिमाण लहान आहे, हणून पहिला मोठा व दुसरा लहान आहे. ह्यावरून अपूर्णांकांचे अंश सारखे केले तर ज्याचा छेद लहान तो अपूर्णांक मोठा, व ज्याचा छेद मोठा तो अपूर्णांक लहान, ह्या धोरणानें तेही क्रमानें मांडतां येतील.

रीति २ री.— प्रत्येक अपूर्णांकांच्या अंशछेदांना त्याखेरीज अपूर्णांकांच्या छेदांनीं गुणावें, हणजे सर्वांना समच्छेदरूपें येतील.

उदा. $\frac{३}{८}, \frac{४}{५}, \text{ व } \frac{६}{७}$, ह्यांना समच्छेदरूप देणें.

ह्यांना सर्वांच्या छेदांचा गुणाकार हा साधारण छेद आणण्याचें ठरवून, प्रत्येकाच्या अंशछेदांना इतरांच्या छेदांचा गुणक दिला, तर रूपांतर प्रकार ६ प्रमाणें असें येतें कीं,—

$$\frac{३}{८} = \frac{३}{८} \times \frac{३५}{३५} = \frac{७०}{२८०};$$

$$\frac{४}{५} = \frac{४}{५} \times \frac{२१}{२१} = \frac{८४}{१०५};$$

$$\text{व } \frac{६}{७} = \frac{६}{७} \times \frac{१५}{१५} = \frac{९०}{१०५}.$$

सूचना.— दिलेल्या अपूर्णांकांच्या छेदांना साधारण अवयव नसला तरच ह्या रीतीनें त्यांना ल. स.रूपें येतील, पण त्यांना साधारण अवयव असला तर त्या अपूर्णांकांना नुसतीं स-

सच्छेदरूपें येतील. म्हणजे छेदाच्या ल. सा. भाज्याची पट ही सर्वांच्या छेदस्थळीं येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ज.

पुढील अपूर्णाकांस समच्छेदरूपें द्या.

१. $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{४}{५}$; $\frac{५}{६}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{८}{९}$.
२. $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{५}{६}$; $\frac{६}{७}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{८}{९}$, $\frac{९}{१०}$.
३. $\frac{१}{४}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{६}$, $\frac{४}{७}$; $\frac{५}{८}$, $\frac{६}{९}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{८}{११}$.

पुढील अपूर्णाकांस लघुतम समच्छेदरूपें द्या.

४. $\frac{७}{१६}$, $\frac{११}{१८}$, $\frac{१७}{२४}$, $\frac{१९}{३६}$, $\frac{२५}{४८}$.
५. $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{९}$, $\frac{१६}{२७}$, $\frac{८}{९}$, $\frac{१६}{२४३}$.
६. $\frac{६}{१०}$, $\frac{३}{१०}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{१७}{३५}$, $\frac{४}{६३}$, $\frac{१५}{२८}$.
७. $\frac{११}{२७}$, $\frac{१७}{२४}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{१५}$, $\frac{२}{९}$, $\frac{३५}{३६}$.
८. $\frac{५}{१०}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{६}{२५}$, $\frac{११}{३०}$, $\frac{१३}{४५}$, $\frac{२६}{६०}$.
९. $\frac{५}{६}$, $\frac{११}{१२}$, $\frac{८}{२७}$, $\frac{९}{३६}$, $\frac{१७}{४०}$.
१०. $\frac{३१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७१}{४}$, $८॥०$, $९८-$.
११. ३१० , $५८-$, $\frac{५}{६}$, $\frac{३१}{४}$; $६८=$, $२१-$.
१२. $२\frac{३}{६}$, $३\frac{८}{१५}$, $२\frac{१}{४}$, $७॥$, $५१=$, $४\frac{४}{५}$.
१३. अपूर्णाक मोठा कोणता $\frac{१५}{१९}$ का $\frac{१५+८}{१९+८}$?
व $\frac{१५}{१९}$ का $\frac{१५-८}{१९-८}$?

१४. पुढील संख्या मोठेपणाचे क्रमानें मांडा.

$$\frac{८}{१७}, \frac{९}{२५}, \text{ व } \frac{८+९}{१७+२५}; \frac{१३}{१४}, \frac{१५}{१६} \text{ व } \frac{१३+१५}{१४+१६};$$

$$\frac{५}{६}, \frac{६}{७}, \frac{७}{८}, \frac{९}{१०}, \text{ व } \frac{५+६+७+९}{६+७+८+१०}.$$

१५. पुढच्या संख्यांतील सर्वांत लहान व सर्वांत मोठी ह्या संख्या सांगा.

$$\frac{३}{७}, \frac{५}{१३}, \frac{७}{१६}, \frac{९}{२०}; \frac{१९}{१८}, \frac{१५}{१४}, \frac{२९}{२७}, \frac{३७}{३५};$$

$$\frac{१०१}{१३}, \frac{७१३}{१७}, \frac{७९}{११}, \frac{१०२१}{१४३}.$$

१६. $\frac{५}{६}$ व $\frac{६}{७}$ ह्यांच्या मधोमध किंमतीचा व ८४ ह्या छे-

दाचा अपूर्णांक काढा; आणि $\frac{२}{५}$ व $\frac{२३}{७२}$ ह्यांच्या मधोमध किंमतीचे सातशेंविसांश किती ते दाखविणारा अपूर्णांक काढा.

१७. $\frac{२७}{८७}$; $\frac{११८}{३४१}$; व $\frac{१४५}{४२८}$ ह्यांपैकी मध्यम किंमतीचा अपूर्णांक कोणता ?

१८. $\frac{२}{५}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{१२}{१२}$, $\frac{२३}{२३}$, ह्या अपूर्णांकांना लघुतम समान अंशांचीं रूपें देऊन तीं मोठेपणाचे क्रमानें जुळा.

व्यवहारी अपूर्णांकांची मिळवणी.

परिमाणांची बेरीज किंवा वजावाकी करितां येण्याला त्या परिमाणांत साम्य असावें लागतें. चार रुपयांत दोन पावले मिळवून त्यांची बेरीज साहा रुपये किंवा साहा पावले हणतां येत नाहीं. चार रुपयांचे १६ पावले करून नंतर त्यांत २ पावले मिळवावे, तेव्हां १८ पावले ही त्यांची बेरीज येते.

व्यवहारी अपूर्णांकांत अंशांची हणजे तुकड्यांची बेरीज किंवा वजावाकी करणें असते. ते तुकडे एका जातीचे व एका मानाचे असले पाहिजेत. एका रुपयाचे ४ तुकडे करून त्यांतून दोन घेतले, आणि ८ तुकडे करून त्यांतून दोन घेतले, तर हे दोन प्रकारचे तुकडे सारख्या मानाचे नाहीत. तुकडे सारख्या मानाचे असण्यास त्यांचे छेद एकसारखे पाहिजेत.

३ सप्तमांश आणि ४ सप्तमांश यांची बेरीज ७ सप्तमांश असें हणतां येईल. परंतु ३ सप्तमांश आणि ४ नवमांश यांची बेरीज ७ कांहीं तरी अंश, या बोलण्यांत कांहीं अर्थ नाही हणून:—

रीति.— दिलेल्या अपूर्णांकांस समच्छेदरूप द्यावें, नंतर अंशांची बेरीज करून ती अंशस्थानी लिहावी, आणि तिच्या खाली समच्छेद लिहावा हणजे ती मिळवणी होते.

उ० १ लें. $\frac{३}{५}$ आणि $\frac{१}{५}$ ह्यांची बेरीज करा.

ह्या उदाहरणांत दिलेले अपूर्णांकाचे छेद सम आहेत. हणून

$$\frac{३}{५} + \frac{१}{५} = \frac{४}{५} \text{ हें उत्तर.}$$

उ० २ रें. $\frac{२}{३}$ + $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{४}{५}$ ह्यांची बेरीज करा.

$$\frac{२}{३} + \frac{३}{४} + \frac{४}{५} = \frac{४०}{६०} + \frac{४५}{६०} + \frac{४८}{६०} = \frac{१३३}{६०} = २\frac{१३}{६०} \text{ हें उत्तर.}$$

सूचना १. ली.— उदाहरणांत कांहीं भागानुबंध पूर्णांक व

कांहीं पूर्णांक असले, तर पूर्णांक व अपूर्णांक ह्यांच्या बेरजा वेगळाल्या करून मग त्या दोन बेरजा एकत्र कराव्या.

$$\begin{aligned}
 \text{उ० ३ रें. } & २\frac{३}{४} + ३\frac{९}{१०} + ५\frac{५}{१२} + ४. \\
 & = २ + ३ + ५ + ४ + \frac{३}{४} + \frac{९}{१०} + \frac{५}{१२} \\
 & = १४ \frac{३६ + ५४ + २५}{६०} \\
 & = १४ + \frac{११५}{६०} = १४ + १\frac{५५}{६०} \\
 & = १५\frac{११}{१२} \text{ हें उत्तर.}
 \end{aligned}$$

सूचना २ री.— उदाहरणांत विषम अपूर्णांक असल्यास त्यांस भागानुबंध पूर्णांकांचें रूप द्यावें; व प्रभागजाति अपूर्णांक असले तर त्यांस भागजाति अपूर्णांकांचें रूप द्यावें, आणि मग समच्छेद करून मिळवणी अथवा वजावाकी करावी.

$$\begin{aligned}
 \text{उ० ४ थें. } & \frac{११३}{८} + \frac{३}{५} \text{ चे } \frac{१०}{२} + २\frac{३}{४} \text{ चे } २\frac{२}{९} \text{ चे } \frac{५}{८} + ५. \\
 & = १४\frac{१}{८} + \frac{३}{५} + २\frac{३}{४} + ५ \\
 & = १४ + ३ + ५ + \frac{१}{८} + \frac{२}{३} + \frac{३}{४} \\
 & = २२ + \frac{३ + १६ + १८}{२४} \\
 & = २२ + १\frac{१३}{२४} \\
 & = २३\frac{१३}{२४} \text{ हें उत्तर.}
 \end{aligned}$$

सूचना ३ री.— उदाहरणांत कांहीं रेघांचे अपूर्णांक असल्यास अवश्य असेल तर त्यांस व्यवहारी अपूर्णांकांचें रूप द्यावें.

$$\begin{aligned}
 \text{उ. ५ वें. } & २॥ + \frac{३}{६} = २\frac{१}{२} + \frac{३}{६} = २ + \frac{१}{२} + \frac{३}{६} \\
 & = २\frac{१३}{१४} \text{ हें उत्तर.}
 \end{aligned}$$

वरील उदाहरणांत अंशांची मिळवणी करून तिच्या खाली समच्छेद लिहित आलों, ह्मणजे परिमाणसंख्यांची मिळवणी करून तिला साधारण परिमाण गुण्य जोडीत आलों. प्रभागजातींतील अपूर्णांक हे संख्या व परिमाण हेच अवयव दाखवित असतात (प्रकार ८ टीप पहा). ह्यास्तव,

सूचना ४ थी.— प्रभागजाति अपूर्णांकांची मिळवणी करणें असून त्यांत साधारण अवयव असला, तर असाधारण अवयवांची मिळवणी करून तिला तो साधारण अवयव गुण्य जोडीतवा.

उ. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{६}$ आणि $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{६}$ ह्यांची मिळवणी करा.

ह्या उदाहरणांत $\frac{२}{३}$ हा अवयव साधारण आहे हाणून,

$$\begin{aligned} \frac{२}{३} \text{ चे } \frac{४}{६} + \frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६} &= \frac{२}{३} \left(\frac{४}{६} + \frac{५}{६} \right) \\ &= \frac{२}{३} \left(\frac{२४}{३६} + \frac{२५}{३६} \right) \\ &= \frac{२}{३} \times \frac{४९}{३६} = \frac{९८}{५४} \\ &= १ \frac{२}{२७} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणे. झ.

पुढील अपूर्णांक मिळवा.

१. $\frac{४}{६} + \frac{२}{६} + \frac{६}{६} + \frac{५}{६} + \frac{३}{६}$; $\frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{१}{६}, \frac{१}{३}, \frac{१}{२}$.

२. $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{७}{६} + \frac{५}{१२}$; $\frac{१}{२} + \frac{३}{४} + \frac{५}{६} + \frac{७}{१२}$.

३. $\frac{१३}{१२} + \frac{१८}{१२} + \frac{११}{१०} + \frac{१३}{१०}$; $\frac{२}{३} + \frac{१}{६} + \frac{५}{६} + \frac{११}{१२}$.

४. $\frac{७}{६} + \frac{७}{१२} + \frac{७}{१६} + \frac{७}{१८}$; $\frac{३}{४} + \frac{१३}{१२} + \frac{१}{६} + \frac{४}{९}$.

पुढील बेरजा अपूर्णांक व पूर्णांक हे वेगळाले मिळवून करा.

५. $३\frac{१}{४} + \frac{११}{६} + \frac{५}{१२} + \frac{१}{६} + \frac{१७}{१२}$; $२\frac{१}{२} + ३\frac{१}{३} + ४\frac{१}{४} + ५$.

६. $३\frac{३}{६} + २\frac{५}{६} + \frac{७}{१२} + ३\frac{४}{६}$; $२\frac{२}{३} + \frac{३}{६} + ४ + ५\frac{५}{६}$.

७. $१\frac{३}{६} + \frac{१}{६} + \frac{५}{१२} + २\frac{१}{१२}$; $\frac{२}{३} + ११ + \frac{५}{४} + २\frac{७}{४} + \frac{१}{६}$.

८. $\frac{११}{१२} + \frac{१४}{१२} + \frac{२६}{१२} + \frac{३३}{१२}$; $३\frac{१}{२} + २\frac{५}{१२} + \frac{३३}{६} + १\frac{११}{१२}$.

९. $१७\frac{१}{१२} + \frac{३}{६} + २\frac{४}{१२} + १\frac{७}{१२}$; $\frac{२}{३}$ चे $१८ + \frac{२}{६}$ चे $१\frac{१}{१२}$.

१०. $\frac{११}{१२} + १\frac{२}{१२} + \frac{७}{१२} + २\frac{११}{१२} + \frac{१}{१०}$; $१\frac{१५}{१२} + २\frac{३}{१२} + ३\frac{२४}{१२} + ४\frac{३३}{१२}$.

पुढील बेरजा भागानुबंध पूर्णांकांस विषम अपूर्णांकांचीं रूपें देऊन करा.

११. $५\frac{३}{४} + \frac{३}{६}$ चे $७\frac{१}{२} + ८\frac{३}{१०}$; $\frac{२}{३} + ७\frac{२}{१२} + \frac{४}{६}$ चे $\frac{३}{६}$ चे $१०\frac{१}{२}$.

१२. $२\frac{३}{४}$ चे $३\frac{२}{६} + \frac{१११}{१६} + २\frac{४}{६}$ चे $४\frac{१}{६}$ चे $१\frac{३}{६} + ४\frac{२}{३}$ चे $\frac{२}{१२}$ चे $२\frac{१}{६}$ चे $१\frac{३}{६}$.

१३. २१ चे $३११ + ५\frac{१}{२} + ७\frac{३}{६}$ चे $३११ + ५$.

१४. १० चा $८० + ३\frac{३}{४} + ७\frac{१०}{६} + ६$.

१५. $५१ + ३१० + ३\frac{३}{४} + \frac{११}{१६}$.

पुढील बेरजा असाधारण अवयव कंसांत मिळवून करा.

१६. $\frac{५}{६}$ चे $\frac{६}{६}, \frac{५}{६}$ चे $\frac{७}{६},$ व $\frac{५}{६}$ चे $\frac{३}{६}$; $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{६}$ चे $\frac{६}{६},$ व $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{६}$ चे $\frac{४}{६}$.

१७. $५\frac{७}{८}$ चे $\frac{२}{३}$, $५\frac{७}{८}$ चा $\frac{१}{३}$, व $५\frac{७}{८}$ चे $\frac{३}{४}$; $१२\frac{१}{१०}$ चे $\frac{५}{६}$, व $१२\frac{१}{१०}$.
 १८. ५ सकांचे $\frac{३}{४}$, ५ सकांचे $\frac{५}{६}$, व ५ सक; ७ चे $\frac{२}{३}$, ७ चे $\frac{५}{६}$,
 ७ चे $\frac{१}{२}$, व ७.

पुढील उल्लेख सरळ रूपें देऊन सोडवा:

$$१९. १\frac{२}{३} \text{ चे } \frac{१\frac{३}{४} \text{ चे } १\frac{२}{३}}{१\frac{५}{६} \text{ चे } २\frac{२}{३}} + \frac{\frac{४}{५} \text{ चा } \frac{३}{४}}{१\frac{५}{६} \text{ चे } १\frac{४}{५}} + \frac{\frac{४}{५} \text{ चे } \frac{४}{६}}{१\frac{५}{६} \text{ चे } १\frac{४}{५}} + \frac{५}{३८}.$$

$$२०. \frac{२\frac{२}{३} \text{ चा } १\frac{३}{४}}{१\frac{२}{३} \text{ चे } २} + \frac{१\frac{२}{३} \text{ चे } \frac{२}{६}}{\frac{५}{६} \text{ चा } १\frac{१}{२}} + \frac{\frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६}}{\frac{२}{३} \text{ चे } \frac{१}{२}} + \frac{१\frac{३}{४} \text{ चा } १\frac{१}{३}}{३\frac{२}{३} \text{ चे } २\frac{४}{३}}.$$

$$२१. \frac{१\frac{२}{३} \text{ चा } १\frac{२}{९}}{२\frac{६}{९} \text{ चा } १\frac{१}{२}} + \frac{\frac{२}{३} \text{ चे } ५\frac{१}{६}}{\frac{१}{३} \text{ चा } १\frac{३}{६}} + \frac{१\frac{१}{२} \text{ चे } \frac{५}{६}}{\frac{४}{६} \text{ चे } \frac{१}{२}} + \frac{३\frac{३}{४} \text{ चे } ३\frac{१}{३}}{१\frac{१}{४} \text{ चे } १२\frac{४}{३}}.$$

२२. एका मनुष्यानें एका दुकानाचे $\frac{३}{५}$, $\frac{२}{६}$, $\frac{३}{४}$, व $\frac{७}{८}$ असे वेगळाल्या वेळीं घेतले, तर त्या दुकानाचे किती कितवे हिस्से त्यांपाशीं जमले ?

व्यवहारी अपूर्णाकांची वजावाकी.

रीति.— मिळवणींत सांगितल्याप्रमाणें दिलेले अपूर्णाक समच्छेद करावे, आणि मग शोध्य अंशांत शोधक अंश वजा करून वाकी राहिल तिच्या खालीं समच्छेद लिहावा.

सूचना.— मिळवणींत दिलेल्या सूचना येथेही लागू कराव्या.

उ. १ रें. $\frac{५}{६}$ आणि $\frac{१}{३}$ ह्यांची वजावाकी करावयाची, रीती प्र. $\frac{५}{६} - \frac{१}{३} = \frac{३}{६}$ हें उत्तर.

उ. २ रें. $\frac{९}{१०} - \frac{७}{१५} = \frac{२७}{३०} - \frac{१४}{३०} = \frac{१३}{३०}$ हें उत्तर.

उ. ३ रें. $५\frac{५}{६} - २\frac{१}{२} = (५ - २) + (\frac{५}{६} - \frac{१}{२})$
 $= ३ + \frac{५-४}{६} = ३ + \frac{१}{६}$
 $= ३\frac{१}{६}$ हें उत्तर.

उ. ४ रें. $५\frac{३}{६} - २\frac{१}{२} = (५ - २) + (\frac{३}{६} - \frac{१}{२})$
 $= ३ + \frac{३}{६} - \frac{४}{६} = ३ + \frac{३-४}{६}$.

आतां ३ खांतून ४ वजा जात नाहींत म्हणून पूर्णाकांपैकीं एक पूर्णाक म्हणजे $\frac{६}{६}$ अपूर्णाकांत नेले. तेव्हां,

$$३ + \frac{३-४}{६} = २ + \frac{११-४}{६} = २\frac{७}{६} \text{ हें उत्तर.}$$

उ. ५ वें. $६ - ४\frac{३}{७} = २ - \frac{३}{७} = १\frac{४}{७}$.

उ. ६ वें. $\frac{१}{७}$ चे $२\frac{१}{२}$ चे $१\frac{६}{७} - १\frac{३}{७}$ चे $५\frac{१}{२} = ८ - ७\frac{६}{७}$
 $= ७\frac{७}{७} - ७ - \frac{६}{७} = \frac{१}{७}$ हें उत्तर.

उ. ७ वें. $\frac{९१}{२६}$ ह्यांतून $\frac{२४}{२६}$ व $\frac{३९}{२६}$ ह्यांची बेरीज वजा कर.
 $\frac{९१}{२६} - \frac{२४}{२६} - \frac{३९}{२६} = \frac{२८}{२६} = \frac{७}{२४}$ हें उत्तर.

उ. ८ वें.- ओसरीच्या जमीनीपासून तक्तपोशी $९\frac{३}{४}$ फूट उंच आहे; आणि अंगणाची जमीन $२\frac{१}{४}$ फूट खोल आहे, ह्यावरून अंगणाची जमीन व तक्तपोशी ह्यांमध्ये अंतर केवढें आहे?

एथें उंची व खोली ह्या, एकमेकींना नाहींशा करणाऱ्या ह्मणजे विरुद्ध संख्या आहेत. ह्मणून उंची + चिन्हानें दाखविली, तर खोली - चिन्हानें दाखविली पाहिजे. अथवा ओसरीच्या जमीनीची उंची खोली शून्य कल्पून तेथून ह्या विरुद्ध मोजदाती केल्या आहेत, ह्मणून ह्यांचे अर्थ $० + ९\frac{३}{४}$ फूट, व $० - २\frac{१}{४}$ फूट असे होतात. ज्या संख्येपासून अंतर काढावयाचें किंवा मोजावयाचें तिला शोधक हें नांव येतें (वजाबाकीचें लक्षण पहा), ह्मणून उंची ही शोधक ह्मटली तर वजाबाकी प्रकार २ राप्रमाणें, शोधकाचीं चिन्हे बदलल्यानें,

$$(० - २\frac{१}{४} \text{ फू. }) - (० + ९\frac{३}{४} \text{ फू. }) = ० - २\frac{१}{४} \text{ फू.} - ० \\ = - ९\frac{३}{४} \text{ फू.} = - १२ \text{ फूट.}$$

असें येतें. एथें उण्या चिन्हानें खोली दाखविली आहे, व तक्तपोशीची उंची वजा केली आहे, ह्मणून ह्या उत्तराचा अर्थ तक्तपोशीपासून अंगण खोल १२ फूट आहे असा होतो. एथें अंगणाची खोली ही शोधक ह्मटली तर वजाबाकी प्रकार ३ रा सूचना १० ली प्रमाणें,

$$(० + ९\frac{३}{४} \text{ फू. }) - (० - २\frac{१}{४} \text{ फू. }) = ० + ९\frac{३}{४} \text{ फू.} - ० \\ + २\frac{१}{४} \text{ फू.} = १२ \text{ फूट}$$

असें येतें. एथें वगळलेल्या + चिन्हानें उंची दाखविली आहे, आणि अंगणाची खोली वजा केली आहे, ह्मणून ह्या उत्तराचा अर्थ अंगणाच्या जमीनीपासून तक्तपोशी उंच १२ फूट आहे असा होतो. ह्मणून,

सूचना २ री.— धन व ऋण हीं चिन्हें संख्यांच्या ज्या विरुद्ध प्रकारांचीं दर्शक ठरविलेलीं असतील, त्यांच्याच धोरणानें त्यांचे अर्थ लावावे.

सूचना ३ री.— दिलेल्या संख्येंत धन अगर ऋण जी संख्या वजा करणें असेल, अगर जीपासून अंतर शोधणें असेल, तिचें चिन्ह बदलून त्या सर्वांची सचिन्ह मिळवणी करावी, ह्मणजे उत्तर येईल.

मजपाशीं आज ३ हजारांची इस्टेट आहे, माझे २ हजार लोकांकडे येणें आहेत, व मला १ हजार देणें आहेत, मिळून (किंवा एकंदरींत) मी आज ४ हजारांचा मालक आहे. असलीं वाक्यें आपल्या बोलण्यांत वारंवार येतात. त्यांमध्ये मिळून किंवा एकंदरींत ह्या शब्दानें जी मिळवणी दर्शविली जाते तीच मिळवणी वरील सूचनेंत सचिन्ह मिळवणी या शब्दानें दर्शविली आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. व.

पुढील वजावाक्या करा.

१. $\frac{99}{5} - \frac{6}{5}$; $\frac{93}{20} - \frac{7}{20}$; $\frac{6}{95} - \frac{5}{20}$; $\frac{7}{2} - \frac{9}{3}$.
२. $3\frac{3}{8} - 1\frac{9}{8}$; $3\frac{3}{8} - 2\frac{5}{8}$; $5 - 2\frac{6}{6}$; $10\frac{3}{5} - \frac{99}{60}$.
३. $1\frac{4}{25} - \frac{3}{8}$; $9 - 3\frac{4}{25}$; $9\frac{7}{2} - 4\frac{6}{6}$; $5\frac{3}{38} - 2\frac{9}{23}$.
४. $13\frac{2}{65} - 3\frac{3}{95}$; $4\frac{9}{27} - 3\frac{2}{36}$; $3\frac{2}{5} - \frac{69}{923}$; $24\frac{9}{28} - 21\frac{9}{23}$.
५. $1\frac{6}{25} - \frac{4}{6}$; $1\frac{7}{35} - \frac{4}{23}$; $4\frac{3}{5} - \frac{9}{8}\text{चे}\frac{2}{3}$; $\frac{5}{90} - \frac{9}{5}\text{चे}\frac{6}{9}$.
६. $1\frac{2}{3}\text{चे}\frac{2}{5} - 3\frac{9}{96}$; $5\frac{9}{2}\text{चे}\frac{4}{2} - 3\frac{3}{8}\text{चे}\frac{3}{5}$.

पुढील वजावाक्या शोध्याच्या पूर्णांकांतून भर घेण्याच्या युक्तीनें प्रथम करा, आणि मग शोध्यांत व शोधकांत समान हातचे मिळविण्याच्याही युक्तीनें करा.

$$9. \begin{array}{ccccccc} 12\frac{4}{6} & 25\frac{4}{8} & 1\frac{6}{29} & 5\frac{4}{8} & 22\frac{3}{9} & 10\frac{2}{35} & 6\frac{6}{6} \\ \underline{5\frac{6}{6}} & \underline{6\frac{6}{9}} & \underline{12\frac{9}{28}} & \underline{3\frac{9}{3}} & \underline{6\frac{7}{9}} & \underline{6\frac{4}{8}} & \underline{3\frac{9}{6}} \end{array}$$

अंकगणिताच्या पहिल्या भागांत उल्लेख व कंस ह्या प्रकरणांत दिलेल्या नियमांच्या आधारानें पुढच्या उल्लेखांतल्या बेरजा व वजावाक्या करा.

८. $३\frac{१}{४} + ४\frac{२}{५} - ५\frac{१}{२} + १६\frac{५}{८} - ७\frac{११}{४} + १० - १४\frac{५}{६}$.

९. $५\frac{१}{५} - २\frac{५}{६} - ३\frac{३}{१०} + \frac{१३}{२} - १६\frac{३}{४} + ३\frac{१}{३} + ८\frac{१}{२}$.

१०. $५१ - २\frac{५}{३}$; $८\frac{२}{३} - ७० =$; $॥ = -\frac{१३}{४८}$.

११. $५॥$ चे $\frac{२}{३} + \frac{५}{६} - २॥$ चे $\frac{४}{५} + \frac{२}{६} - २॥$.

१२. $३\frac{१}{२} - २\frac{३}{४} + १\frac{३}{५}$ चे $\frac{२}{३}$ चे १०.

१३. $८\frac{३}{४} - ३\frac{१३}{४} + २\frac{७}{२}$ चे $\frac{३}{१४}$ चे $४\frac{४}{५} - (५\frac{११}{२} - २\frac{७}{८})$.

१४. $(\frac{११}{१२} - \frac{५}{६}) + (\frac{४}{५} - \frac{२}{३})$;

$(\frac{११}{१२} + \frac{५}{६}) - (\frac{४}{५} + \frac{२}{३})$; $\frac{११}{१२} + (\frac{५}{६} - \frac{४}{५}) + \frac{२}{३}$.

१५. $६\frac{७}{८}$ चे $२\frac{९}{११} - (६\frac{७}{८} - २\frac{२}{३})$;

$२\frac{२}{३}$ चे $\frac{११}{७५}$ चे $३\frac{३}{४} - \frac{११}{१२} + \frac{१५}{१६}$.

१६. $\frac{७}{८}$ चे $२\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चा $१\frac{३}{४}$ - $\frac{३\frac{१}{२}$ चे $२\frac{३}{४}$

पुढील प्रश्न उल्लेखांच्या रूपांत मांडून त्यांचीं उत्तरे काढा.

१७. $\frac{३}{१६}$, $\frac{५}{२४}$, $\frac{७}{३६}$, व $\frac{११}{५४}$ ह्यांपैकीं महत्तम व लघुतम अपूर्णांकांची बेरीज ही राहिलेल्या अपूर्णांकांच्या वजावाकीपेक्षां किती मोठी आहे ?

१८. $\frac{१७}{८}$, $\frac{९}{१०}$, व $\frac{२२}{१२}$ ह्यांच्या बेरजेत कोणता लघुतम अपूर्णांक मिळवावा हाणजे बेरीज पूर्णांक होईल ?

१९. $२५\frac{३}{४}$ व $१६\frac{२}{५}$ ह्यांच्या बेरजेत $१८\frac{७}{१०}$ व $५\frac{११}{५}$ ह्यांचे अंतर वजा करा.

२०. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{१६}$ चे $६\frac{४}{५}$ हे $\frac{७}{८}$ चे $५\frac{३}{४}$ ह्यांतून वजा करा; आणि $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{१३}$ चे १०८९ हे $\frac{४}{६}$ चे $\frac{२}{१३}$ चे $४१४०॥$ ह्यांतून वजा करा.

२१. $\frac{५}{१२}$, $१\frac{३}{८}$, $\frac{३}{१६}$ व $\frac{१४}{१३}$ ह्यांची बेरीज $४\frac{१}{४}$ ह्यांतून वजा करा.

२२. $३\frac{४}{६} + ९\frac{५}{२} - ५\frac{४}{५}$ ही संख्या $८\frac{७}{१६}$ चे $२\frac{७}{१२}$ ह्या संख्येपेक्षां केवढ्यानें लहान आहे ?

व्यवहारी अपूर्णांकांचा गुणाकार.

गुणणे ह्याचा अर्थ आवृत्तीची मिळवणी उत्पन्न करणे असा आहे, हाणजे गुण्याच्या गुणकाइतक्या आवृत्तीची बेरीज आणणे

असा आहे. उदाहरणार्थ $\frac{२}{७}$ ना $\frac{३}{५}$ नीं गुणणें ह्याचा अर्थ $\frac{२}{७}$ च्या $\frac{३}{५}$ आवृत्तींची मिळवणी उत्पन्न करणें असा होतो. ह्या वरून $\frac{२}{७} \times \frac{३}{५}$ याचा अर्थ $\frac{२}{७}$ चे $\frac{३}{५}$ काढणें असा होतो. $\frac{२}{७}$ चे $\frac{३}{५}$ हें रूप प्रभागजाति अपूर्णाकाचें आहे. ह्या वरून दिलेल्या गुण्यगुणकांचा गुणाकार करणें याचा अर्थ ते गुण्यगुणक जो प्रभागजाति अपूर्णाक दाखवितात, त्याला भागजाति अपूर्णाकाचें रूप देणें असा होतो. ह्यापून ८ व्या प्रकारांत जी रीति दिली आहे तीच येथेंही दिली पाहिजे.

उप० २ री.— $\frac{२}{७}$ या गुण्याला गुणकाची ५ पट जे ३ त्यांनीं गुणलें तर गुणाकार $\frac{६}{७}$ येतो. गुण्य कायम ठेवून गुणक ५ पट घेतला तर गुणाकार ५ पट यावयाचा (गु. प्र. १). अर्थात $\frac{६}{७}$ ह्या ५ पट गुणाकाराला ५ नीं भागून $\frac{६}{३५}$ हा खरा गुणाकार येतो. ह्या कृत्यांत अंशांचा गुणाकार अंशस्थळीं व छेदांचा गुणाकार छेदस्थळीं आला आहे. ह्याच युक्तीनें हरएक गुणाकार यावयाचा ह्यापून—

रीति.— अंशांअंशांचा गुणाकार करून तो अंशस्थानीं लिहावा व छेदांछेदांचा गुणाकार छेदस्थानीं लिहावा.

सूचना.— उदाहरणांत भागानुबंध पूर्णांक किंवा नुसते पूर्णांक असल्यास त्यांचे विषम अपूर्णाक करावे; अंशछेदांस संक्षेप गेल्यास द्यावा, आणि मग गुणाकार करावा.

उ. १ लें. $२\frac{३}{४} \times ३\frac{१}{२} \times १\frac{३}{५}$ चे $\frac{२}{३}$ चे १० हा. गु. करा.

रीतीप्र. $\frac{११}{४} \times \frac{७}{२} \times \frac{८}{५} \times \frac{२}{३} \times \frac{३०}{१} = \frac{११}{१} \times \frac{७}{१} \times \frac{२}{३} \times २$
 $= \frac{३०८}{३} = १०२\frac{२}{३}$ हें उत्तर.

उ. २ रें. $७४\frac{२६}{२७} \times ४३ = (७९ - \frac{१}{२७}) \times ४३$
 $= ७९ \times ४३ - \frac{४३}{२७} = ३२२३\frac{११}{२७}$ हें उत्तर.

उ. ३ रें. $७\frac{१३}{१४} \times ५\frac{४}{९} - (८\frac{२}{३} - ६\frac{३}{४}) \times २\frac{२}{५} + ३\frac{४}{५}$ चा $१\frac{१}{६}$
 $= \frac{३७}{३४} \times \frac{४९}{९} - (\frac{८}{३} - \frac{३}{४}) \times \frac{१२}{५} + \frac{१९}{५} \times \frac{७}{६}$
 $= \frac{२५२}{६} - \frac{२३३}{३२} \times \frac{१२}{५} + \frac{१३३}{३०}$
 $= ४२\frac{१}{६} - ४\frac{३३}{५} + ४\frac{१३}{३०}$
 $= ४२ + \frac{५}{३०} - \frac{१८}{३०} + \frac{१३}{३०}$
 $= ४३$ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ट.

पुढच्या क्रमिक संख्यांचे गुणाकार करा.

१. $\frac{५}{१२}$, $\frac{९}{१६}$ व $२\frac{२}{११}$; $२\frac{१}{१६}$, $\frac{३}{११}$ व $१\frac{७}{२६}$;
 $२\frac{५}{११}$ व $२\frac{१}{५}$ व $३\frac{३}{६}$.

२. $३\frac{३}{५}$, $२\frac{१}{२}$ व १०० ; $१३\frac{३}{३}$, $३\frac{४}{५}$ व $१\frac{७}{२०}$;
 $६\frac{३}{४}$ चे $२\frac{६}{६}$ व २१ .

३. $२\frac{१}{२}$ चे $३\frac{२}{३}$ व $४\frac{३}{४}$ चे $१\frac{१}{६}$; $२\frac{१}{५}$ व $१\frac{५}{६}$ चे
 $१\frac{२}{३}$ चे $\frac{३}{४}$ चे $१\frac{५}{११}$.

४. $\frac{३}{२}$ चे $\frac{७}{१२}$ चे $\frac{३}{५}$ व $\frac{४}{११}$ चे $२\frac{१}{६}$; $१\frac{२}{२}$ चे $\frac{५}{६}$ व
 $\frac{५}{१२}$ चे $२\frac{१}{२}$ चे ८ .

पुढें मांडलेले क्रमिक गुणाकार करा.

५. $\frac{३}{६} \times १\frac{२}{५}$ चे $१२\frac{१}{२} \times २\frac{१}{५}$ चे $\frac{३}{४}$; $\frac{२}{३}$ चे
 $१\frac{१}{६} \times २\frac{२}{५}$ चे $४\frac{३}{६}$ चे $२\frac{२}{५}$.

६. $२॥ \times ३ + २\frac{२}{३}$; $३॥ \times २॥ \times १५०$; $१० = \times १\frac{२}{३}$.

७. ५ चे $\frac{४}{५} \times २॥$; $३\frac{३}{४}$ चे $२॥ \times \frac{१४}{५}$; $१३\frac{३}{४}$ चे $\frac{१४}{५} - ५ =$.

८. $७॥ \equiv$ चे $६॥$ चे $\frac{३}{३} + ३$ चे $\frac{४}{५} - ७॥$ चे $\frac{३}{४} \times \frac{१३}{५}$.

पुढील उल्लेख सोडवा.

९. $१\frac{३}{५} \times २\frac{४}{५} - (\frac{४}{५} - \frac{१}{४}) \times ३\frac{७}{११} - (\frac{४}{५} - \frac{३}{४}) \times ९\frac{३}{५}$.

१०. $\frac{३}{४} \times \frac{५}{६} + (\frac{३}{४} - \frac{१}{६}) \times ३\frac{३}{६} - (\frac{३}{५} + \frac{१}{६}) \times २॥$.

११. $(१९\frac{४}{५} - ३\frac{३}{४})(३\frac{४}{५} - २\frac{३}{६})$; $१९\frac{४}{५} - ३\frac{३}{४} \times ३\frac{४}{५}$
 $- २\frac{३}{६}$; $१९\frac{४}{५} - ३\frac{३}{४} \times (३\frac{४}{५} - २\frac{३}{६})$.

१२. $६\frac{२}{३} \times ५\frac{३}{४} - ४\frac{४}{५} \times २\frac{५}{६} + १\frac{१७}{३०}$;
 $६\frac{२}{३} (५\frac{३}{४} - ४\frac{४}{५}) \times २\frac{५}{६} + \frac{१९}{३०}$.

पुढच्या उदाहरणांतलीं कार्यें उल्लेखरूपानें मांडून त्यांचीं उत्तरें काढा.

१३. $९९\frac{४२३}{४२४}$ ह्यांना ३२४ ह्यांनीं गुणा; $९९\frac{४९४५}{४९४६}$
ह्यांना ९९९ ह्यांनीं गुणा; आणि ४७९ मध्ये $१\frac{९०४}{५}$ मिळवून

त्या मिळवणीच्या ६ गुणिकांची मोजदात काढा. (वर सोडवलेले दुसरे उदाहरण पहा.)

१४. $४९\frac{३}{६}$ ह्यांना $५०\frac{३}{६}$ नीं गुणून त्यांत $२\frac{३}{६}$ मिळवा.

१५. $१\frac{३}{६}$ आणि $\frac{५}{६}$ चा $\frac{३}{६}$ ह्यांच्या बेरजेला $\frac{४}{६}$ आणि $\frac{३}{६}$ ह्यांच्या अंतराच्या पावणेदोन पटीने गुणा.

१६. $११\frac{३}{६}$ ह्यांतून $२\frac{३}{६}$, $३\frac{३}{६}$ व $४\frac{३}{६}$ ह्यांची बेरीज वजा करा; आणि त्या बाकीला $२\frac{३}{६}$ चे $\frac{५}{६}$ चे ६॥ ह्यांनी गुणा.

१७. $३\frac{३}{६}$ व $४\frac{३}{६}$ ह्यांच्या बेरजेला $४\frac{३}{६}$ व $५\frac{३}{६}$ ह्यांची वजावाकी मिळवा, आणि त्या बेरजेला $११\frac{३}{६}$ ह्यांनी गुणा.

व्यवहारी अपूर्णाकांचा भागाकार.

भागाकार करण्याची कृति गुणाकाराच्या उलट आहे. हणून:—
रीति.— भाज्याला भाजकाच्या व्युत्क्रमानें गुणावें, हणजे इच्छिलेला भागाकार येईल.

उदाहरण. $\frac{३}{४}$ ह्यांस $\frac{५}{६}$ ह्यांनी भागा.

$$\frac{३}{४} \div \frac{५}{६} = \frac{३}{४} \times \frac{६}{५} = \frac{३ \times ६}{४ \times ५} = \frac{२३}{२०} = १\frac{३}{२०} \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.— $\frac{३}{४}$ ह्या भाज्याला $\frac{५}{६}$ ह्या भाजकाची ७ पट जे ५ त्यांनी भागलें, तर भागाकार $\frac{३३}{२०}$ येतो. भाज्य कायम ठेवून भाजकाचे जागी त्याची पट घेतली तर भागाकार तितकावा हिस्सा यावयाचा (भा. प्र. २ रें पहा). ह्या प्रत्यक्षप्रमाणाअन्वये वरील भागाकाराची ७ पट जे $\frac{३३}{२०}$ ते खरा भागाकार दाखवतील. $\frac{३३}{२०}$ हे भाजकाच्या व्युत्क्रमानें भाज्य गुणून येतात. ह्या विचारा प्रमाणें अशीच कृति सर्वत्र व्हावयाची हणून वरील रीति खरी आहे.

सूचना.— प्रभागजाति अपूर्णाक भागानुबंध पूर्णाक, किंवा रेघांचे अपूर्णाक हे उदाहरणांत असल्यास, भागाकार करण्यापूर्वी त्यांस भागजाति अपूर्णाकांचीं रूपें द्यावीं.

$$\text{उ. २. रें. } २\frac{३}{४} \div ३\frac{३}{४} = \frac{६}{३} \div \frac{१५}{४} = \frac{६}{३} \times \frac{४}{१५} = \frac{३२}{४५} \text{ हें उ.}$$

$$\text{उ. ३. रें. } २\frac{३}{४} \text{ चे } ३\frac{३}{४} \div ४\frac{३}{४} \text{ चे } \frac{५}{६} \text{ चे } \frac{४}{६}.$$

$$\text{आतां. } २\frac{३}{४} \times ३\frac{३}{४} = १०, \quad ४\frac{३}{४} \times \frac{५}{६} \times \frac{४}{६} = \frac{२}{६}.$$

$$\therefore १० \div \frac{२}{६} = \frac{३०}{१} \times \frac{६}{२} = \frac{५}{१} \times \frac{६}{१} = \frac{३५}{१} = ३५ \text{ हें उत्तर.}$$

उ. ४. थें. $\frac{2 \text{ वे } 6}{2 \text{ वे } 12} = \frac{2}{26} = \frac{2}{9} \times \frac{25}{26} = \frac{50}{26} = 1 \frac{20}{26}$ थें उ.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ठ.

पुढें सांगितलेले भागाकार करा.

१. $2 \div \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$; $\frac{2}{3} \div \frac{2}{5}$; $2 \frac{1}{3} \div 2 \frac{2}{3}$.

२. $1 \frac{2}{3} \div 1 \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$; $1 \frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$.

३. $\frac{6}{7} \div 14$; $5 \text{ वे } \frac{1}{2} \div 6 \text{ वे } \frac{3}{4}$.

४. $4 \frac{1}{2} \text{ वे } \frac{5}{6} \div 5 \frac{2}{3} \text{ वे } 1 \frac{3}{6}$; $209 \div \frac{1}{5} \text{ वे } 20$.

५. $\frac{2}{3} \text{ वे } \frac{1}{6} \div \frac{3}{4} \text{ वे } \frac{1}{2} \text{ वे } 5$; $4 \frac{1}{2} \text{ चा } \frac{1}{2} \div 2 \frac{2}{3} \text{ वे } 6 \frac{4}{9}$.

पुढें मांडलेले भागाकार करा.

६. $\frac{62}{38}$; $\frac{2 \frac{2}{3}}{6}$; $\frac{94}{85}$; $\frac{99}{92}$.

७. $\frac{9 \frac{1}{2}}{2 \frac{2}{3}}$; $\frac{6 \frac{3}{4}}{2 \frac{2}{3}}$; $\frac{6 \frac{3}{4}}{5 \frac{1}{2}}$; $\frac{9 \frac{1}{2}}{6 \frac{4}{5}}$.

८. $\frac{32}{2 \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}$; $\frac{3 \frac{1}{2} \text{ चा } 1 \frac{1}{2}}{1 \frac{1}{2} \text{ चा } 1 \frac{3}{4}}$; $\frac{3 \frac{3}{4} \text{ वे } 2 \frac{2}{3}}{3 \frac{3}{4} \text{ वे } 6 \frac{4}{5}}$.

९. $\frac{2 \frac{1}{2} + 1 \frac{2}{3}}{3 \frac{2}{3} - 2 \frac{2}{3}}$; $\frac{4 \frac{4}{9} \text{ वे } 2 \frac{5}{6}}{5 \frac{1}{2} - 4 \frac{1}{2}}$; $\frac{411 \text{ वे } 3 \frac{1}{2}}{921 - 36}$.

पुढील उदाहरणांतील कृत्यें उल्लेखाचे रूपांनीं मांडून त्यांचीं उत्तरें काढा.

पुढें मांडलेले उल्लेख सोडवा.

१०. $\left\{ \left(1 \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{ वे } \left(1 \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{ वे } \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right\} \div 2 \frac{2}{3} \text{ चे } 29$.

११. $\left\{ \left(\frac{5}{8} + \frac{4}{9} \right) \left(\frac{5}{8} - \frac{4}{9} \right) \div \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6} \right) \text{ वे } \left(\frac{6}{5} - \frac{5}{6} \right) \right\} \div \frac{49}{88} \text{ चे } 1 \frac{33}{43}$.

पुढील उदाहरणांत प्रथम वरचें चिन्ह घेऊन एक उत्तर काढा, आणि नंतर खालचें चिन्ह घेऊन दुसरें उत्तर काढा.

$$१२. \left(\frac{\frac{५}{४} + \frac{४}{५}}{\frac{४}{५} + \frac{५}{४}} \div \frac{\frac{४}{५} + \frac{३}{४}}{\frac{५}{४} + \frac{४}{५}} \right) \div \left(\frac{\frac{६}{५} + \frac{९}{६}}{\frac{९}{६} + \frac{६}{५}} \div \frac{\frac{३}{९} + \frac{९}{३}}{\frac{६}{९} + \frac{९}{६}} \right).$$

$$१३. \left\{ \frac{\frac{९}{३} \times \frac{९}{२}}{\frac{९}{४} \times \frac{९}{५}} \div \frac{\frac{९}{६} \times \frac{९}{७}}{\frac{९}{८} \times \frac{९}{९}} \right\} \div \left\{ \frac{\frac{९}{२} \times \frac{९}{३}}{\frac{९}{४} \times \frac{९}{५}} \div \frac{\frac{९}{६} \times \frac{९}{७}}{\frac{९}{८} \times \frac{९}{९}} \right\}.$$

पुढील उदाहरणांतील कृत्ये उल्लेखाने मांडून त्यांची उत्तरे काढा.

१४. $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{७}$, आणि $\frac{५}{६}$, ह्यांचे बेरजेला $\frac{४}{९}$, आणि $\frac{३}{२}$, ह्यांचे वजाबाकीने गुणून, त्या गुणाकाराला $\frac{९}{८}$ चे $\frac{९}{९}$ ह्यांनी भागा.

१५. $\frac{३}{२}$ चे $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ चे $\frac{३}{३}$, आणि $\frac{१}{८}$ चे $\frac{५}{४}$, ह्यांतील लहान मोठ्या अपूर्णाकांच्या बेरजेला मधल्या अपूर्णाकाने भागा.

१६. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{३}{७}$ ह्यांशी $\frac{३}{७}$ चे $\frac{२}{९}$ मिळवून, त्या बेरजेला $(\frac{२}{३} \text{ चे } \frac{५}{६}) \div (\frac{५}{४} + \frac{४}{५})$ ह्याने गुणा.

१७. $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$ व $\frac{५}{६}$ ह्यांच्या मिळवणीला $\frac{४}{९}$ व $\frac{८}{६}$ ह्यांच्या मिळवणीने भागून, त्या भागाकारांत $\frac{१०}{९}$ व $\frac{५}{८}$ ह्यांचे अंतर मिळवा.

१८. $\frac{५}{६}$ व $\frac{८}{६}$ ह्यांच्या मिळवणीला $\frac{७}{४}$ ह्यांनी भागून, तो भागाकार $\frac{३}{४}$ चे $\frac{६}{३}$ ह्यांत वजा करा.

१९. $\frac{२}{३}$ व $\frac{३}{३}$ ह्यांच्या बेरजेत $\frac{४}{३}$ व $\frac{५}{९}$ ह्यांची वजाबाकी मिळवा, आणि त्या मिळवणीची $\frac{७}{७} \div \frac{६}{६}$ इतकी पट करा.

वरील रीतींनी मिश्र अपूर्णाक आणि उल्लेख सोडविता येतात. जसे:-

उ. १. लं. $\frac{५}{८}$ आणि $\frac{८}{६} - \frac{४}{३}$ हे मिश्र अपूर्णाक सोडवा.

पहिल्या अपूर्णाकाच्या अंशछेदांस ८ नी गुणितां

$$\frac{५}{८} = \frac{४५}{३०} = \frac{३}{२}.$$

दुसऱ्यांच्या अंशछेदांतील छेदांचा ल० सा० भा० १२ येतो त्याने त्यांच्या अंशछेदांस गुणितां

$$\frac{6\frac{3}{4} - 4\frac{2}{3}}{2} = \frac{90\frac{6}{12} - 64\frac{8}{12}}{12} = \frac{60}{12} - \frac{24}{12}$$

वर्धित अपूर्णांकं ह्याला अपूर्णाकाचे छेद सोडविण्याच्या क्रमानें सरळरूप देतां येतें. आणि ह्या अपूर्णाकांतील संयुक्त भाजक कंसांनीं दाखवून ते कंस सोडविण्याच्याही क्रमानें सरळरूप देतां येतें.

$$\begin{aligned} \text{उ. २ रें. } ५ + \frac{१}{३ + \frac{१}{७}} &= ५ + \frac{१}{\frac{२१}{७} + \frac{१}{७}} = ५ + \frac{१}{\frac{२२}{७}} \\ &= ५ + \frac{३६}{१०८ + ७} = ५ \frac{३६}{११५} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

$$\text{उ. ३ रें. } \frac{३}{२ + \frac{३}{४ + \frac{५}{२ + \frac{१}{३}}}} = ३ \div [२ + ३ \div \{४ + ५ \div (२ + \frac{१}{३})\}]$$

$$= ३ \div [२ + ३ \div \{४ + ५ \div \frac{७}{३}\}]$$

$$= ३ \div [२ + ३ \div \{४ + \frac{१५}{७}\}]$$

$$= ३ \div [२ + ३ \div \frac{४३}{७}]$$

$$= ३ \div [२ + \frac{२१}{४३}]$$

$$= ३ \div \frac{१०७}{४३} = \frac{१२३}{१०७} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\begin{aligned} \text{उ. ४ रें. } \frac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}}{\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}} &= \frac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}}{\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}} = \frac{\frac{६}{१२} + \frac{४}{१२} + \frac{३}{१२}}{\frac{१२}{३९६} + \frac{९०}{३९६} + \frac{७०}{३९६}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{१३}{१२}}{\frac{२८६}{३९६}} = \frac{३३}{४} \times \frac{१०५}{२८६}$$

$$= \frac{१०५}{८८} = १ \frac{१७}{८८} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\begin{aligned} \text{उ. ५ रें. } \frac{२\frac{३}{४} + २\frac{१}{२} \text{ चे } \frac{७}{२४} - \frac{१}{२}}{\frac{१७७}{२२८}} &= \frac{\frac{११}{४} + ५ \times \frac{३५}{१२} - \frac{१०}{१२}}{\frac{३०५}{२२८}} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{११}{४} + \frac{१७५}{३८} - \frac{१०}{३}\right) \times \frac{२२८}{३०५}$$

$$= \frac{६२७ + १०५० - १५२}{२२८} \times \frac{२२८}{३०५}$$

$$= \frac{१५२५}{३०५} = ५ \text{ हें उत्तर.}$$

उ. वें. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ चे $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

$$\frac{\frac{9}{92} \text{ चे } (1 + \frac{5}{2}) + \frac{5}{6} \text{ चे } \frac{9}{23} (7 - \frac{22}{5}) - \frac{9}{2}}{\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{5}{6}}$$

$$= \frac{\frac{9}{92} \times \frac{6}{6} \frac{9}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{9}{23} \times \frac{4}{4} \frac{22}{5} - \frac{9}{2}}{\frac{6 + 9 + 90}{92}} = \frac{\frac{9 \cdot 9}{2} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 22}{23} - \frac{9}{2}}{92}$$

$$= \frac{\frac{9}{2} \times \frac{9}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{9}{23} \times \frac{22}{5} - \frac{9}{2}}{\frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}}$$

$$= \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{3} = 4\frac{1}{2} \text{ हें उत्तर.}$$

७. वें.- $17\frac{5}{2}$ शांतून $9\frac{3}{4}$ आणि $4\frac{5}{6}$ यांचें अंतर वजा करा आणि त्या बाकीला $\frac{5}{6}$ व $9\frac{2}{3}$ ह्यांच्या गुणाकारानें भागून उत्तर द्या.

इष्ट भागाकार. $= \frac{17\frac{5}{2} - (9\frac{3}{4} - 4\frac{5}{6})}{\frac{5}{6} \times 9\frac{2}{3}} = \frac{17\frac{5}{2} - 9\frac{3}{4} + 4\frac{5}{6}}{\frac{5}{6} \times \frac{6}{6}}$

$$= \frac{92 + \frac{35}{2} - \frac{63}{4} + \frac{60}{6}}{\frac{325}{6}} = 92\frac{32}{4} \times \frac{6}{325}$$

$$= 92\frac{6}{9} \times \frac{6}{325} = \frac{264}{25} \times \frac{6}{325}$$

$$= \frac{9}{5} = 2\frac{2}{5} \text{ हें उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ड.

पुढें दिलेले मिश्र अपूर्णांक व उल्लेख सोडवां.

१. $\frac{2\frac{3}{4}}{6}$; $\frac{9}{6}$; $\frac{2\frac{5}{6}}{3\frac{6}{6}}$; $\frac{9\frac{5}{8}}{13\frac{6}{9}}$; $\frac{3}{4}$ चे $\frac{6}{6}$; $\frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{6}}{6\frac{6}{6}}$

$\frac{6}{9\frac{5}{6} + 6\frac{6}{6}}$; $\frac{2\frac{2}{3}$ चे $2\frac{3}{4}$
 $2\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 & २. \frac{४ + \frac{३}{३३}}{१ - \frac{४}{६} \text{ वी } \frac{३}{११}}; \quad \frac{१२०}{१३२} - \frac{१}{२३२}; \quad \frac{२ \text{ वी } ५ + ५ \text{ वी } ६}{५ \text{ वी } ६ - \frac{१}{२} \text{ वी } ५} \\
 & \frac{१ + \frac{५}{२} \text{ वी } ६ - \frac{१}{२}}{१ + \frac{५}{२} \times ६ - ६}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ३. \frac{२ \frac{१}{३}}{२ \frac{३}{६}} \div \frac{२ \frac{१}{३}}{१ \frac{१}{६}}; \quad \frac{१८}{४ \text{ वी } ४ \frac{३}{६}} \div १ \frac{३}{२}; \\
 & \frac{६ \frac{३}{३} - २ \frac{३}{३}}{१८ \frac{३}{३} \div ६}; \quad \frac{१ \frac{३}{४} \text{ वी } ६}{११ \frac{३}{६}} \text{ वी } \frac{६ \frac{३}{३}}{११ \frac{३}{६}}.
 \end{aligned}$$

$$४. \frac{१ + २ \times \frac{४}{३} + \frac{४}{३} \text{ वी } \frac{४}{३}}{\frac{४}{३} \times \frac{४}{३} + १}; \quad \frac{२ \frac{३}{३} \times २ \frac{३}{३} - २ \frac{३}{३} \times २ \frac{३}{३}}{२ \frac{३}{३} - २ \frac{३}{३}}$$

$$\frac{१ + \frac{६}{३} \times (१ + \frac{६}{३})}{१ + \frac{६}{३} \times (१ + \frac{६}{३})}; \quad \frac{४ \frac{३}{३} \times ४ \frac{३}{३} \times ४ \frac{३}{३} - १}{४ \frac{३}{३} \times ४ \frac{३}{३} - १}$$

$$५. \frac{२ \frac{४}{३} + १ \frac{६}{३} - २ \frac{६}{३}}{६ \frac{३}{३} - ४ \frac{३}{३} \text{ वी } ६ \frac{३}{३}}; \quad \frac{६ \frac{३}{३} - २ \frac{३}{३}}{६ + ४ \frac{३}{३}} \div \frac{६ \frac{३}{३} + १ \frac{३}{३}}{६ \frac{३}{३} - २ \frac{३}{३}}$$

$$\frac{११ \frac{३}{३} - १० \frac{३}{३}}{११ \frac{३}{३} + १० \frac{३}{३}} \div \frac{१० \frac{३}{३} + ११ \frac{३}{३}}{१० \frac{३}{३} - ११ \frac{३}{३}} \times \frac{६ \frac{३}{३} + १ \frac{३}{३}}{६ \frac{३}{३} - १ \frac{३}{३}}$$

$$६. \frac{३}{१ + \frac{२}{५ + \frac{१}{६}}}; \quad \frac{१}{१ \frac{३}{३} \text{ वी } \frac{१}{१ + \frac{३}{२ + \frac{१}{४}}}}$$

$$७. \frac{१}{२ \frac{३}{३} + \frac{१}{४ \frac{३}{३}}}; \quad \frac{६ \frac{३}{३} - \frac{१}{३} \times (\frac{३}{२} + \frac{१}{६})}{१ + \frac{१}{२ - \frac{१}{४}}}$$

$$८. \frac{२ + ६ \frac{३}{३} \text{ वी } \frac{२१}{६} - \frac{१}{४} - \frac{१}{२} \frac{३}{३}}{१० - \frac{१}{२} \frac{३}{३} \text{ वी } ६}$$

$$\frac{5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{4}}{3\frac{3}{4} + 2\frac{6}{6}} \times \frac{5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{4}}{3\frac{3}{4} - 2\frac{6}{6}} \div \frac{2\frac{6}{6} - 2\frac{3}{4}}{9\frac{3}{4} - 6\frac{3}{4}}$$

८. $\frac{\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{6}{6} - 1}{\frac{2}{9} + \frac{1}{4} + \frac{3}{9} + \frac{1}{9}}$ चो

$$\frac{\frac{4}{9} \text{ चो } \frac{3}{9} - \frac{4}{9} \text{ चो } \frac{2}{9}}{\frac{2}{9}}$$

२०९ चो $\frac{9}{6}$ चो $3\frac{3}{2} + 2\frac{3}{2}$ चो $9\frac{3}{2}$ चो $\frac{9}{9}$

९. $\frac{\frac{9}{9} \text{ चो } 9\frac{9}{4} \text{ चो } 4\frac{9}{2}}{5\frac{9}{2} \text{ चो } 9\frac{9}{2} \text{ चो } 3\frac{9}{2}} - \frac{3\frac{9}{4} + 4\frac{9}{2}}{6\frac{9}{2} + 9\frac{9}{2}}$

$$\frac{9\frac{9}{4} - 6\frac{9}{2}}{3\frac{9}{2} + 3\frac{9}{2}} \div \frac{4\frac{9}{2} + 6\frac{9}{2}}{5\frac{9}{2} - 3\frac{9}{2}} + (30\frac{9}{6} - 2\frac{9}{2})$$

१०. $\frac{2\frac{3}{4} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}}{2\frac{3}{4} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}} \times \frac{6}{9} ; \frac{9}{3\frac{3}{4}} - \frac{2\frac{9}{4}}{9} + \frac{3\frac{9}{4}}{9} - \frac{6}{9}$

११. $\frac{3\frac{9}{4} \text{ चो } \frac{9}{9} - \frac{9}{9}}{\frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}} + \frac{9}{9} \text{ चो } \frac{9}{9}$

१२. $\frac{2\frac{9}{4} + 9\frac{9}{2} + 9}{3\frac{9}{2} - 9} + 9$

१३. $\frac{3\frac{9}{6} \div (3\frac{9}{6} \div 4\frac{9}{6}) \text{ चो } (9\frac{9}{6} \div 6\frac{9}{6}) \text{ चो } \frac{6}{9}}{3\frac{9}{6} \div (4\frac{9}{6} \div 9\frac{9}{6}) \div (6\frac{9}{6} \div 3\frac{9}{6})}$

१४. $\frac{5\frac{9}{4} \div 2\frac{9}{2}}{2\frac{9}{2} \text{ चो } \frac{6}{9} \div 4\frac{9}{2}} + 2\frac{9}{2} - 3\frac{9}{2} \text{ चो } \frac{9}{9}$

१५. $2 + \frac{3}{3 + \frac{9}{6}} ; \frac{6}{9 - \frac{6}{9}} + \frac{6}{3\frac{9}{2} - \frac{6}{9}}$

$$१४. २\frac{३}{४} + \frac{४}{६ + \frac{४}{६ + \frac{४}{२}}}; \quad २\frac{५}{६} + \frac{५}{६ + \frac{५}{१० + \frac{५}{१० + \frac{५}{२}}}};$$

$$२\frac{५}{६} + \frac{५}{२}$$

$$\frac{५}{२} + \frac{५}{२}$$

$$\frac{९}{२ - \frac{९}{२ - \frac{९}{२}}} + \frac{९}{२} + (९ + \frac{९}{२})$$

$$१६. \frac{३(९ + \frac{२}{२}) - ४}{३}$$

$$१\frac{१}{४} \times १२\frac{१}{५} \text{ चें } \frac{५}{२} = \frac{५\frac{१}{४} + ६\frac{१}{५}}{१२ - ६\frac{१}{५}} = \frac{४ + \frac{९}{४ - \frac{९}{४}}}{४}$$

$$१७. \frac{६\frac{६}{७} - ७\frac{६}{७} + ६\frac{६}{७} - ४\frac{६}{७}}{६\frac{६}{७} - ६\frac{६}{७} + ६\frac{६}{७} - ६\frac{६}{७}} = \frac{१००००}{६५०००}$$

$$१८. \frac{६ - \frac{९}{६ - \frac{९}{६}}}{३ - \frac{९}{३ - \frac{९}{३}}} \cdot २\frac{३}{४} \text{ चें } ७; \quad \frac{३ + \frac{९}{३ - \frac{९}{३}}}{४ - \frac{९}{४ - \frac{९}{४}}} \cdot १०\frac{५}{६}$$

$$१९. \frac{६\frac{३}{५} - ७\frac{३}{५} + ६\frac{३}{५} - ४\frac{३}{५}}{१३ - ११\frac{३}{५} + १०\frac{३}{५} - ९\frac{३}{५}} \cdot \frac{१}{१} \text{ चें } ३६६.$$

$$२०. \frac{\frac{१}{२१} \cdot ६\frac{१}{२} \cdot ६\frac{३}{१} + ६\frac{१}{२१} \cdot १\frac{२}{४} \div २\frac{५}{३} + १\frac{३}{४}}{\frac{१}{५६} \cdot १\frac{२}{३} \div ५\frac{१}{३} + ३\frac{१}{६} \cdot ६\frac{१}{२१} \div ६\frac{२}{३}} \text{ चें } १२\frac{५}{६}$$

$$२०. \frac{\frac{३}{२३} \text{ चें } ६\frac{३}{३} \text{ चें } २४\frac{१}{१} - ४\frac{३}{१} \times ३\frac{३}{३} \div ३\frac{३}{६}}{\frac{३}{१०} \times ५\frac{३}{३} \div ४\frac{३}{३} - ७\frac{३}{३} \times ५\frac{१}{३} \div १४\frac{२}{३}} = ४\frac{५}{३}$$

$$२१. \frac{9}{2 + \frac{3}{4 + \frac{5}{6}}} \cdot \frac{४८६२}{४१४७} \div (१\frac{३}{२} - \frac{२३}{३८}).$$

$$२२. \frac{१२}{७ \times \frac{२}{३ - १\frac{३}{४}}} \cdot \frac{७७३५}{६७१८४} \div (१\frac{३}{९६} - \frac{४७}{४८}).$$

$$२३. \frac{\frac{७}{४ - \frac{५}{६}} - \frac{५}{६ - \frac{७}{८}}}{\frac{१}{२} - \frac{२७}{५२}} - १३$$

$$\frac{\frac{४}{७ - \frac{४}{७}} + \frac{२}{४ - \frac{२}{५}}}{१९ - \frac{१}{\frac{३}{२} - \frac{६}{३९}}}$$

$$२४. \frac{\frac{२}{३ - \frac{४}{५}} + \frac{३}{४ - \frac{५}{६}}}{\frac{२}{३} - \frac{३}{४}} \cdot \frac{\frac{१}{२} - \frac{१}{३}}{१\frac{३}{२} - \frac{१३}{२२}}$$

$$\frac{\frac{३}{२ - \frac{१}{४}} - \frac{१}{३ - \frac{४}{५}}}{१\frac{३}{७} - \frac{३}{८}} - \frac{२}{६२ - २\frac{५}{९}}$$

व्यवहारी अपूर्णाकाचा रूपभेद किंवा
विविधांशी संबंध.

ह्याच्या संबंधानें व्यवहारांत नानाप्रकारचे प्रश्न येत असतात, त्यांचा समावेश ज्यांत करितां येतो ते प्रकार येणेंप्रमाणें.—

प्रकार १ ला.— एकंच्या किंमतीवरून अपूर्णाकाची हलक्या परिमाणांत किंमत काढण्याचा आणि भागानुबंध पूर्णाकाला हलक्या परिमाणाचें रूप देण्याचा.

रीति.— अपूर्णाक किंवा भागानुबंध पूर्णाक ह्यांतील एकंच्या जागी त्याच्या वरोवरीची हलक्या परिमाणाची संख्या ठेवावी. ह्या संख्येला अंशानें गुणून छेदानें भागलें ह्मणजे त्या अपूर्णाकाची त्या परिमाणांत किंमत येईल, व ह्या संख्येला पूर्णाकानेंही गुणून त्यांत ती किंमत मिळविली ह्मणजे ह्या एकंदर संख्येला त्या हलक्या परिमाणाचें रूप येईल.

उदाहरण. १ लें.— एका रुपयाचे $\frac{२}{३}$ ह्यांचे पावले करा.
एक रुपयाचे ४ पावले ह्मणून,

$$\frac{२}{३} रु. = \frac{२}{३} \times ४ पा. = \frac{८}{३} पा. = २\frac{२}{३} पा. हें उत्तर.$$

उदाहरण. २ रें.— एका खंडीचे $\frac{3}{4}$ हांस पायलींचें रूप द्या.

१ खं. = २० मण, व १ म. = १२ पा. हणून,

$\frac{3}{4}$ खं. = $\frac{3}{4} \times २०$ म. = $\frac{६०}{४}$ म. = $\frac{६०}{४} \times १२$ पा.

= $\frac{७२०}{४}$ पा. = १४४ पा. हें उत्तर.

सूचना.— दिलेले अपूर्णाकाची किंमत काढा असें हाटलें असेल तेव्हां अपूर्णाकास हलके परिमाणांत नेतांना भागानुबंध-पूर्णांक उत्पन्न करावा, नंतर त्यांतील पूर्णांक तसेच ठेवून अपूर्णाकांस मात्र आणखी खालचे परिमाणांत न्यावें, याप्रमाणें शेवटपर्यंत करावें.

उदाहरण. ३ रें.— एका रुपयाचे $\frac{3}{4}$ ची हलके परिमाणांत किंमत काढा.

१ रु. = ४ पा., १ पा. = ४ आ., व १ आ. = १२ पै हणून.

$\frac{3}{4}$ रु. = $\frac{3}{4} \times ४$ पा. = $\frac{१२}{४}$ पा. = ३ पा.

यांतील २ पावले तसेच ठेवून राहिलेले

$\frac{२}{४}$ पा. = $\frac{२}{४} \times ४$ आ. = $\frac{८}{४}$ आ. = १ $\frac{३}{४}$ आ.

यांतील एक आणा तसाच ठेवून राहिलेले.

$\frac{३}{४}$ आ. = $\frac{३}{४} \times १२$ पै. = $\frac{३६}{४}$ पै. = ७ $\frac{१}{४}$ पै.

∴ $\frac{३}{४}$ रु. = २ पा. १ आ. ७ $\frac{१}{४}$ पै. हें उत्तर.

रीति दुसरी— विविधाची.

रु.	पा.	आ.	पै.
-----	-----	----	-----

१	०	०	०
---	---	---	---

× ३

५.)	३	०	०	०
-----	---	---	---	---

०.	२	१	७ $\frac{१}{४}$
----	---	---	-----------------

हें उत्तर.

रीति तिसरी— रेधांचे अपूर्णाकांची.

१ रु.

× ३

५.) ३

॥ १ $\frac{१}{४}$ हें उत्तर.

उदाहरण. ४ थें.— ४ खंडींचे $\frac{2}{3}$ यांस वारुळे मापानें हलके परिमाणांत आणा.

$$४ \text{ खं. चे } \frac{2}{3} = \frac{८}{३} \text{ खं.} = २\frac{२}{३} \text{ खं.}$$

पुनः $\frac{२}{३}$ खं. = $\frac{२}{३} \times २० \text{ म.} = \frac{४०}{३} \text{ म.} = १३\frac{१}{३} \text{ म.}$

पुनः $\frac{१०}{३} \text{ म.} = \frac{१०}{३} \times १२ \text{ पा.} = \frac{१२०}{३} \text{ पा.} = ४ \text{ पायली.}$

उत्तर. २ खं. १३ म. ४ पा.

रीति दुसरी— विविधाची.

खं.	म.	पा.
४	०	०
$\times २$		
<hr/>		
३) ८	०	०
२	१३	४

हे उत्तर.

रीति तिसरी— रेधांचे अपूर्णाकाची.

४	खं.
$\times २$	
<hr/>	
३) ८	खं.
२॥३॥१ खं. हे उत्तर.	

उ.५ वें.— ३ खं. ४ म. यांचे $\frac{३}{४}$ यांची हलके परिमाणांत किंमत काढा.

$$३ \text{ खं. } ४ \text{ म. यांचे } \frac{३}{४} = ३\frac{३०}{४} \text{ खं. चे } \frac{३}{४}$$

$$= ३\frac{३}{५} \text{ खं. चे } \frac{३}{४} = \frac{१६}{५} \text{ खं. चे } \frac{३}{४}$$

$$\frac{१६}{५} \text{ खं. चे } \frac{३}{४} = \frac{४८}{५} \text{ खं.} = २\frac{३}{५} \text{ खं.}$$

पुनः $\frac{३}{५} \text{ खं.} = \frac{३}{५} \times २० \text{ म.} = \frac{४०}{५} \text{ म.} = ८ \text{ म.}$

∴ उत्तर. २ खं. ८ म.

दुसरी रीति.

खं.	म.
३	४
$\times ३$	
<hr/>	
४) ९	१२
२	८

हे उत्तर.

तिसरी रीति.

खं. ३०४	
$\times ३$	
<hr/>	
४) ९॥२	
२॥३	

खं. हे उत्तर.

उ. ६ वें.- $\frac{३}{९}$ ह्यांना दशांश, शतांश, इ. स्थलपरिमाणाचें रूप ४ स्थलांपावेतों दे.

$$\frac{३}{९} \text{ एकं} = \frac{३}{९} \times १० \text{ दशांश} = \frac{३०}{९} \text{ दशांश.}$$

$$= २\frac{६}{९} \text{ दशांश.}$$

पुनः $\frac{६}{९}$ दशांश = $\frac{६}{९} \times १०$ शतांश = $\frac{६०}{९}$ शतांश.

$$= ७\frac{३}{९} \text{ शतांश.}$$

पुनः $\frac{३}{९}$ शतांश = $\frac{३}{९} \times १०$ सहस्रांश = $२\frac{६}{९}$ सहस्रांश.

∴ उत्तर $\frac{३}{९} = २$ दशांश ७ शतांश २ सहस्रांश $७\frac{३}{९}$ दशसहस्रांश.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ढ.

१. ७ खंडींचे $\frac{३}{४}$ ह्यांची किंमत काढा.
२. १० गुंठे १२ आंगे यांचे $\frac{३}{४}$ काय दाखवितील ?
३. एका दिवसाचे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{३}{४}$ यांस हलके परिमाणांत न्या.
४. ५ रु. १३ आ. यांचे $\frac{७}{९}$ ह्यांची किंमत काय ?
५. एका पौडाच्या अष्टमांशाच्या सात पटीची किंमत काय ?
६. एका गिनीचे $\frac{३}{४}$ आणि एका क्रौनाचे $\frac{३}{४}$ यांची बेरीज व वजाबाकी काढा.

७. एका मैलाचे $\frac{७}{९}$, एक फर्लागाचे $\frac{५}{६}$, आणि एक पोलाचे $\frac{४}{९}$, यांची बेरीज सांगा..

८. १॥॥ रु. चे $\frac{३}{४}$, आणि ॥= चे $\frac{५}{६}$, यांची वजाबाकी काय होईल ?

९. $\frac{२}{९}$ घ.यार्ड, आणि $२\frac{७}{८}$ घ.फूट, यांच्या बेरजेत घन इंच किती ?

१०. $\frac{९}{५}$ चे $१\frac{१}{३}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{हा १६ दि. २ अ. २२ मि. यांचा} \\ \text{अपूर्णांक आहे. यांची हलके परिमाणांत} \\ \text{किंमत काढा.} \end{array} \right.$

११. ३ खं. ७ म. ही संख्या कोणत्या संख्येच्या $\frac{५}{६}$ शा बरोबर आहे ?

पुढील अपूर्णाकाच्या पूर्णांकांत किंमती काढा.

$$१२. \frac{१३५५}{१७९२} \text{ टन; } \frac{७}{११} \text{ एकर; } १ \text{ फर्लागाचें } ५\frac{७१}{८};$$

$$१ \text{ मैलाचे } \frac{६०}{१०५६}.$$

$$१३. \frac{१७}{२५} \text{ दिवस; } \frac{३९}{१६५} \text{ एकर; } १ \text{ हं. वे. चे } २\frac{१३}{३६} \text{ चे } \frac{४}{१५};$$

$$३\frac{४७}{१५०} \text{ एल.}$$

$$१४. ३६५ \text{ दिवसांचे } \frac{३\frac{३३}{५}}{१२\frac{१५}{७}}; \frac{१\frac{३}{४}}{४} \text{ टन;}$$

$$\frac{६\frac{११\frac{१३}{६०}}{१२}}{१४} \text{ आठवडे.}$$

$$१५. १\frac{४}{३} \text{ ग्या. चे } \frac{१}{१ + \frac{१}{३ + \frac{३}{४}}}; \frac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}}{\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}} \text{ पर्चचे } \frac{४}{६}.$$

पुढील उल्लेखांच्या पूर्णांकांत किंमती काढा.

$$१६. ७\frac{७}{८} \text{ पाँ. + } ७\frac{७}{६} \text{ शि. + } ६\frac{३}{४} \text{ पे.; } ३\frac{५}{८} \text{ पाँ. + } ७\frac{४}{५} \text{ शि. + } ४\frac{३}{४} \text{ पे.}$$

$$१७. \frac{४}{६} \text{ हं. वे. + } ८\frac{५}{६} \text{ पाँ. + } ३\frac{९}{१०} \text{ औं.; टनाचे } \frac{३}{५} + \text{ हं. वे. चे } \frac{५}{८} + \text{ पाँ. चे } \frac{३}{५}.$$

$$१८. ३\frac{७}{११} \text{ मैल - } १७\frac{७}{६} \text{ फ. + } ३५\frac{२२}{३३} \text{ पो.; } \frac{५}{३२} \text{ चौ. मै. + } \frac{७}{१०} \text{ एकर + } \frac{५}{८} \text{ रूड.}$$

$$१९. \frac{३}{५} \text{ आठवड्याचे + } \frac{३}{४} \text{ दिवसाचे + } \frac{५}{६} \text{ तासाचे + } \frac{३}{३} \text{ मिनिताचे.}$$

प्रकार २ रा.—एक मानिलेल्या संख्येच्या कोणत्या अपूर्णांकानें (किती कितव्या हिशोबांनीं) तसलीच दिलेली संख्या दाखवितां येईल तो शोधण्याचा.

उदाहरणार्थ ८ च्या कोणत्या अपूर्णांकानें ५ दाखविले जातात ? हा प्रश्न विचारांत घ्या. अपूर्णांकाचें लक्षणाप्रमाणें पाहतां ८ चे $\frac{५}{८} = ५$ येतात. ह्यावरून $\frac{५}{८}$ हें ह्याचें उत्तर होतें.

तसेंच १ रुपयाचे $\frac{9}{2}$ = १ आ. ६ पै. येतात. ह्यावरून १ रुपयाचा कोणता अपूर्णांक १ आ. ६ पै. दाखवितो ? ह्या प्रश्नाचें उत्तर $\frac{9}{2}$ हें होतें. आजमितीस १ शिलिंगाची किंमत सुमारे ११ आणे झाल्यामुळे १ पौंदाची किंमत सुमारे १३ रु. १२ आ. होते ह्यावरून १३ रु. १२ आ. ह्या किंमतीच्या नाण्याचा कोणता अपूर्णांक १ रुपया दाखवितो ? या प्रश्नाचें उत्तर $\frac{9}{2}$ हें होतें.

• ह्यावरून लक्षांत येईल कीं, विविधांत ज्याला चढती भांजणी हाणतात, किंवा हलक्या परिमाणाच्या संख्येला भारी परिमाणाचें रूप देणें हाणतात, तोच हा प्रकार आहे. वरील प्रश्नांचे अर्थ दुसऱ्याही रीतींनीं सांगतां येतात, ते असे. ५ मध्ये अठ्ठे किती राहतील तें अपूर्णांकांत सांगा. १ आ. ६ पै. ह्यांना अपूर्णांकांत रुपयाचें रूप द्या. १३ रु. १२ आ. किंमतीचें १ नाणें लहलें, तर त्या नाण्याचे किती कितरें हिस्से १ रुपयांत राहतील ?

ह्या प्रश्नांचा उद्देश पाहिला, तर दिलेल्या एकंचे संख्येमध्ये मानलेल्या एकंची संख्या केवढी राहिल तें शोधावें किंवा मोजावें हा असतो हाणून,

रीति १ ली.— दिलेल्या एकंचे जागीं मानलेल्या एकंच्या नांवाची त्याची किंमत ठेवावी. अथवा २ री. दोन्ही संख्यांच्या एका परिमाणांत किंमती. काढाव्या, आणि दिलेल्या संख्येच्या किंमतीला मानलेल्या एकंच्या किंमतीनें भागावें. हाणजे मानिलेल्या एकंची मोजदाद येईल.

उदा. १ लें. ५ पयांना आण्याचें रूप द्या.

$$१ पै = \frac{1}{2} आणा हाणून$$

$$५ पया = ५ \times \frac{1}{2} आ. = \frac{5}{2} आ. हें उत्तर.$$

उदा. २ रें. ३ आणे २ पै यांस रुपयाचें रूप द्या.

$$३ आ. २ पै = ३\frac{1}{2} आ. = \frac{7}{2} आ.$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} रु. = \frac{7}{4} रु. हें उत्तर.$$

उदा. ३ रें. $६\frac{3}{4}$ दिवस यांस वर्षाचें रूप द्या.

$$\therefore ६\frac{3}{4} दि. = \frac{27}{4} दि. = १ वर्ष.$$

व $६\frac{३}{५}$ दि. = $\frac{३३}{५}$ दि.

हाणून $६\frac{३}{५}$ दि. चीं वर्षे = $\frac{\frac{३३}{५} \text{ दि.}}{\frac{१४६१}{४} \text{ दि.}} = \frac{३३}{५} \times \frac{४ \text{ व.}}{१४६१}$
 $= \frac{३९}{५} \times \frac{४}{४६७} \text{ व.} = २\frac{४४}{३५} \text{ व.}$ हे उत्तर.

उदा. ४ थें. ११५॥ आणे आणि २५॥ पावले यांची बेरीज व वजाबाकी यांस रुपयांचीं रूपें द्या.

२५॥ पा. = १०१ आ.

हाणून	बेरीज.	वजाबाकी.
	११५॥ आ.	११५॥ आ.
	१०१ आ.	१०१ आ.
	<hr/>	<hr/>
	२१६॥ आ.	१४॥ आ.

व $२१६॥ \text{ आ.} = \frac{२१६॥}{१६} \text{ रु.} = १३\frac{१७}{३२} \text{ रु.}$ बेरीज.

तसेंच $१४॥ \text{ आ.} = \frac{१४॥}{१६} \text{ रु.} = \frac{२९}{३२} \text{ रु.}$ वजा.

उदा. ५ वें. एक गुंज ही ४॥ तोळ्यांचा कितवा अंश आहे.

$१ \text{ गुं.} = \frac{१}{६६} \text{ तोळ.}$

$\therefore \frac{१ \text{ गुं.}}{४॥ \text{ तो.}} = \frac{\frac{१}{६६} \text{ तो.}}{\frac{१}{३} \text{ तो.}} = \frac{१}{६६} \times \frac{३}{१} = \frac{१}{२२}$ हे उत्तर.

उदा. ६ वें.— ४ मण १४ शे. ह्यांचे $\frac{२}{३}$ हे १ खंडी ८ मण ह्यांचे (सुमारें १ टनाचे) अंश ह्या रूपानें मांडा.

री. २ प्र. इष्ट अपूर्णांक = $\frac{४ \text{ म. } १४ \text{ शे. ह्यांचे } \frac{२}{३}}{१ \text{ खं. } ८ \text{ म.}} = \frac{४\frac{१४}{४०} \text{ मणाचे } \frac{२}{३}}{\frac{२८}{९} \text{ मण.}}$
 $= \frac{\frac{६४}{२०} \text{ म.चे } \frac{२}{३}}{\frac{२८}{९} \text{ मण}} = \frac{\frac{२३}{१०} \text{ म.}}{\frac{२८}{९} \text{ म.}} = \frac{२९}{२८०}$

एथें १ खं. ८ म. ह्यांचे $\frac{२९}{२८०} = ४ \text{ म. } १४ \text{ शे. ह्यांचे } \frac{२}{३}$ आहेत.

$\therefore \frac{२९}{२८०}$ हा इच्छिलेला अपूर्णांक हे उत्तर.

उदा. ७ वें. ३ गिनींच्या $\frac{६}{७}$ च्या $\frac{२}{३}$ चा कोणता भागजाति १५ शि. ९ पे. ह्यांच्या $\frac{६}{७}$ ने $\frac{३}{४}$ दाखवील?

$$\text{इष्टभागजाति} = \frac{१५\frac{३}{४} \text{ शि. चे } ६ \text{ चे } \frac{३}{४}}{६३ \text{ शि. चे } ७ \text{ चे } \frac{३}{४}}$$

$$= \frac{१५}{६३} \times \frac{३}{४} \times \frac{३}{४} \times \frac{३}{४} \times \frac{७}{६} \times \frac{३}{४} = \frac{७}{२४}.$$

उदा. ८ वें. ३ टन १६ हं.वे. ३ का. २२ $\frac{३}{४}$ पौंद
चे (५ $\frac{६}{८}$ - ३ $\frac{३}{४}$) ह्यांचा कोणता अपूर्णांक ५ हं.वे. ३ का.

३ $\frac{३}{४}$ पौंद चे $\frac{३\frac{३}{४}}{३\frac{३}{४}}$ चे ७ $\frac{३}{४}$ दाखवील ?

७६ हं.वे. ३ का. २२ $\frac{३}{४}$ पौंद. ५ हं.वे. ३ का. ३ $\frac{३}{४}$ पौंद.

३ $\frac{३}{४}$ का.

२३ का.

$\frac{२८}{८६३८२}$ पौंद

$\frac{२८}{६४७१}$ पौंद

६४७ $\frac{१}{२}$ पौं. चे $\frac{३\frac{३}{४}}{३\frac{३}{४}}$ चे ७ $\frac{३}{४}$

$$\therefore \text{इष्टअपूर्णांक} = \frac{६४७\frac{१}{२} \text{ पौं. चे } (५\frac{६}{८} - ३\frac{३}{४})}{८६९८ \frac{३}{४} \text{ पौं. चे } (५\frac{६}{८} - ३\frac{३}{४})}$$

$$\frac{३२२५}{२} \times \frac{१५}{४} \times \frac{१५}{७४} \times \frac{३८}{५}$$

$$= \frac{४३०५२}{५} \times (२\frac{८}{८} - \frac{३}{४})$$

$$= \frac{३२२५}{२} \times \frac{१५}{४} \times \frac{१५}{७४} \times \frac{३८}{५} \times \frac{५}{४३०५२} \times \frac{३६}{५}$$

$$= \frac{५}{२४} \text{ हें उत्तर.}$$

उदा. ९ वें. २ पौं. १० औं. अवार्दुपाइजचा कोणता
अपूर्णांक १ पौं. ८ औं. त्राय ह्यांशीं मिळविला; तर बेरीज ३
पौंद ७ औं. १० पेनिवेट येईल ?

३ पौं. ७ औं. १० पे.वे.

१ पौं. ८ औं. ० पे.वे.

१ पौं. ११ औं. १० पे.वे.

ह्यावरून २पौं. १० औं. अ-
वार्दु. चा कोणता अपूर्णांक
१ पौं. ११ औं. १० पे.वे.

देईल तें येथें शोधणें आहे.

$$\begin{aligned} \text{आतां } ११ \text{ औं. } १० \text{ पे.वे.} &= ११ \text{ औं.त्रा.} = \frac{११}{१२} \text{ पौं. त्रा.} \\ &= \frac{११}{१२} \text{ पौं. त्रा.} \end{aligned}$$

$$\therefore १ \text{ पौं. } ११ \text{ औं. } १० \text{ पे.वे.} = १ \frac{११}{१२} \text{ पौं.त्रा.} = १ \frac{११}{१२} \times ५७६० \text{ ग्रेन}$$

$$\text{आणि } २ \text{ पौं. } १० \text{ औं. अवार्डु.} = २ \frac{१०}{१२} \text{ पौं. अवार्डु.} = २ \frac{५}{६} \times ७००० \text{ ग्रे.}$$

$$\therefore \text{इष्टअपूर्णांक} = \frac{१ \frac{११}{१२} \times ५७६० \text{ ग्रे.}}{२ \frac{५}{६} + ७००० \text{ ग्रे.}} = \frac{४७}{१२} \times \frac{८}{२१} \times \frac{५७६०}{७०००} = \frac{२२५६}{३६७५}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ण.

१. $१\frac{१}{२}$ पौंड हा $२\frac{२}{३}$ गिनींचा कितवा अंश आहे ?

२. एका मैलाचे $\frac{३}{४}$ हे एका यार्डाचे कोणते अंश होतील ?

३. अर्ध्या कौनाचे $\frac{१}{३}$ चे $\frac{१}{९}$ हे ९ पौंडांचा कोणता अपूर्णांक होतील ?

४. एका मणाचे $\frac{३}{४}$ यांची जर ५७। पट एका खंडीत वजा केली तर बाकी काय येईल ?

५. ४ औं. १५ पे.वे. १५ ग्रेन ह्यांना त्रायपौंडांचें रूप अपूर्णांकांत द्या, आणि मग अवार्डुपाईज पौंडांचेंही रूप अपूर्णांकांत द्या.

६. १५ हं.वे. ३ क्वा. १७ पौं. ८ औंस ह्यांना हंड्रेडवेटाचें व टनाचें अशीं दोन अपूर्णांकरूपें द्या.

७. ५ बुशील ३ पेक १ ग्यालन ह्यांना क्वार्टराचें रूप द्या.

८. ३ क्वा. २७ पौं. ९ औं. १२ $\frac{१}{२}$ ड्राम ह्यांना हंड्रेडवेटाचें अंरू द्या.

९. ३ फर्लांग २९ पौल ४ यार्ड १ फूट ९ इंच ह्यांना एका मैलाचें अंरू द्या.

१०. ४ पौं. १ औं. ८ पे.वे. १५ ग्रे. ह्यांचे किती कितवे अंश हे १ पौं. १ औं. ९ पे.वे. १५ ग्रे. दाखवितील ?

११. २॥ यार्डाचें माप घेतलें तर २॥ फुटांची मोजदात काय येईल ?

१२. मोजणीचें माप ५ इंचांचें असलें तर $\frac{५}{१२}$ मैलाची मोजदात काय येईल ?

१३. २ एकर ३७ पो. ह्यांचा कोणता अपूर्णांक ३ एकर २ रुड १ पोल हे दाखवील.

प्रकार ३ रा. एका देशांतील परिमाणास दुसऱ्या देशांतील परिमाणांत नेण्याचा.

रीति.— सांगितलेले परिमाणाचे जातीपैकीं जें परिमाण इच्छिलें परिमाणाचे जातीच्याशीं ताडलेलें असेल त्या परिमाणांत पहिल्यानें दिलेल्या परिमाणाचें रूपांतर करावें. नंतर त्यास इच्छिलेल्या जातीच्या ताडलेल्या परिमाणांत न्यावें. नंतर त्या संख्येचें इच्छिलेले परिमाणांत रूपांतर करावें.

एका देशांतील परिमाणास दुसऱ्या देशांतील परिमाणांत नेणें झालें, तर त्यास ताडलेले परिमाणांचे वाटेनेच न्यावें लागेल हें स्पष्ट आहे.

उदा. १ लें. १४ रु. १२ आ. ह्यांस इंग्लिश चलनी पौंड शिलिंग यांत न्या.

$$१ रु. = \frac{१}{१०} पौंड.$$

$$\text{ह्याणून } १४ रु. १२ आ. = १४\frac{३}{४} रु. = \frac{५९}{४} रु.$$

$$= \frac{५९}{४} \times \frac{१}{१०} पौं. = १\frac{१९}{४०} पौं.$$

$$= १ पौं. ९ शि. ६ पे. हें उत्तर.$$

उदा. २ रें. ५ तो. ३ मा. २ गुंजा, इतक्या वजनाचा एक सोन्याचा दागिना आहे. तर त्याचें इंग्लिश मानाप्रमाणें काय वजन होईल ?

$$१ तोळा = १८८ त्राय ग्रेन.$$

$$५ तो. ३ मा. २ गुं = ५\frac{३}{४}\frac{३}{८} तो.$$

$$= \frac{२५३}{४८} तो.$$

$$= \frac{२५३ \times १८८}{४८} त्रा. ग्रे.$$

$$= \frac{२५३ \times ४७}{१२} त्रा. ग्रे.$$

$$= ९९० \frac{११}{१२} त्रा. ग्रे.$$

$$= २ औं. १ पे. ६\frac{११}{१२} ग्रे. हें उत्तर.$$

उदा. ३ रें. २ दिवस ४ अ. १२ मि. ह्यांत १ दि.
१५ घ. १२ प. वजा करून बाकीला दिवसांचें रूप द्या.

१ अवर = २॥ घटिका.

ह्मणून २ दि. ४ अ. १२ मि. = २ दि. १० घ. ३० प.

यांत वजा १ १५ १२

बाकी ० ५५ १८

$$\begin{aligned} \therefore ५५. घ. १८ प. &= ५५\frac{१८}{६०} घ. = ५५\frac{३}{१०} \times \frac{१}{६०} दि. \\ &= \frac{१६५३}{१८००} दि. \\ &= \frac{५५३}{६००} दि. हें उत्तर. \end{aligned}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. त.

१. एका हौदांत दरजासास ४९० ग्यालन पाणी येतें, तर एका दिवसाचे $\frac{१}{६}$ इतक्या वेळांत त्या हौदांत किती हांडे पाणी येईल तें सांग. १ हांडा = ७ ग्यालन.

२. १२० सिक्किनच्या मोहरा करा.

३. २२० ग्यालनांचे $\frac{४}{५}$ चे फरे करा.

४. १२॥२॥ खंडी धान्याचे बुशेल किती होतील ? ४ पुण्याच्या पायली = ५ ग्या.

५. एक लक्ष मॅचमिटर, एका कोसाचे किती पट होतील ?

६. एका विध्याचे $\frac{१}{१०}$ ह्यांस एकरांचें रूप द्या.

७. वारुळे मापाच्या खं. १५८३ यांचा $\frac{१}{३}$, व सोळुले मापाच्या खं. ५८२, यांची वजाबाकी सोळुले मापांत सांगा.

प्रकार ४ था.— अपूर्णाकांच्या किंमतीपासून तो ज्या एकंचा अपूर्णाक आहे तो एकं काढण्याचा.

उदा. १ लें. ज्या संख्येचे $\frac{५}{६} = ३०$ येतात, ती संख्या कोणती ?

५ एकंचा ७ वा हिस्सा = ३० आहेत, तर ५ एकं = ३० सत्तें २१० येतील. तसेंच ५ एकं = २१० आहेत, तर एकं = $\frac{२१०}{५} = ४२$ येतील. हे सरळ रूपभेद पुढील पद्धतीनें मांडतात.

$$\frac{५}{६} \text{ एकं} = ३०$$

$$\therefore ५ \text{ एकं} = ३० \times ७ = २१०$$

$$\therefore \text{एकं} = \frac{२१०}{५} = ४२ \text{ हें उत्तर.}$$

रीति.— अपूर्णोक्ताच्या किंमतीला त्याच्या छेदानें गुणून अंशानें भागावें, ह्मणजे त्याचा एक येईल.

उदाहरण २ रें. अशी संख्या सांगा कीं तिचे $\frac{1}{96}$ घेतले तर ५ शिलिंग ६ पेन्स येतील.

पद्धतीनें.

$$\frac{1}{96} \text{ एकं} = ५ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}$$

$$\therefore १० \text{ एकं} = ९३ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}$$

$$\therefore \text{ एकं} = ९ \text{ शि. } ४\frac{2}{3} \text{ पे. उत्तर.}$$

विविधानें.

$$५ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}$$

१७

$$१०) \frac{९३ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}}{१७}$$

$$९ \text{ शि. } ४\frac{2}{3} \text{ पे. उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. थ.

१. कोणत्या कालाच्या $\frac{1}{2}$ नीं ३ ता. २० मिं. दाखवितां येतील ? कोणत्या कालाच्या $\frac{1}{6}$ नीं ३ दिवस दाखविले जातील ?

२. कोणत्या रकमेचे $\frac{1}{96} = ३ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}$ आहेत ? कोणत्या रकमेचे $\frac{1}{2} = ७ \text{ पौं. } १२ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}$ आहेत ?

३. अशा संख्या सांगा कीं एकीचे $\frac{1}{96} = २५ \text{ यार्ड}$ यावे, आणि दुसरीचे $\frac{२१}{१००} = ७ \text{ फूट}$ यावे.

४. २ औंस ३ पेनिवेट हे कोणत्या वजनाचे तीन सत्रांश आहेत ?

५. १७ पौं. २ औं. हे $\frac{१२}{१३}$ नीं दाखविण्याला एकं केवढा पाहिजे ? १५ $\frac{१}{२}$ हंड्रेडवेट हे $\frac{१}{१०}$ नीं दाखविण्याला एकं केवढा घ्यावा ?

६. १७ हे ज्याचे $\frac{१५}{२३}$ आहेत, असा एकं सांगा. तसेंच $५\frac{१}{३}$ हे ज्याचे $\frac{२५}{३४}$ आहेत असा एकं सांगा.

७. ५ पौं. १२ शि. ६ पे. हे $\frac{३}{४}$ होण्याला पूर्ण किंवा एकं केवढा पाहिजे ?

८. एका जमीनींत १७ जणांचे सारखे वांटे आहेत. त्यांतील ५ वांट्यांची जमीन २ रूढ २० पर्च भरली, तर एकंदर जमीन केवढी भरेल ?

९. केवढ्या कालाचे $\frac{२}{१४}$ हे $२\frac{१}{२}$ चांद्रमास होतील ?

दशांश अपूर्णांक.

स्थलसंकेत— पूर्णांकांतलें प्रत्येक स्थलपरिमाण हें त्यांच्या डावीकडच्या स्थलपरिमाणाचा १० वा हिस्सा असतें. ह्याच संकेतानें एकंच्या माथ्याशीं दशांशचिन्ह नांवांचा विंदु किंवा आलय (अळें) करून त्यापुढें अंक मांडीत गेलें, तर त्या अंकांनीं पूर्णांकाच्याच पद्धतीनें दशांशपरिमाणांच्या संख्या दाखविल्या जातात. उदाहरणार्थ ३४५.६७८९१ किंवा ३४५'६७८९१ ह्या संख्येंत ५ हे एकं दाखविलील, त्यापुढचे ६ हे दशांश दाखविलील, त्यापुढचे ७ हे शतांश दाखविलील, त्यापुढचे ८ हे सहस्रांश दाखविलील, अशा रीतीनें, पूर्णांक व दशांश ह्या दोन्ही भागांतिल, अंकांचीं परिमाणें त्यांच्या स्थलांनीं दाखविलीं जातात. आतां ह्या स्थलसंकेताप्रमाणें पूर्णांकांतिल एकं हा पूर्ण व अपूर्ण ह्या दोन्ही जातींच्या परिमाणांना साधारण असल्यामुळें ह्याच्या डावीकडचा १ ला अंक दशक दाखवितो, तसाच दशांशचिन्हाच्या उजवीकडचा १ ला अंक दशांश दाखवितो. एकंच्या डावीकडचा २ रा अंक शतक दाखवितो, तसाच दशांशचिन्हाच्या उजवीकडचा २ रा अंक शतांश दाखवितो. ह्याप्रमाणें एकंच्या डावीकडचीं परिमाणें दसपटीनें मोठीं होत जातात, तशींच दशांश चिन्हाच्या उजवीकडचीं परिमाणें १० व्या हिशानें लहान होत जातात, म्हणून ह्या परिमाणांना दशकपरिमाणें व दशांशपरिमाणें अशीं नांवें येतात. एथें १०, १००, १००० इ. अंक हे १० चा १, २, ३ इ. घात दाखवितात. ह्यावरून दशांशाचें लक्षण ठरतें तें असें.—

दशांश अपूर्णांक.— ज्या संख्यांना १०, १००, १००० इत्यादि १० चे घात छेद असून, ते दशांश चिन्हापुढच्या

* दोन संख्यांचा गुणाकार दाखविणें असला, तर तो ५.६ असाही केव्हां लिहितात. ह्या गुणनविंदूहून दशांशविंदु वेगळ्या दर्शविण्यासाठीं, दशांशविंदु हा माथ्याशीं देतात, आणि गुणनविंदु हा मध्यभागां देतात.

स्थलांनीं दाखविले असतात, त्यांना दशांश किंवा दशांशअपूर्णांक ह्मणतात.

उदाहरणार्थ २३४५.६७८९१ ह्या संख्येंतील दशांश चिन्हापुढचे अंक पहा. हे अंक $\frac{६}{१०}$, $\frac{७}{१००}$, $\frac{८}{१०००}$ इ० अपूर्णांक दाखवित असून ह्या अपूर्णाकांचे छेद दशांशचिन्हापुढच्या १ ल्या, २ व्या, ३ व्या, इ० स्थलांनीं दाखविले आहेत, ह्मणून हे दशांशअपूर्णांक होत.

वाचन— दशांशांची संख्या स्थलपरिमाणांच्या नांवांनीं वाचतात, अथवा एकचें स्थान दशांशचिन्हानें दर्शवून नुसतीही वाचतात. जशी.— २४५ पूर्णांक ६ दशांश ७ शतांश ८ सहस्रांश ९ दशसहस्रांश व १ लक्षांश. , अथवा २४५, दशांशचिन्ह, सहा, सात, आठ, नऊ, व एक.

दशांशविंदूपुढें जितक्याच्या स्थलीं अंक असेल तितक्यावा १० चा घात हा त्याला छेद असतो, व तो त्या विंदूपुढच्या प्रत्येक अंकाच्या स्थलानें दाखविला जातो. ह्यावरून दशांशांक हे पूर्णांकांप्रमाणेंच स्थलपरिमाणें दाखवितात हें लक्षांत येईल.

वरील प्रकारच्या दशांश अपूर्णाकांच्या रांगा ह्या पूर्णाकांच्याच पद्धतीनें उत्पन्न होतात, ह्यास्तव पूर्णाकांसंबंधी एकंदर नियम ह्या रांगांना लागू असले पाहिजेत.

पूर्ण संख्येंतील वेगळाले अंक वेगळालीं स्थलपरिमाणें दाखवितात, पण ते अंक जुळून वाचिले ह्मणजे ती संख्या त्या रांगेंतील लघुतम परिमाणें दाखविते. जशी— २४ ह्या अंकपंक्तीची वाचणी चो-वीस ही एकडे दाखविते. हा नियम दशांशांतील अंकांनाही लागला पाहिजे. ह्मणून.—

नियम १ ला.— पूर्णांकयुक्त दशांश हे पूर्ण (एक) आणि लघुतम अंश ह्या दोन नांवांनीं जुळून वाचले, तर त्यांच्या बराबरीचा भागान्बंध पूर्णांक दाखवितात; आणि हे लघुतम अंशांच्याच नांवांनीं जुळून वाचले, तर त्यांच्या बराबरीचा विप्रम अपूर्णांक दाखवितात.

$$\begin{aligned}
 \text{पडताळा. } २४'३७५ &= २४ + \frac{३}{१०} + \frac{७}{१००} + \frac{५}{१०००} \\
 &= २४ + \frac{३००}{१०००} + \frac{७००}{१०००} + \frac{५००}{१०००} \\
 &= २४ \frac{३७५}{१०००} = \frac{२४३७५}{१०००}.
 \end{aligned}$$

आतां बेरजांच्या संख्या ३७५ व २४'३७५ ह्यांना १० चा ३ घात हा छेद असून तो मूळच्या संख्येंत दशांश चिन्हापुढच्या ३ स्थलांनीं दाखविला जातो, यास्तव ३७५ व २४'३७५ ह्या संख्यांनाही वरील लक्षणाप्रमाणें दशांश अपूर्णांक ह्मटलें पाहिजे हें उघड आहे. ह्मणून २४'३७५ ही संख्या चोवीस पूर्णांक तीनशें पंचाहत्तर सहस्रांश अशी भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणेंही वाचतात, आणि चोवीस हजार तीनशें पंचाहत्तर सहस्रांश अशी विप्रम अपूर्णांकाप्रमाणेंही वाचतात.

ह्यावरून लक्षांत येईल कीं, दशांश अपूर्णांकाच्या रांगेचे सम-च्छेद करून तिला भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप देणें, व दशांशांतील भागानुबंध पूर्णांकाला विप्रम अपूर्णांकाचें रूप देणें, हीं कामें दशांशांत प्रत्यक्ष करावीं लागत नाहींत, नुसत्या वाचणीनेंच दर्शवितां येतात. ही ह्या अपूर्णांकांमध्ये मोठी सोईची गोष्ट आहे.

लेखन.— दशांशसंख्येंत कांहीं स्थलीं अंक नसले अगर एक नसले, तर त्या स्थलीं शून्यें मांडतात. उदाहरणार्थ ०'००३०४०२ ही संख्या पहा.

पूर्णांक दशांशरूपांत मांडणें झालें, तर त्यांचे माथीं दशांश-चिन्ह करून दशांशस्थलीं शून्यें मांडतात. उदाहरणार्थ ३४५'००० ही संख्या पहा.

व्यवहारी अपूर्णांकाला १० चा घात छेद असून, तो अपूर्णांक दशांशांत मांडणें असला, तर तो छेद १० चा, जो घात असेल (ह्मणजे त्यांत १ वर जितकीं शून्यें असतील) तितके अंशावरचे अंक मोजून त्यांच्या डावीकडे दशांशचिन्ह करितात. अंशांत तितके अंक नसले, तर त्यांच्या मागे शून्यें देऊन अंक पुरे करतात, आणि त्यांच्या डावीकडे दशांश चिन्ह करितात. जसें.—

$$\begin{aligned}
 \frac{३४७}{१००} &= ३'४७; & \frac{१३}{१०००} &= ०'०१३. \\
 \frac{२१२५}{१०००} &= २'१२५; & \frac{३७}{१००००} &= ०'००३७.
 \end{aligned}$$

ह्यावरून दशांश अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांत मांडणें झाला, तर,

रीति.— दशांश संख्या ही दशांशचिन्हावांचून अंशस्थलीं मांडावी, आणि दशांशस्थलांइतका १० चा घात (दशांश स्थलांइतकीं एकावर शून्यें देऊन तो) तिला छेद मांडावा.

उदाहरणें.

१. $२०३ = २\frac{३}{१००}$ अथवा $\frac{२०३}{१००}$.
२. $३७९ = \frac{३}{१०} + \frac{७०}{१००} + \frac{९}{१०००} = \frac{३०० + ७० + ९}{१०००} = \frac{३७९}{१०००}$.
३. $४२०३७ = ४२\frac{३७}{१०००}$ अथवा $\frac{४२०३७}{१०००}$.
४. $००२९ = \frac{२९}{१००००}$.
५. $१५००१ = १५\frac{१}{१०००}$ अथवा $\frac{१५००१}{१०००}$.
६. $१३७५ = १३\frac{७५}{१००} = १३\frac{३}{४}$ अथवा १३।।.
७. $२३०६२५ = २३\frac{६२५}{१००००} = २३\frac{१}{१६} = २३\frac{१}{१६}$.

पूर्ण संख्येला १० नीं गुणणें असलें तर त्या संख्येवर आपण एक शून्य देऊन त्या संख्येंतलें एकचें स्थान एक स्थळ उजवेकडे सारतो. तसेंच पूर्ण संख्येला १० नीं भागणें असलें तर आपण त्या संख्येवरचें एक शून्य कापून त्या संख्येंतलें एकचें स्थान एक स्थळ डावेकडे सारतो. दशांशांचीं परिमाणेंही एक किंवा दशांशबिंदु ह्यांवर अवलंबून असतात. म्हणून,

नियम २ रा.— दशांश संख्येला १०, १००, १०००, इत्यादि १० च्या घातानें गुणणें असलें, तर तींतील दशांशचिन्ह त्या घाताइतकीं स्थलें उजवेकडे सारावें, आणि भागणें असलें तर तींतील दशांशचिन्ह त्या घाताइतकीं स्थलें डावीकडे सारावें.

उ. १ लें. $२४६८ \times १०० = २४६८००$.

कारण दशांशचिन्ह २ स्थलें पुढें नेल्यानें ८ सहस्रांशांची १०० पट होऊन ते दशांश झाले, ६ शतांशांची १०० पट होऊन ते एक झाले, ४ दशांशांची १०० पट होऊन ते दशक झाले, आणि २ एकंची १०० पट होऊन ते शत झाले. ह्याप्र-

माणें प्रत्येक परिमाण १०० पट झाल्यानें प्रत्येक अंकाची १०० पट झाली, हणून एकंदर संख्येची १०० पट झाली हें उघड आहे. परिमाणांच्या दसपटीचा संबंध दर एक दशांशांत असावयाचा हणून हा नियम कोणत्याही दशांशसंख्येला लागू झाला पाहिजे.

$$\text{उ. २ रें. } २'४६८ \div १००० = '००२४६८.$$

कारण दशांश चिन्ह तीन स्थळें मागें सारल्यानें २ एकं होते ते सहस्रांश झाले, ४ दशांश होते ते दशसहस्रांश झाले, ६ शतांश होते ते लक्षांश झाले, आणि ८ सहस्रांश होते ते दशलक्षांश झाले. ह्याप्रमाणें प्रत्येक अंकाच्या परिमाणाचा सहस्रांश झाल्यानें त्या प्रत्येक अंकाचा सहस्रांश झाला, हणून ह्या एकंदर संख्येचा सहस्रांश झाला हें उघड आहे. परिमाणांच्या दसपटीचा संबंध हरएक दशांशांत असावयाचा, हणून हाही नियम कोणत्याही दशांश संख्येला लागू झाला पाहिजे.

$$\text{उ. ३ रें. } २४'६८ \times १००० = २४६८०.$$

$$\text{उ. ४ थें. } २४'६८ \div १००० = '०२४६८.$$

पूर्ण संख्येच्या डावीकडे शून्यें घेतल्यानें तींतील अंकांच्या परिमाणांत बदल होत नाही, हणून त्या संख्येची किंमत बदलत नाही. ह्यावरून,

नियम ३ रा.— दशांशसंख्येचे पुढें कितीही शून्यें मांडिलीं तरी त्या संख्येची किंमत बदलत नाही.

$$\text{उ. } '२५ = \frac{२५}{१००} = \frac{२५०}{१०००} = '२५०$$

कारण दशांशावर शून्य दिलें असतां त्या अंशाची दसपट होते. पण त्याच शून्यानें त्या दशांशाचें स्थळही वाढलें जाऊन त्याच्या छेदाचीही दसपट होते, त्यामुळें किंमत बदलत नाही. हणून ज्या संख्यांत दशांशस्थळें कमी असतील त्यांचे उजवे बाजूस शून्यें देऊन सर्वांचीं दशांशस्थळें सारखीं केलीं हणजे सर्वांचे समच्छेद होतात. जसें— '२५ व, '५ यांचीं समच्छेद रूपें '२५ व '५० हीं आहेत.

दशांश अपूर्णाकाचे उजवे बाजूस कितीही शून्यें दिलीं तरी

त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही, परंतु जर डावेकडे शून्ये दिलीं तर त्यास १०, १००, १०००, इ० ह्यांनीं भागल्याप्रमाणें होतें. हे नियम पुढच्या उदाहरणांत तपासून पहावे.

$\cdot 3 = \frac{3}{10}$	ह्यांच्या उलट.	$\cdot 03 = \frac{3}{100}$
$\cdot 30 = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$		$\cdot 003 = \frac{3}{1000}$
$\cdot 300 = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$		$\cdot 0003 = \frac{3}{10000}$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. द.

पुढील संख्या दशांशांत मांडा.

१. तीन, आणि सात दशांश; पांच, आणि त्रैचाळीस शतांश. आठ हजार पांचशें दोन, चार दशांश, सात शतांश, सहा सहस्रांश, पांच दशसहस्रांश, तीन कोट्यांश, नऊ दशकोट्यांश, व दोन खर्वांश; एकशेंपंचवीस, आठ दशांश, पांच सहस्रांश, चार कोट्यांश, व सहा अर्बुदांश; चारशें, पांच शतांश, व सहा लक्षांश.

२. अष्टावीस पूर्णांक, पंचवीसशें सत्यायशीं दशसहस्रांश; पन्नास पूर्णांक, चार हजार सहा दशसहस्रांश; सातशें नऊ कोट्यांश; आठ लक्ष सहाशें दहा अज्जांश; चार हजार सहाशें आठ दशलक्षांश.

३. आठ हजार चारशें तीन शतांश; चार कोटी सत्तैचाळीसशें पंधरा सहस्रांश; अष्टावीसशें चार दशांश; सात हजार चार शतांश; नव्वदशें आठ सहस्रांश.

४. चार, सात, दशांश टिंब, आठ, पांच, एक व चार; सहा, द. चि., शून्य, चार, आठ, शून्य, शून्य, पांच व दोन;

पुढील दशांश प्रथम स्थानसंख्यांच्या रांगांनीं वाचा, नंतर लघुतम परिमाणाच्या नांवानें भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणें वाचा, नंतर लघुतम परिमाणाच्या नांवानें विषम अपूर्णांकाप्रमाणें वाचा, आणि नंतर अंकांच्या रांगेप्रमाणें वाचा.

५. ५३७; ००२५; ५६७८९; ००२४०५.

६. ९८७६५४३२१; ३५०००००४५६७६५.

पुढील गुणाकार व भागाकार द.चि.चा. स्थानभेद करून मांडा.

७. ८'००३०५६ ह्यांस १०० नीं, १०००० नीं, आणि १००००००० ह्यांनीं, गुणा.

८. '०१७२८ ह्यांस १० नीं व १००० नीं गुणा, आणि '००५२३६ ह्यांस १०००००००० नीं गुणा.

९. ७३'५६ ह्यांना १० नीं व १००० नीं भागा, व ३'७१६५ ह्यांना १०० नीं व १०००० नीं भागा.

१०. ५७३२४ ह्यांना १०००००००० ह्यांनीं, १ ला १०० नीं, आणि '००१ ह्याला १००० नीं भागा.

पुढील अपूर्णांक दशांश, शतांश, इ. व्यवहारी अपूर्णांक-रूपाच्या दशांशपंक्तींनीं मांडा, आणि मग व्यवहारी अपूर्णांकांच्या रूपांनीं मांडून त्यांचीं अतिसंक्षेपरूपें काढा.

११. ४'३७५; '८१२५; '३७८७५; २३'०४०९६.

१२. '०००६८७५; ५'००९६८७५; '२२२४६४.

पुढील संख्या भागानुबंधपूर्णांकांच्या रूपांनीं व्यवहारी अपूर्णांकांत मांडून, त्यांतील अपूर्णभागांना अतिसंक्षेपरूपें द्या.

१३. १३'०६७५; ९'२२२१८७५; २३'००६८७५.

१४. ८९'०१३१०७२; १२'०८०५६६४०६२२५.

पुढील व्यवहारी अपूर्णांकांस दशांश अपूर्णांकांच्या रूपांत मांडा.

१५. $\frac{७}{१०}$; $\frac{११७}{१०}$; $\frac{२३}{१००}$; $\frac{१०१५}{१०००}$.

१६. $\frac{१}{१००}$; $\frac{२१}{१०००}$; $\frac{११७}{१००००}$; $\frac{६}{१०००००००}$.

१७. २ दशांश + ३ शतांश + ३७ दशलक्षांश.

१८. ११ दशांश + ११ सहस्रांश + ११ लक्षांश.

१९. १३ + ३ सहस्रांश + ५ दशलक्षांश.

२०. १०१ दशांश + १० सहस्रांश + १०१ दशलक्षांश.

पुढील दशांश अपूर्णांकांस व्यवहारी अपूर्णांकांच्या रूपांत मांडा.

२१. " '०३७; '०००२; '२५; '३७५.

२२. '००७५; १'२२५; '१८७५; ३'२२५.

२३. '०००६८७५; '०००९३७५; २३'०३८१२५.

२४. १५'२०३१२५; '००२३४३७५; ४'००७८१२५.

• दशांश अपूर्णांकांची मिळवणी व वजावाकी.

रीति— दिलेल्या संख्यांचीं दशांश चिन्हे उभ्या रांगेत येतील अशा संख्या मांडून, त्यांवरच्या रिकाम्या स्थळीं शून्ये कल्पावीं ह्याणजे एकेकाच नांवाचे अंक प्रत्येक उभ्या रांगेत येतील, अथवा सर्व संख्यांचे समच्छेद होतील.

नंतर पूर्णांकाप्रमाणें एकेकाच नांवाच्या अंकांची' मिळवणी किंवा वजावाकी करून, ते अंक त्यात्याच अंकांखालीं मांडीत जावें,

नंतर दशांश चिन्हाखालींच दशांश चिन्ह करावें.

उदाहरण १ लें. २८१४६, ०९३८, ८, ८७५,
३१२७८८, ४००८७ ह्यांची वेरीज करा.

उदाहरण २ रें. २४१८० आणि १२२३४ ह्यांची वजावाकी करा.

उदाहरण ३ रें. ०४६८, ९६४, १०००८९, ४८२३ आणि ६ ह्यांची वेरीज ३३७२०४ ह्यांतून वजा करा.

उदा. १ लें.	उदा. २ रें.	उदा. ३ रें.
२८१४६	२४१८०	३३७२०४
०९३८	१२२३४	००४६८
८००००	१२२३४	९६४००
८७५०		१०००८९
३१२७८८		४८२३०
४००८७		०६०००
<hr/>		<hr/>
४७०७०९		८६०१७

अभ्यासाकरितां उदाहरणे. ध.

१. ११२७५ + ३४१३२ + ००४१४ + ०००१ + २३००१.
२. ३२१४ + १२ + ३१६१५४ + ०१ + २२१४ + ४५५६२.
३. ००१२१३ + ४५६१३ + २३४००१२ + १४१००५६.
४. १००००१२३ + ३११ + ११७१५४ + २३४३००८ + ०००२.
५. ३२००१ - १२९९९; ३४५ - ०००९८.
६. २३१४१५ - २००८; ३४१२ - २९९९८७.
७. २२०००१ - २९९९९; २४१५६ - २४१४५९८७.

८. ००१ - ०००९९८७; २४ ००४ - ९८७५९६५.
९. १ ०३७४२ - ३७४२; ३ ०५४ - ३०५४.
१०. ०१२३ - ००९०८७; ३ ३३ - २ ९८७६५.
११. ७६५४३२७ - ३७९३०८६ + ९०६९९ - ००९९९ + ३४५.
१२. १६९४५ - २९९४३८७ - ०६७३५ - ०००७ + ९५३ + ०८.
१३. २७ दशांश ३४५ शतांश १७ सहस्रांश आणि ४२५६ दशलक्षांश ह्यांची बेरीज करा.
१४. ३४७ दशसहस्रांश आणि ३४७ दशलक्षांश ह्या संख्या दशांशांत मांडून पहिल्यांत दुसरी वजा करा.
१५. वर्तुळाचा व्यास एक छटला तर वर्तुळाचा परिघ ३ १४ १५ ९२ ६५ ३५ येतो ह्या मानाचे जागी ३ १४ १५ व ३ १४ १६ ह्यांतून कोणते स्थूलमान घेण्यांत चुकी कमी होईल ते सकारण सांगा.

दशांश अपूर्णाकांचा गुणाकार.

रीति.— गुण्य व गुणक हे पूर्णांक कल्पून त्यांचा गुणाकार करावा.

नंतर ह्या दोहोंतील दशांशस्थळांच्या बेरजेइतकीं अंकस्थळे गुणाकारावरचीं मोजून त्यांच्या मागे दशांश चिन्ह करावे.

ह्या बेरजेपेक्षां गुणाकारांतील अंकस्थळे कमी असलीं, तर त्यांच्या डावीकडे तितकीं शून्ये देऊन, त्यांच्या मागे दशांश-चिन्ह करावे.

उदाहरण पहिलें. १ ० ० २ ५ ह्यांस २ ५ ह्यांनीं गुण.

$$\begin{array}{r} १००२५ \\ २५ \\ \hline ५०१२५ \\ २००५० \\ \hline २५०६२५ \end{array}$$

उपपत्ति.— वर दिलेल्या दशांशगुण्यांतील द. चि. ४ स्थळें उजवेकडे सारावें आणि दशांशगुणकांतील द. चि. १ स्थळ उजवेकडे सारावें तेव्हां ते गुण्यगुणक पूर्णांक कल्पितां येतील. या स्थळांवरून पहातां पूर्णांक कल्पिलेला गुण्य दशांश-गुण्याचे १० ००० पट मोठा असला पाहिजे व पूर्णांक कल्पिलेला गुणक दशांशगुणकाचे १० पट मोठा असला पाहिजे.

- आतां गु. प्र. प्र. दशांशगुण्याचीच १० ००० पट केली तर तो गुणाकार दशांशगुणाकाराचे १० ००० पट मोठा येईल आणि गु. प्र. प्र. दशांशगुणाकाचीही १० पट केली तर तो गुणाकार दशांश गुणाकाराच्या १० ००० पटीचे १० पट मोठा येईल. ह्यावरून ह्या पूर्णांकी गुणाकाराला १० ००० × १० हा छेद दिला तर तो इच्छिला दशांशगुणाकार दाखवील. आतां ह्या गुणाकाराला १० ००० × १० हा छेद देण्यासाठी ह्या छेदांतील शून्यांच्या (ह्यणजे गुण्यगुणाकांतील दशांश स्थळांच्या) बेरजेइतकीं स्थलें मोजून गुणाकारांत दशांश चिन्ह केलें पाहिजे. ह्यावरून वरील रीति सिद्ध आहे.

उपपत्ति २ री.— हा गुणाकार व्यवहारी अपूर्णांकाचे आधारें असा येतो कीं,

$$\frac{१००२५}{१००००} \times \frac{२५}{१०} = \frac{२५०६२५}{१०००००} = २५०६२५.$$

ह्यांत गुण्य व गुणक हे पूर्णांक असल्याप्रमाणेंच त्यांचा गुणाकार येतो, आणि गुण्यगुणाकांतील दशांशस्थळांच्या बेरजेइतकीं शून्यें १ वर हा त्याला छेद येतो. किंवा त्या बेरजेइतक्या स्थळांच्या मागें दशांश चिन्ह होतें, ह्यणून ह्याच कृति करण्यास वरील रीतींत सांगितलें आहे.

उदाहरण २ रें. ००४८ ह्यांस ००००१२ ह्यांनीं गुणा, आणि १००५ × ००५ × ००६४ हा गुणाकार करा.

००४८	१००५
००००१२	००५
०००००००५७६ हें उत्तर.	००५०२५
	००६४
	२०१००
	३०१५०
	००००३२१६०० = ००००३२१६ उत्तर.

अभ्यासांकरितां उदाहरणें. न.

१. २२.५ × ३२.१६; ४.४१ × ३३.२१.
२. ०००१ × ००१; ३२.१ × २.३१.
३. ००३२ × २३.४५; ०००२ × ३.०१.
४. २२.५ × ०२४१ × ००२४; ०००३ × ०१ × ५०००००.

$$५. २.७ \times ०.२७ \times ०.२७ \times २७०.$$

$$६. ०.२ \times ०.०४ \times ०.००८ \times ६४०००.$$

$$७. १.१ \times ०.११ \times १.०१ \times ०.१०१.$$

$$८. ०.१३ \times १.६ \times ०.००७ \times ३.०५.$$

९. ३२५ दशांशांस ५४७ दशलक्षांशांनीं गुणा, आणि
१२८ दशसहस्रांशांस ७८१२५ कोट्यांशांनीं गुणा.
पुढील उल्लेखांच्या किंमती काढा.

$$१०. (३७.१ - १९.०८) \times ०.७०३; \quad ३७.१ - १९.०८ \times ०.७०३;$$

$$०.५ + ०.२५ + ०.००२५.$$

$$११. ०.४ \times ०.५ \times ०.००६ \times ०.०००७ \times ८०००००; \quad ०.८४५ \times ०.००१७$$

$$\times ७.४ \times ०.९ \times १००००.$$

दशांश अपूर्णाकाचा भागाकार.

रीति.— भाज्य व भाजक हे पूर्णांक कल्पून त्यांचा भागाकार करावा.

नंतर भाज्यांतील दशांशस्थळांत भाजकांतील दशांशस्थळें वजा करून, त्या बाकीइतकीं भागाकारावरचीं अंकस्थळें डावीकडे मोजून, त्यांच्यामार्गे दशांशचिन्ह करावें.

सूचना.— भाज्यांतील दशांशस्थळें भाजकांतल्याहून कमी असलां, तर तितकीं त्यांवर शून्यें देऊन, मग भागण्यास लागावें.

उदाहरण १ लें.— ०.८०५ ह्यास २.३ ह्यांनीं भागा.

२.३)०.८०५(०.३५ हें उत्तर.

६९

११५

११५

०००

उपपत्ति.— येथें भाज्य पूर्णांक क-

ल्पल्यानें त्याची १००० पट होते,

आणि भाजक पूर्णांक कल्पल्यानें त्याची

१० पट होते. आतां भाज्य १०००

पट मोठा घेतला ह्मणून हा भागाकार १००० पट मोठा असला

पाहिजे (भा. प्र. १ लें). तसेंच भाजक १० पट मोठा घेतला

ह्मणून हा भागाकार १० वा हिस्सा लहानही असला पाहिजे

(भा. प्र. २ रें). ह्यावरून ३५ ह्या भागाकाराला १००० नीं

भागून १० नीं गुणलें ह्मणजे खरा भागाकार येईल. आतां

दशांशांतील नि. २ प्रमाणें ३५ ना १००० नीं भागावेयाचें

- हणजे त्यावरील दशांशचिन्ह भाज्यांतल्या दशांशस्थळाइतकीं स्थळें डावीकडे सारावयाचें (जसें ०३५), आणि ह्या भागाकाराला १० नीं गुणावयाचें हणजे तें दशांशचिन्ह भाजकांतल्या दशांशस्थळांइतकीं स्थळें तेथून उजवीकडे सारावयाचें (जसें ०३५). येथें भाज्य व भाजक हे पूर्णांक कल्पून भागाकार केला, आणि त्यावरचें दशांशचिन्ह भाज्यांतील द. स्थ. — भाजकांतील द. स्थ. इतकीं स्थळें डावीकडे सारल्यानें खरा भागाकार आला, हणून हीच कृति करण्यास वरील रीतींत सांगितलें आहे.

$$\begin{aligned} \text{उपपत्ति २ री. } ८०५ \div २३ &= \frac{८०५}{१०००} \div \frac{२३}{१०} \\ &= \frac{८०५}{१०००} \times \frac{१०}{२३} = ३५ \times \frac{१००}{१०००} \\ &= \frac{३५}{१००} = ०३५. \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

ह्या व्यवहारी अपूर्णांकाच्या रीतींत आपण भाज्य व भाजक ह्यांचा भागाकार (३५ हा) पूर्णांकाप्रमाणेंच उत्पन्न केला. नंतर भाज्यांतील दशांशस्थळांइतक्या १००० ह्या मधल्या शून्यांतून भाजकांतील दशांशस्थळांइतकीं १० मधलीं शून्यें वजा दिलीं, आणि बाकी (२) इतके अंक भागाकारांत (हणजे ३५ त) मोजून त्यांच्या मागे दशांश चिन्ह केलें हीच कृति हरएक उदाहरणांत यावयाची हणून रीति खरी आहे.

उदाहरण २ रें. ८०५ ह्यांस २३ आणि ००२३ ह्यांनीं वेगळालें भागून कारण सांगा.

$$\begin{aligned} \frac{८०५}{२३} &= ३५ \quad \text{व} \quad \frac{८०५}{००२३} = ३५००. \\ \text{कारण } \frac{८०५}{२३} &= \frac{८०५}{१००} \div \frac{२३}{१००} = \frac{८०५}{१००} \times \frac{१००}{२३} \\ &= \frac{८०५}{२३} = ३५. \\ \text{तसेंच } \frac{८०५}{००२३} &= \frac{८०५}{१००} \div \frac{२३}{१००००} = \frac{८०५}{१००} \times \frac{१००००}{२३} \\ &= \frac{८०५}{२३} \times १०० = ३५००. \end{aligned}$$

सूचना—'भागाकार करतांना जेव्हां भाग बरोबर तुटत नाही, तेव्हां भाज्यांकांवर आणखी शून्यें द्यावीं, व तीं भाज्यांकांतील दशांश स्थळांतलींच आहेत असें मानावें, भागाकार

पुरा करतेवेळीं भाजकाच्या निमेपेक्षां अधिक वाकी राहिली, तर तो भाग एकानें वाढवावऱ् हाणजे कसर कमी जाईल.

उदाहरण ३ रें. २५ ह्यांस ३२ ह्यांनीं भाग, आणि १ ह्यास ०१३ ह्यांनीं भाग.

$\begin{array}{r} ३२) २५०००००० (७८१२५ \\ \underline{२२४} \\ २६० \\ \underline{२५६} \\ ४० \\ \underline{३२} \\ ८० \\ \underline{६४} \\ १६० \\ \underline{१६०} \\ ००० \end{array}$	$\begin{array}{r} १०१३) १०००००००० (७६९२३० \\ \underline{९१} \\ ९० \\ \underline{७८} \\ १२१ \\ \underline{११७} \\ ४० \\ \underline{३९} \\ १० \end{array}$
--	--

उत्तर. ७८१२५.

उत्तर. ७६९२३१.

रीति २ री— भाजकांतल्या डावीकडल्या ज्या अंकानें भाग वसविणें असतील त्याचेपुढें द.चि. सारून तो अंक एक करावा. ह्या कृतींत जिकडे जितकीं स्थळें भाजकांतलें दशांश-चिन्ह सारिलें असेल, तिकडे तितकींच स्थळें भाज्यांतलें द.चि. सारावें. नंतर ह्या एकानें भाज्यांतल्या ज्या परिमाणांकाला पहिला भाग वसेल त्याच परिमाणाचा तो भाग समजावा. ह्याणजे आरंभापासूनच प्रत्येक भागाचें स्थळपरिमाण समजत जातें.

उदाहरण. ०१५९५ ह्यांस २७५ ह्यांनीं भागा.

२७५) ०१५९५० (०५८

$$\begin{array}{r} १३७५ \\ \underline{२२००} \\ २२०० \\ \underline{००००} \end{array}$$

उपपत्ति. भाजकाचें द.चि. एक स्थळ उजवेकडे सारल्यानें त्यांतला डावी-कडचा अंक एक होतो. ह्याणून दिलेला

भाज्य व भाजक ह्या दोहोंचींही द. चि. एक एक स्थळ उजवेकडे सारून ते समान पट मोठे केलेले भाज्य भाजक घेतले. भाज्य व भाजक या दोहोंच्या समान पटी केल्या तर भागाकार बदलत नाही. (भा. नि. ६ वा पहा.) ह्याणून वाजूचा भागाकार हा इच्छिलेल्या भागाकाराइतकाच येईल.

आतां २ या एकानें १५ या शतांशांना भागिलें तर ५ हा शतांशांचाच भाग लागेल. कारण २ एक हा गुणक थ ५

हा गुण्य यांचा गुणाकार १५ शतांशांत वजा होण्यासाठी शतांश दाखविणारा आला पाहिजे. गुण्यक एक असला तर गुणाकार गुण्याच्या जातीचा यावयाचा ह्मणून ५ हे शतांशच असले पाहिजेत. यावरून एकूण ज्या परिमाणाला भागावें त्याच परिमाणाला भागाकार यावयाचा असा वहिवाटीचा नियम निघतो. ह्या नियमाप्रमाणें ५ हे शतांशांचे स्थळीं मांडून भागाकार पुढें चालविला तेव्हां ५८ सहस्रांश हें उत्तर आलें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. प.

- १ $१५६२५ \div २५; ०१५६२५ \div २५.$
- २ $१५६२५ \div ०००२५; १५६२५ \div २५०००.$
- ३ $१८१३ \div ०००३७; १७१९९ \div २७३.$
- ४ $९०६५ \div ०४९; ०३ \div ००९.$
- ५ $८ \div ००२; ६७५ \div ७६८.$
- ६ $१५ \div ६२५; १७२८ \div ०१४४.$
- ७ $००१२८ \div ८१९२; १७०८०४५९२ \div ०००२४.$
- ८ $०००२ \div ०१६३; ४ \div ००२५५.$
- ९ $१११ \div ३२७६; ०१२३ \div ३२१.$
- १० $२११७ \div ००७३; ०३२ \div २१३७.$

११. १ ला ०१ नें भागा; ०१००१ ह्यांना ००१ नें भागा; ९२७ ह्यांना ०६ ह्यांनीं भागा; आणि ९९ ना ०००९ ह्यांनीं भागा.

१२. २१३४१९५९६ ह्यांना ०१००१०३ ह्यांनीं भागा; ६२५ ह्याला ०२५ ह्यानें भागा आणि ००१ ह्याला १००१ ह्यांनीं भागा.

१३. २ व २२ शतांश आणि ७४ दशसहस्रांश ह्या संख्या दशांशांत मांडा आणि पहिलीला दुसरीनें भागून भागाकार काढा. पुढील भागाकार संगितलेल्या स्थळांपावेतो करा.

१४. $७६५४३९ \div ३५९२१$ द.स्थ. ७५; $५ \div ७६९१३४२$ द.स्थ. ६.
१५. $०४६ \div ००७६२०८९$ द.स्थ. ४; $३२१६५ \div ००३५२१६$ द.स्थ. ३.

$$१६. ०१३८५ \times ६१३७ \div २७७; ३८३३३३६ \div (८९९ \times २०८).$$

$$१७. ३९९ \times ००७ \div ००००१९; २०५ \times २२४ \div ००४१.$$

$$१८. १५८४०२ + ३६८९ \div ६७२४ \text{ द.स्थ. ६. } २०६५९ \div १८७२ \times ००१ \text{ द. स्थ. ५.}$$

$$१९. \frac{००७५ \times २३}{०१७५}; \frac{४२५५ \times ००६४}{०००३२}; \frac{५३२}{७३२} \text{ चे. } \frac{२१२५}{०४६८७५}$$

ह्यांना सरळ रूपें द्या.

२०. १४६५ ००९५ ३७१५ २८४५७ आणि १६१६८५ ह्यांच्या वेरजेला ०२९६ ह्यांनी भागा.

२१. ३०३३ आणि ०३३७ ह्यांची वेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, व उलट सुलट दोन भागाकार, हे करून ह्या सर्वांची वेरीज सांगा.

२२. $\frac{११८}{१५२} \times \frac{३०४}{२२५}$ ह्यांच्या सरळ रूपाला ००१२५ ह्यांनी भागा.

व्यवहारी अपूर्णाकास दशांश अपूर्णाकाचें रूप देणें.

रीति.— व्यवहारी अपूर्णाकाचे अंशावर पहिलें, दुसरें, इत्यादि शून्यें घेत जाऊन येणाऱ्या भागाकाराला, किंवा एकदम कांहीं शून्यें घेऊन येणाऱ्या भागाकाराला, त्या शून्याइतक्यावाच दहाचा घात छेद जोडावा. ह्या कृत्यांत भाग तुटला तर उत्तर खरें येईल, नाही तर आणिलेल्या एका स्थलपरिमाणापावेतोच उत्तर खरें येईल.

उदाहरण १ लें.— $\frac{१५}{१६}$ ह्यांना दशांशांचें रूप द्या.

$\frac{१६१५००००}{२३७५}$ } उपपत्ति. १५ एकंवर पहिलें शून्य घेतलें, क्षणजे १५ एकंचे दशांश १५० होतात. ह्या दशांशांना १६ एकंनी ९ दशांशांचा भाग लागतो, आणि बाकी ६ ही दशांशांची उरते. ह्या बाकीवर दुसरें शून्य घेतलें, क्षणजे ६ दशांशांचे ६० शतांश होतात. ह्यांना १६ एकंनी ३ शतांशांचा भाग लागतो, आणि बाकी १२ शतांश राहते. ह्याप्रमाणें

पहिलें शून्य घेऊन लावलेल्या भागाला १० चा १ घात हा छेद येतो, दुसरें शून्य घेऊन लावलेल्या भागाला १० चा २ घात हा छेद येतो, इत्यादि ह्मणणें खरें ठरतें.

येथें १५ वर एकदंभ ४ शून्यें घेऊन त्यांचे दशसहस्रांश केलेले कल्पिले तर ह्या दशसहस्रांशांना १६ एकनीं ९३७५ दशसहस्रांशांचा भाग लागला असें ह्मटलें पाहिजे. आणि ह्या भागाकाराला १० चा त्या शून्याइतका ४ घात हा छेद जोडिला पाहिजे.

अथवा अपूर्णांकाचे अंशछेदांना १० च्या समान घातांनीं गुणलें तर त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलणार नाहीं ह्मणून,

$$\frac{१५}{१६} = \frac{१५}{१६} \times \frac{६२५}{१००००} = \frac{९३७५}{१००००} = ०९३७५.$$

ह्याही विचारें वरील कृत्याची उपपत्ति जुळते.

ह्या कृत्यांत अपूर्णांकाला जो छेद असतो तोच छेद त्याचे प्रत्येक स्थळींच्या बाकीला असतो. ह्मणून त्या बाकीची किंमत तेथल्या एका स्थलपरिमाणापेक्षां कमी असते. उदाहरणार्थ वरील कृत्य २ दशांशस्थलांपावेतोंच केलें तर $\frac{१५}{१६} = ०९३\frac{३}{१६}$ येतात, व भागं तुटे तोंपावेतों केलें तर $\frac{१५}{१६} = ०९३७५$ येतात. ह्यांत शतांशस्थळींची बाकी जी १२ तिची किंमत १ शतांश असती, तर ३ चे जागीं ४ हा भाग लागला असता. परंतु हिची किंमत शतांशापेक्षां कमी आहे, ह्मणून पुढील कृत्यांत ह्या बाकीचे जागीं ००७५ आले आहेत. ह्याप्रमाणें कोणत्याही स्थळींच्या बाकीबरोबर त्या स्थलावरची एकंदर दशांशपंक्ति असावयाची. ह्मणून,

नियम १. ला.— कोणत्याही स्थळींच्या बाकीची किंवा स्थलांवरच्या दशांशपंक्तीची किंमत ही त्या स्थळींच्या १ परिमाणापेक्षां कमी असावयाची.

ह्यावरून $\frac{१५}{१६}$ चे जागीं ०९३ ही किंमत घेतली तर $\frac{१}{१००}$ पेक्षां कमी कसर जाईल, व ०९३७ ही किंमत घेतली तर $\frac{३}{१०००}$ पेक्षां कमी कसर जाईल, याप्रमाणें वरील रीति सर्वाशीं खरी आहे.

उदाहरण २ रें.— $\frac{३}{६४}$ ह्यांना दशसहस्रांशापावेतो खऱ्या किंमतीचें दशांशरूप द्या.

$$\frac{३}{६४} = \frac{३}{\frac{६४}{१}} \times \frac{१५६३}{१००००} = \frac{४६८३}{१००००} = ०.४६८३.$$

ह्यांतिल $\frac{३}{६४}$ ची किंमत वरील नियमाप्रमाणें १ दशसहस्रांशापेक्षा कमी आहे, हाणून ०.४६८ हें $\frac{३}{६४}$ चें इच्छिलें रूप आहे. हाणजे दशसहस्रांशापावेतो खऱ्या किंमतीचें रूप आहे.

वरील रीतीचा अर्थ हा आहे कीं, दिलेल्या अपूर्णाकाच्या अंशछेदांना १० चे समान घात गुणक जोडावे, नंतर अपूर्णाकाचा छेद आणि अंशस्थलींचा १० चा घात ह्यांना संक्षेप जाऊन त्या छेदस्थलीं १ राहिला तर दशांशरूपाचा शेवट होईल, आणि छेदस्थलीं दुसरा अंक राहिला तर तें दशांशरूपाचा शेवट होणार नाही.

आतां १० चे अवयव २×५ हे आहेत, हाणून १० च्या कोणत्याही घाताचे अवयव २ चा तेवढा घात $\times ५$ चा तेवढा घात हे असावयाचे. ह्यावरून अपूर्णाकाला अतिसंक्षेपरूप दिलेले असले, व त्याच्या छेदांत २ व ५ ह्यांचेच घात अवयवरूपानें असले, तर त्यांचा संक्षेप जाऊन छेदस्थलीं १ राहिल हाणून,

नियम २ रा.— अतिसंक्षेपरूप दिलेल्या अपूर्णाकाच्या छेदस्थलीं २ व ५ ह्यांचेच घात अवयवरूपानें असले, तर त्यांतील मोठ्या घाता इतक्याव्या स्थलीं त्याचें दशांशरूप संपेल.

उदाहरण ३ रें. $\frac{२१}{१२५००}$ ह्या अपूर्णाकाचें दशांशरूप कितव्या स्थलीं संपेल तें सांगून, ह्याला दशांशरूप द्या.

ह्या अपूर्णाकाच्या छेदाचे अवयव ५×२ हे आहेत. ह्यांपैकी अवयव अंशांत नाही, हाणून ह्याच्या दशांशरूपाचा शेवट ५ व्या स्थलीं होईल, जसा,

$$\begin{aligned} \frac{२१}{१२५.००} &= \frac{२१}{१२५.००} \times \frac{१००००००}{१००००००} = \frac{२१}{५ \times २} \times \frac{५ \times २^५}{१०^५} \\ &= \frac{२१}{१२५} \times \frac{१०००}{१००००००} = \frac{२१}{१} \times \frac{२^३}{१०^५} \\ &= \frac{२१}{१} \times \frac{८}{१००००००} = \frac{१६८}{१००००००} = ०.००१६८. \end{aligned}$$

नियम ३ रा.— अतिसंक्षेपरूपी अपूर्णाकाच्य छेदस्थळीं २ व ५ ह्यांच्या घाताखेरीज अंक असल्या, तर त्यांचें दशांश-रूप कोठेंही संपणार नाहीं, आणि त्या रूपांत त्या अंकापेक्षां कमी स्थळांची अंकपंक्ति पुनः पुनः येत जाईल.

उदाहरणार्थ $\frac{३}{२}$ हा अपूर्णांक घ्या. ह्याचे छेदस्थळीं २.७ हे अवयव आहेत, ह्मणून क्रमिक ७ भागाकारानें दशांश-रूप देतां येतें. पुढचें कृत्य पहा.

$$\left. \begin{array}{r} ४ \overline{) ३००} \\ ७ \overline{) ०७५००००००००} \\ \hline १०७१४२८५७१ \end{array} \right\}$$

३ ना ३^२ नें भागतां हा भागाकार नि. २ प्रमाणें २ दशांश स्थळें येऊन संपावयाचा. परंतु ह्या भागाकाराला ७ नीं भागूं लागलें असतां १० मध्ये ७ हा अवयव नसल्यामुळें प्रत्येक भागापुढें ७ ह्या छेदाची बाकी रहात जावयाची, ह्मणून ह्या भागाकाराचें शेवट कोठेंही होणार नाहीं.

दुसरें ७ नीं भागतांना प्रत्येक वेळची बाकी ७ पेक्षां कमी रहावयाची, ह्मणून फार तर ६ वेळ वेगळाल्या बाक्या राहतील. वरच्या भागाकारांत १, ३, २, ६, ४, ५, ह्या क्रमिक बाक्या राहतात ह्या तपासून पहा. ह्या पुढें पूर्वीची बाकी पुन्हा राहून तिची पूर्वी प्रमाणेंच १० पट व्हावयाची, ह्मणून तिला पूर्वीचेंच भाग पुनः लागेल, व त्यापुढें पूर्वीचीच दुसरी बाकी पुनः येईल, ह्मणून असल्या अनंत अंकांपावेतों चालणाऱ्या भागाकारामध्ये फिरत्या भोंवत्यावरच्या अंकवल्याप्रमाणें एकदा आलेलीच अंकपंक्ति पुनः पुनः येत जाईल हें उघड आहे. ह्या-प्रमाणें वर दिलेला आवर्त दशांशाचा उत्पादक नियम सर्वांशीं खरा आहे.

आवर्त दशांश.

आवर्त दशांश. ज्या अपूर्णाकामध्ये नेमलेलेच अंक तशाच क्रमानें पुनः पुनः येतात, त्याला आवर्त दशांश (भोंवऱ्याचे दशांश) म्हणतात, आणि त्या नेमलेल्या अंकांना आवर्तीक किंवा आवर्तपंक्ति म्हणतात.

लेखनसंकेत. आवर्त दशांश मांडणें असला, म्हणजे त्यांतल्या आवर्तीकावर किंवा आवर्तपंक्तीच्या आद्यंतीच्या अंकांवर टिंबें देतात. ह्या संकेतानें हे दशांश अनंत स्थळांपावेतो मांडले जातात.

उदाहरणार्थ पुढील अपूर्णाकांच्या वरोवरीचे दशांश व त्यांतील आवर्तीक किंवा आवर्तपंक्ति पहा.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} = \cdot \dot{5} & \frac{1}{9} = \cdot \dot{1} \dot{1} \dot{1} \\ \frac{4}{9} = \cdot \dot{4} \dot{4} \dot{4} & \frac{4}{22} = \cdot 2 \dot{2} \dot{7} \\ \frac{3}{6} = \cdot \dot{5} \dot{0} \dot{0} & \frac{3}{27} = \cdot 1 \dot{1} \dot{1} \\ \frac{2500}{27} = 92 \cdot \dot{5} \dot{9} \dot{2} \end{array}$$

शुद्ध आवर्त दशांश.— ज्या अवर्त दशांशांत दशांशचिन्हाशींच आवर्तपंक्तीला आरंभ होतो, त्याला शुद्ध आवर्त दशांश म्हणतात. उदाहरणार्थ वर दिलेले डाव्या बाजूचे दशांश पहा.

मिश्र आवर्त दशांश.— ज्यांत दशांशचिन्हापुढें कांहीं दशांशांक आल्यावर आवर्तपंक्तीला आरंभ होतो, त्याला मिश्र आवर्त दशांश म्हणतात, आणि चिन्हाजवळच्या दशांशांकांना अनावर्तीक किंवा अनावर्तपंक्ति म्हणतात. उदाहरणार्थ वरतीं उजव्या बाजूस दिलेले मिश्र दशांश आहेत आणि त्यांतील ०, २, व १०, हे अनावर्तीक किंवा अनावर्तपंक्ति आहेत.

सूचना १ ली.— वरचीं उदाहरणें व दशांशरूपाचा नि. २ रा व ३ रा ह्यांवरून लक्ष्यांत येईल कीं, छेदस्थळीं २ व ५ ह्यांखेरीज अंक असला तर आवर्तपंक्ति येते, तशीच २ व ५ ह्यांपैकीही कोणाचा घात छेदस्थळीं असला तर त्या घाता-इतक्या अंकांची अनावर्तपंक्ति येते. दुसरें १० चा घात अंशा-

मध्ये अवयव रूपानें असला, तर आवर्तपंक्तीचा आरंभ पूर्णांकांतच होतो (शेवटची संख्या पहा). तरी आवर्तपंक्तीचा आरंभ कोठेंही कल्पितां येतो, ह्मणून तो आपण दशांश चिन्हापासून कल्पितों.

सूचना २ री.— एकाची पट कोणतीही संख्या असते. ह्या धोरणानें जर अंशस्थळीं १ घेऊन त्या अपूर्णांकाला थोडेंसें दशांशरूप दिलें आणि त्या दशांशरूपांतली बाकी त्यावर अपूर्णांक रूपानें भांडली, तर त्या दशांशरूपाची पट करून तें रूप पाहिजे तितकें वाढवितां येतें.

उदाहरण.— $\frac{9}{92}$ ह्यास दशांशरूप द्यावयाचें.

आतां	$\frac{9}{92} = \cdot 05263\frac{3}{92}$
∴	$\frac{3}{92} = \cdot 95769\frac{5}{92}$
व	$\frac{9}{92} = \cdot 0526395769\frac{5}{92}$
∴	$\frac{5}{92} = \cdot 8736842105\frac{5}{92}$
ह्मणून	$\frac{9}{92} = \cdot 05263957698736842105\frac{5}{92}$

ह्याप्रमाणें पुढें करित गेलें असतां दर खेपेस अंक दुपटीनें वाढत जातात.

वरच्या उदाहरणांत १८ स्थळांपलीकडे फिरून तेच ते अंक येऊं लागले, ह्मणून भागाकारांत आवर्तपंक्तीच्या खुणा खालीं दाखविल्याप्रमाणें कराव्या.

$$\frac{9}{92} = \cdot 052639576987368421$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. फ.

पुढच्या प्रत्येक अपूर्णांकाचें दशांशरूप कोणत्या स्थळीं संपेल तें प्रथम ठरवून, नंतर त्यांस दशांशरूपें द्या.

१.	$\frac{2}{50}$;	$\frac{193}{250}$;	$\frac{42}{8}$;	$\frac{9000}{625}$.
२.	$\frac{906}{325}$;	$99\frac{97}{3250}$;	$\frac{4000}{256}$;	$6\frac{3}{96}$.
३.	$6\frac{93}{68}$;	$\frac{97}{928}$;	$\frac{7}{6400}$;	$99\frac{53}{39250}$.
४.	$\frac{9}{592}$;	$\frac{9025}{9028}$;	$\frac{93}{9400}$;	$\frac{7}{5920}$.

$$६. \frac{१५३}{१६} \text{ चे } \frac{११}{६२३} ; ७॥ \text{ चे } \frac{१८}{६२५००} ; १३२ \text{ चे } १ \frac{१}{७५} \text{ चे } \frac{३}{७} .$$

पुढच्या प्रत्येक अपूर्णाकाच्या दशांशरूपांत अनावर्तपंक्ति किती स्थलांची येईल, व आवर्तपंक्तिंत कोणापेक्षां कमी अंक येतील तें ठरवून, त्यांना दशांशरूपें द्या.

$$६. \frac{१३}{२} ; \frac{१०३}{१८०} ; \frac{१२२}{५५} ; \frac{१७}{१३७५} .$$

$$७. \frac{४३}{१४} ; \frac{१११}{२२} ; \frac{२२}{१६६५} ; २३ \frac{५२}{३३३} .$$

$$८. \frac{८९}{९९९९} ; \frac{१२१}{२१} ; १७ \frac{६४०१}{४९५००} ; \frac{४१११}{३३३००} .$$

$$९. \frac{१३५}{३७००} ; \frac{२९७}{२९६०} ; \frac{३७८}{९२५} ; \frac{११३२}{५५५५५} .$$

$$१०. \frac{१}{१७} ; \frac{१}{२३} ; \frac{१}{२२} ; \frac{१}{३१} .$$

पुढील अपूर्णाकांना आवर्तदशांशरूपें द्या, आणि त्यांच्या छेदस्थळींचा १ अंकाची पंक्ति देणारा अंक ९ मध्ये, २ अंकांची पंक्ति देणारा अंक ९९ त, ३ अंकांची पंक्ति देणारा अंक ९९९ त, अशा क्रमानें आढळतात कीं नाहीं तें तपासा.

$$११. \frac{२}{३} ; \frac{४}{३२} ; \frac{४}{३३} ; \frac{८}{३४} ; \frac{१}{३४} .$$

$$१२. \frac{२४}{३३} ; \frac{१३}{२११} ; \frac{१९}{५१३} ; \frac{१}{१३} .$$

$$१३. \frac{२}{३७} ; \frac{५}{१०१} ; \frac{१००}{४१} ; \frac{२५}{२७१} .$$

$$१४. \frac{१}{७} ; \frac{१}{१३} ; \frac{१}{३११} ; \frac{१}{११३७} .$$

आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकाचें रूप देण्याचा प्रकार.

उदाहरणार्थ ३५७ ह्या शुद्ध आवर्त दशांशाला व्यवहारी अपूर्णाकाचें रूप देणें आहे असें कल्पा. आतां,

$$\text{अपूर्णांक} = ३५७ \quad ३५७ \quad ३५७ \quad \text{इ.}$$

$$\therefore १००० \text{ अपूर्णांक} = ३५७ \quad ३५७ \quad ३५७ \quad ३५७ \quad \text{इ.}$$

$$\text{चजाबाकीनें } ९९९ \text{ अपूर्णांक} = ३५७$$

$$\therefore \text{अपूर्णांक} = \frac{३५७}{९९९} .$$

ह्या उदाहरणांत आवर्तपंक्ति ३ अंकांची होती, ह्मणून अपूर्णांकाची १००० पट करून एक आवर्तपंक्ति पूर्णांक केली, ह्मणून वजावार्कीत तीच पंक्ति शिलक राहून तिला ३ दांच ९ छेदस्थळीं आले आहेत. ह्या कृतीनें केवढ्याही आवर्तपंक्तीला व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देतां येईल. ह्मणून,

रीती.— शुद्ध आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचें झाल्यास ते आवर्तीक अंशस्थानीं लिहून त्यांच्या स्थलसंख्येइतके ९ छेदस्थानीं लिहावे.

उदाहरणें.

$$\overset{\cdot}{३}\overset{\cdot}{७}\overset{\cdot}{८} = \frac{३७८}{९९९}$$

$$\overset{\cdot}{०}\overset{\cdot}{३}\overset{\cdot}{७}\overset{\cdot}{८} = \frac{३७८}{९९९९}$$

$$\overset{\cdot}{०}\overset{\cdot}{०}\overset{\cdot}{०}\overset{\cdot}{३}\overset{\cdot}{७}\overset{\cdot}{८} = \frac{३७८}{९९९९९९}$$

सूचना १ ली.— शुद्ध आवर्त दशांशाचे शेजारीं दशांश चिन्हाच्या आलीकडे एकादा पूर्णांक असला, तर तो भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणें मांडावा.

उदाहरणें.

$$३\overset{\cdot}{४} = ३\frac{४}{९}; \quad ५\overset{\cdot}{४}\overset{\cdot}{३} = ५\frac{४३}{९९}$$

सूचना २ री.— दिलेले सर्व अंक उणा दशांश चिन्हाच्या आलीकडचा पूर्णांक, हे अंशस्थानीं लिहून छेदस्थानीं आवर्तीक स्थळांइतके ९ लिहावे.

उदाहरणें.

$$३\overset{\cdot}{४} = \frac{३४-३}{९} = \frac{३१}{९} = ३\frac{४}{९}$$

$$५\overset{\cdot}{४}\overset{\cdot}{३} = \frac{५४३-५}{९९} = \frac{५३८}{९९} = ५\frac{४३}{९९}$$

ह्या रीतीची उपपत्ति पुढील लिहिण्यावरून समजेल.

$$३\frac{४}{९} = \frac{३ \times ९ + ४}{९} = \frac{३(१०-१) + ४}{९} = \frac{३० + ४ - ३}{९} = \frac{३४-३}{९}$$

$$५\frac{४३}{९९} = \frac{५ \times ९९ + ४३}{९९} = \frac{५(१००-१) + ४३}{९९} = \frac{५०० + ४३ - ५}{९९} = \frac{५४३-५}{९९}$$

मिश्र आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकाचें
रूप देण्याचा प्रकार.

उदाहरणार्थ. १४८७२ ह्या मिश्र अपूर्णाकाला व्यव-
हारी अपूर्णाकाचें रूप देणें आहे असें व्या. एथें,

$$\begin{aligned} \text{अपूर्णक} &= १४८७२७२७२७२७२ \text{ इ.} \\ \therefore १००० \text{ अपूर्णाक} &= १४८७२७२७२७२७२७२ \text{ इ.} \\ \text{व} \quad १० \text{ अपूर्णाक} &= १४८७२७२७२७२७२ \text{ इ.} \\ \text{वजावाकीनें ९९० अपूर्णाक} &= १४८७२-१४८ \\ \therefore \text{अपूर्णक} &= \frac{१४८७२-१४८}{९९०} = \frac{१४७२४}{९९०} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

एथें एक आवर्तपंक्ति पूर्णाक व्हावी असा प्रथम गुणक घे-
तला, आणि अनावर्तपंक्ति पूर्णाक व्हावी असा मागून गुणक
घेतला, ह्यामुळे ह्यांच्या वजावाकींत अंशस्थळीं पूर्णाक येऊन
छेदस्थळीं आवर्तपंक्तींतील अंकांइतके ९ आले, आणि त्यांवर
अनावर्तपंक्तींतील अंकांइतकीं शून्ये आलीं. ही कृति हरएक
उदाहरणाला लागू होणारी आहे. ह्मणून,

रीति.— पूर्णाक, अनावर्त, व आवर्त, ह्या तीन पंक्तींच्या
संख्येतून पूर्णाक व अनावर्त ह्या दोन पंक्तींची संख्या वजा
द्यावी, आणि तिला आवर्तांकांइतक्या नवांवर अनावर्तांकां इतकीं
शून्ये चढवून तो छेद द्यावा, ह्मणजे तो इष्ट अपूर्णाक होईल.

उदाहरणें.

$$\begin{aligned} ३४ &= \frac{३४-३}{९०} = \frac{३१}{९०} \\ ०३४ &= \frac{३४-३}{९००} = \frac{३१}{९००} \\ ५४३ &= \frac{५४३-५}{९९०} = \frac{५३८}{९९०} = \frac{२६९}{४९५} \\ ००५४३ &= \frac{५४३-५}{९९०००} = \frac{५३८}{९९०००} \\ २४६ &= \frac{२४६-२४}{९०} = \frac{२२२}{९०} = \frac{२४२}{१०} = २\frac{७}{१०} \end{aligned}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. व.

१. ३; ०५; ५४; ७२९.

२. ०२४; ०४३२; ३००६७५; २०४३२.

३. ३.४९८; ०४४३; १.१४५; ००४४९.

४. ४.०५३९; ०६५३९; २.३४५; ०९.३९८.

५. २.०९०९; ५४९५०; १.०४२८५७९.

६. २.६४२८५७९; ५.१९३९८; ११.२८७.

आवर्त दशांशांची विनकसर कृत्ये.

वर जी आवर्त दशांश अपूर्णाकास व्यवहारी अपूर्णाकाचे रूप देण्याची रीत सांगितली तीवरून असें येतें कीं, जर आवर्तीक ९ हा आहे तर $\frac{९}{९} = १$ होईल. आतां ह्याच्या उलट कृति केल्यानें $१ = ०.९९९९$ इ० आणतां येत नाहींत हें खरें; परंतु थोडेंसें लक्ष दिलें तर ०.९९९ इ० पुष्कळ आवर्तीक घेतले तर त्यांपासून जो दशांशांक येईल त्यांत आणि १ ह्यांत जें अंतर पडणार तें लक्षांत आणण्याजोगें नसतें, ह्मणजे फारच थोडें असतें. पहा,

$$१ - ०.९ = ०.१ = \frac{१}{१०}.$$

$$१ - ०.९९ = ०.०१ = \frac{१}{१००}.$$

$$१ - ०.९९९ = ०.००१ = \frac{१}{१०००}.$$

$$१ - ०.९९९९९९९९९९ = ०.००००००००००१ = \frac{१}{१०००००००००००}.$$

ह्यावरून स्पष्ट लक्षांत येईल कीं, ९ जितके जितके अधिक घ्यावे तितकी तितकी कसर कमी होत जाते. तेव्हां हें उघड आहे कीं, ९ अनंता पावेतो घेत गेलें ह्मणजे शेवटीं कसर शून्य होईल.

ह्याप्रमाणें शेवटीं कसर शून्य होते ह्मणून $१ = ०.९$ कारण ०.९ या आवर्तीकांशानें ०.९९९ इ० अनंत अंकांची पंक्ति सूचित होते. ह्याचप्रमाणें कोणताही आवर्तीक आणि कोणताही व्यवहारी अपूर्णांक यांच्यामधील कसर शून्य होत आहे तर तो अपूर्णांक त्या आवर्त दशांशाबरोबर आहे असें ह्मणतां येईल; कारण आवर्तीक पाहिजे तितके वेळां घेऊन कसर हवी तितकी कमी करितां येते. ह्मणून,

सूचना.— दशांशांत ९ हा आवर्तीक येतो तेव्हां तो पुसून

टाकून मागच्या अंकांत १ मिळविण्यास चिंता नाही. जसें—
 '४९९९९३० = '५. हे खेतीप्रमाणें करून पाहिले तरी येतील.

$$'४९ = \frac{४९}{९०} = \frac{४}{९} = \frac{४९}{९०} = \frac{४९}{९०} = '५.$$

दशांशाचे हिशेब करतांना बाकी सोडावी लागते तेव्हां उत्तर विनकसर मिळत नाही, परंतु आवर्तपंक्ति सांपडली असतां उत्तर विनकसर मिळते.

उदाहरण १ लें. १३.५; २.०२३; १११.०००४; ३.१४९५९;
 २.०२४; ह्यांची बेरीज बरोबर येई अशी करा.

$$\begin{array}{r} १३.५५५५५५५५५५५५५५५५ \\ २.०२५२५२५२५२५२५२ \\ १११.०००४४४४४४४४४४ \\ ३.१४९५९५९५९५९५९५९ \\ २.०२४०२४०२४०२४०२४ \\ \hline १३९.७४६८६८९४०८६६ \end{array}$$

समजुत.— ह्या बेरजेच्या रकमांत मोठी अनावर्तपंक्ति तीन अंकांची आहे, तेव्हां ह्यांच्या

बेरजेत दशांश चिन्हापुढें ३ अंक अनावर्त येतील. ह्या रकमांत, १, २, व ३ अंकांच्या आवर्तपंक्ति असून त्या अंकांचा ल.सा.भा. ६ येतो, तेव्हां ६ अंकांच्या रांगेत एक अंकाच्या पंक्ति ६, दोन अंकांच्या पंक्ति ३, व तीन अंकांच्या पंक्ति २ राहून ६ वे स्थळी ह्या एकंदर पंक्ति पूर्ण होतील. अर्थात ह्यांच्या बेरजेत ६ अंकांच्या आवर्तपंक्ति येतील. ह्यावरून ३ नी ६ = नऊ अंकांपावेतो बेरीज खरी आली पाहिजे. ह्या बेरजेत रकमा थोड्या आहेत, यासाठीं ३ अंक फाजील घेतल्याने ही बेरीज विनचूक येईल, ह्याणून १२ अंकांपावेतो बेरीज केली. ह्या बेरजेत तीन अनावर्तकांपुढें सहा अंकांची आवर्तपंक्ति समग्र मिळाली आहे, हिनें ही बेरीज अनंत अंकांपावेतो विनचूक दाखविली जाईल हें उघड आहे. ह्याणून १३९.७४६८६८९४० हें उत्तर.

'आवर्तपंक्ति मोठी येत असली, तर जितके दशांशस्थळांपर्यंत बेरीज बरोबर पाहिजे त्यांपेक्षां दोन किंवा तीन स्थळे वाढवावी, ह्याणजे बेरीज तितक्या स्थळांपावेतो विनचूक येईल.

उदाहरण: २ रें. १.०२३४९ ह्यांतून '६२८ हे वजा करून बाकी खरी आणा.

$$\begin{array}{r} १०२३४१३४१३ \\ \cdot ६२८८८८८८८ \\ \hline \cdot ३९४५२४५२५ \end{array} \quad \text{उत्तर } \cdot ३९४५२.$$

आवर्त दशांशांचा गुणाकार किंवा भागाकार करणे झाल्यास, त्यांस व्यवहारी अपूर्णाकांचीं रूपें देऊन त्यांत गुणाकार किंवा भागाकार करावा, आणि तदनंतर पाहिजे तर त्यांस दशांश अपूर्णाकांत न्यावें. जसें.—

उ. १ लें. $\cdot २५ \times \cdot ३६ = \frac{२३}{९०} \times \frac{३६}{९९} = \frac{४६}{४९५} = \cdot ०९२.$

उ. २ रें. $\cdot १६ \div \cdot ००२७ = \frac{१५}{९०} \div \frac{२७}{९९००} = \frac{५५०}{९} = ६१.१.$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. भ.

पुढच्या कृत्यांचीं उत्तरें ७ दशांशस्थळांपर्यंत बरोबर पाहिजेत.

१. $\cdot १३८ + \cdot १४२८५७ + २.४१८ + २.०६ + ४२.६३ + \cdot ००८४९७१३३.$

२. $३७.२३ + \cdot २६ + ७.७२ + \cdot २९७ + ३.९७३ + ८ + ४.७५ + ७४.०३६७ + ३२.४१.$

३. $\cdot ३ - \cdot ०६$ आणि $\cdot ०४ - \cdot ००७६९२३८.$

४. $७ - ६.१४२८५७$ आणि $\cdot ०४२ - \cdot ०३६.$

५. $३७.२३ \times \cdot २६$ आणि $७.७२ \times \cdot २९७.$

६. ३.९७३×८ आणि $७४.०३६७ \times ४.७५.$

७. $\cdot ३ \div \cdot ०६$ आणि $\cdot ०४ \div \cdot ७६९२३०.$

८. $७ \div \cdot १४२८५७$ आणि $\cdot ०४२ \div \cdot ०३६.$

संक्षिप्तकृत्ये.

ब्रेरीज वगैरे कृत्यांत कितीही दशांशस्थळें उत्पन्न होत असलीं, तरी देवघेवीचीं जीं लघुतम परिमाणें तीं दोन चार स्थळांपर्यंतच्याच अंकांनीं दाखविलीं जातात, ह्याणून तितकेच अंक उपयोगास लागून त्यांवरील अंक सोडून द्यावे लागतात. उदाहरणार्थ तूप, गूळ वगैरे पदार्थांचा दर शेंरावर ठरतो, तेव्हां ह्या पदार्थांचें वजन १ पैसाभार किंवा $\frac{१}{६}$ शेंर ह्यापावेतोंच देतात घेतात, आणि ह्या पदार्थांचा दर पल्यावर ठरतो तेव्हां ह्यांचें वजन पावशेंर किंवा $\frac{१}{४८}$ पल्ला ह्यापावेतों देतात

आवर्त दशांश.

आवर्त दशांश. ज्या अपूर्णाकामध्ये नेमलेलेच अंक तशाच क्रमाने पुनः पुनः येतात, त्याला आवर्त दशांश (भोंवऱ्याचे दशांश) म्हणतात, आणि त्या नेमलेल्या अंकांना आवर्तीक किंवा आवर्तपंक्ति म्हणतात.

लेखनसंकेत. आवर्त दशांश मांडणे असला, म्हणजे त्यांतल्या आवर्तीकावर किंवा आवर्तपंक्तीच्या आद्यंतीच्या अंकांवर टिंब देतात. ह्या संकेताने हे दशांश अनंत-स्थळांपावेतो मांडले जातात.

उदाहरणार्थ पुढील अपूर्णाकांच्या वरोवरीचे दशांश व त्यांतील आवर्तीक किंवा आवर्तपंक्ति पहा.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} = \cdot \dot{5} & \frac{1}{9} = \cdot \dot{1} \dot{1} \dot{1} \\ \frac{2}{3} = \cdot \dot{6} \dot{6} & \frac{2}{11} = \cdot 2 \dot{2} \dot{7} \\ \frac{3}{7} = \cdot \dot{4} 2 \dot{8} \dot{5} \dot{7} \dot{1} & \frac{3}{17} = \cdot 1 \dot{7} \dot{6} \dot{4} \dot{7} \dot{0} \dot{5} \\ & \frac{2500}{27} = 92 \cdot \dot{7} \dot{7} \dot{7} \end{array}$$

शुद्ध आवर्त दशांश.— ज्या अवर्त दशांशांत दशांशचिन्हाशीच आवर्तपंक्तीला आरंभ होतो, त्याला शुद्ध आवर्त दशांश म्हणतात. उदाहरणार्थ वर दिलेले डाव्या बाजूचे दशांश पहा.

मिश्र आवर्त दशांश.— ज्यांत दशांशचिन्हापुढे कांहीं दशांशांक आल्यावर आवर्तपंक्तीला आरंभ होतो, त्याला मिश्र आवर्त दशांश म्हणतात, आणि चिन्हाजवळच्या दशांशांकांना अनावर्तीक किंवा अनावर्तपंक्ति म्हणतात. उदाहरणार्थ वरती उजव्या बाजूस दिलेले मिश्र दशांश आहेत आणि त्यांतील ०, २, व १०, हे अनावर्तीक किंवा अनावर्तपंक्ति आहेत.

सूचना १ ली.— वरची उदाहरणे व दशांशरूपाचा नि. २ रा व ३ रा ह्यांवरून लक्षांत येईल की, छेदस्थळीं २ व ५ ह्यांखेरीज, अंक असला तर आवर्तपंक्ति येते, तशीच २ व ५ ह्यांपैकीही कोणाचा घात छेदस्थळीं असला, तर त्या घाता-इतक्या अंकांची अनावर्तपंक्ति येते. दुसरे १० चा घात अंशा-

मध्ये अवयव रूपानें असला, तर आवर्तपंक्तीचा आरंभ पूर्णोक्तांतच होतो (शेवटची संख्या पहा). तरी आवर्तपंक्तीचा आरंभ कोठेंही कल्पितां येतो, ह्मणून तो आपण दशांश चिन्हापासून कल्पितों.

सूचना २ री.— एकाची पट कोणतीही संख्या असते. ह्या धोरणानें जर अंशस्थळीं १ घेऊन त्या अपूर्णोक्ताला थोडेंसे दशांशरूप दिलें आणि त्या दशांशरूपांतली बाकी त्यावर अपूर्णोक्त रूपानें भांडली, तर त्या दशांशरूपाची पट करून तें रूप पाहिजे तितकें वाढवितां येतें.

उदाहरण.— $\frac{9}{92}$ ह्यास दशांशरूप द्यावयाचें.

आतां	$\frac{9}{92} = 0.09263\frac{3}{92}$
∴	$\frac{3}{92} = 0.03260\frac{5}{92}$
व	$\frac{9}{92} = 0.0926395760\frac{5}{92}$
∴	$\frac{5}{92} = 0.0543478260\frac{4}{92}$
ह्मणून	$\frac{9}{92} = 0.0926395760\frac{4}{92}$

ह्याप्रमाणें पुढें करीत गेलें असतां दर खेपेस अंक दुपटीनें वाढत जातात.

वरच्या उदाहरणांत १८ स्थळांपलीकडे फिरून तेच ते अंक येऊं लागले, ह्मणून भागाकारांत आवर्तपंक्तीच्या खुणा खालीं दाखविल्याप्रमाणें कराव्या.

$$\frac{9}{92} = 0.0926395760\frac{4}{92}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. फ.

पुढच्या प्रत्येक अपूर्णोक्ताचें दशांशरूप कोणत्या स्थळीं संपेल तें प्रथम ठरवून, नंतर त्यांस दशांशरूपें द्या.

१.	$\frac{2}{50}$;	$\frac{193}{250}$;	$\frac{42}{8}$;	$\frac{9000}{625}$.
२.	$\frac{906}{925}$;	$99\frac{97}{9250}$;	$\frac{4000}{256}$;	$6\frac{3}{96}$.
३.	$6\frac{93}{68}$;	$\frac{97}{928}$;	$\frac{7}{6800}$;	$99\frac{53}{9250}$.
४.	$\frac{9}{592}$;	$\frac{9025}{9028}$;	$\frac{93}{9800}$;	$\frac{7}{5120}$.

$$६. \frac{१५३}{१६} \text{ चे } \frac{११}{६२३} ; ७॥ \text{ चे } \frac{१८}{६२५००} ; १\frac{२}{१२} \text{ चे } १ \frac{१}{७५} \text{ चे } \frac{२}{७} .$$

पुढच्या प्रत्येक अपूर्णाकाच्या दशांशरूपांत अनावर्तपंक्ति किती स्थलांची येईल, व आवर्तपंक्तिंत कोणापेक्षां कमी अंक येतील ते ठरवून, त्यांना दशांशरूपें द्या.

$$६. \frac{१३}{२} ; \frac{१०३}{१८०} ; \frac{१२२}{५५} ; \frac{१७}{१३७५} .$$

$$७. \frac{४१}{१४} ; \frac{१११}{२२} ; \frac{२२}{१६६५} ; २३ \frac{५२}{३३३} .$$

$$८. \frac{८९}{९९९९} ; \frac{१२१}{२१} ; १७ \frac{६४०१}{४९५००} ; \frac{४१११}{३३३००} .$$

$$९. \frac{१३५}{३७००} ; \frac{२९७}{२९६०} ; \frac{३७८}{९२५} ; \frac{११३२}{५५५५५} .$$

$$१०. \frac{१}{१७} ; \frac{१}{२३} ; \frac{१}{२२} ; \frac{१}{३१} .$$

पुढील अपूर्णाकांना आवर्तदशांशरूपें द्या, आणि त्यांच्या छेदस्थळींचा १ अंकाची पंक्ति देणारा अंक ९ मध्ये, २ अंकांची पंक्ति देणारा अंक ९९ त, ३ अंकांची पंक्ति देणारा अंक ९९९ त, अशा क्रमानें आढळतात कीं नाहीं ते तपासा.

$$११. \frac{२}{३} ; \frac{४}{३३} ; \frac{४}{३३} ; \frac{८}{३४} ; \frac{१}{३३} .$$

$$१२. \frac{२४}{३३} ; \frac{१३}{२११} ; \frac{१९}{५१३} ; \frac{३}{१३} .$$

$$१३. \frac{२}{३७} ; \frac{५}{१०१} ; \frac{१००}{४१} ; \frac{२५}{२७३} .$$

$$१४. \frac{१}{७} ; \frac{१}{१३} ; \frac{१}{३११} ; \frac{१}{११३७} .$$

आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकाचें रूप देण्याचा प्रकार.

उदाहरणार्थ ३५७ ह्या शुद्ध आवर्त दशांशाला व्यवहारी अपूर्णाकाचें रूप देणें आहे असें कल्पा. आतां,

$$\text{अपूर्णांक} = ३५७ \ ३५७ \ ३५७ \text{ इ.}$$

$$\therefore १००० \text{ अपूर्णांक} = ३५७ \ ३५७ \ ३५७ \ ३५७ \text{ इ.}$$

$$\text{वजाबाकीनें } ९९९ \text{ अपूर्णांक} = ३५७$$

$$\therefore \text{अपूर्णांक} = \frac{३५७}{९९९} .$$

ह्या उदाहरणांत आवर्तपंक्ति ३ अंकांची होती, ह्मणून अपूर्णांकाची १००० पट करून एक आवर्तपंक्ति पूर्णांक केली, ह्मणून वजावाकींत तीच पंक्ति शिलक राहून तिला ३ दांच ९ छेदस्थळीं आले आहेत. ह्या कृतीनें केवढ्याही आवर्तपंक्तीला व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देतां येईल. ह्मणून,

रीती.— शुद्ध आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचें झाल्यास ते आवर्तीक अंशस्थानीं लिहून त्यांच्या स्थलसंख्येइतके ९ छेदस्थानीं लिहावे.

उदाहरणें.

$$\cdot ३७८ = \frac{३७८}{९९९}$$

$$\cdot ०३७८ = \frac{३७८}{९९९९}$$

$$\cdot ०००३७८ = \frac{३७८}{९९९९९९}$$

सूचना १ ली.— शुद्ध आवर्त दशांशाचे शेजारीं दशांश चिन्हाच्या आलीकडे एकादा पूर्णांक असला, तर तो भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणें मांडावा.

उदाहरणें.

$$३\cdot ४ = ३\frac{४}{९}; \quad ५\cdot ४३ = ५\frac{४३}{९९}$$

सूचना २ री.— दिलेले सर्व अंक उणा दशांश चिन्हाच्या आलीकडचा पूर्णांक, हे अंशस्थानीं लिहून छेदस्थानीं आवर्तीक स्थळांइतके ९ लिहावे.

उदाहरणें.

$$३\cdot ४ = \frac{३४-३}{९} = \frac{३३}{९} = ३\frac{४}{९}$$

$$५\cdot ४३ = \frac{५४३-५}{९९} = \frac{५३८}{९९} = ५\frac{४३}{९९}$$

ह्या रीतीची उपपत्ति पुढील लिहिण्यावरून समजेल.

$$३\frac{४}{९} = \frac{३ \times ९ + ४}{९} = \frac{३(१०-१) + ४}{९} = \frac{३० + ४ - ३}{९} = \frac{३४-३}{९}$$

$$५\frac{४३}{९९} = \frac{५ \times ९९ + ४३}{९९} = \frac{५(१००-१) + ४३}{९९} = \frac{५०० + ४३ - ५}{९९} = \frac{५४३-५}{९९}$$

मिश्र आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णाकाचें
रूप देण्याचा प्रकार.

उदाहरणार्थ. १४८७२ ह्या मिश्र अपूर्णाकाला व्यव-
हारी अपूर्णाकाचें रूप देणें आहे असें व्या. एथें,

$$\begin{aligned} \text{अपूर्णांक} &= १४८७२७२७२७२७२ \text{ इ.} \\ \therefore १००० \text{ अपूर्णांक} &= १४८७२७२७२७२७२७२७ \text{ इ.} \\ \text{व} \quad १० \text{ अपूर्णांक} &= १४८७२७२७२७२७२७ \text{ इ.} \end{aligned}$$

$$\text{वजाबाकीनें ९९० अपूर्णांक} = १४८७२ - १४८$$

$$\therefore \text{अपूर्णांक} = \frac{१४८७२ - १४८}{९९०} = \frac{१४७२४}{९९०} \text{ हे उत्तर.}$$

एथें एक आवर्तपंक्ति पूर्णांक व्हावी असा प्रथम गुणक घे-
तला, आणि अनावर्तपंक्ति पूर्णांक व्हावी असा मागून गुणक
घेतला, ह्यामुळे ह्यांच्या वजाबाकींत अंशस्थळीं पूर्णांक येऊन
छेदस्थळीं आवर्तपंक्तींतील अंकांइतके ९ आले, आणि त्यांवर
अनावर्तपंक्तींतील अंकांइतकीं शून्ये आलीं. ही कृति हरएक
उदाहरणाला लागू होणारी आहे. ह्मणून,

रीति.— पूर्णांक, अनावर्त, व आवर्त, ह्या तीन पंक्तींच्या
संख्येंतून पूर्णांक व अनावर्त ह्या दोन पंक्तींची संख्या वजा
द्यावी, आणि तिला आवर्तांकांइतक्या नवांवर अनावर्तांकां इतकीं
शून्ये चढवून तो छेद द्यावा, ह्मणजे तो इष्ट अपूर्णांक होईल.

उदाहरणें.

$$\begin{aligned} \cdot ३४ &= \frac{३४ - ३}{९०} = \frac{३१}{९०} \\ \cdot ०३४ &= \frac{३४ - ३}{९००} = \frac{३१}{९००} \\ \cdot ५४३ &= \frac{५४३ - ५}{९९०} = \frac{५३८}{९९०} = \frac{२६९}{४९५} \\ \cdot ००५४३ &= \frac{५४३ - ५}{९९०००} = \frac{५३८}{९९०००} \\ २४६ &= \frac{२४६ - २४}{९०} = \frac{२२२}{९०} = \frac{२४२}{९०} = २\frac{७}{१५} \end{aligned}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ब.

$$१. \cdot ३; \cdot ०५; \cdot ५४; \cdot ७२९.$$

$$२. \cdot ०२४; \cdot ०४३२; ३००६७५; २०४३२.$$

३. ३४९८; ०४४३; ११४५; ००४४९.

४. ४०५३९; ०७६५३९; २३४५; ००९३९८.

५. २०९०९; ५४९५०; १०४२८५७९.

६. २६४२८५७९; ५१९३९८; ११२८७.

आवर्त दशांशांची विनकसर कृत्ये.

वर जी आवर्त दशांश अपूर्णाकास व्यवहारी अपूर्णाकाचें रूप देण्याची रीत सांगितली तीवरून असें येतें कीं, जर आवर्तक ९ हा आहे तर $\frac{१}{९} = १$ होईल. आतां ह्याच्या उलट कृति केल्यानें $१ = ०.९९९९$ इ० आणतां येत नाहींत हें खरें; परंतु थोडेंसें लक्ष दिलें तर ०.९९९ इ० पुष्कळ आवर्तक घेतले तर त्यांपासून जो दशांशांक येईल त्यांत आणि १ ह्यांत जें अंतर पडणार तें लक्षांत आणण्याजोगें नसतें, ह्मणजे फारच थोडें असतें. पहा,

$$१ - ०.९ = ०.१ = \frac{१}{१०}.$$

$$१ - ०.९९ = ०.०१ = \frac{१}{१००}.$$

$$१ - ०.९९९ = ०.००१ = \frac{१}{१०००}.$$

$$१ - ०.९९९९९९९९९९९ = ०.०००००००००००१ = \frac{१}{१००००००००००००}.$$

ह्यावरून स्पष्ट लक्षांत येईल कीं, ९ जितके जितके अधिक व्यावे तितकी तितकी कसर कमी होत जाते. तेव्हां हें उघड आहे कीं, ९ अनंता पावेतो घेत गेलें ह्मणजे शेवटीं कसर शून्य होईल.

ह्याप्रमाणें शेवटीं कसर शून्य होते ह्मणून $१ = ०.९$ कारण ०.९ या आवर्तकानें ०.९९९ इ० अनंत अंकांची पंक्ति सूचित होते. ह्याचप्रमाणें कोणताही आवर्तक आणि कोणताही व्यवहारी अपूर्णांक यांच्यामधील कसर शून्य होत आहे तर तो अपूर्णांक त्या आवर्त दशांशाबरोबर आहे असें ह्मणतां येईल; कारण आवर्तक पाहिजे तितके वेळां घेऊन कसर हवी तितकी कमी करितां येते. ह्मणून,

सूचना.— दशांशांत ९ हा आवर्तक येतो तेव्हां तो पुसून

$$\begin{array}{r} १०२३४१३४१३ \\ \cdot ६२८८८८८८८ \\ \hline ३९४५२४५२५ \end{array} \quad \text{उत्तर } \cdot ३९४५२.$$

आवर्त दशांशांचा गुणाकार किंवा भागाकार करणें झाल्यास, त्यांस व्यवहारी अपूर्णाकांचीं रूपें देऊन त्यांत गुणाकार किंवा भागाकार करावा, आणि तदनंतर पाहिजे तर त्यांस दशांश अपूर्णाकांत न्यावें. जसें.—

उ. १. लें. $\cdot २५ \times \cdot ३६ = \frac{२३}{९०} \times \frac{३६}{९९} = \frac{४६}{४९५} = \cdot ०९२.$

उ. २. रें. $\cdot १६ \div \cdot ००२७ = \frac{१५}{९०} \div \frac{२७}{९९००} = \frac{५५०}{९} = ६१.१.$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. भ.

पुढच्या कृत्यांचीं उत्तरे ७ दशांशस्थळांपर्यंत बरोबर पाहिजेत.

१. $\cdot १३८ + \cdot १४२८५७ + २.४१८ + २.०६ + ४२.६३ + \cdot ००८४९७१३३.$

२. $३७.२३ + \cdot २६ + ७.७२ + \cdot २९७ + ३.९७३ + ८ + ४.७१ + ७४.०३६७ + ३२.४१.$

३. $\cdot ३ - \cdot ०९$ आणि $\cdot ०४ - \cdot ००७६९२३८.$

४. $७ - ६.१४२८५७$ आणि $\cdot ०४२ - \cdot ०३६.$

५. $३७.२३ \times \cdot २६$ आणि $७.७२ \times \cdot २९७.$

६. ३.९७३×८ आणि $७४.०३६७ \times ४.७१.$

७. $\cdot ३ \div \cdot ०९$ आणि $\cdot ०४ \div \cdot ७६९२३०.$

८. $७ \div \cdot १४२८५७$ आणि $\cdot ०४२ \div \cdot ०३६.$

संक्षिप्तकृत्ये.

बेरीज वगैरे कृत्यांत कितीही दशांशस्थळें उत्पन्न होत असलीं, तरी देवघेवीचीं जीं लघुतम परिमाणें तीं दोन चार स्थळांपर्यंतच्याच अंकांनीं दाखविलीं जातात, ह्यागून तितकेच अंक उपयोगास लागून त्यांवरील अंक सोडून द्यावे लागतात. उदाहरणार्थ तूप, गूळ वगैरे पदार्थांचा दर शेरावर ठरतो, तेव्हां ह्या पदार्थांचें वजन १ पैसाभार किंवा $\frac{१}{६}$ शेर ह्यापावेतोंच देतात घेतात, आणि ह्या पदार्थांचा दर पल्यावर ठरतो तेव्हां ह्यांचें वजन पावशेर किंवा $\frac{१}{४८}$ पल्ला ह्यापावेतों देतात

घेतात. रुपयाची देवघेव १ पै किंवा $\frac{3}{4}$ रुपया ह्यापावेतोंच होते. तशीच पौंदाची देवघेव १ फार्दिंग किंवा $\frac{1}{4}$ पौंद ह्यापावेतोंच करितां येते. ह्यावरून लक्षांत येईल कीं, उत्तराचा एकं जर तूप गूळ वगैरे पदार्थांचा शेर असला तर उत्तर शतांशापावेतों पुरें होईल. उत्तराचा एकं जर तूप, गूळ, वगैरे पदार्थांचा पल्ला असला, किंवा रुपया अगर पौंद असला, तर तें उत्तर सहस्रांशापावेतों पुरें होईल. तसेंच उत्तराचा एकं टन असला, व तें उत्तर १ पौंद किंवा $\frac{1}{2}$ टन ह्यांपावेतों वारकाव्यानें पाहिजे असलें, तर त्या उत्तरांत चार दशांशस्थळें घेतलीं ह्मणजे पुरे होतील. अर्थात असल्या हरएक उदाहरणांत ह्या आवश्यक स्थलांवरची संख्याही निरुपयोगी ह्मणून सोडून दिली पाहिजे.

कसर.— आवश्यक स्थलावरील संख्येचा पहिला अंक जर ४ किंवा त्याहून लहान असला, तर त्या संख्येची किंमत आवश्यक स्थलपरिमाणाच्या अर्धापेक्षां कमी असते, ह्मणून ती संख्या कसर (क्षुल्लक) ह्मणून सोडून देतात. परंतु आवश्यक स्थलावरील संख्येचा पहिला अंक जर ५ किंवा त्याहून मोठा असला, तर त्या संख्येची किंमत आवश्यक स्थलपरिमाणाच्या अर्धापेक्षां अधिक असते. अर्धाहून अधिक किंमत सोडल्यापेक्षां अर्धाहून कमी किंमत फाजील घेण्यांत चूक कमी होते, ह्मणून त्या संख्येवद्दल १ हातचा कसरेचा ह्मणून आवश्यक स्थलीं मिळवून मग ती संख्या सोडून देतात. उदाहरणार्थ— २६८४५१ ही संख्या शेरांची असली, तर २६८ शेर हें उत्तर समजतात. परंतु ही संख्या जर पळे, रुपये किंवा पौंद दाखविणारी असली, तर २६८५ पळे, रुपये, किंवा पौंद, हें उत्तर समजतात. एथें आवश्यक स्थलपरिमाणाच्या अर्धापेक्षां कमी संख्या पहिल्या उदाहरणांत सोडून दिली आहे, व दुसऱ्यांत फाजील घेतली आहे. ह्या सोडून दिलेल्या व फाजील घेतलेल्या संख्येला कसर ह्मणतात.

ह्यावरून संक्षिप्त कृत्याचें लक्षण असें होतें कीं,— जरूर न-

सलेल्या स्थलांतून हातचे व कसरेचा हे अंक घेऊन जरूर असलेल्या स्थलापावेतोंच खरें कृत्य करतात, तेव्हां ह्या कामापुरत्या कृत्याला संक्षिप्तकृत्य ह्मणतात.

संक्षिप्त बेरीज व वजाबाकी.

रीति.— दिलेल्या संख्या दशांशाखालीं दशांश, शतांशाखालीं शतांश, अशा मांडून त्यांच्या खालीं आडवीं रेष काढावी, आणि त्यांतील आवश्यक स्थलांपुढें उभी रेष काढावी.

ह्या उभ्या रेषेपुढच्या एक दोन स्थलींच्या अंकांची बेरीज अगर वजाबाकी करून, तींतून हातचे व कसरेचा अंक घ्यावा, आणि मग रेषेच्या डावीकडे वहिवाटीप्रमाणें कृत्य करून त्यांतील ते अंक मांडीत जावें. उदाहरणार्थ पुढील कृत्ये पहा.

बेरीज.

वजाबाकी.

२ दशांश स्थलांपावेतों.

४ दशांश स्थलांपावेतों.

३१४	१५
२७७	९७
५४५	७८
५४३	७७
६२९२८	

५२३४५६	३४
७६६६६	६६
४४६७९०	

संक्षिप्त गुणाकार.

रीति.— प्रथम गुण्य मांडावा. गुणाकारांत जितकीं दशांश स्थळें पाहिजे असतील तितकीं स्थळें गुण्यांत चिन्हापासून उजवीकडे मोजून त्या अंकावर खूण करावी.

ह्या खुणेच्या अंकाखालीं गुणकांतील एक येईल, अशा बेतानें गुण्यांकांखालीं गुणकांक उलट मांडावे. गुणकांतले उजवीकडील पूर्णांक गुण्यांकापुढें वाढले; तर त्या गुण्यांकांवर शून्यें द्यावीं, आणि शेवटच्या गुणकांकापुढें उभी रेष काढावी.

नंतर प्रत्येक गुणकांकानें त्यावरच्याच्या उजवीकडील तेव्हा अंकास गुणून, त्या गुणाकारावरचा अंक रेषेपुढें मांडावा, आणि त्यांतील हातचे घेऊन त्यावरील अंकांपासूनचा गुणाकार रेषेच्या डावीकडे मांडावा.

सर्व गुणाकार मांडले हणजे संक्षिप्त बेरजेच्या रीतीने त्याची बेरीज घ्यावी, आणि इच्छिलेल्या स्थळीं दशांश चिन्ह करावें.

सूचना.— गुणाकार तंतोतंत पाहिजे असला, तर तेव्हाच्या गुणाकारांत त्या पलीकडून हातचे आणून ते मिळवीत जावें, अथवा गुणाकारांत एक स्थळ जास्ती उत्पन्न करावें.

उदाहरण.— ०९६४७२५३ ह्या संख्येला ६३०८९४२ ह्या संख्येने गुणून, तो गुणाकार २ दशांश स्थलांपावेतो खरा आणा.

ह्या उदाहरणांतील वहिवाटींतल्या रीतीचा संपूर्ण गुणाकार क. खालीं दिला आहे, आणि वरील रीतीचा कामापुरता किंवा संक्षिप्त गुणाकार ख. खालीं दिला आहे. हे दोन गुणाकार परस्परांच्या तुलनेने पहा.

क.	ख.
०९६४७२५३	०९६४७२५३
६३०८९४२	२४९८३६
५७८८३५९८	५७८८३
२८९४९७५९	२८९४
७७९७८०२४	७७९
८६८२५२७७	८६
३८५८९०९२	४
९९२९४५०६	
६९०६४०३५९२६३२६	६९०६४

उपपत्ति.— गुण्याला गुणकानें त्याखालच्या भारीपरिमाणाच्या अंकापासून गुणिलें, तर ते गुणाकार एकेक अंक पुढें सरतसे मांडले पाहिजेत. ह्याप्रमाणें केलेला गुणाकार क. खालीं दिला आहे.

गुणकांतील अंक उलट मांडले, तर ते अंक डाव्या क्रमानें घेऊन त्यांचे गुणाकार क. येथील नमुन्यानेच एकाखालीं एक मांडतां येतील, हणून ख. येथील संक्षिप्त कृतींत गुण्याखालीं गुणक उलट करून मांडला आहे.

क. खालीं २ दशांश स्थळांपुढें दिलेली उभी रेष पहा. ह्या रेषेच्या उजवीकडून प्रत्येक गुणाकारांतले हातचे, सर्वांच्या

वेरजेंतले हातचे, व येईल तर कसरेवदल हातचा, हे कामापुरते अंक घेऊन रेघेमागचें संपूर्ण कृत्य^५ केलें पाहिजे. ह्मणून इतक्या पुरतेच अंक ख. खालच्या संक्षिप्त कृत्यांत उत्पन्न करून मांडले आहेत. ते असें.—

एकने ज्या स्थलपरिमाणास गुणावें त्याच स्थलपरिमाणाचा गुणाकार यावयाचा. ह्मणून इष्टस्थलाखालीं एक (३) मांडून, त्यानें त्यावरच्या (६) ह्या इष्टस्थलांकापासून मागे अंक गुणीत जाऊन, तो गुणाकार उभ्या रेघेच्या डावीकडे दुसऱ्या रांगेंत मांडला आहे.

गुण्यगुणकांतून एकाची पट घेऊन दुसऱ्याचा तितकाच हिस्सा घेतला, तर गुणाकारांत वदल व्हावयाचा नाही.— ह्यावरून इष्टस्थलाचा १० वा हिस्सा जे सहस्रांश त्यांना एकचे १० पट जे दहं त्यांनीं गुणिलें, तर तो गुणाकार इष्टस्थलींचे शतांशच दाखवील. ह्मणून इष्टस्थला पुढच्या सहस्रांशाखालीं दहं मांडून, त्यानें त्यावरच्या (४) पासून डावीकडे अंक गुणून, तो गुणाकार उभ्यारेघेपासून डावीकडे पहिल्या रांगेंत मांडला आहे. ह्याच रीतीनें राहिलेले अंकांनीं गुणून त्यांचे गुणाकार दुसरी, तिसरी, इ० रांगेंत मांडले आहेत.

इष्टस्थलीं त्यापुढील अंकांच्या गुणाकारांतले हातचे मिळाले पाहिजेत, ह्मणून तेव्हापुढचा अंक गुणून त्यांतून हातचे व्यावयाचे असें सांगितलें आहे. इष्टस्थलापुढच्या (ह्मणजे उभ्या रेघेपुढच्या) दुसऱ्या स्थळाच्या वेरजेंतलेही हातचे इष्टस्थलीं येत असतात, ह्मणून तेव्हापुढील अंकांच्या गुणाकारांतून कसरे-सुद्धां हातचे घेण्यास सांगितलें आहे. ह्याप्रमाणें ही संक्षिप्त-रीति जरूरी पुरतेंच काम करण्याला सुरेख आहे. गुणाकार तंतोतंत पाहिजे असला; तर हें कृत्य उभ्या रेघेपुढें आणखी १ अंक मांडून करावें ह्मणजे झालें.

संक्षिप्त भागाकार.

रीति १ ली.— भाजकाखालच्या अंकानें भाज्याखालच्या अंकास भाग वसवून, त्या अंकांच्या स्थलपरिमाणांच्या भागाका-

रावरून त्या पहिल्या भागाचें स्थलपरिमाण शोधवें. नंतर ह्या पहिल्या भागाच्या स्थलपरिमाणापासून इच्छिलेल्या स्थलपरिमाणापावेतो जितके अंक भरतील, तितके अंक भाजकाखालचे ठेवून त्यांवरील अंक कापून टाकावे. अथवा भाजकांत अंक कमी असले, तर त्यांवर शून्ये चढवून पुरे करावे. नंतर ह्या भाजकानें पहिला भाग वसवून, शिल्लक राहिलेले भाज्यावरचे अंक कापून टाकावे, व कमी आल्यास शून्ये देऊन पुरे करावे. अथवा.—

रीति २ री.— भाजकांतलें दशांश चिन्ह सारून त्याखालचा भाग वसविण्याचा अंक एकं करावा. ह्या करण्यांत भाजकांतलें दशांश चिन्ह तिकडे जितकीं स्थळें सारावें लागलें असेल, तिकडे तितकीं स्थळें भाज्यांतलें दशांश चिन्ह सारावें. नंतर भाज्यांतल्या ह्या चिन्हापुढें इच्छिलेल्या दशांशस्थलाइतकीं स्थळें मोजून, त्या स्थलांकावर खूण करावी. स्थलें कमी असल्यास शून्ये देऊन पुरीं करावीं. ह्या खुणेपावेतो भाज्याला भाग वसविण्याला जेवढा भाजक पाहिजे असेल, तेवढा भाजक कापून घेऊन त्यानें पहिला भाग वसवावा, आणि भाजक अपुरा असला तर बाकीवर खुणेचा अंक घेतला जाईल तो पावेतो भाग वसवावे.

उपरांत बाकीवरतीं भाज्यावरील एक अंक घेऊन भाग वसविण्यावद्दल भाजकावरील एक अंक कापून भाग वसवावा, आणि त्या भागानें कापलेला अंक गुणून त्या गुणाकारांतील कसरेसुद्धां हातचें पुढील गुणाकारांत मिळवून तो गुणाकार वजा करावा. ह्याप्रमाणें शेवटापावेतो करीत जावें.

शेवटचा अंक कापतेवेळची शेवटची बाकी त्या अंकाच्या अर्धापेक्षां अधिक असली, तर शेवटील भाग १ नें वाढवावा, आणि इच्छिलेलीं दशांशस्थळें मोजून त्या मार्गे दशांश चिन्ह करावें.

उदा. ६१६४ ह्या संख्येला १९६४७२५३ ह्या संख्येनें भागून भागाकार ३ दशांशस्थळांपावेतो आणा.

०९, ६, ४, ७, २, ५३) ६९०३, ४००० (६३, ८९४

एथें ९ ह्या दशांशांनीं ६९
ह्या एकना ६चा भाग लागतो.

$$\frac{\text{एकं}}{\text{दशांश}} = \frac{९}{९} = \frac{९०}{९} = \text{दशक,}$$

यास्तव ६ हा पहिला भाग दश-
कांचा लागतो. ह्या भागाकारांत

पूर्णांक २ स्थलें व दशांश ३ स्थलें मिळून ५ स्थलें आणिलीं
पाहिजेत, ह्याणून भाजक ५ अंकी कापून घेतला. त्याला पुरा
पडण्यासाठीं भाज्य ६ अंकी पुरा करून घेतला, आणि पहिला
भाग ६ दशकांचा बसविला. अथवां.—

२ व्या रीतीप्रमाणें ९ हे एकं करण्यासाठीं भाजकांतलें
दशांश चिन्ह एक स्थळ उजवीकडे सारून, भाज्यांतलेंही दशांश
चिन्ह एक स्थळ उजवीकडे सारिलें. त्यापुढें इच्छिलेलीं ३ द-
शांश स्थलें करून घेतलीं. ह्या ६ अंकी भाज्याला भाग बसवि-
ण्याला भाजक ५ अंकी कापून घेतला, आणि त्यानें पहिला भाग
६ दशकांचा बसविला.

उपरांत भाग ६ व कापलेला अंक ५ ह्यांच्या गुणाकारांतून
कसरेसुद्धां हातचे घेऊन, खालच्या संख्येचा गुणाकार केला
आणि तो भाज्यांतून वजा दिला. बाकी ३७५६५ आली हि-
जवर नवा अंक घेण्याबद्दल भाजकावरचा एक अंक • कापला
आणि त्या भाजकानें दुसरा भाग ३ चा बसविला. असा वरील
रीतीनेंच हा संक्षिप्त भागाकार केला.

संक्षिप्त गुणाकारांत जे पोटगुणाकार एका क्रमानें उत्पन्न क-
रून मिळविले होते, त्याच रकमा वरील भागाकारांत त्याच क्रमानें
उत्पन्न करून वजा केल्या आहेत, ह्याणून ही कृति व हिची
उपपत्ति हीं संक्षिप्त गुणाकाराच्या धोरणानें कळून येतील.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. म.

१. २७०३५०३५, ३७६७६, २५९६५९६, आणि

००३४५, ह्यांची बेरीज शतांशापावेतों खरी आणा. आणि ३१५८५७१४२ व ४७९६०३७५ ह्यांची वजावाकी शतांशापावेतों खरी आणा.

२. सहस्रांशापावेतों खरी येईल अशा वेतानें ०७९५, ६१७३४८३३, ०८३९१, व २५८०८०८०, ह्यांची बेरीज करा, आणि ३१८३५४६ व ९३६८१ ह्यांची वजावाकी करा.

३. ३८५३८५, १९७७७७७७, ०५, व ६७८९७८९७, ह्यांची बेरीज आणि २३३४५३४५३४ व ७८८८८८८८ ह्यांची वजावाकी ह्या ५ दशांशस्थळांपावेतों खऱ्या आणा.

४. ४८०१४९३६ ह्यांस २७२४१६ ह्यांनी गुणा; असें कीं गुणाकारांत दशांशस्थळें ४ येतील.

५. २४९०३०४८ ह्यांस ०५७३२८६ ह्यांनी गुणा; अशा रीतीनें कीं गुणाकारांत दशांशस्थळें ५ येतील.

६. ३२५७०१४२८ ह्यांस ७२१८३१९३ ह्यांनी गुणा; गुणाकारांत दशांशस्थळें ३ पुरे आहेत.

७. १४४२१३ ह्यांस २१८१३ ह्यांनी गुणा; असें कीं गुणाकारांत दशांशस्थळें २ येतील.

८. २८२३१०३ ह्यांस ३५६७४ ह्यांनी गुणा; असें कीं गुणाकारांत १ दशांशस्थळ येईल.

९. १११२३७८ ह्यांस १२२५३८९७ ह्यांनी गुणा; गुणाकारांत दशांशस्थळ मुळींच नको.

१०. १२३ × ५३४ ह्या गुणाकारांत दशांशस्थळ १ पुरे.

११. ०२३४ × ८७३४; ०२३४ × ७८५४; ०००१ × ०००९८; १९९९९ × ९९९९; ह्या गुणाकारांत दशांशस्थळ एक पुरे आहे.

१२. ७८१३ × ०००९७; १०० × ०००१; ह्यांत २ दशांशस्थळें आलीं हणजे पुरे आहेत.



१३. पुढील भागाकारांत ३ दशांशस्थळें येतील असें करा.
 $१५७.०३८ \div ७९.६१८$; $२६.८१४ \div ७.२९$; $३४.०७६ \div १८.७२९$.

१४. पुढील भागाकारांत दोन दशांशस्थळें येतील असें करा.
 $७.४१०३६ \div २१९.६$; $३२.०७९ \div ६८४५४.७$; $१३.७२ \div ४.१९६$.

१५. पुढील भागाकारांत तीन दशांशस्थळें आणा.
 $१४.७२३ \div ६.१८$; $२.०९८ \div ६३.५७२$; $१४.०७२ \div २.१९८$.

१६. पुढील भागाकारांत दोन दशांशस्थळें आणा.
 $०.०७१ \div ०.६९३७$; $८.१२४७३ \div ६.२३८९$; $५१.२४७ \div ८१३७६५$.

१७. पुढील भागाकार एक दशांशस्थळापावेतो करा.
 $३.५६८९ \div २७४३२$; $०.१६५४१ \div ७१९८$; $३१.२७५ \div ६८५५४$.

पुढील उत्तरे (अगर किंमती) त्यांत सांगितलेल्या दशांशस्थळांपावेतो खरी आणा.

१८. $१.०५०६२५^२$; $१.०५०६२५^३$; $१.०५०६२५^६$ हीं प्रत्येक ४ दशांशस्थळांपावेतो आणा.

१९. $१.०३७५^४$ आणि ९८७.६२५×१.०३७५^४ हीं कृत्ये ५ दशांशस्थळांपावेतो करा.

२०. $१.०४२५^५$ आणि $३५७.६ \div १.०४२५^५$ ह्यांचीं उत्तरे ४ दशांशस्थळांपावेतो खरी आणा.

२१. $\frac{३२५.७५}{०.४५}$; $\frac{१}{१.०४५^८}$; $\frac{३२५.७५}{०.४५} \left\{ १ - \frac{१}{१.०४५^८} \right\}$; हीं ५ दशांशस्थळांपावेतो खरी आणा.

साधारण प्रश्न.

२२. $\frac{१}{३} (६\frac{१}{३} + २\frac{२}{३} - ३)$ ह्या उल्लेखाला दशांशाचें रूप द्या. आणि $७ + \frac{३}{१}$ चे $८२५ + ४.१३$ ह्याला व्यवहारी अपूर्णाकाराचें रूप द्या.

२३. $(\frac{३}{२५}$ चे $२.४५ - \frac{१}{१०}$ चे $०.२) \div १०००$ हा उल्लेख दशांशांत मांडा.

२४. पुढच्या उल्लेखांतील लघुतम कोणता व महत्तम कोणता तें सांगा.

(१) $\frac{२}{३} + \frac{३}{४}$; (२) १.४१४२१; (३) $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{५}{७}$.

२६. १०.०१ आणि ०.०११ ह्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, व उलटसुलट दोन भागाकार, यांची बेरीज सांगा.

२६. ३२२९.१६×१.०४७५^४ ह्यांची सहस्रांशापर्यंत खरी किंमत काढा.

२७. पुढील संख्या महत्वाच्या क्रमाने मांडा.

(१) $\frac{३३३}{१०६}$; (२) $३ + \frac{१}{७ + \frac{१}{१६}}$; (३) ३.१४१५९२६.

२८. १३५३.६ आणि २३१.४८; २९.७५ आणि ११३.९; ३६.७९५ आणि ५७.९८; व ३७६.१०३४ आणि १०८१; ह्यांचे दृढभाजक काढा.

सूचना:— दिलेल्या संख्यांची दशांश स्थळे समान करावी (नि. ३), नंतर त्या संख्या पूर्णांक समजून त्यांचा दृढभाजक काढावा, आणि त्यांत तितकी दशांश स्थळे मोजून दशांश चिन्ह करावे. कारण दोन संख्यांचे जे परिमाण असेल, तेच परिमाण त्यांच्या दृढभाजकांचेही असावयाचे.

२९. पुढच्या उल्लेखाला सहा स्थळांपावेतो दशांशरूप द्या.

$$१. \frac{१}{५} + \frac{१}{५^२} + \frac{१}{५^३} + \frac{१}{५^४} + \dots$$

सूचना:— पहिले पद दशांशरूप देऊन मांडावे नंतर त्याला ५ नीं भागून ती संख्या त्याचेच खाली मांडावी अशा क्रमाने इच्छिल्या स्थळांपावेतो खरी किंमत काढावी.

$$२. \frac{१}{७} + \frac{१}{७^२} + \frac{१}{७^३} + \frac{१}{७^४} + \dots$$

$$३. \frac{१}{१०^३} \times \left\{ १ - \frac{३}{१०^२} + \frac{३ \cdot ४}{१ \cdot २} \cdot \frac{१}{१०^४} - \frac{३ \cdot ४ \cdot ५}{१ \cdot २ \cdot ३} \cdot \frac{१}{१०^६} \right\}.$$

एथे कंसातील प्रत्येक पदाला दशांश रूप क्रमाने देत जावे.

$$४. १ + \frac{१}{१ \cdot २} + \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३} + \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} + \dots$$

एथे पहिल्या पदाला २ नीं भागून २ रे पद, त्याला ३ नीं भागून ३ रे पद, अशा क्रमाने संख्या उत्पन्न कराव्या.

$$५. \frac{१}{५} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{५^३} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{५^५} + \frac{१}{७} \cdot \frac{१}{५^७} + \frac{१}{९} \times \frac{१}{५^९} + इ०.$$

प्रथम $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{५^३}$, $\frac{१}{५^५}$, इ० ह्यांची दशांशरूपे क्रमानें उत्पन्न करावीं, नंतर ह्यांच्यापासून इच्छिलेल्या पदांचीं रूपे उत्पन्न करून मिळवावीं.

$$६. १६ \times \left\{ \frac{१}{५} - \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{५^३} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{५^५} - \frac{१}{७} \cdot \frac{१}{५^७} + \dots \right\} = \frac{४}{२३२}.$$

प्रथमतः कंसांतील १ लें, ३ रें, ५ वें, अशा विषम पदांना दशांशरूपे देऊन तीं मिळवावीं; नंतर २ रें, ४ थें, ६ वें, इत्यादि सम पदांना दशांशरूपे देऊन तीं मिळवावीं. नंतर ह्यांच्या अंतराला १६ नीं गुणावें, आणि शेवटीं $\frac{४}{२३२}$ याचें दशांशरूप त्यांतून वजा करावें.

दशांश अपूर्णाकाचा रूपभेद किंवा विविधांशी संबंध.

पूर्वी जे व्यवहारी अपूर्णाकाच्या रूपभेदाचे नियम सांगितले, तेच दशांशाला लागू होतात. फरक मिळून इतकाच कीं, व्यवहारी अपूर्णाकाचे छेद प्रत्यक्ष असतात, आणि दशांश अपूर्णाकाचे छेद दशांशचिन्हानें दर्शविलेले असतात.

प्रकार १ ला.— दशांशाची हलक्या परिमाणांत किंमत काढण्याचा, आणि त्याला हलक्या परिमाणाचें रूप देण्याचा.

रीति.— एकंच्या जागीं त्याच्या बरोवरीची हलक्या परिमाणांची संख्या ठेवावी.

ह्या संख्येनें नुसते दशांश गुणून द० चिन्ह केलें, तर त्या दशांशाची पूर्णाकांत किंमत येईल. नंतर त्या संख्येनें पुढचे पूर्णाकही गुणून त्यांत ती किंमत मिळविली, तर त्या एकंदर संख्येला त्या हलक्या परिमाणाचें रूप येईल.

उदाहरण १ लें.— १ रुपयाचे '७५ ह्यांचे पावले करा.

$$'७५ रु. = '७५ \times ४ पा. = ३'०० पा. हें उत्तर.$$

उदाहरण २ रें.— २'६५४ खंडी ह्यांच्या पायली करा.

आणि १ दिवसाचे '५४९६'७५ ह्यांचे तास, मिनिते आणि सेकंद करा.

उदाहरण १. लें.

२६५४ खं.

२०

५३०८० मण.

१२

६३६९६ पा. हैं उत्तर.

उदाहरण २ रें.

५४९६७५ दि०

२४

१३१९२२०० तास.

६०

७९१५३२००० मिनितें.

६०

४७४९१०९२०००० सेकंद हैं उत्तर.

उदाहरण ३ रें.— १ रुपयाचे ६ आणि ४ खंडींचे ७ ह्यांच्या हलक्या परिमाणांत किंमती काय? खंडी बाराळी समजा.

$$६ \text{ रु.} = \frac{६}{२} \text{ रु.}$$

$$= \frac{२}{३} \times १६ \text{ आ.}$$

$$= १० \frac{२}{३} \text{ आ.}$$

$$\frac{२}{३} \text{ आ.} = \frac{२}{३} \times १२ \text{ पै.}$$

$$= ८ \text{ पै.}$$

७*

४

३१ खं.

२०

२२ म.

१२

२६ पा.

∴ उत्तरें { ६ रु. = १० आ. ८ पै. आणि
४ खं. चे ७ = ३ खं. २ म. २६ पा.

उदा. ४ थें.— ३ खं. ४ म. ह्यांचे ७५ ह्यांची पूर्णांकांत किंमत काढा.

$$३ \text{ खं. } ४ \text{ म. यांचे } ७५ = ३२ \text{ खं. चे } ७५ = २४ \text{ खं.}$$

व

$$४ \text{ खं.} = ४ \times २० \text{ म.} = ८० \text{ म.}$$

∴ ३ खं. ४ म. ह्यांचे ७५ = २ खं. ८ म. हैं उत्तर.

* आवर्त अंकांवर तेच अंक जरूरी पुरते कल्पावे, आणि त्यांपासून हाताने व मांडण्याने आवर्त अंक हे खरे उत्पन्न करून घ्यावे.

उदा. ५ वें.— ५३४७९५ टन आणि ८४४७९९६ पौंद ह्यांच्या पूर्णांकांत किंमती काढा.

५३४७९५ टन	८४४७९९६ पौंद.
२०	२०
६९५९०० हं.वे.	१६८९५८३३ शि.
४	१२
३८३६ का.	१०७५ पे.
२८	
२३४०८ पौंद	∴ १६ शि. १० ^३ / _४ पे. ही इ. किं.
१६	
६५२८ औंस.	
१६	
८४४८ द्राम.	

∴ ५ ट. ६ हं. वे. ३ का. २३ पौं. ६ औं. ८४४८ द्रा. ही इ. किं.

प्रकार २ रा.— हलक्या परिमाणाच्या दशांशाला भारी परिमाणाचें दशांशरूप देण्याचा.

रीति.— हलक्या परिमाणाच्या जागीं त्याच्या बरोबरीची भारी परिमाणाची किंमत ठेवावी, किंवा हलक्या परिमाणाच्या दशांशाला तीं परिमाणें त्यावरच्या परिमाणांत जितकीं राहतात त्या संख्येनें भागावें. हा क्रम इच्छिलेल्या परिमाणापावेतो चालवावा हाणजे इच्छिलेलें रूप येईल.

उदा. १ लें.— ४९३९४.५ रेसांचे रुपये करा.

$$\begin{aligned}
 ४९३९४.५ रे &= ४९३९४.५ \times \frac{१}{१००} पा. = ४९३.९४५ पा. \\
 &= ४९३.९४५ \times \frac{१}{४} रु. \\
 &= १२३.४८६२५ रु. हें उत्तर.
 \end{aligned}$$

उदा. २ रें.— ३.५ शेर ह्यांच्या खंडी करा, आणि ५ आणे ७॥ पै ह्यांना रुपयाचें दशांशरूप द्या.

$$\begin{array}{r|l}
 १० & ३.५ \text{ शेर.} \\
 ४ & ३५ \text{ धडे.} \\
 २० & ०८७५ \text{ मण.} \\
 & ००४३७५ \text{ खं.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 १२ & ७.५ \text{ पै.} \\
 १६ & ५.६२५ \text{ आ.} \\
 & ३५१.५६२५ \text{ रु. हैं उत्तर.}
 \end{array}$$

काहीं उदाहरणांत उतरती व चढती अशा दोन्ही भाजणांची गरज लागते ह्मणून वरच्या दोन्ही प्रकारच्या रीतियोजाव्या लागतात.

उदा. ३ रें.— २२५ वारुळी खंडीच्या सोळुली खंडी करा. यांत साधारण परिमाण पायली आहे ह्मणून वारुळी खंडीच्या पायली करून मग सोळुली खंडीच्या पायली केल्या.

$$\begin{aligned}
 २२५ \text{ वा. खं.} &= २२५ \times २० \text{ वा.म.} = ४५०० \text{ वा.म.} \\
 &= ४५० \times १२ \text{ पा.} = ५४०० \text{ पा.} \\
 &= ५४० \times \frac{१}{१६} \text{ सो.म.} = ३३७५ \text{ सो.म.} \\
 &= ३३७५ \times \frac{१}{२०} \text{ सो.खं.} \\
 &= १६८७५ \text{ सो.खं. हैं उत्तर.}
 \end{aligned}$$

उदा. ४ थें.— ५ फर्लिंग १८ पोल ३ यार्ड २ फूट ११'४ इंच ह्यांना १ मैलाच्या, व २३ मैलांच्या, दशांशांचीं रूपें द्या, आणि ७८९३६ गिनींना १ पौंदाच्या दशांशाचें रूप द्या.

$$\begin{array}{r|l}
 १२ & ११'४ \text{ इंच.} \\
 ३ & २.९५ \text{ फूट.} \\
 & ३.९८३ \text{ यार्ड.} \\
 ११ & ७.३६६ \\
 ४० & १८.७२४ \text{ पो.} \\
 ८ & ५.४६८१०६ \text{ फा.} \\
 & ६८३५१३२५७ \text{ मैल हैं १ लें उत्तर.} \\
 १३ & ३.४१७५६६२८७ \\
 & २६२८८९७१४४५२२ \text{ हैं २३ मै. रूप व २ रें उत्तर.}
 \end{array}$$

दशांशाचा रूपभेद किंवा विविधांशी संबंध. ९५

उदा. ५ वें.- २ पाँ. १५ शि. ९ $\frac{३}{४}$ पे. $\frac{२}{३}$ फा. हे
१ गिनीचा केवढा दशांश आहेत? आणि ४॥ गिनीचा के-
वढा दशांश आहेत?

$$\begin{array}{r|l} ४ & ०.२४ \text{ फा.} \\ \hline १२ & ९.६ \text{ पे.} \\ \hline २१ \left\{ \begin{array}{l} ३ & ५५.८ \text{ शि.} \\ ७ & १८.६ \end{array} \right. & \begin{array}{l} २.६५७१४२८५ \text{ हे एका गिनीचे.} \\ \hline ९ & ५.३९४२८५७१ \\ \hline & ५९.०४७६९ \text{ हे } ४\frac{१}{२} \text{ गिनींचे.} \end{array} \end{array}$$

उदा. ६ वें.- १२ औंस १५ द्राम ह्यांचे दशांशांमध्ये
त्राय पौंद करा.

$$\begin{array}{r|l} १६ & १५ \text{ द्रा.} \\ \hline १६ & १२.९३७५ \text{ औंस.} \\ \hline & ८०८५९३७५ \text{ पाँ. अवार्डुपाईज.} \\ \hline & ७००० \text{ ग्रेन.} \\ \hline २४ \left\{ \begin{array}{l} ८ & ५६६०.१५६२५ \\ ३ & ७०७.५१९५३१२५ \\ २० & २३५.८३९८४३७५ \text{ पेनिवेट.} \\ १२ & ११.७९९९२१८७५ \text{ औंस त्राय.} \end{array} \right. & \begin{array}{l} ९८२६६६०१५६२५ \text{ पौंद त्राय हें उत्तर.} \end{array} \end{array}$$

उदा. ७ वें.- १३ शि. $६\frac{३}{४}$ पे. ह्यांना पौंदाचे दशांश
रूप द्या, आणि ८ पाँ. १३ शि. $६\frac{३}{४}$ पे. ह्यांचे दशांशांत पौंद करा.

$$\begin{array}{r|l} ४ & ३ \text{ फा.} \\ \hline १२ & ६.७५ \text{ पे.} \\ \hline २० & १३.५६२५ \text{ शि.} \end{array} \quad \begin{array}{l} ६\frac{३}{४} \text{ पे.} = ६.७५ \frac{१ \text{ शि.}}{१२} = ५.६२५ \text{ शि.} \\ १३.५६२५ \frac{१ \text{ पाँ.}}{२०} = ६.७८१२५ \text{ पाँ.} \end{array}$$

६.७८१२५ पाँ.

$$\therefore \text{ उत्तरें } \left\{ \begin{array}{l} ८ \text{ पाँ. } १३ \text{ शि. } ६\frac{३}{४} \text{ पे.} = ८.६७८१२५ \text{ पाँ.} \\ १३ \text{ शि. } ६\frac{३}{४} \text{ पे.} = ६.७८१२५ \text{ पाँ.} \end{array} \right.$$

हा रूपभेद रेघांतील निमपटींसारख्या हिस्सेरशीदीनेंही
करितां येतो.

उदा. ८ वें.— ३ रूड २६ पोल ह्यांना १ एकराचें दशांश रूप द्या.

$$\begin{array}{l}
 १ \text{ रूड} \\
 ३ \text{ रूड} \\
 २० \text{ पोल} \\
 ४ \text{ पोल} \\
 २ \text{ पोल}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 १ \text{ एकराचा } \frac{१}{४} = \cdot २५ \text{ एकर.} \\
 \phantom{१ \text{ एकराचा}} = \frac{३}{४} \text{ एकर.} \\
 १ \text{ रूडचा } \frac{१}{२} = \cdot १२५ \text{ ,,} \\
 १ \text{ ,, } \frac{१}{१०} = \cdot ०१२५ \text{ ,,} \\
 \frac{१}{३०} \text{ रूडचा } \frac{१}{२} = \cdot ००६२५ \text{ ,,}
 \end{array}
 \right\}$$

∴ ३ रू. २६ पो. = $\frac{८९३७५}{१०००}$ एकर हें उत्तर.

उदा. ९ वें.— ३ रूड २६ पो. २८ $\frac{१}{२}$ यार्दांना ३ एकर.

१ पो. ९ $\frac{३}{४}$ चौ.यार्दांचें दशांशरूप द्या.

३ रू. २६ पो. २८ $\frac{१}{२}$ यार्द.

१२ रू. १ पो. ९ $\frac{३}{४}$ यार्द.

$$\begin{array}{r}
 ४० \\
 १४६३ \text{ पो.} \\
 \underline{३०४} \\
 ४४०८ \frac{३}{२} \\
 \underline{३६३} \\
 ४४४५ \text{ यार्द.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 ४० \\
 ४८३३ \text{ पो.} \\
 \underline{३०४} \\
 १४४३९ \frac{३}{४} \\
 \underline{१२०४} \\
 १४५६० \text{ यार्द.}
 \end{array}$$

पण $\frac{४४४५}{१४५६०} = \frac{८८९}{२९१२} = \frac{१२७}{४१६} = \frac{१२७}{८४३३}$

$$\begin{array}{r}
 ८ \overline{) १२७} \\
 ४ \overline{) ५५८७५} \\
 १३ \overline{) ३९६८७६}
 \end{array}$$

३०५२८८४६१५३ हें इच्छिलें रूप.

तिसरा प्रकार.— एका देशच्या परिमाणास दुसऱ्या देशच्या परिमाणांत न्यावयाचा.

रीति.— सांगितलेल्या परिमाणांचे जातीपैकीं जें परिमाण इच्छिलेल्या परिमाणाचे जातीच्याशीं ताडलेलें असेल, त्या परिमाणांत पहिल्यानें दिलेल्या परिमाणाचें रूपांतर करावें. नंतर त्यास ताडलेल्या परिमाणांत न्यावें; आणि त्यांतून इच्छिलेले परिमाणांत आणावें.

उदा. १ लें.- १०॥ आप्यांचा १ शिलिंग समजून १५ रुपयांचे पोंड करा.

$$\begin{array}{r}
 १५ रु. \\
 \text{०} \quad \frac{\text{०} १६}{२४०} \text{ आणे.} \\
 \text{४} \\
 \hline
 ४२ \text{ पैसे } \left\{ \begin{array}{l} ६ | ९६० \text{ पाव आणे.} \\ ७ | १६० \\ \hline २० | २२८५७१४२ \text{ शिलिंग.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

११४२८५७१ पोंड हें उत्तर.

उदा. २ रें.- १.५ अ. १.४ मि. २.५ से. इतक्यांचीं चटिका पळें करा. १ अ. = २.५ घ.

$$१.५ \text{ अ. } १.४ \text{ मि. } २.५ \text{ से.} = १.५२४०२७ \text{ अ.}$$

$$१.५२४०२७ \times २.५ \text{ घ.} = ३.८१००६९४ \text{ घ.}$$

$$= ३ \text{ घ. } ४८ \text{ प. } ३६ \text{ वि.}$$

उदा. ३ रें.- खंडी १२॥२॥ धान्याचे विलायती टन करा. पुण्याची एक प्रायली १॥ ग्यालन बरोबर आहे. सोळूलें माप.

खं. म. पा.

$$१२॥२॥ \text{ खंडी} = १२ \quad १२ \quad ८$$

$$= ४०४० \text{ पायल्या.}$$

$$= ४०४० \times १\frac{१}{४} \text{ ग्यालन.} = ५०५० \text{ ग्यालन.}$$

$$\therefore ५०५० \times \frac{१}{८} \text{ बु.} = ६३१.२५ \text{ बु.}$$

$$६३१.२५ \times \frac{१}{८} \text{ का.} = ७८.९०६२५ \text{ का.}$$

$$७८.९०६२५ \times \frac{१}{५} \text{ टन.} = १५.७८१२५ \text{ टन. हें उं.}$$

उदा. ४ थें.- वरील उदाहरणावरून पुण्याच्या खंडीशी विलायती टन ताडून दाखवा.

$$१२॥२॥ \text{ खं.} = १२॥२.५$$

$$= १२.५ \text{ खं.} + ०.१२५ \text{ खं.}$$

$$= १२.६२५ \text{ खं.}$$

हणून १२६२५ खं. = १५७८१२५ टन.

∴ १ खं. = $\frac{१५७८१२५}{१२६२५}$ टन. = १२५ टन.

किंवा १०० खंडी = १२५ टन होतील. हें उत्तर.

उदा. ५ वें.— २१ शिलिंगांचे $\frac{३}{४}$, एका ग्रीटचे $\frac{३}{४}$ आणि ७ शि. २ पे. यांचे $\frac{३}{४}$ यांची बेरीज करून तिला पौंडांचें रूप द्या.

	शि.	पे.
२१ शि. $\times \frac{३}{४} = \frac{४२}{४}$ शि.	= ८	४८
१ ग्री. $\times \frac{३}{४} = ४$ पे. $\times \frac{३}{४} = ०$		३०
७ शि. $\times \frac{५}{२} = \frac{३५}{२}$ शि.	= १७	६०
२ पे. $\times \frac{५}{२} = \frac{१०}{२}$ पे.	= ०	५०

व एकंदर... १ पौं. ६ शि. ६८ पे.

∴ इच्छितरूप = १ पौं. ६५६ शि. = १३२८३ पौं. हें उत्तर.

उदा. ६ वें.— १० मोत्यांचें वजन $३॥$ रति आहे. तर १०३ रुपये एके चवास या भावानें एक्या मोत्याची किंमत काय झाली ?

सूचना.— समान मोत्यांचें वजन रतींत घेऊन, त्या रतींच्या वर्गाला $\frac{५५}{६६}$ नीं गुणतात. ह्या गुणाकाराला त्या मोत्यांनीं भागलें हणजे तितक्या मोत्यांचे चव येतात, व मोत्यांचे वर्गानें भागलें हणजे १ मोत्याचे चव येतात.

आतां $३॥ = ३५$

$$३५ \times ३५ = १२२५$$

$$१२२५ \times \frac{५५}{६६} = ७०२$$

$७०२ \div १०^२ = ०७०२$ हे एका मोत्याचे चव झाले.

$$०७०२ \times १०३५ = ७२३०६ \text{ रु.}$$

= ११ आ. ६८२७५२ पै. हें उत्तर,

∴ एका मोत्याची किंमत $॥\equiv\|१$ सरासरी.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. य.

१. एका पौंडाचे ०२८१२५ यांची किंमत हलके परिमाणांत काढा.

२. ३ पौं. २ शि. ६ पे. यांचे १'६०५ यांची किंमत हलके परिमाणांत काढा.

३. ३६५१ दिवसांचे २'८१ ह्यांतून ५३ अवरांचे $\frac{३}{४}$ वजा करा.

४. एका चौरस यार्डाचे ४'७५ आणि ७ चौ.फूट यांची बेरीज करा.

५. तीन एकरांचे $\frac{७}{६}$ चे $\frac{३}{४}$ यांतून २'००८७५ चौ.यार्ड वजा करून, बाकींत ३॥ चौ. फुटांचे ०'२२७ हे मिळवा आणि बेरीज सांगा.

६. एका हंड्रेडवेटाचे ०'८५०७६ आणि एका पौंडाचे ०'०७३२५ यांच्या बेरजेस टन यांचें रूप द्या.

७. ०'०२३१ गिनि, यांत अर्ध्या क्रौनचे ०'१९ मिळवा आणि उत्तर गिनींत आणा.

८. ११२ दंड, २ हात यांस कोसांचें रूप द्या.

९. ५॥ गुंजांचे ०'७८५४ यांस तोळ्याचें रूप द्या.

१०. २ दि. ३ अ. हे १ मा. १५ दि. यांचा कितवा अंश आहेत.

११. २५ हातांचे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चे यार्ड किती होतील ?

१२. एका चांद्रमासाचें मान २९ दि. ३१ घ. ५०'१२ पल्लें इतकें आहे. एका वर्षांत ह्यणजे ३६५'२५ दिवसांत चांद्रमास किती पुरे होतील, व वर दिवस किती शिल्लक राहतील ?

मध्यममान किंवा सरासरी.

मध्यममान.— एका जातीच्या अनेक संख्यांच्या जर्गी ज्या संख्येच्या तितक्या आवृत्ति घेतल्या, तर त्यांची बेरीज त्या अनेक संख्यांच्या बेरजेइतकी येते, तिला त्या अनेक संख्यांचें मध्यममान किंवा सरासरी संख्या ह्यणतात. आणि त्या अनेक संख्यांना स्पष्ट मानें किंवा स्पष्ट संख्या ह्यणतात.

उदाहरणार्थ.— २ व ३ ह्या दोन स्पष्ट संख्या घेतल्या, तर त्यांचें मध्यम मान २॥ ही संख्या दाखविते. ह्या उदाहर-

णावरून अनेक स्पष्ट संख्यांचें मध्यममान कसें काढावें ती रीति उघड दिसून येते. जशी.—

मध्यममान शोधण्याची रीति.— स्पष्ट संख्यांच्या बेर-जेला स्पष्ट संख्या किती आहेत हें दाखविणाऱ्या संख्येनें भागावें, ह्मणजे तो भागाकार त्या सर्वांचें मध्यममान किंवा सरासरी दाखवील.

उदाहरण १ लें.— एका सहाव्या इयत्तेच्या वर्गांत एक मुलगा २० वर्षांचा आहे, ४ मुलगे १८ वर्षांचे आहेत, ८ मुलगे १७॥ वर्षांचे आहेत, आणि १२ मुलगे १६ वर्षांचे आहेत; तर त्या सर्वांचें मध्यम वय काय?

या वर्गांत एकंदर २५ मुलगे आहेत. ह्मणून त्यांचें

$$\text{मध्यम वय} = \frac{२० \text{ एक} + १८ \text{ चोक्र} + १७ \cdot ५ \text{ अठ्ठे} + १६ \text{ बारीं}}{२५}$$

$$= \frac{२० + ७२ + १४० + १९२}{२५} = \frac{४२४}{२५} = १६ \cdot ९६$$

उदाहरण २ रें.— एका रेलवेस्टेशनाचें माहेवार उत्पन्न खाली दिलें आहे, त्यावरून त्या स्टेशनाचें दरमहाचें सरासरी उत्पन्न काढा.

ज्यानेवारी	२४५	८१४	८६
फेब्रुवारी	२०१	८१२	८४
मार्च	२८५	८११	८९
एप्रिल	३०५	८२	८११
मे	३४६	८३	८८
जून	४००	८१५	८९

$$\begin{array}{r} ६ | १७८५ \quad ८१२ \quad ८११ \\ \hline २९७ \quad ८१० \quad ८१५ \end{array}$$

उदाहरण ३ रें.— एका कुरणांतलें गवत कापण्यास १२ मनुष्ये लाविलीं होती. पैकीं ७ जणांनीं दाट जागेंतलें गवत ६३० पेंढ्या एका दिवसांत कापलें, ४ जणांनीं तुरळक जागेंतलें गवत २१० पेंढ्या एका दिवसांत कापलें, आणि एका जणानें

त्या सर्वोवर मुकादमी करून त्यांपासून काम घेतलें. ह्यावरून प्रत्येक मनुष्य दररोज किती गवत सरासरीनें कापतो.

७ जणांच्या पेंढ्या ६३०

४ " " " " २१०

१ मुकादमाच्या " ०

१२ जणांच्या " ८४०

∴ प्रत्येकाच्या सरासरी " ७० हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. र.

१. १४, २६, ९, १८, १३, २४, २७, ३९;
ह्यांचें मध्यममान काढा.

२. १६००, २७६, ९७४, ०, ३३६, ८४५, १२३९;
ह्यांचें मध्यममान काय येईल ?

३. तीन शहरांतील लोकांच्या संख्या अनुक्रमें ३४७२९, ४६२३८, आणि ८७२९६, अशा आहेत, तर ह्या प्रत्येक शहरांत सरासरी वस्ती काय आहे ?

४. १५॥, ३६॥॥, १७^५/_८, ०, १०^३/_८, ७४^१/_३, २८।
आणि ३३ ह्या स्पष्ट संख्यांची मध्यम संख्या सांगा.

५. १२^३/_३, - २१, ४९^३/_४, ०३४, ३^१/_८, ०,
२४॥ आणि १२^७/_३ ह्यांची सरासरी काढा.

६. एका शालेंत सोमवारापासून अनुक्रमें ८०, ९०, ९५, ९२, ८९, ९७ ह्याप्रमाणें मुलें हजार होतीं, तर त्यांची आठवड्याची सरासरी हाजरी सांगा.

एकमानगणित.

हें एकाच्या आधाराचें गणित आहे. ह्यानें साधें प्रमाण व संयुक्त प्रमाण (नैराशिक व बहुराशिक) हीं न शिकतां हरएक प्रकारचे हिशेब करितां येतात. ह्या कारणानें अलीकडे इंग्लंड, फ्रान्स, वगैरे विद्येच्या शिखरास चढलेल्या देशांतील लोक प्रमाणगणिताचे जागीं ह्या एकमान गणिताचाच उपयोग मुख्य-त्वेकरून करूं लागले आहेत. ह्यांच्या नमुन्यानें ह्या गणिताचा प्रचार आपल्याही लोकांत वाढला पाहिजे, आणि ३ व्या इय-

त्तेपासून ६ व्या इयत्तेपावेतो हें गणित सरास वापरतां आलें पाहिजे, ह्याकरितां हें प्रकरण ह्या पुस्तकांत प्रमाण गणिताचे पूर्वी नवीन घालून ह्यांत पुष्कळ प्रकारची उदाहरणें शिस्तवार सोडवून दाखविली आहेत. ह्यांकडे शिक्षकांनी व विद्यार्थ्यांनीही अवश्यमेव लक्ष्य पुरवावें.

कोणत्याही प्रश्नांत मान व त्याचें फल हे संबंधी राशि जोडीने दिलेले असतात. तिसऱ्या दिलेल्या राशीला इच्छाराशि ह्मणतात, आणि त्याचें संबंधी फल मागितलेलें असतें त्याला इच्छाफल ह्मणतात. ह्यांतील इच्छाराशि हा मानराशीची पट दाखविणारा असतो, तसेंच इच्छाफल हें फलाची तीच पट दाखविणारें असतें, ह्मणून ह्यांना त्या त्या राशींचे इच्छित बदल ह्मणतात किंवा इच्छित विकार ह्मणतात.

मानराशीच्या फलापासून एका मानाचें फल शोधावें, एका मानाच्या फलापासून अनेक मानांचें फल शोधावें, ह्या एकाच्या आधाराच्या गणिताला यथें एकमानगणित ह्मटलें आहे. ह्यांत सम आणि व्यस्त असे दोन प्रकारच्या संबंधांचे प्रश्न येतात.

सम.— मानाची पट केली कीं फलाची तितकीच पट व्हावी, आणि मानाचा हिस्सा केला कीं फलाचा तितकाच हिस्सा व्हावा, असल्या एकमार्गी नात्याला किंवा एकमार्गी नात्याच्या प्रश्नाला सम ह्मणतात.

प्रश्न १ ला.— १२ बैलांना ५४० रुपये पडतात, तर एका बैलाला काय पडेल ?

आतां १२ बैल. = ५४० रु.

∴ १ बैल. = $\frac{५४०}{१२}$ रु. = ४५ रु. हें उत्तर.

ह्या प्रश्नांत १२ बैल हें मान व ५४० रु. हें त्याचें फल आहे. १ बैल हा इच्छाराशि मानराशीचा बदल (हिस्सा) आहे आणि त्याची किंमत (रुपयाचा बदल) मागितला आहे. ह्यांत मानाचा १२ वा हिस्सा करतांच फलाचा तितक्याचाच हिस्सा झाला, ह्मणून हा संबंध सम होय.

व्यस्त.— मानाची पट केली कीं फलाचा तितकाच हिस्सा

व्हावा, आणि मानाचा हिस्सा केला कीं फलाची तितकीच पट व्हावी, असल्या विरुद्ध नात्याला किंवा विरुद्ध नात्याच्या प्रश्नाला व्यस्त ह्मणतात.

प्रश्न २ रा.— कांहीं काम ७ मनुष्ये १२ दिवसांत करतात, तर १ मनुष्य किती दिवसांत करील ?

एथें ७ मनुष्यांची १२ दिवसांची मेहनत = १ काम.

∴ १ मनुष्याची ८४ " " = १ काम.

ह्या प्रश्नांत ७ मनुष्ये हें मान, १२ दिवस हें फल, आणि १ मनुष्य हा मानाचा बदल आहे. ह्यांत मान व फल ह्यांचा संबंध काम ह्या राशीशी गुण्यगुणकाप्रमाणें किंवा अवयवांप्रमाणें आहे. ह्यामुळे मानाचा सप्तमांश केल्यानें फलाची ७ पट होते, ह्मणून हा प्रश्न किंवा हा मानफलांचा संबंध व्यस्त आहे.

लखालचे चार प्रश्न सोडवा.

सूचना १ ली.— एका प्रश्नांत प्रथम भागाकार व नंतर गुणाकार करणें आला, तर प्रथमतः भाजक, छेदस्थळीं मांडून संक्षेप द्यावा, आणि गुणाकार केल्यानंतर भागाकार करावा, ह्मणजे कृत्य सोईनें होतें.

प्रश्न ३ रा.— तुपाचा पट्टा किंवा १२० शेर ह्यांना ८० रुपये पडतात, तर २५ शेरांना काय पडेल ?

१२० शेर = ८० रुपये.

∴ समाप्रमाणें १ शेर = $\frac{८०}{१२०}$ रु. = $\frac{२}{३}$ रु.

तसेंच २५ शेर = $\frac{२}{३}$ रु. × २५ = $\frac{५०}{३}$ रुपये.

= १६ रु. १० आ. ८ पै. हें उत्तर.

ह्या प्रश्नांत १२० शेर हें मान, ८० रु. हें फल, आणि २५ शेर ही इच्छा (मानाचा इच्छित बदल) आहे. ह्या राशींच्या संबंधांत मानाचे $\frac{५}{१२०}$ ची २५ पट इच्छा असल्यानें फलाचे $\frac{१}{१२०}$ ची २५ पटच इच्छाफल येतें. अथवा मानाचे $\frac{२५}{१२०}$ पट इच्छा राशि आहे, तर फलाचे $\frac{२५}{१२०}$ पटच इच्छाफल येतें, ह्मणून हा संबंध सम आहे.

प्रश्न ४ था.— २५ कोसांवर पत्र पांचवून त्याचा जबाब

४ थे दिवशीं (त्वरेनें) आणिल्यास १। रुपया देण्याचा करार आहे. हा जबाब ३ व्या दिवशीं आणिल्यास काय द्यावें ?

जबाब जलद आणण्यांत मेहनत वाढते व कामही अधिक चांगलें मानलें जातें, ह्याकरितां मजूरीही बाढली पाहिजे. हणून,

$$\text{जबाब ४ दिवसांनीं आणणें} = १। \text{ रु.}$$

$$\text{तर व्यस्ताप्र. } \text{१ दिवसानें} \text{ } = १। \text{ रु.} \times ४$$

$$\text{तसेंच } \text{३ दिवसांनीं} \text{ } = \frac{१। \text{ रु.} \times ४}{३}$$

$$= १। = १।२ \text{ हें उत्तर.}$$

ह्या प्रश्नांत ४ दिवस हें मान असून १। रु. हें फल आहे, व ३ दिवस ही इच्छा आहे. मानाचे $\frac{३}{४}$ पट इच्छा नामक राशि दिल्यानें, फलाचे $\frac{३}{४}$ पट इच्छाफल येतें, अर्थात हा संबंध व्यस्त आहे.

सूचना २ री.— मान व इच्छा ह्या एका जातीच्या राशींमध्ये अनेक परिमाणसंख्या असल्या, तर त्या उतरत्या अगर चढत्या भांजणीनें एकाच नांवाच्या कराव्या; आणि कृत्य विविधांत करणें नसलें, तर फलांतल्याही परिमाणसंख्या एका नांवाच्या कराव्या. जशा.—

प्रश्न ५ वा.— १२ पळे ५ पायली तुरीना ८५ रुपये ८ आणे ९ पै पडतात, तर १ पळे १० पायली तुरीना काय पडेल ?

ह्या प्रश्नांत १२ प. ५ पा. हें मान व ८५ रु. ८ आ. ९ पै. हें फल असून ह्यांचा संबंध सम आहे हणून,

$$१२ \text{ पळे } ५ \text{ पायली} = ८५ \text{ रु. } ८ \text{ आ. } ९ \text{ पै.}$$

$$\text{हणजे } ३६५ \text{ पायली} = १६४२५ \text{ पै.}$$

$$\therefore १ \text{ पा. } = \frac{१६४२५}{३६५} \text{ पै.} = ४५ \text{ पै.}$$

$$\text{व } ४० \text{ पा. } = ४५ \text{ पै.} \times ४० = १८०० \text{ पै.}$$

$$= १५० \text{ आणे.}$$

$$= ९ \text{ रु. } ६ \text{ आ. हें उत्तर.}$$

प्रश्न ६ वा.— १०० रुपयांचें १ वर्षांचें १२ रुपये व्याज येतें, तर ५५० रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज काय येईल ?

ह्या प्रश्नांत १०० रु. चें १ वर्ष ह्या संयुक्त (दुहेरी) मानाचा संबंध १२ रु. व्या. ह्या फलाशीं सम आहे. ह्मणून,

$$१०० \text{ रुपयांचें } १ \text{ वर्षांचें व्याज} = १२ \text{ रु.}$$

$$\text{तर } १ \text{ रुपयांचें } १ \text{ वर्षांचें व्याज} = \frac{१२}{१००} \text{ रु.}$$

$$\therefore ५५० \text{ रुपयांचें } १ \text{ " " } = ५५० \times \frac{१२}{१००} \text{ रु.} = ६६ \text{ रु.}$$

$$\therefore ५५० \text{ रुपयांचें } ३ \text{ वर्षांचें " " } = ६६ \text{ रु.} \times ३ = १९८ \text{ रु. हें उ.}$$

प्रश्न ७ वा.— एकाचे ६२५ रुपये ८ महिने मजकडे होते, तर ह्याचे बदला किती सुदतीपावेतो ५०० रु. मों त्याकडे ठेवावे ?

ह्या प्रश्नांत ६२५ रु. चे ८ म. ह्या संयुक्त राशीपैकीं ६२५ रु. हे मान व ८ म. हे फल झाले आहेत. यास्तव ह्या मानफलांचा संबंध गुण्यगुणकाप्रमाणें व्यस्त आहे. ह्मणून,

$$६२५ \text{ रु. चें } ८ \text{ म. चें व्याज.}$$

$$= १ \text{ रु. चें } ६२५ \times ८ \text{ म. चें व्याज.}$$

$$= ५०० \text{ रु. चें } \frac{५०००}{१०००} \text{ म. चें व्याज.}$$

$$= ५०० \text{ रु. चें } १० \text{ म. चें व्याज हें उत्तर.}$$

टीप.— हे संबंध वहिवाटीनें मनांत भरलेले असल्यामुळें इच्छाफलें आपोआप यथायोग्य निघतात, ह्मणून हे पुढील प्रश्नांत दर्शविले नाहींत; तथापि कोणत्या संबंधाप्रमाणें प्रश्न सुटतो तें बोलून दाखवितां आलें पाहिजे; ह्मणून पुढच्या प्रत्येक प्रश्नांत प्रश्न ३ व ४ प्रमाणें त्यांतल्या प्रत्येक पायरीस, किंवा प्रश्न ५, ६, व ७, ह्यांप्रमाणें प्रश्नाचे आरभीं हे संबंध विद्यार्थ्यांनीं मनांत आणावे.

प्रश्न ८ वा.— एका दिवाळें काढणाराला ४२८८ रु. कर्ज असून, तो दर रुपयास १० आणे देतो आहे, तर त्याची जिनगी केवढी आहे ?

$$\begin{array}{ll} १ \text{ रुपयाचे फेडींत} & \frac{१०}{१००} \text{ रु. देतो,} \\ \text{तर } २ \text{ रुपयांचे " " } & २ \times \frac{१०}{१००} \text{ रु. देईल.} \\ \text{व } ४२८८ \text{ " " } & ४२८८ \times \frac{१०}{१००} \text{ रु. देईल.} \end{array}$$

ह्यावरून त्याची जिनगी २६८ × १० ह्याजजे २६८० रु. किंमतीची आहे.

प्रश्न ९ वा.- दर रुपयास ४ पै प्रमाणे इन्कमट्याक्स (प्राप्तीवरील कर) देऊन एका मनुष्याला ४५१२ रु. मिळतात, तर त्याचे मूळचे वार्षिक उत्पन्न काय ?

१८८ पै. मिळण्याला प्राप्ति १९२ पै.

$$\therefore १ \text{ पै.} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \frac{१९२ \text{ पै.}}{१८८} = \frac{४८ \text{ पै.}}{४७} = \frac{४८ \text{ रु.}}{४७ \times १९२}$$

$$\therefore १९२ \text{ पै. ह्या १ रु. ' ' } \frac{४८}{४७} \times \frac{१९२ \text{ रु.}}{१९२} = \frac{४८}{४७} \text{ रु.}$$

$$\therefore ४५१२ \text{ रु. ' ' } \frac{४८}{४७} \text{ रु.} \times ४५१२ = ४६०८ \text{ हें उत्तर.}$$

लखालचे ४ पुढचे प्रश्न सोडवा.

अपूर्णांकाचे प्रश्न.

प्र. १० वा.- एका वस्तूच्या $\frac{३}{७}$ ची किंमत १५०० रु. आहे, तर त्या वस्तूच्या $\frac{५}{७}$ ची किंमत काय होईल ?

$$\frac{३}{७} \text{ वस्तूची किंमत} = १५०० \text{ रु.}$$

$$\therefore \frac{१}{७} \quad \text{''} \quad \text{''} = \frac{१५००}{३} \text{ रु.}$$

$$\therefore १ \quad \text{''} \quad \text{''} = \frac{१५००}{३} \text{ रु.} \times ७ = ३५०० \text{ रु.}$$

$$\therefore १ \text{ वस्तूचे } \frac{५}{७} \text{ ची ' ' } = ३५०० \text{ रु. चे } \frac{५}{७} = २८०० \text{ रु.}$$

प्र. ११ वा.- $६\frac{३}{४}$ पौंद रुप्याला २४ पौंद ९ शिलिंग ४॥ पेन्स पडतात, तर ३ पौंद ९ औंस १२ पेनिवेट रुप्याला काय पडेल ?

$$\begin{aligned} २४ \text{ पौ. ९ शि. ४॥ पे.} &= २४ \text{ पौ. } ९\frac{३}{४} \text{ शि.} = २४\frac{९\frac{३}{४}}{२०} \text{ पौ.} \\ &= २४\frac{१५}{३२} \text{ पौ.} = \frac{७८३}{३२} \text{ पौ.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ३ \text{ पौ. ९ औं. १२ पे. वे.} &= ३ \text{ पौ. } ९\frac{३}{४} \text{ औं.} = ३\frac{९\frac{३}{४}}{३२} \text{ पौ.} \\ &= ३\frac{३३}{३२} \text{ पौ.} = \frac{१९५}{३२} \text{ पौ.} \end{aligned}$$

$$\text{आतां. } ६\frac{३}{४} \text{ पौ. रुप्याची किं.} = \frac{७८३}{३२} \text{ पौ.}$$

$$\therefore १ \text{ पौ. रु. ' ' } = \frac{\frac{७८३}{३२} \text{ पौ.}}{\frac{१९५}{३२}} = \frac{७८३}{३२} \times \frac{४}{१९५} \text{ पौ.}$$

$$\therefore \frac{32}{9} \text{ पौं. रु. किं.} = \frac{\frac{29}{2} \times \frac{1}{4} \text{ पा.}}{\frac{22}{2} \times \frac{29}{9}} \times \frac{32}{9} = \frac{32}{80} \text{ पौं.}$$

$$= 92 \text{ पौं. } 95 \text{ शि. } 6 \text{ पे. हैं उत्तर.}$$

प्र. १२ वां.— एका छावणींत ३००० मनुष्ये असून त्यांना ६४ दिवस पुरेसे अन्न आहे. १५ दिवसांनी त्यांतून १००० मनुष्ये दुसऱ्या छावणींत धाडलीं, अग्नि राहिलेल्या प्रत्येक मनुष्याला प्रतिदिवशीं $\frac{1}{2}$ अन्न दिलें, तर त्यांना तें अन्न किती दिवस पुरेल ?

१५ दिवसांनंतर ३००० म. चें. ४९ दि. अन्न होतें.

हणजे " " १००० म. चें. ४९ × ३ " "

" " २००० म., चें. $\frac{४९ \times ३}{२}$ " "

आतां पूर्णदरानें २००० म. ना. $\frac{४९ \times ३}{२}$ दिव. अन्न पुरतें.

तर $\frac{१}{८}$ " २००० म; ना. $\frac{४९ \times ३ \times ८}{२}$ " " पुरेल.

व $\frac{७}{८}$ " २००० म. ना. $\frac{४९ \times ३ \times ८}{२ \times ७}$ " " "

$\therefore \frac{७}{८}$ दरानें २००० म. ना. ८४ दिवस अन्न पुरेल हैं उत्तर.

प्र. १३ वा.— एका दाणेवाल्यानें १४ रु. दराचे १२ पळे, व १० रु. दराचे ८ पळे, असे तांदूळ एकत्र करून वर पेठ्याचे ६ पळे तांदूळ १५ च्या दरानें विकले. ह्या व्यापारांत १० रु. नफा होण्यासाठीं, बाकीचे तांदूळ त्यानें कोणत्या दरानें पळ्या विकावे ?

१४ रु. दराच्या १२ पळ्यांची किंमत = १६८ रु.

१० रु. " ८ " " = ८० रु.

एकंदर २० " " = २४८ रु.

१५ रु. दराच्या ६ " " = ९० रु.

बाकी १४ " " = १५८ रु.

ह्या मिश्रापासून बाकी १५८ व नफा १० मिळून १६८ उत्पन्न व्हावयाचें आहे. हणून,

१४ पळ्यांची किंम. = १६८ रु.

तर १ पळ्याची किं. = $\frac{१६८}{१४} = १२$ रु. हैं उत्तर.

प्र. १४ वा.- एका व्यापाऱ्याने इंग्लंदाहून माल आणविला. त्याच्या किंमतीबद्दल ३००० पौंद आणि बांधणावळीचा व खानंगीचा खर्च ६० पौंद लिहून आला. पैसा देतांना १ शि. १०॥ पेन्सांस १ रु. प्रमाणे पैसा चुकवावा लागला. ह्या पैकीं $\frac{१}{४}$ माल त्याने दररुपयास १ आणा नफा घेऊन विकला आहे. ह्या एकंदर मालावर त्याला ३५७० रु. नफा करणें आहे, तर बाकीचा माल त्याने दर रुपयास काय नफा घेऊन विकला ?

$$१ \text{ शि. } १०॥ \text{ पे. किंवा } \frac{१५}{८} \text{ शि.} = १ \text{ रु.}$$

∴

$$१ \text{ शि.} = \frac{८}{१५} \text{ रु.}$$

$$१ \text{ पौं.} = \frac{१६०}{१५} \text{ रु.} = \frac{३२}{३} \text{ रु.}$$

$$\begin{aligned} \text{सर्व मालाचे } ३०६० \text{ पौं.} &= \frac{३२}{३} \text{ रु.} \times ३०६० \\ &= ३२६४० \text{ रु.} \end{aligned}$$

$$\text{व मालाचा } \frac{१}{४} \text{ ची किं.} = ८१६० \text{ रु.}$$

$$\text{तसेंच } १ \text{ रु. चा नफा} = १ \text{ आणा.}$$

$$\therefore ८१६० \text{ रु. चा नफा} = ८१६० \text{ आणे} = ५१० \text{ रु.}$$

$$\frac{३}{४} \text{ मालाची किंमत.} = ३२६४० \text{ रु. चे } \frac{३}{४} = २४४८० \text{ रु.}$$

$$\text{व } २४४८० \text{ रु. वरील नफा.} = ३५७० \text{ रु.} - ५१० \text{ रु.} = ३०६० \text{ रु.}$$

$$\therefore १ \text{ रु. वरील नफा.} = \frac{३०६० \text{ रु.}}{२४४८०} = \frac{१}{८} \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{दर रुपयास } \frac{१}{८} = \text{आणे नफा घ्यावा. हें उत्तर.}$$

नियमित कालांतल्या कामाविषयीं प्रश्न.

प्र. १५ वा.- एक काम क ५ दिवसांत करतो, आणि ख १२ दिवसांत करतो, तर ते दोघे मिळून किती दिवसांत करतील ?

क ५ दिवसांत १ काम करतो तर दररोज $\frac{१}{५}$ काम करील,
तसेंच ख दररोज $\frac{१}{१२}$ काम करील.

आतां, $\frac{१}{५}$ काम + $\frac{१}{१२}$ काम = दोघांची १ दिवसाची मेहनत.
क्षणजे $\frac{१७}{६०}$ काम = " " " "

- ∴ $\frac{9}{60}$ काम = दोघांची $\frac{3}{96}$ दिवसाची मेहनत.
 ∴ १ काम = दोघांची $\frac{60}{96}$ दिवसांची ;
 ∴ हे काम दोघे मिळून $3\frac{5}{96}$ दिवसांत करतील हे उत्तर.

प्र. १६ वां.— १ काम क आणि ख ४ तासांत करितात, क आणि ग $3\frac{3}{4}$ तासांत करतात, व ख आणि ग $5\frac{1}{6}$ तासांत करतात, तर ते काम क किती तासांत करील ?

क आणि ख हे ४ तासांत १ काम करतात, तर ते १ तासांत $\frac{1}{4}$ काम करतील.

- हणून, १ तासाचें काम कचें + खचें = $\frac{1}{4}$
 व " " कचें + गचें = $\frac{3\frac{3}{4}}{3\frac{3}{4}} = \frac{5}{9}$
 ∴ मिळविल्यानें " २ कचें + खचें + गचें = $\frac{1}{4} + \frac{5}{9} = \frac{35}{36}$
 परंतु " " खचें + गचें = $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$
 ∴ वजा केल्यानें " २ कचें = $\frac{35}{36} - \frac{20}{36} = \frac{15}{36} = \frac{1}{4}$
 ∴ समाप्रमाणें " कचें = $\frac{1}{4}$

क १ तासांत $\frac{1}{4}$ काम करतो, हणून ६ तासांत पूर्ण काम करील हे उत्तर.

सूचना.— कचें १ तासाचें काम $\frac{1}{4}$ त वजा दिल्यानें खचें १ तासाचें काम निघते, व $\frac{5}{9}$ त वजा दिल्यानें गचें एक तासाचें काम निघते. ह्याही रीतीनें प्रत्येक किती किती तासांत करतो हे काढतां येतें.

प्र. १७ वां.— एका हौदाला ३ नळ्या आहेत. तो हौद पहिलीनें २ तास २० मिनिटांनीं भरतो, दुसरीनें $3\frac{3}{4}$ तासांनीं भरतो, आणि तिसरीनें १ तास ३५ मिनिटांनीं रिकामा होतो. ह्यावरून हा हौद रिकामा असतां तिन्ही नळ्या एकदज सोडिल्या, तर किती तासांनीं भरेल ?

$$२ \text{ तास. } २० \text{ मि.} = २\frac{2}{3} \text{ ता.} = \frac{8}{3} \text{ तास.}$$

$$१ \text{ तास. } ३५ \text{ मि.} = १\frac{7}{12} \text{ ता.} = \frac{19}{12} \text{ तास.}$$

पहिली नळी $\frac{8}{3}$ तासांत १ हौद भरते.

- तर १ तासांत $\frac{3}{6}$ हौद भरील.
 तशीच दुसरी नळी १ तासांत $\frac{2}{6}$ हौद भरील.
 व तिसरी नळी १ तासांत $\frac{9}{9}$ हौद रिकामा करील.
 एथें तिन्ही नळ्यांचें १ तासाचें काम = $(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{9}{9})$ हौद.
 $= \frac{9-6-6}{9}$ हौद = $\frac{9}{9}$ हौद.
 \therefore तिन्ही नळ्यांचें $\frac{9}{9}$ तासाचें काम = $\frac{9}{9}$ हौद.
 \therefore " " $\frac{9}{9}$ तासांचें " = १ हौद.
 \therefore तिन्ही नळ्यांनीं $\frac{9}{9} = 1$ २ $\frac{9}{9}$ तासांनीं हौद भरेल. हें उत्तर.

प्र. १८ वा.— कांहीं काम २४ बायका रोज १० तास खपून १६ दिवसांत करितात, तर ह्याच्या दुप्पट काम किती पुरुष रोज ८ तास खपून १२ दिवसांत करतील ? जेवढें काम ४ बायका एका तासांत करितात तेवढें काम ३ पुरुष एका तासांत करितात.

- १ काम १० तासांचे १६ दिवसांत २४ बायका करतात.
 तर " १ तासाचे १६ " २४० " करतात.
 व " १ " १ " १६ × २४० " "
 \therefore २ कामें १ " १ " २ × ३६८० " "
 आतां ४ बायकांचें १ तासाचें काम = ३ पुरुषांचें १ ता. काम.
 \therefore १ बायकोचें " = $\frac{3}{4}$ पुरुषांचें "
 \therefore ७६८० बा.चें " = ७६८० × $\frac{3}{4}$ पु. "
 $= १९२० \times ३$ पु. "
 $= ५७६०$ पु. "

- तसेंच २ कामें १ ता. चें १ दि. त ५७६० पु. करतात.
 तर " ८ " १ " $\frac{५७६०}{८}$ पु. करतात.
 व " ८ " १२ " $\frac{७२०}{१२}$ पु. "
 ह्याजें " ८ " १२ " ६० पु. क. हें उत्तर.

घड्याळाच्या कांठ्यांविषयीं.

प्र. १९ वा— घड्याळाचा मिनितकांटा व अवरकांटा हे एकमेकांशीं काटकोनांत, १ वाजल्यानंतर केव्हां येतील ?

घड्याळाच्या तबकडीवरील वर्तुळांत लहान भाग ६० केलेले असतात. तासांचा कांटा हे ५ भाग चालतो, तितक्या वेळांत मिनितांचा कांटा हे ६० भाग चालतो; ह्मणून मिनिताकांटा हा १२ मिनितांत तासाच्या कांट्यापेक्षां ११ भाग फाजील चालतो.

एक वाजतांना मिनिताकांटा १२ वर असून तासांचा कांटा १ वर असतो. ह्मणजे त्यांच्यामध्ये ५ भागांचें अंतर असतें. ह्यावरून मिनिताकांटा हा तासाच्या कांट्यापेक्षां ५ भाग फाजील चालला ह्मणजे तासाच्या कांट्यावर येईल, $५ + १५ = २०$ भाग फाजील चालला ह्मणजे त्याशीं पुढच्या काटकोनांत येईल, आणि $५ + ४५ = ५०$ भाग फाजील चालला ह्मणजे त्याशीं मागच्या काटकोनांत येईल.

आतां	११ भाग फाजील चालण्याला	१२ मि. लागतात,
तर	१ " " " "	$\frac{१२}{११}$ मि. लागतील,
	२० " " " "	$\frac{१२}{११} \times २०$ " "
		$= २१ \frac{१०}{११}$ " "
आणि	५० " " " "	$\frac{१२}{११} \times ५०$
		$= ५४ \frac{६}{११}$ " "

∴ मिनिताकांटा हा १ वाजल्यावर $२१ \frac{१०}{११}$ मिनितांनीं तासाच्या कांट्याच्या पुढच्या काटकोनांत येईल, व $५४ \frac{६}{११}$ मिनितांनीं त्याच्या मागच्या काटकोनांत येईल. हीं उत्तरे.

सूचना.— मिनिताकांटा हा त्यापासून तासाच्या कांट्यापर्यंतचे मिनितांचे भाग फाजील चालला ह्मणजे तासाच्या कांट्यावर येतो, व तासाच्या कांट्यापर्यंतचे मिनितांचे भाग + ३० मिनितांचे भाग इतकें भाग फाजील चालला ह्मणजे त्याच्या समोर येतो, हीं दोन उत्तरे वरच्याच नमुन्यानें विद्यार्थ्यांनीं काढावीं.

प्र. २० वा.— आमचें घड्याळ दररोज ११ मिनिता फाजील चालतें. हें घड्याळ आज १२ वाजतांना २ मिनिता पुढें होतें, परव्हां सकाळीं ७ वाजून १० मिनितांनीं सूर्योदय व्हावयाचा आहे, व तेथून ५ घटिकांनीं मुंजीचा मुहूर्त दिलेला आहे, तर ह्या मुहूर्ताच्या वेळीं हें घड्याळ केवढा काल दाखवील ?

आपल्या खासगी व्यवहारांत सूर्योदयापासून दुसऱ्या सूर्योदयापावेतो स्पष्ट दिवस (ह.वार) मोजतात, परंतु सरकारी कामांत मध्य रात्रीपासून दुसऱ्या मध्यरात्रीपावेतो घड्याळानें दाखविलेल्या २४ तासांच्या काळाला मध्यम दिवस (ह. वार व तारीख) म्हणतात. ह्या रीतीनें इष्ट काळापावेतो घड्याळ चालण्याचे तास मोजतां आजचे १२, उद्यांचे २४, व परवांचे ७ तास १० मिनिते + २ तास, मिळून $४५\frac{१}{६}$ तास भरतात. ह्या घड्याळाची,

२४ तासांतली फाजील चाल	=	७५ से.चे	भाग.
∴ १ " "	=	$\frac{७५}{२४}$ से.	"
∴ ४५ " "	=	$\frac{७५}{२४} \times ४५$ से.	"
	=	२ मि. $२०\frac{५}{६}$ से.	"
व $\frac{१}{६}$ " "	=	$\frac{७५}{१४४} = \frac{१}{२}$ से. सुमारे.	
पूर्वीची " "	=	२ मि.	
∴ एकंदर " "	=	४ मि. २१ से.	

∴ हें घड्याळ मुहूर्ताचे वेळीं ९ तास १४ मि. २१ सेकंद दाखवील हें उत्तर.

पाठलागाविषयीं.

प्र. २१.— एका जाळीपासून ६० उड्यांइतका दूर ससा जातांक्षणींच त्या जाळीशीं कुत्रा आला. सशाच्या ५ उड्यांच्या काळांत कुत्र्याच्या ४ उड्या होतात, आणि सशाची उडी २ यार्दांवर पडत असून कुत्र्याची उडी तीन यार्दांवर पडते, तर त्या जाळीपासून कितव्या उडीस तो कुत्रा सशाला धरील ?

सशाच्या उड्या ६० = ६० × २ यार्द = १२० यार्द अंतर.

कुत्र्याच्या ४ उड्यांचा काल = सशाच्या ५ उड्यांचा काल.

∴ कुत्र्याच्या १ उडीचा काल = सशाच्या $\frac{५}{४}$ उड्यांचा काल.

∴ कुत्र्याच्या ३ यार्द चा. काल = सशा. $\frac{५}{४} \times २$ यार्द. चा. काल.

= $२\frac{३}{४}$ यार्द चालीचा काल.

आतां $\frac{३}{४}$ यार्द अंतर तोडण्यास कुत्र्याची १ उडी लागते,

तर १ यार्द अंतर तोडण्यास कुठ्याच्या २ उड्या लागतील.
 व १२० " " " कुठ्याच्या २४० उड्या ला-
 गतील हें उत्तर.

संयुक्त प्रश्न.

ह्यांत मान आणि इच्छा ह्या दोन्ही राशींचे संयोगी राशि दिलेले असतात.

प्र. २२ चा.— १२ नांगर ६ दिवसांत ९६ एकर जमीन नांगरतात, तर किती नांगर ८ दिवसांत ६४ एकर जमीन नांगरतील ?

६ दिवसांत ९६ ए. नांगरण्यास. १२ नांगर लागतात,
 तर १ " ९६ ए. " ६×१२ " लागतील.
 व १ " १ ए. " $\frac{६ \times १२}{९६}$ " "
 \therefore ८ " १ ए. " $\frac{६ \times १२}{८ \times ९६}$ " "
 \therefore ८ " ६४ ए. " $\frac{६४ \times ६ \times १२}{८ \times ९६} = ६$ नांगर
 लागतील, हें उत्तर.

प्र. २३ वा.— ३५ पायली चणे ७ घोड्यांना १० दिवस पुरतात, तर ९६ पायली चणे १८ घोड्यांना किती दिवस पुरतील ?

३५ पा.च. ७ घोड्यांना १० दिवस पुरतात.
 तर १ " ७ " $\frac{१०}{३५}$ " पुरतील.
 व १ " १ घोड्याला $\frac{१०}{३५} \times ७$ " "
 \therefore ९६ " १ " $\frac{१० \times ७ \times ९६}{३५}$ " "
 व ९६ " १८ घोड्यांना $\frac{१८ \times ७ \times ९६}{३५ \times १८}$ " "
 \therefore $१० \frac{२}{३}$ दिवस पुरतील, हें उत्तर.

अभ्यासाकरिता उदाहरणें. ल.

१. १७ पौंद साखरेला ८ शि. ६ पे. पडतात, तर १ पौंदाला काय पडेल ?

२. एका मनुष्याने ६२ कोसांची मजल ४ दिवसांत केली, तर तो दररोज किती चालला ?

३. एक गोणताभर धान्य ९ मनुष्यांना ३४ दिवस पुरते, तर ते एका मनुष्याला किती दिवस पुरेल ?

४. २६५ पौंद प्राप्तीवर ६ पौंद १२ शि. ६ पे. इन्कम-थ्याक्स (उत्पन्नावरील कर) आकारतो, तर दर पौंदावर काय वसला ?

५. एक मनुष्य ४ दिवसांत ६२ कोस चालतो, तर तो किती दिवसांत ९३ कोस चालेल ?

६. एक शेत १२ मनुष्ये ४ दिवसांत कापतात, तर ३२ मनुष्ये किती दिवसांत कापतील ?

७. ७ शेर काफीला (बुंदाला) ७ रु. ९ आ. ४ पै. पडतात, तर ६३ शेरांना काय पडेल ?

८. १५ पौंद साखरेलां ५ शि. ७ $\frac{३}{४}$ पे. पडतात, तर १ हॅट्रेडवेट साखरेला काय पडेल ?

९. एक काम १५ मनुष्ये २० दिवसांत करितात, तर ते १२ दिवसांत करण्यास किती मनुष्ये लागतील ?

१०. १७ एकर जमिनीचा मक्ता ५९ पौं १० शि. पडतो, तर ८६ एकर जमिनीस काय पडेल ?

११. ६ ग्रेन रुप्याला ५ फार्दिंग पडले; तर एका क्रांनाचे रुपे किती येईल ?

१२. ४ वार फ्लानेलीला ३॥-११ पडले, तर ५७ वार फ्लानेलीला काय पडेल ?

१३. एका दिवाळखोराची जिनगी २१५ रु. किंमतीची असून त्याला १०७५ रु. कर्ज आहे, तर त्याच्या फेडीत तो दर रुपयास काय देईल ?

अपूर्णांकाविषयीं.

१४. एका इष्टेटीच्या $\frac{३}{४}$ ची किंमत ७५२० रु. आहे, तर तिच्या $\frac{५}{८}$ ची किंमत काय ?

१५. एका गृहस्थाची एका जहाजाच्या $\frac{3}{4}$ वर मालकी आहे. त्याने आपल्या मालकीचे $\frac{2}{3}$ हे १२६० पौदांला विकले, तर त्या जहाजाची किंमत काय ?

१६. एका कारखान्याच्या $\frac{3}{4}$ वर एकाची मालकी आहे, त्याने आपल्या मालकीच्या $\frac{2}{3}$ वा $\frac{9}{10}$ हा हिस्सा १२० $\frac{1}{2}$ पौदांना विकला आहे. ह्या दराने ह्या कारखान्याच्या $\frac{1}{3}$ च्या $\frac{3}{4}$ ची किंमत काय आहे ?

१७. १५.५ हॅट्रेडवेट माल ६० मैलांवर नेण्याला ७ शि. ९ पे. भाडे दिले आहे. ह्या भाड्यांत ३.२५ हॅट्रेडवेट माल केवढ्या लांबीवर नेला जाईल ?

१८. ८॥ इंच लांबीच्या मेणवत्या ६ आण्यांस अर्धा डझन मिळतात. ह्याच जाडीच्या व १०॥ इंच लांबीच्या मेणवत्या ७ आणे ४ पैना अर्धा डझन मिळतात; तर ह्यांतल्या कोणत्या मेणवत्या घेण्यांत नफा आहे ?

काल व काम ह्यांविषयी.

१९. एक काम क ६ तासांत करितो आणि ख ९ तासांत करितो, तर ते दोघे मिळून किती तासांत करतील ?

२०. नेमलेले काम करण्याला कला ३५ दिवस लागतात, आणि गला ४५ दिवस लागतात, तर त्या दोघांना मिळून किती दिवस लागतील ?

२१. नेमलेले शेत क आणि ख मिळून ३ दिवसांत कापतात, क आणि ग मिळून $3\frac{1}{2}$ दिवसांत कापतात, ख आणि ग मिळून ४ दिवसांत कापतात, तर ते तिघे मिळून किती दिवसांत कापतील ?

२२. एका हौदाला ३ नळ्या असून त्यांनी अनुक्रमे ६, ८, व १२ मिनिटांनी तो हौद भरतो, तर ह्या तिन्ही नळ्या सोडल्या असता तो हौद किती वेळाने भरेल ?

२३. कने १४ दिवसांत एका कामाचे $\frac{1}{3}$ केले, आणि खच्या मदतीने ते काम २ दिवसांत पुरे केले, तर हें काम एकटा ख किती दिवसांत करील ?

२४. एक काम क ३ तासांत करितो, ख आणि ग मिळून ह्याच्या निमे वेळांत करतात, व क आणि ग मिळून $1\frac{1}{3}$ तासांत करतात, तर तें काम एकटा ख किती वेळांत करील ?

२५. एक काम अ २७ दिवसांत करितो आणि ब १५ दिवसांत करितो. ह्या कार्मीं अ १२ दिवस खपला, नंतर ब ५ दिवस खपला, आणि मग तें काम कनें ४ दिवसांत पुरें केलें. ह्यावरून हें काम एकट्या कनें किती दिवसांत केलें असतें ?

२६. एक हौद वरच्या २ नळ्यांनीं अनुक्रमें १८ आणि २० मिनिटांत भरतो आणि खालच्या तोटीनें ४० मिनिटांत रिकामा होतो. आतां २ नळ्या व तोटी हीं एकदम सोडिलीं, तर तो हौद १० मिनिटांत किती भरेल ?

घड्याळाविषयीं.

२७. घड्याळाचे कांटे पुढच्या तासांमध्ये एकावर एक केव्हां येतील ?

४ व ५ , ६ व ७ , ९ व १०.

२८. घड्याळाचे कांटे खाली दिलेल्या तासांमध्ये एकमेकांशीं काटकोनांत केव्हां येतील ?

४ व ५ , ७ व ८ , ११ व १२.

२९. पुढील तासांच्या दरम्यान घड्याळाचे कांटे एकमेकांसमोर केव्हां येतील ?

१ व २ , ४ व ५ , ८ व ९.

साधारण प्रश्न.

३०. ठरलेल्या भाड्यांत १२०० पौंद ओझे ३६ मैलांवर नेलें जातें, तर २४ मैलांवर किती पौंद ओझे नेलें जाईल ?

३१. २० औंस १९ पेनिवेट $2\frac{2}{9}$ ग्रेन वजनाच्या पेल्याला ५ पौंद १५ शि. ३ पे. पडले तर दर औंसास काय पडेल ?

३२. १ पौंद १० औंस वजनाच्या सुरईची किंमत पाहिजे आहे. प्रत्येक ३॥॥ औंस वजनाचा अशा एक डझन चमच्यांना १३ पौं. १० शि. प्रमाणें दर आहे.

३३. एक मनुष्य ३५ दिवसांत $1\frac{1}{2}$ रु. प्रमाणें खर्चून

सालीना १०० रु. शिल्क पाडितो, तर त्याचें सालिना उत्पन्न काय ?

३४. एक मनुष्य दररोज ६ तास चालून २४ दिवसांत ५४० मैल जातो, तर तो दररोज ८ तास चालून ३ दिवसांत केवढी मजल करील ?

३५. १० घोडे व १३२ मेंढ्या ह्यांना ८ दिवसांस ५० पौंद १० शि. खर्च लागतो, तर १५ घोडे व १४८ मेंढ्या ह्यांना तितक्याच दिवसांस काय खर्च लागेल ? ५ घोड्यांचें खाणें ८४ मेंढ्यांना तंतोतंत पुरतें, असें ध्या.

३६. गहूं ५७ शिलिंगांनीं क्वार्टर विकत होते तेव्हां ४ पेनींना ३ पौंद भाव येई. आतां गहूं ६४ शि. ७ पेन्सांनीं क्वार्टरप्रमाणें विकत आहेत, तर ४ पेनींना किती पौंद भाव येईल ?

३७. २१०० शिपायांच्या फौजेला ९ महिने पुरेशी अन्नसामुग्री आहे. ह्या फौजेच्या मदतीला ६०० शिपाई आणखी आणिले, तर ही सामुग्री किती मुदतीपावेतों पुरेल ?

संयुक्त प्रश्न.

३८. ८ मनुष्यें ७ दिवस खपून ४० एकरांवरचें गवत कापितात, तर २४ मनुष्यें २८ दिवस खपून किती एकरांवरचें गवत कापतील ?

३९. ८ मनुष्यांची ५ दिवसांची मजुरी १२ रुपये पडते, तर ३२ मनुष्यांची २४ दिवसांची मजुरी काय पडेल ?

४०. ९३९ शिपायांच्या पलटणीला ३५१ क्वार्टर गहूं १६८ दिवस पुरतात, तर १४०४ क्वार्टर गहूं ५६ दिवसांपावेतों किती शिपायांना पुरतील ?

४१. एक मनुष्य १२ तासांच्या ५ दिवसांत १५०० मैल चालतो, तर तो १० तासांच्या किती दिवसांत ५०० मैल चालेल ?

४२. ४ शिलिंग ३ पेन्स देऊन ग्यासाचे ५ दिवे रोज ५ तासप्रमाणें १० दिवस लावितां येतात, तर ३ पौंद १६ शिलिंग

६ पेन्स देऊन ग्यासाचे किती दिवे रोज ४ तासप्रमाणें १५ दिवस लावितां येतील ?

४३. ३ फिरस्त्यांच्या टोळीला ३८ पौंद ४ आठवडे पुरतात, तर ५ फिरस्त्यांच्या टोळीला ९५ पौंद किती दिवस पुरतील ?

४४. ३०० पेठ्या दारू ही ४४ तोफांच्या तासास ३० सरवत्याप्रमाणें ३ तासांचे ५ दिवस पुरते, तर ४०० पेठ्या दारू ६६ तोफांच्या तासास ४० सरवत्याप्रमाणें ५ तासांचे किती दिवस पुरेल ?

प्रमाणगणित.

पूर्वीच्या एकमान गणितांत मानराशीची पट. एकमान दाखवितें, व त्याची पट इच्छाराशि दाखवितो, असें कल्पिलें होतें. आतांच्या प्रमाणगणितांत मानराशीचीच पट इच्छाराशि दाखवितो असें कल्पिलें आहे. एकमान गणिताच्या ३ व्या व ४ थ्या उदाहरणांत दर्शविलेल्या पटी पहा, ह्याच पटींना गुणोत्तर हें पारिभाषिक नांव देऊन तेथील नमुन्याचेच प्रश्न एथें संक्षिप्तरीतीनें व सामान्य विचाराचे आधारानें सोडविणें आहेत.

व्यवहारांत आपल्यासमोर कोणताही पदार्थ येऊ, आपण त्याला लागलाच त्याच्या जातीच्या दुसऱ्या पदार्थाशीं ताडून पाहतों. ताडून पाहण्याचे दोन प्रकार आहेत. एक, अंतरानें आणि दुसरा, पटीनें.

आमच्या घराची भिंत तुमच्या घराच्या भिंतीपेक्षां ५ फूटांनीं उंच आहे असें सांगतों, अथवा दीडपट उंच आहे असें सांगतों. या दोन्ही सांगण्यांत दुसऱ्या भिंतीची उंची पहिल्या भिंतीचे उंचीचे संबधानें सांगितली गेल्यामुळें तिच्या वास्तविक मोठेपणाचें ज्ञान पहिल्या भिंतीच्या मोठेपणावर अवलंबून असतें. त्या दोन्ही भिंतींचें वास्तविक ज्ञान होण्यास त्या दोहींनाही एका माहितींतले मानाशीं ताडून पहावें लागतें. एक भिंत १० फूट आणि दुसरी १५ फूट असली, तर पहिलीपेक्षां दुसरी भिंत ५ फूट उंच आहे, किंवा दुसरी पहिलीच्या दीडपट उंच आहे असें हाटल्यानें दोन्ही भिंतींचा मोठेपणा चांगला लक्षांत येतो.

ह्या दुसऱ्या प्रकारांत १० फूट ह्या मापानें १५ फूट मोजले आहेत, ह्मणून १० फुटांना मान व १५ फुटांना त्याची पट अशीं नांवें येतात. फूट हे ह्या राशींचें आद्य परिमाण आहे.

सर्व प्रकारचीं आद्य परिमाणें ठरविलेलीं आणि लोकांच्या माहितींतलीं असतात. या आद्य मानांच्या संबंधानें सर्व प्रकारचीं मानें सांगितलेलीं असतात. हीं सर्व महत्त्वदर्शक परिमाणें संख्यांनीं दाखविलीं जातात.

चार हात उंची, किंवा पांच विघे क्षेत्र, किंवा सहा तोळे वजन, किंवा दोन दिवसांची मजल, या शब्दांचा अर्थ बरोबर समजण्यास एक हात उंची, एक विघा क्षेत्र, एक तोळा वजन किंवा एक दिवसाची मजल, यांचें ज्ञानु आपणास पूर्वी बरोबर झालेलें आहे असें घेऊन चालावें लागतें.

शिक्षकानें विद्यार्थ्यांस, अंतरानें फरक दाखविणें आणि पटीनें फरक दाखविणें, या दोहोंत जो भेद आहे तो चांगला समजावून दिला पाहिजे. एका हौदांत दररोज ८ घागरी पाणी यावयाचें त्याबद्दल एके दिवशीं त्यांत दोन घागरी अधिक पाणी आलें आणि दुसरे दिवशीं त्यांत चार घागरी अधिक पाणी आलें, तर हौदांत दुसरे दिवशीं दुप्पट पाणी अधिक आलें ही गोष्ट खरी आहे, परंतु हौदांतलें पाणी दुप्पट झालें नाहीं. तें पहिले दिवशीं सवाईनें झालें आणि दुसरे दिवशीं दिढीनें झालें. कालच्यापेक्षां उष्मा हवेंत आज दुप्पट आहे असें लहटलें तर, हवा दुप्पट गरम झाली असें समजूं नये. सावकाराला कालच्यापेक्षां आज दुप्पट नफा झाला असला तरी त्याची दौलत दुप्पट झाली असें समजूं नये. असले पटींचेच संबंध प्रमाणगणितांमध्ये विचारांत घेतले जातात.

गुणोत्तर व प्रमाण.

गुणोत्तर.— एका जातीच्या दोन राशींपैकीं एकाला मान (माप) व दुसऱ्याला त्याची पट लहटलें, तर पहिल्यास किती पट दुसरा आहे, किंवा पहिला हा किती पट दुसऱ्यास आहे,

हैं दाखविणारा जो दोन राशींचा परस्पर संबंध त्याला गुणोत्तर ह्मणतात.

लेखन.— दोन राशींचें गुणोत्तर हें त्या राशींमध्ये : *अशीं दोन टिंचें देऊन मांडतात. जसें.—

६ शेर :- ३ शेर

वाचन.— वरील गुणोत्तर हें जसे “ ६ शेरांस ३ शेर ” (मानास पट) असें मराठींत वाचतात, आणि जसे “ ६ शेर हे ३ शेरांस ” (पट ही मानास) असें इंग्रजींत वाचतात.

जितके “ ६ शेरांत ३ शेर ” ही मराठी वाचणी इंग्रजी वाचणीच्याच अर्थाची व क्रमिक आहे.

गुणोत्तरांचे प्रकार.— ६ शेरांस, त्यांचे $\frac{३}{६}$ पट ३ शेर आहेत, ह्मणून $\frac{३}{६}$ हें गुणोत्तर ह्याच मराठी वाचणीनें दाखविलें जातें. तसेंच ६ शेर हे ३ शेरांना त्यांचे $\frac{६}{३}$ पट आहेत, ह्मणून $\frac{६}{३}$ हें गुणोत्तर ह्यांच्या इंग्रजी वाचणीनें दाखविलें जातें.

६ शेरांत $\frac{६}{३}$ पट ३ शेर राहतात, ह्मणून ह्या मराठी वाचणीनें $\frac{६}{३}$ हें इंग्रजी वाचणीचेंच गुणोत्तर दाखविलें जातें.

* एका राशीच्या कितीपट दुसरा राशि आहे, हें भागाकारानें कळवयाचें, म्हणून गुणोत्तर हें भागाकाराच्याच चिन्हानें दाखविलें पाहिजे.

भागाकारांमध्ये $\frac{\text{परिमाणसंख्या}}{\text{परिमाणसंख्या}}$, $\frac{\text{परिमाणसंख्या}}{\text{भावसंख्या}}$ व $\frac{\text{भावसंख्या}}{\text{भावसंख्या}}$, असे तीन प्रकार आहेत. पैकीं भाजकराशीचे अमूकपट भाज्यराशि आहे हें ह्मणणें आद्यंतींच्या प्रकारांत मात्र संभवत असून मधल्या प्रकारांत संभवत नाहीं. ह्मणून भागाकाराच्या चिन्हाच्या मधल्या रेषेचा लोप करून वरच्या व खालच्या विंदूंना गुणोत्तराचें चिन्ह म्हणतात. दुसऱ्या संख्येला पहिलीनें भागणें असलें म्हणचे त्या संख्यांमध्ये । हें चिन्ह योजितात, आणि पहिल्या संख्येला दुसरीनें भागणें असलें ह्मणजे त्या संख्यांमध्ये ÷ हें चिन्ह योजितात. ह्या दोन्ही चिन्हांच्या मधल्या भागां रेषे असून वरचें शेवट व खालचें शेवट हे विंदु आहेत. म्हणून : ह्या चिन्हानें हे दोन्ही उलट सुलट भागाकार अगर गुणोत्तरें दाखवितां येतात.

ह्या दोन प्रकारच्या वाचण्यांनीं गुणोत्तराचे दोन प्रकार होतात. ते असे—

दक्षिणगुणोत्तर.— गुणोत्तराच्या मराठी वाचणींत उजवीकडचा जो राशि तो पट किंवा भाज्य कल्पिला जातो, ह्मणून ^{उजवा राशि} ह्या गुणोत्तराला दक्षिण (उजवे) गुणोत्तर ह्मणावे. _{डावा राशि}

वामगुणोत्तर.— गुणोत्तराच्या इंग्रजी वाचणींत किंवा दुसऱ्या मराठी वाचणींत डावीकडचा राशि हा पट किंवा भाज्य कल्पिला जातो ह्मणून ^{डावा राशि} ह्या इंग्रजी वाचणीच्या गुणोत्तराला वाम (डावे) गुणोत्तर ह्मणावे. _{उजवा राशि}

युग्म व पदे.— गुणोत्तराच्या दोन राशींना गुणोत्तराचे युग्म ह्मणतात, व गुणोत्तराचीं पदेही ह्मणतात. युग्मापैकीं पहिल्या राशीला अग्रसर व दुसऱ्याला उपाग्रसर अशीं मोघम नामें भाषांतरकर्त्यांनीं योजिलीं आहेत. तथापि ह्या राशींचीं प्राचीन व अन्वर्थक नामें * मान (माप) आणि गुण (पट) ह्या अर्थींचीं आहेत.

* पहिला राशि व दुसरा राशि ह्यांचीं प्राचीन नामें अनुक्रमें इंग्रजींतलीं अंतिसिद्धंत (म्ह० आदि किंवा मान) आणि कान्सिद्धंत (म्ह० परिणाम, गुण, किंवा पट) अशीं दक्षिण गुणोत्तराच्याच अर्थींचीं दर्शक असून, संस्कृतांतलीं प्रमाण (म्ह० मान किंवा माप) आणि इच्छा (म्ह० इच्छित गुण किंवा मानिलेली पट) हींही तीच अर्थ दाखविणारीं आहेत. ह्या नांवांच्या अर्थावरून पाहतां एकंदर प्राचीन विद्वान हे मराठी वाचणीचें दक्षिण गुणोत्तरच गुणोत्तर ह्या शब्दानें मुख्यत्वेकरून विचारांत घेत असत असैं ठरतें. त्रैराशिक व चतुराशिक ह्यांचीं उत्तरे काढण्यांत ह्या दक्षिणगुणोत्तराचाच उपयोग जसा सोईनें करितां येतो तसा वामगुणोत्तराचा करितां येत नाही. सम व्यस्त पाहण्यांत व भूमितिश्रेढींतही मराठी वाचणीचें दक्षिणगुणोत्तरच वापरावे लागतें, वामगुणोत्तर हें वापरतां येत नाही, आणि गुणोत्तर तर सर्वत्र एकच वापरतां आलें पाहिजे. असल्या पोक्त विचारांनीं योग्य ठरल्यावरून अमेरिकेंतले इंग्लिश विद्वान हे अलीकडे मराठी वाचणीचें दक्षिण गुणो-

विशेष.— गुणोत्तराचे संबंधानें कितीएक गोष्टी लक्षांत ठेविल्या पाहिजेत त्या अशा.—

क.— मान राशीचा ३ गुण (पट) त्या मान राशीच्याच जातीचा (परिमाणांचा) राशि असावयाचा. ह्यावरून गुणोत्तराचीं पदे ३ फूट : ६ यार्द अशीं भिन्न परिमाणांचीं असलीं तर तीं ३ फूट : १८ फूट अशीं एकाच परिमाणाचीं करून घेतलीं पाहिजेत. ३ फुटांच्या अमुक पट ६ तास आहेत असें ह्मणतां येत नाहीं, ह्मणून गुणोत्तराचीं पदे भिन्न जातीचीं असतां कामाचें नाहीं.

तरत्र गणिताच्या पुस्तकांतून योजूं लागले आहेत. ह्यावरून मराठी वाचणीच्या दक्षिणगुणोत्तराचा अर्थ कायम राखिला पाहिजे हें उघड आहे. म्हणजे “१ शेरास १। शेर” ह्या वाक्याचा अर्थ पहिल्या राशीला त्याच्या १। पट दुसरा राशि असा सांप्रदायिकच घेतला पाहिजे.

वामगुणोत्तर हें इंग्लिश भाषेचें सांप्रदायिक असल्यामुळें वहिवाटींतल्या इंग्लिश पुस्तकांतून हेंच गुणोत्तर विचारांत घेतलेलें असतें, म्हणून इंग्लिशांच्या नमुन्यानें आपणाला हेंही गुणोत्तर वापरतां आलें पाहिजे. चतुर्थांचा प्रत्यय हा माप मानिलेल्या राशीलाच लावावयाचा, त्याची पट दाखविणाऱ्या राशीला अगर भाज्य दाखविणाऱ्या राशीला लावावयाचा नाहीं, हें बंधारण मराठींत आहे तसेंच इंग्रजींतही आहे. अर्थात् “१ शेरास १। शेर” ह्या वाचणीचा अर्थ १। शेराच्या ३ पट १ शेर असा कितीएक लोक करतात, तसा करणें हें दोन्ही भाषांच्या सांप्रदायाविरुद्ध आहे. ह्मणून वरील विचारांत इंग्लिशांच्या सांप्रदायाची वाचणी, आणि त्याच गुणोत्तराची दर्शक मराठी क्रमिक वाचणी, ह्या सांगितल्या आहेत त्या वहिवाटींत आणिल्या पाहिजेत.

प्रत्ययादिकांच्या शक्तीकडे दुर्लक्ष करून वाक्यांचे भलभलतेच अर्थ ठरविणें ही गोष्ट भाषेचें बंधारण शिथिल करणारी आहे. भाषा ही विचाराला आधारभूत असल्यामुळें, तिचें बंधारण शिथिल झाल्यानें विचारांत गोंधळ होईल, ह्मणून असें न होऊं देण्याकडे नवीन विद्वानांनीं लक्ष पुरविलें पाहिजे.

* गुण शब्दाचे अर्थ गुणक, व गुणाकार, असे दोन होत असून त्यांपैकीं दुसरा अर्थ एथें घ्यावयाचा हें लक्षांत असलें पाहिजे.

ख.— राशींचें युग्म किंवा गुणोत्तर हें त्या राशींतील संख्यांचा भाववाचक अपूर्णाक दाखवितें, ह्यावरून “६ शेर : ३ शेर” ह्या परिमाणयुग्माचे जागीं दक्षिणगुणोत्तर वापरणाराला $\frac{३}{६}$ घेतां येतील, वामगुणोत्तर वापरणाराला $\frac{६}{३}$ घेतां येतील, आणि ह्या कोणत्याही गुणोत्तराचे जागीं “६ शेर : ३ शेर” हें मूळचें युग्म ही घेतां येईल. गुणोत्तर हें सामान्य व विशेष ह्या दोन्ही अर्थीं व्यावें, ह्याच उद्देशानें कोणतेंही गुणोत्तर हें युग्माचें रूपानें मांडतात व अपूर्णाकाचे रूपानें विचारांत घेतात.

वाचणीचें जें गुणोत्तर त्याला सम गुणोत्तर ह्मणतात, आणि त्यांतल्या मानराशीला गुणराशि व गुणराशीला मानराशि कल्पिला तर जें गुणोत्तर होतें त्याला त्याचें व्यस्तगुणोत्तर ह्मणतात. उदाहरणार्थ ६ शेर : ३ शेर ह्याचें व्यस्तगुणोत्तर ३ शेर : ६ शेर हें आहे.

गुणोत्तरें अपूर्णाकांनीं दाखविलीं जातात, ह्मणून अपूर्णाकांच्या अंशच्छेदांसंबंधीं सर्व नियम गुणोत्तरांच्या गुण व मान ह्या पदांना लागू होतात. उदाहरणार्थ पुढील विशेष पहा.

ग— गुणोत्तराचीं पदे गुण (अंश) आणि मान (छेद) ह्यांना एकाच संख्येनें गुणलें किंवा भागलें, तर त्या गुणोत्तरांत बदल होत नाही. जसें.— ६ शेर : ३ शेर = १८ शेर : ९ शेर = २ शेर : १ शेर.

घ— गुणोत्तराच्या अपूर्णाकांना समच्छेदरूपें किंवा समांशरूपें द्यावीं, ह्मणजे ह्या कोणत्याही रूपावरून दोन गुणोत्तरांची तुलना करून, त्यांना लहानमोठीं किंवा बरोबरीचीं ह्मणतां येतें. उदाहरणार्थ ६ : ५ व ४ : ३ हीं गुणोत्तरें घ्या.

ह्यांचें अपूर्णाक	अनुक्रमें	$\frac{६}{५}$	व	$\frac{४}{३}$	हे आहेत,
ह्यांचीं समच्छेदरूपें	अनुक्रमें	$\frac{१८}{१५}$	व	$\frac{२०}{१५}$	हीं आहेत,
व ह्यांचीं समांशरूपें	अनुक्रमें	$\frac{२४}{२०}$	व	$\frac{२४}{१८}$	हीं आहेत.

ह्या समच्छेदरूपांत पहिल्याच्या अंशापेक्षां दुसऱ्याचा अंश मोठा आहे, ह्मणून ह्या गुणोत्तरांच्या किंमती ह्या अंशांच्या सम रीतीनें लहानमोठ्या असल्या पाहिजेत. ह्मणजे १८ ना जितके पट

मोठे २० आहेत तितकेच पट पहिल्या गुणोत्तरापेक्षां दुसरें गुणोत्तर मोठें असलें पाहिजे. तसेंच वरच्या समांशरूपांत पहिल्याच्या छेदापेक्षां दुसऱ्याचा छेद लहान आहे ह्मणून ह्या गुणोत्तरांच्या किंमती ह्या छेदांच्या व्यस्त रीतीनें लहान मोठ्या असल्या पाहिजेत. ह्मणजे दुसऱ्याचा छेद १८ ह्याला पहिल्याचा छेद २० हा जितकेपट मोठा आहे, तितकेच पट पहिल्या गुणोत्तरापेक्षां दुसरें गुणोत्तर मोठें असलें पाहिजे.

क्रमिक गुणोत्तरें.— राशींच्या रांगेचीं जीं गुणोत्तरें एका शेजेनें दाखविलीं जातात, त्यांना क्रमिक गुणोत्तरें ह्मणतात. उदाहरणार्थ ३ हात, ६ हात, ९ हात, ३६ हात, ही राशींची रांग घेतली, तर हिनें

३ हा : ६ हा; ६ हा : ९ हा, ९ हा : ३६ हा.

हीं गुणोत्तरें एका क्रमानें दाखविलीं जातात. हीं क्रमिक गुणोत्तरें होत. हीं क्रमिक गुणोत्तरें अशीं मांडतात कीं—

३ हा : ६ हा : ९ हा : ३६ हा.

भूमितिश्रेढी.— ज्या राशींच्या रांगेचें गुणोत्तर एकच असतें, किंवा ज्या रांगेंतील राशि एकाच गुणोत्तराएवढ्या पटीनें वाढत जातात अगर घटत जातात, त्या रांगेला भूमितिश्रेढी ह्मणतात. जशी.— ३ हा, ६ हा, १२ हा, २४ हा, इ०.

अशा क्रमिक गुणोत्तरांतल्या किंवा श्रेढींतल्या प्रत्येक राशीला एकाच संख्येनें गुणिलें किंवा भागिलें, तर ह्या गुणोत्तरांत बदल होणार नाहीं हें उघड आहे.

साधें गुणोत्तर.— एका युग्माचें जें गुणोत्तर त्याला साधें गुणोत्तर ह्मणतात. उदाहरणार्थ, पुढचीं साधीं गुणोत्तरें पहा.

३ : ६, ६ : ९, व ९ : १८.

संयुक्त गुणोत्तर.— साध्या गुणोत्तरांच्या गुणाकाराला त्यांचें संयुक्त गुणोत्तर किंवा गुणितगुणोत्तर ह्मणतात. ह्मणजे साध्या गुणोत्तरांतील अग्रसरांच्या गुणाकारानें नवा अग्रसर केला आणि उपाग्रसरांच्या गुणाकारानें नवा उपाग्रसर केला, तर त्या नव्या युग्माच्या गुणोत्तराला मूलयुग्मांचें संयुक्त

गुणोत्तर ह्यणतात. उदाहरणार्थ वरच्या साध्या गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर,

$३ \times ६ \times ९ : ६ \times ९ \times १८$ हें आहे,
किंवा संक्षेप देतां. $३ : १८$ हें आहे.

क्रमिक राशींतील क्रमिक गुणोत्तरांच्या गुणाकारांत मधल्या राशींचा संक्षेप जावयाचा ह्यणून,

फल.— क्रमिक गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर हें त्या क्रमांतील आद्यंतराशींचें गुणोत्तर दाखवील.

प्रमाण.— दोन गुणोत्तरांच्या समानतेला (वरोवरीला)

प्रमाण ह्यणतात व ती समानता = ह्या चिन्हानें किंवा ह्याच्या आद्यंत बिंदूनीं दाखवितात. जशी:—

$$३ : २ = १५ : १०$$

किंवा $३ : २ :: १५ : १०$

हें प्रमाण, जसे ३ स २, तसे (तितकेच पट) १५ स १० असें दक्षिण गुणोत्तरांनीं वाचावें, आणि तें $\frac{३}{२} = \frac{१५}{१०}$ ह्या उजव्या गुणोत्तरांचे (अपूर्णाकांचे) वरोवरीनें दाखवून विचारांत घ्यावें.

अथवा जितके ३ त २ तितकेच १५ त १० असें वामगुणोत्तरांनीं वाचावें, किंवा जसे ३ हे २ स तसे (तितकेच पट) १५ हे १० स असें वामगुणोत्तरांनीं वाचावें, आणि तें $\frac{३}{२} = \frac{१५}{१०}$ ह्या डाव्या गुणोत्तरांचे (अपूर्णाकांचे) वरोवरीनें दाखवून विचारांत घ्यावें.

पहिल्या वाचणीचा अर्थ, पहिल्याराशीच्या जितके पट दुसरा राशि आहे, तितकेच तिसऱ्याचे पट चवथा राशि आहे असा होतो. ह्यावरून $\frac{३}{२}$ ह्या दक्षिण गुणोत्तरानें १५ हा तिसरा राशि गुणिला, तर १० हा चवथा राशि येईल. दुसऱ्या व तिसऱ्या वाचणीचा अर्थ पहिल्या राशींत जितकी पट दुसऱ्याची रहाते, तितकीच पट तिसऱ्या राशींत चवथ्याची रहाते असा होतो. यावरून $\frac{३}{२}$ ह्या वामगुणोत्तरानें १० हा चवथा राशि गुणिला, तर १५ हा तिसरा राशि येईल. एथें प्रथमतः दुसरें युग्म वाचून मग पहिलें युग्म वाचलें, तर दुसऱ्या गुणोत्तरापासून पहिल्याचेही राशि वरील रीतीनें निघतील हें उघड

आहे. हे विचार प्रमाणाच्या लक्षणापासूनच निघणारीं फलें आहेत त्या अर्थी सामान्य आहेत. ह्मणून,

फल १ लें.— प्रमाणांतल्या एका युग्माच्या दक्षिणगुणोत्तरानें दुसऱ्या युग्माचा अग्रसर गुणिला तर त्याचा उपाग्रसर येईल; तसाच एका युग्माच्या वामगुणोत्तरानें दुसऱ्या युग्माचा उपाग्रसर गुणिला तर त्याचा अग्रसर येईल.

उदाहरण.— $४ : १२ = ९ : कित्ती ?$ आणि $८ : ५६ = कित्ती : २१$ ते शोधून हीं प्रमाणें पुरीं करा.

पहिल्या प्रमाणांत पहिल्या युग्माचें दक्षिणगुणोत्तर $\frac{१२}{४}$ आहे. ह्यानें दुसऱ्याचा अग्रसर ९ ह्यास गुणिल्यानें त्याचा उपाग्रसर येतो. जसा.— $९ \times \frac{१२}{४} = \frac{१०८}{४} = २७$ ह्मणून,
 $४ : १२ = ९ : २७$ हें १ लें उत्तर.

दुसऱ्या प्रमाणांत पहिल्या युग्माचें वामगुणोत्तर $\frac{८}{५६}$ आहे. ह्यानें दुसऱ्याचा उपाग्रसर २१ हा गुणिल्यानें त्याचा अग्रसर येईल. एथें $२१ \times \frac{८}{५६} = \frac{१६८}{५६} = ३$ ह्मणून,
 $८ : ५६ = ३ : २१$ हें २ रें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. व.

पुढील प्रमाणांत जागा सोडलेलीं पदें शोधून भरा.

१. $७ : ४२ = () : १२०$; २. $२८ : () = १०० : २५$;
३. $() : १७ = ८०४ : ६७$; ४. $२६४ : १००० = ६६ : ()$;
५. $८३२ : १२२ = () : २४४०$; ६. $() : ५० = ९ : १$.

प्रमाणांतील प्रत्येक युग्माच्या संख्या एकेकाच जातीच्या असल्या पाहिजेत. तथापि दोहों युग्मांच्या संख्या एकाच किंवा वेगळाल्या परिमाणाच्या वाचक असल्या किंवा भाववाचक असल्या, तरी त्यांचीं गुणोत्तरें हीं भावसंख्याच दाखविणारीं येतात; ह्मणून दोन गुणोत्तरें समान असलीं, ह्मणजे त्यांचीं युग्में बरोबर मांडतां येतात. जशीं.—

३ हात : २१ हात = ५ हात : ३५ हात.
२ महिने : १४ महिने = १६ रुपये : ११२ रुपये.

$$\begin{array}{l} ५ \quad : ५५ \quad = ७ \text{ फूट} : ७७ \text{ फूट.} \\ ८ \quad : ८८ \quad = ९ \quad : ९९ \end{array}$$

एथें दक्षिणगुणोत्तरे घेतलीं तर पहिल्या दोन प्रमाणांत ७ = ७ मांडले आहेत, व पुढच्या दोन प्रमाणांत ११ = ११ मांडले आहेत; आणि एथें वामगुणोत्तरे घेतलीं तर पहिल्या दोन प्रमाणांत $\frac{१}{७} = \frac{१}{७}$ मांडिला आहे. आणि पुढच्या दोन प्रमाणांत $\frac{१}{११} = \frac{१}{११}$ मांडिला आहे, असें थोड्या विचारानें लक्षांत येईल.

शेवटील पदे व मधलीं पदे.— प्रमाणांतल्या पहिल्या व चवथ्या राशींना शेवटील पदे हणतात, आणि दुसऱ्या व तिसऱ्या राशींना मधलीं पदे हणतात.

प्रमाणासंबंधीं कांहीं उपयुक्त नियम पुढें दिले आहेत. हे नियम विशेष अंकांच्या प्रमाणाशीं पडताळून पाहिले असतां त्यांचा खरेपणा प्रत्ययास येतो. तरी त्यावरून हे नियम कोणत्याही प्रमाणाशीं खरे रहातील असें सामान्यें करून हणवत नाहीं, ह्याकरितां पहिला, दुसरा, तिसरा, चवथा, हे क्रमिक राशि किंवा त्यांच्या संख्या दाखविण्याला प, दु, ति, च, हे सूचक वर्ण किंवा क, ख, ग, घ, असले क्रमिक वर्ण घेऊं, आणि समानतेच्या प्रत्यक्ष प्रमाणाच्या आधारानें हे नियम सामान्य रूपानें सिद्ध करूं.

समानतेचीं प्रत्यक्षप्रमाणें.

स. प्र. १ लें.— जे राशि एका (किंवा समान) राशीशीं समान असतात, ते परस्पर समान असतात.

स. प्र. २ रें.— समानांत समान (किंवा एकच) मिळविले, तर बरेजा समान येतात.

स. प्र. ३ रें.— समानांत समान (किंवा एकच) वजा केले, तर बाक्या समान येतात.

स. प्र. ४ थें.— समानांस समानांनीं (किंवा एकानेंच) गुणिलें, तर गुणाकार समान येतात.

स. प्र. ५ वें.— समानांस समानांनीं (किंवा एकानेंच) भागिलें, तर भागाकार समान येतात.

नियम १ ला.— चार राशि प्रमाणांत असले, आणि त्यांतील एका युग्माचे जागी त्यांचें गुणोत्तर दाखविणाऱ्या त्याच्या संख्या घेतल्या, तर शेवटील पदांच्या गुणाकारावरोवर मधल्या पदांचा गुणाकार होईल.

ह्मणजे $प : दु = ति : च$ असले,
तर $प \cdot च = दु \cdot ति$ होईल.

कारण, हें प्रमाण वामगुणोत्तरांची समानता दाखवितें, ह्मणून,

$$\frac{प}{दु} = \frac{ति}{च}$$

एथें प आणि दु हीं पदें नियमांत सांगितल्याप्रमाणें पहिल्या गुणोत्तराचे अंशच्छेद दाखविणाऱ्या नुसत्या संख्या आहेत, ह्मणून रूपांतर प्रकार ६ प्रमाणें पहिल्या अपूर्णाकाचे अंशच्छेद दुसऱ्याचे छेदानें गुणिले, आणि दुसऱ्याचे अंशच्छेद पहिल्याचे छेदानें गुणिले, तर असें येतें कीं.—

$$\frac{प \cdot च}{दु \cdot च} = \frac{दु \cdot ति}{दु \cdot च}$$

ह्या समान अपूर्णाकांचे छेद समान आहेत ह्मणून त्यांचे अंश समान असले पाहिजेत. ह्यावरून,

$$प \cdot च = दु \cdot ति \text{ हें सिद्ध.}$$

प्रमाणांत मधलीं पदें एकच असलीं, तर त्या प्रत्येकाला शेवटील पदांचें भूमितिमध्यप्रमाण ह्मणतात. उ. २ : ४ = ४ : ८ ह्या प्रमाणांत २ व ८ ह्यांचें भूमितिमध्यप्रमाण ४ आहे असें ह्मणतात. एथें शेवटच्यांचा गुणाकार मधल्याच्या वर्गावरोवर वरील नियमानें होतो. ह्मणून,

फल.— दोन संख्यांचें भूमितिमध्यप्रमाण हें त्यांच्या गुणाकाराच्या वर्गमूळानें दाखविलें जाईल.

सूचना १ ली.— दोन्ही गुणोत्तरें परिमाणसंख्यांचीं असलीं, ह्मणजे दोन परिमाणसंख्यांचा गुणाकार संभवत नाहीं, हा ह्या नियमाला दोष येतो. पण एका गुणोत्तराचे जागी त्याचे

अंशच्छेद दाखविणाऱ्या त्या राशींतील संख्यांचें युग्म घेतलें ह्मणजे हा नियम लावितां येतो. उदाहरण.—

३ पैसे : २ पैसे = १५ आंबे : १० आंबे.
 एथें विशेष गप्र. ३ पैसे : २ पैसे = ३ : २
 ∴ स. प्र. १प्र. ३ : २ = १५ आंबे : १० आंबे.
 असें प्रमाण येतें. ह्याच्यारशीं वरील नियम लावून,

३ × १० आंबे = २ × १५ आंबे असें ह्मणतां येतें. पण
 ३पैसे × १० आंबे = २पैसे × १५ आंबे असें ह्मणवत नाही.

यास्तव एका गुणोत्तराचे जार्गी नुसत्या संख्या घेण्याची अट पत्करली पाहिजे.

सूचना २ री.— प. च = दु. ति ह्या समानतेला स. प्र. ५ प्रमाणें चनें दोन्हीकडे भागिलें, तर,

$$प = \frac{\text{दु. ति}}{\text{च}} \text{ येतो.}$$

ह्यावरून प्रमाणामध्ये जे दोन गुणाकार बरोबर असतात त्यांतील एकाच्या अवयवानें दुसऱ्याला भागावें ह्मणजे राहिलेला अवयव येईल. जसा.—

$$प = \frac{\text{दु. ति}}{\text{च}}$$

$$\text{ति} = \frac{\text{प. च}}{\text{दु}}$$

$$\text{दु} = \frac{\text{प. च}}{\text{ति}}$$

$$\text{च} = \frac{\text{दु. ति}}{\text{प}}$$

उदाहरण.— ६, ७, ८, ह्या तीन संख्या प्रमाणांत येण्यास पहिलें किंवा दुसरें पद कोणतें असावें ?

पहिलें पद काढणें तर, $प = \frac{\text{दु. ति}}{\text{च}} = \frac{६ \times ७}{८} = ५\frac{१}{४}$.

ह्यानें वरील प्रमाण असें होतें कीं.— $५\frac{१}{४} : ६ = ७ : ८$.

दुसरें पद काढणें तर, $\text{दु} = \frac{\text{प. च}}{\text{ति}} = \frac{६ \times ८}{७} = ६\frac{६}{७}$.

ह्यानें वरील प्रमाण असें होतें कीं.— $६ : ६\frac{६}{७} = ७ : ८$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. श.

खालीं संख्या दिल्या आहेत ह्यांच्याशीं प्रमाणांत येत अशा आदि पदीं, २ रे पदीं, ३ रे पदीं, आणि ४ थे पदीं, कोणत्या संख्या येतील तें सांगा.

१. २, ३, ४.

२. ३, ४, ५.

३. ४, ५, ६.

४. ५, ६, ७.

५. २, ५, ७.

६. ४, ५, ८.

७. २, ७, ९.

८. ५, ७, ७.

नियम २ रा.— दोन गुणाकार समान असून त्यांतील एकाचे अवयव पहिल्या व चवथ्या स्थळीं मांडिले, आणि दुसऱ्याचे अनुरूप अवयव दुसऱ्या व तिसऱ्या स्थळीं मांडिले तर तीं चार पदे प्रमाण दाखवितील.

हणजे क·घ = ख·ग असले,

तर कःख = गःघ होईल.

ह्या समानतेला स. प्र. ५ प्र. प्रथम घने व मग खने दो-हीकडे भागिलें, तर असें येतें कीं—

$$\frac{\text{क} \cdot \text{घ}}{\text{ख} \cdot \text{घ}} = \frac{\text{ख} \cdot \text{ग}}{\text{ख} \cdot \text{घ}}$$

ह्या समानतेला संक्षेप दिला हणजे इष्टसिद्धि होते. जशी.—

$$\frac{\text{क}}{\text{ख}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} \quad \text{हणजे} \quad \text{क} : \text{ख} = \text{ग} : \text{घ}.$$

उदाहरणार्थ. ४ × ६ रु = ८ × ३ रु. असले,

तर ४ : ८ = ३ रु : ६ रु. हीं पदे प्रमाणांत येतील.

सूचना.— दोन गुणाकारांपासून प्रमाण मांडितांना पहिले स्थळीं भावसंख्या मांडिली, तर गुणोत्तर संभवण्यासाठीं दुसरे स्थळीं त्याच रूपाची संख्या मांडिली पाहिजे. ही गोष्ट अनुरूप अवयव ह्या शब्दावरून लक्षांत ठेविली पाहिजे. कारण ४ : ३ रु. अशीं पदे मांडिलीं तर त्यांचें गुणोत्तर संभवणार नाहीं हें उघड आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ष.

खालीं दिलेल्या समान गुणाकारांचे अवयव प्रमाणांत मांडा.

१. १५ × ८ आंबे = १२ × १० आंबे;

२. १२ × १७ तोळे = ३४ × ६ तोळे;

३. अठरा पंचे = नऊ दाहीं; ४. ४८ पायली = ४ मण;

५. २० पावणें = ३० निमें; ६. $\frac{३}{५} = \frac{२१}{३५}$;

७. क्ष. ज्ञ = य^२; ८. क. ख = ख. ग;

नियम ३ रा.— चार राशि प्रमाणांत असले, तर ते व्यस्त रीतीनेंही प्रमाणांत असतात.

ह्मणजे प : दु = ति : च असला,

तर दु : प = च : ति होईल.

कारण $\frac{१}{१} = \frac{१}{१}$

आणि $\frac{प}{दु} = \frac{ति}{च}$.

एथें स. प्र. ५ प्रमाणें पहिल्या बरोवरीला दुसऱ्या बरोवरीनें भागिलें ह्मणजे असें येतें कीं.—

$$\frac{दु}{प} = \frac{च}{ति}$$

ह्मणजे दु : प = च : ति हेंच सिद्ध करणें होतें.

दोन्ही गुणोत्तरांचीं पदें एका जातीचीं अगर वेगळाल्या जातींचीं असलीं तरी त्यांना हा नियम लागू होतो, असा हा सामान्य नियम आहे. उदाहरण,

३ रुपये : १२ रुपये = ८ महिने : ३२ महिने असले,

तर १२ रु. : ३ रु. = ३२ म. : ८ म. असतात.

सूचना— एका (वाम) गुणोत्तराचे संबंधानें खरे ठरलेले नियम दुसऱ्या (दक्षिण) गुणोत्तराचेही संबंधांत खरे असतात; हा ह्या नियमाचा आशय आहे.

नियम ४ था.— एकाच जातीचे चार राशि प्रमाणांत असले, तर त्यांतील अग्रसर व उपाग्रसर हे एकाआडएक राशि-प्रमाणांत असतात.

ह्यणजे प : दु = ति : च असला,
तर प : ति = दु : च असतो.

कारण, $\frac{प}{दु} = \frac{ति}{च}$ दिला आहे. ह्या वरोवरीला $\frac{दु}{ति}$ ह्या गुणोत्तरानें स. प्र. ४ प्र. दोहींकडे गुणिलें, तर असें येतें कीं.—

$$\frac{प}{दु} \times \frac{दु}{ति} = \frac{ति}{च} \times \frac{दु}{ति}$$

$$\therefore \frac{प}{ति} = \frac{दु}{च}$$

ह्यणजे प : ति = दु : च.

सूचना.— दोन्ही गुणोत्तरांचे राशि एकाच नांवाचे असले (अगर भावसंख्या असले), तरच प : ति व दु : च ह्यांमध्ये गुणोत्तर संभवतें. उदाहरणार्थ.—

२ पै : ४ पै = ६ पै : १२ पै हें प्रमाण पहा. परंतु दोन गुणोत्तरांचे राशि वेगळाल्या नांवांचे असले, तर त्यांत हीं गुणोत्तरें संभवत नाहींत. उदाहरणार्थ.—

२ पैसे : ४ पैसे = ६ आंबे : १२ आंबे, ह्या प्रमाणांत २ पैसे ह्यांचे अमुक पट १२ आंबे आहेत असें ह्यणतां येत नाहीं; ह्यणून ह्यांना एकाच जातीचे ही अट असावी लागते.

संयुक्तप्रमाण.— ज्या प्रमाणांत अनेक युग्मांच्या संयुक्त (गुणित) गुणोत्तरावरोवर क्रमिक गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर असतें, ह्यणजे क्रमिक राशींतील आद्यंतींच्या राशींचें गुणोत्तर असतें, त्याला संयुक्तप्रमाण ह्यणतात. ०

नियम ५ वा.— अनेक युग्मांच्या गुणोत्तरांवरोवर क्रमिक राशींचीं गुणोत्तरें असलीं, तर, त्या युग्मांच्या संयुक्त गुणोत्तरांवरोवर क्रमिक राशींतील आद्यंतींच्या राशींचें गुणोत्तर असतें. अर्थात् ह्याला संयुक्तप्रमाण हें नांव येतें.

ह्यणजे युग्मांतील भावसंख्या दाखविण्याला क, ख, ग, घ, इत्यादि जोड घेतले आणि, क्रमिक राशि दाखविण्याला य, र,

ल, इत्यादि क्रमिक वर्ण घेतले, तर वरील नियमाचा अर्थ असा होतो कीं.—

$$क : ख = य : र$$

$$ग : घ = र : ल$$

आणि च : छ = ल : व असला

तर क. ग. च : ख. घ. छ = य : व असतो.

एथें य, र, ल, इत्यादि राशि भावसंख्यांचे असले, तर स. प्र. ४ प्र. वरील बरोवरींचा गुणाकार करून, उजवीकडच्या गुणोत्तराला साधारण अवयवांचा संक्षेप दिला, ह्मणजे इष्टसिद्धि होते. परंतु हे राशि परिमाणांचे असले, ह्मणजे त्यांचा गुणाकार संभवत नाही. ह्मणून र आणि ल ह्यांच्या किंमती फल १ प्रमाणें दक्षिणगुणोत्तरांचे आधारें काढून त्यांच्या जागी ठेवाव्या, ह्मणजे असें येतें कीं.—

$$क : ख = य : \frac{ख}{क} \times य$$

$$ग : घ = \frac{ख}{क} \times य : \frac{ख}{क} \times \frac{घ}{ग} \times य$$

आणि च : छ = $\frac{ख}{क} \times \frac{घ}{ग} \times य : व$

$$प्र. नि. १ प्र. च \times व = \frac{ख \cdot घ \cdot छ \times य}{क \cdot ग}$$

$$स. प्र. ४ प्र. क \cdot ग \cdot च \times व = ख \cdot घ \cdot छ \times य$$

$$प्र. नि. २ प्र. क \cdot ग \cdot च : ख \cdot घ \cdot छ = य : व$$

असें येतें. हेंच सिद्ध करणें होतें. ह्याच नियमाचे आधारें संयुक्त प्रश्न अगर बहुराशिकें सोडवितां येतात.

उदाहरण १ लें.— कला ख हें गुणोत्तर २ : ३ असें आहे, आणि खला ग हें गुणोत्तर ५ : ६ असें आहे, तर कला ग हें गुणोत्तर कसें होईल ?

$$\text{आतां } \frac{क}{ख} = \frac{२}{३}$$

$$\text{आणि} \quad \frac{\text{ख}}{\text{ग}} = \frac{१०५}{१२६}$$

$$\therefore \frac{\text{क}}{\text{ख}} \cdot \frac{\text{ख}}{\text{ग}} = \frac{१०५}{१२६} \cdot \frac{१०५}{१२६}$$

$$\text{संक्षेपानें} \quad \frac{\text{क}}{\text{ग}} = \frac{१०५}{१२६}$$

$$\therefore \text{क} : \text{ग} = ५ : ९ \quad \text{हैं उत्तर.}$$

उदाहरण २ रें.— कला ख हैं गुणोत्तर २ : ३ असें आहे, खला ग हैं ५ : ६ असें आहे, आणि गला घ हैं ७ : ८ असें आहे. ह्यावरून क, ख, ग, घ, ह्यांची क्रमिक गुणोत्तरे सांगा.

सूचना.— ह्या प्रत्येक जोडीला डावेकडचे तिच्या खालचे अंक (अग्रसर) व उजवेकडचे तिच्या वरचे अंक (उपाग्रसर) असे गुणक द्यावे, ह्यणजे त्यांचे जागी क्रमिक व पूर्णसंख्या येतात हा नियम लक्षांत ठेवा. ह्या नियमाप्रमाणें ह्या जोड्यांना अनुक्रमें ५ × ७, ७ × ३, व ३ × ६, हे गुणक द्यावे ह्यणजे असें येतें कीं.—

$$\text{क} : \text{ख} = २ : ३ = ७० : १०५$$

$$\text{ख} : \text{ग} = ५ : ६ = १०५ : १२६$$

$$\text{ग} : \text{घ} = ७ : ८ = १२६ : १४४$$

$$\therefore \text{क} : \text{ख} : \text{ग} : \text{घ} = ७० : १०५ : १२६ : १४४ \quad \text{हैं उत्तर.}$$

उदाहरण ३ रें.— एका ७२ शेरांच्या भांड्यांत ११ भाग दूध व १ भाग पाणी आहे. ह्यांत किती पाणी घालावें ह्यणजे त्यांत पाण्याचे ९ पट दूध होईल ?

खुलासा. ७२ शेरांचे १२ भाग केले तर प्रत्येक भाग

* एथें दुसरी इत्यादि जोड्यांपासून प्रमाणाचे आधारें क्रमिक राशि आणावे ते २, ३, $\frac{३ \times ६}{५}$, $\frac{३ \times ६ \times ८}{५ \times ७}$, असे नियमानें येतात. ह्यांना शेवटच्याचा छेद हा साधारण गुणक देऊन सर्वांचे छेद उडवावे, ह्यणजे वरील नियम दिसून येतो.

६ शेरांचा होतो, अर्थात ह्या भांड्यांत ६ शेर पाणी व ६६ शेर दूध आहे. हें दूध कायम ठेवणें आहे. ह्मणून,

$$९ : १ = ६६ शेर : ७\frac{१}{३} शेर$$

ह्यावरून $१\frac{१}{३}$ शेर पाणी घालवें हें उत्तर.

अभ्यासांकरितां उदाहरणें. स.

१. पुढील गुणोत्तरांना सरळरूपें द्या.

$$२१ : ३५; \quad ४४१ : २४०१; \quad \frac{३}{४} : \frac{६}{७}; \quad ३\frac{३}{४} : ५\frac{५}{८};$$

$$३१६ : ७७२७; \quad १ : \frac{३}{२}; \quad \frac{३}{३} : \frac{३}{४}; \quad \frac{२}{३} : \frac{३}{४}; \quad \frac{५}{६} : \frac{७}{८}.$$

२. पुढच्या गुणोत्तरांचीं संयुक्त गुणोत्तरें सरळरूपांनीं सांगा.

$$२ : ३, \quad ३ : ४, \quad ४ : ५; \quad ७ : १५, \quad ९ : १६, \\ २४ : ३५; \quad १\frac{३}{४} : २\frac{५}{६}, \quad २\frac{६}{९} : ७\frac{७}{८}.$$

३. पुढच्या प्रत्येक जोडींतलें मोठें गुणोत्तर सांगा.

$$५ : ७ \text{ का } ७ : ९; \quad ८ : १५ \text{ का } १५ : २९; \\ २\frac{३}{४} : ६\frac{४}{७} \text{ का } ४\frac{५}{६} : ११\frac{३}{४}.$$

४. $४\frac{७}{९} : १\frac{३५}{६९}$ आणि $६\frac{१}{२} : १\frac{२}{३}$ ह्या गुणोत्तरांचें प्रमाण बनतें का नाहीं ?

५. $४\frac{४}{७}$, $\frac{५}{९}$, १.३ आणि $\frac{४५५}{६२८}$ ह्या चार संख्या प्रमाणांत आहेत काय ? नसल्यास पहिल्या तीन संख्या प्रमाणांत येण्याला ४ थें पद काय घ्यावें ?

६. पुढच्या संख्यांचीं भूमितिमध्यप्रमाणें सांगा.

$$३\frac{३}{४} \text{ व } १०\frac{३}{४}; \quad १ \text{ व } ००१; \quad ३८७९०८ \text{ व } ०१८७.$$

उत्तरांत द. स्थ. ४ आणा.

७. एक आगगाडी $११\frac{२}{३}$ तासांत $३९७\frac{५}{६}$ मैल चालते, आणि दुसरी $८\frac{४}{९}$ तासांत $२६२\frac{४}{९}$ मै. चालते. ह्यांच्या वेगांची तुलना करून दाखवा, ह्मणजे ह्या वेगांचें प्रमाण सांगा.

८. कला २ रु. मिळाले तर खला ३ रु. मिळतात, खला ४ रु. मिळाले तर गला ५ रु. मिळतात, आणि गला ६ रु. मिळाले तर घला ७ रु. मिळतात. तर क, ख, ग, घ ह्यांच्या ह्या मिळकती परस्परांशीं ताडून दाखवा, ह्मणजे ह्या मिळकती क्रमिक प्रमाणाच्या रूपानें मांडून दाखवा.

९. एक वाणी १९ शेर मोहरींत ५ शेर शिरीस मिळवितो आणि दुसरा वाणी २७ शेर मोहरींत ७ शेर शिरीस मिळवितो. ह्या दोन मिश्रणांतील मोहऱ्यांचें प्रमाण सांगा.

१०. एका चरवींत ९ भाग दूध व १ भाग पाणी आहे. त्या चरवींत आणखी ४ शेर पाणी घातलें, तर त्या मिश्रदुधांत शुद्ध दुधाच्या षष्ठांश पाणी होतें. तर ह्या चरवींत शुद्ध दूध किती शेर आहे ?

११. एक पिंप ३ भाग निंची दारू आणि २ भाग उंची दारू ह्यांनी भरलेलें आहे. ह्यांतून किती मिश्र काढून त्यांत उंची दारू घालावी, ह्मणजे त्या नव्या मिश्रांत दोन्ही दारू समान होतील ?

१२. एक शिकारी कुत्रा सशाच्या मागें लागला आहे. हा सशाच्या ४ उड्यांच्या वेळांत ३ उड्या टाकितो, पण सशाच्या ३ उड्यांच्या लांबीबरोबर ह्याच्या २ उड्यांची लांबी असते. ह्या वरून हा कुत्रा व ससा ह्यांच्या वेगांचें प्रमाण सांगा.

साधें प्रमाण अथवा त्रैराशिक.

जें प्रमाण साध्या (संयुक्त नसणाऱ्या) गुणोत्तरांचें साम्य दाखवितें, किंवा ज्यांत उत्तर शोधण्याला तीनच राशि (साधे किंवा संयुक्त) पूर्णपणें दिलेले असतात, त्याला साधें प्रमाण अगर त्रैराशिक ह्मणतात.

उदाहरण.— २ पैशांस ५ आंबे मिळतात, तर ६ पैशांस किती आंबे मिळतील ? ह्याचें प्रमाण असें मांडतात कीं.—

$$२ \text{ पैसे} : ६ \text{ पैसे} = ५ \text{ आंबे} : \text{उत्तर आंबे.}$$

ह्या प्रमाणांत दोन्ही गुणोत्तरें साधी आहेत ह्मणून ह्याला साधें प्रमाण ह्मणतात. तसेंच ह्यांत उत्तर शोधण्यासाठीं तीनच राशि पूर्णपणें दिले आहेत. ह्मणून ह्याला त्रैराशिकही ह्मणतात.

राशींचीं नांवें.— प्रमाणांतल्या राशींना अनुक्रमें मान (ह० माप), इच्छा, फल आणि इच्छाफल अशीं नांवें देतात.

संबंधी राशि.— प्रमाणांत पहिल्या अग्रसराचा संबंध दुसऱ्या अग्रसराशीं असतो, तसाच पहिल्या उपाग्रसराचा संबंध

दुसऱ्या उपाग्रसराशीं असतो. हेच दोन संबंध मान व त्यांचें फल, आणि इच्छा व इच्छाफल, ह्या अन्वर्थक जोड्यांनीं दर्शित होतात.

सजातीय राशि.— प्रमाणांत पहिल्या अग्रसराची पट त्याचा उपाग्रसर असून दुसऱ्या अग्रसराची तीच पट त्याचा उपाग्रसर असतो. ह्याप्रमाणें मान व इच्छा हे राशि सजातीय असून इच्छा व इच्छाफल हेही राशि सजातीय असतात.

उदाहरणांत संबंधी राशींचे दोन जोड दिलेले असून त्यांच्या प्रमाणांत सजातीय राशींचे दोन जोड वेगळाले मांडावे लागतात. हा भेद वरचें उदाहरण व प्रमाण ह्यांवरून लक्षांत आणा.

महत्वे व त्यांचे बदल.— प्रमाणांत अग्रसराला महत्व ह्मणतात, आणि उपाग्रसराला त्याचा बदल किंवा विकार ह्मणतात. ह्यावरून मानराशीला मानमहत्व, मूलमहत्व, व पूर्वमहत्व, अशीं नांवे येतात, आणि फलराशीला फलमहत्व व उत्तरमहत्व अशीं नांवे येतात.

मूलमहत्वांतील अग्रसराची कांहीं पट त्याचा उपाग्रसर घेतला, ह्मणजे फलमहत्वांतील अग्रसराची तितकीच पट, अगर तितक्यावाच हिस्सा, त्याचा उपाग्रसर घेतला जातो. ह्मणून इच्छाराशीला मानमहत्वाचा बदल किंवा विकार ह्मणतात, आणि इच्छाफळाला फलमहत्वाचा बदल किंवा विकार ह्मणतात.

उदाहरणार्थ, नेमलेल्या वेळांत १ मनुष्य ६ कागद लिहितो असें घेतलें, ह्मणजे त्या वेळांत दोन मनुष्यें १२ कागद लिहितील असें घेतलें जातें. तसेंच नेमलेलें काम १ मनुष्य ६ तासांत करितो असें घेतलें, ह्मणजे तें काम २ मनुष्यें ३ तासांत करितील असें घेतलें जातें. ह्यांचीं प्रमाणें उदाहरणांतल्या संबंधी राशींच्या क्रमानें अशीं मांडलीं जातात कीं.—

१ लें. १ मनु. : २ मनु. = ६ कागद : १२ कागद.

२ रें. १ मनु. : २ मनु. तर ६ तास : ३ तास.

१ ल्या प्रमाणांत मनुष्याचा बदल २ पटीचा आहे, तसाच कागदांचाही बदल २ पटीचा आहे. ह्मणजे १ स २ असा सम

आहे. २ व्या प्रमाणांत मनुष्यांचा बदल २ पटीचा आहे, परंतु तासांचा बदल २ व्या हिश्याचा आहे, ह्मणून २ रें युग्म व्यस्त केलें तरच त्याचें गुणोत्तर १ ल्याच्या गुणोत्तराबरोबर मांडतां येईल. व्यवहारांतल्या प्रश्नांवरून अशीं दोन प्रकारचीं प्रमाणें मांडिलीं जातात, ह्मणून प्रमाणाचे प्रकार सम आणि व्यस्त असे दोन कल्पितात.

समप्रमाण.

फलमहत्वाचा बदल (१ ल्या प्रमाणाअन्वये) मूलमहत्वाच्याच बदलासारखा होत असला, तर त्या प्रमाणाला समप्रमाण ह्मणतात.

ह्मणजे प्रश्नावरून मांडलेल्या प्रमाणसंख्येहून इच्छासंख्या मोठी असून फलसंख्येहून इच्छाफलसंख्या तितकीच पट मोठी येत असली, किंवा प्रमाणसंख्येहून इच्छासंख्या लहान असून फलसंख्येहून इच्छाफलसंख्या तितक्यावाच हिस्सा लहान येत असली, तर त्या प्रमाणाला समप्रमाण ह्मणतात. अथवा प्रश्नावरून मांडलेल्या प्रमाणांत दक्षिणगुणोत्तराबरोबर दक्षिणगुणोत्तरच मांडलें जात असलें, तर त्या प्रमाणाला समप्रमाण ह्मणतात.

उदाहरणार्थ, कोणतेंही काम नेमलेल्या मनुष्यांकडून नेमकें होत आहे (१ ल्या प्रमाणांतील अग्रसर पहा), तर तें काम अधिक मनुष्यांकडून अधिक होईल, व कमी मनुष्यांकडून कमी होईल, ह्मणून कामाचा बदल मनुष्यांच्या समप्रमाणानें होतो असें ह्मणतात. ह्याचा अर्थ मनुष्यांच्या संख्यांच्या समप्रमाणांत कामाचे राशि असतात असा होतो.

कितीएक समप्रमाणें व्यवहारावरून कळतात. जशीं.—इतर संबंध कायम (एकसारखेच) असले, तर,

वस्तूंच्या किंमतींचा बदल त्या वस्तूंच्या संख्यांच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

५ वस्तु : १५ वस्तु = ५ वस्तूंची किं. काहीं रु. : १५ वस्तूंची किं. उत्तर रु.

वाहतुकीच्या भाज्याचा बदल लांबीच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

पँ कोस : दु कोस = प को.चें भाडें क. रु. : दु को.चें भाडें उ. रु.

घर वापरण्याच्या भाज्याचा बदल वापरणुकीच्या कालाच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

कमहिने : खमहिने = कमहि.चें भाडें द रु. : खमहि.चें भाडें उ.

मुद्दल वापरण्याच्या व्याजाचा बदल त्या मुदलाच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

१०० रु. : क रु. = १०० रु.चें व्याज द : क रु.चें व्याज उ.

नियमित कालापावेतों वापरणाऱ्या शक्तींच्या कामाचा बदल त्या शक्तींच्या संख्यांच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

कमनु. : खमनु. = कमनु. काम द : खमनु. काम उ.

कितीएक समप्रमाणें शास्त्रीय विचारांपासून कळतात. जशीं.—

अपूर्णाकांचे छेद सारखे असले, तर त्यांच्या किमतींचा बदल अंशांच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

५ अंश : ७ अंश = $\frac{५}{९६}$: $\frac{७}{९६}$.

म्हणजे ५ व ७ अशा दोन भाज्यांना १६ सारख्या एकाच भाजकानें भागलें, तर ते भागाकार त्या भाज्यांच्या समप्रमाणांत येतात.

वर्तुळ परिघांचा बदल व्यासांच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

एका मानाच्या व्यासावर वर्तुळ काढलें, तर त्याचा परिघ ३.१४१६ मानें भरतो असें भूमितीच्या विचारानें ठरतें. येथें ३.१४१६ ही परिघ मानें दाखविण्याकरितां π घेतला तर.—

१ मान, व्यास : ५ माने व्यास = १ मान व्यासाचा परिघ π माने : ५ माने व्यासाचा परिघ उत्तर माने.

* एथें प (म्ह. पहिलें) व दु (म्ह. दुसरें) ह्यांच्या जागीं ४ व ६ अशा कोणत्याही संख्या घ्याव्या म्हणजे ह्या प्रमाणाचा अर्थ स्पष्ट होईल. ह्या व पुढील प्रमाणांत क, उ, इत्यादि सूचक वर्णही अशाच रीतीनें कांहीं संख्या, उत्तर, दिलेली संख्या द, अशा संख्या सुचविण्यासाठीं योजिलेले आहेत हें लक्षांत असावें.

वर्तुळक्षेत्रांचा बदल त्यांच्या व्यासांच्या वर्गांच्या (त्या व्यासांवरील चौरसांच्या) समप्रमाणांत होतो. जसा.—

वर्तुळाच्या व्यासावरील चौरस १ चौरसमान ह्मटला, तर त्यावरील वर्तुळाचें क्षेत्र $\frac{\pi}{4}$ चौ.मानें येतें. ह्मणून.—

$१^२ : ५^२ = १$ व्यासाच्या वर्तुळाचें क्षेत्र $\frac{\pi}{4}$ चौ.मानें :
५ व्यासाच्या वर्तुळाचें क्षेत्र ३. चौ.मानें.

गोलांच्या पृष्ठफळांचा बदल त्यांच्या व्यासांच्या वर्गांच्या समप्रमाणांत होतो. ह्मणजे,

गोलाच्या व्यासावरील चौरस १ चौरसमान ह्मटला, तर त्या गोलाचें पृष्ठफळ π चौरसमानें ठरतें. ह्मणून.—

$१^२ : ५^२ = १$ व्यासाच्या गोलाचें पृष्ठफळ π चौ.मा : ५
व्यासाच्या गोलाचें पृष्ठफळ ३. चौ.मा.

गोलांच्या घनफळांचा बदल त्यांच्या व्यासघनांच्या (व्यासांवरील घनांच्या) समप्रमाणांत होतो. जसा.—

गोलाच्या व्यासावरील घनाला १ घनमान ह्मटलें, तर त्या गोलाचें घनफळ $\frac{\pi}{6}$ घनमानें ठरतें. ह्मणून,

$१^३ : ५^३ = १$ व्यासाच्या गोलाचें घनफळ $\frac{\pi}{6}$ घनमानें :
५ व्यासाच्या गोलाचें घनफळ ३. घनमानें.

नियमित प्रेरणेच्या अंत्यवेगाचा बदल प्रेरणा कालाच्या समप्रमाणांत होतो. ह्मणजे.—

पदार्थावर घडणारें भूमीचें आकर्षण, आगगाडीच्या रांगेवर घडणारी वाफेची प्रेरणा, तांग्यावर लागू होणारी घोड्यांची ओढ, इत्यादि प्रेरणा नेमाच्या असतात. ह्मणजे त्यांकडून दर सेकंदास किंवा क्षणोक्षणीं नेमलेल्या मानाचा वेग त्यांच्या प्रेरित पदार्थांना मिळत असतो. ह्या वेगवृद्धीनें येणाऱ्या चालीला जर कांहीं प्रतिबंधक असलें, तर त्यावर ह्या प्रेरित पदार्थांचा एकसारखा दाब लागू होतो; अथवा त्यांची स्थिरावस्था सुटली, तर ह्या प्रेरित पदार्थांना वाढणाऱ्या वेगांच्या गति मिळतात. उदाहरणार्थ, भूमीचें आकर्षण आंब्यावर सतत असतें ह्याच्या वेगवृद्धीमुळे त्या आंब्याचा भार त्याच्या डेंखावर एकसारखा

लागू होतो, आणि तो आंवा डेंखापासून सुटला ह्मणजे त्याला दर सेकंदास ३२ फूटप्रमाणें वेग मिळत चालतो ह्यामुळे तो आंवा वाढत्या वेगाच्या गतीनें भूमीकडे चालू लागतो. भूमीच्या आकर्षणाच्या ह्या नेमाच्या वेगवृद्धीमुळे एकंदर पदार्थांमध्ये नियमित किंवा एकसारखें राहणारें गुरुत्व (वजन) येतें, ह्मणून ह्या वेगवृद्धीला गुरुत्वाकर्षण हें नांव देऊन ती ग ह्या आदिवर्णानें दाखवितात. इतर प्रेरणांच्या वेगवृद्धि वृ ह्या वर्णानें दाखवितात, आणि कोणाचेही अंत्यवेग वनें दाखवितात. एथें रोजच्या माहितींतलें गुरुत्वाकर्षणच घेतलें, तर, वरील नियमानें असें प्रमाण होतें कीं.—

१ सेकंद : ४ सेकंद = १ सेकंदाचा अंत्यवेग सुमारें ३२ फूट किंवा ग : ४ सेकंदांचा अंत्यवेग व .

नियमानें प्रेरित होणाऱ्या पदार्थांच्या चालीचा बदल काळांच्या वर्गांच्या समप्रमाणांत होतो, आणि त्याची एका सेकंदांतली चाल अंत्यवेगाच्या निम्मे होते. ह्मणून,

$१^२ : ४^२ = १$ सेकंदांतली चाल $\frac{ग}{२}$ किंवा १६ फूट : ४ सेकंदांतली चाल च .

व्यस्तप्रमाण.

फलमहत्वाचा बदल (२ व्या प्रमाणाअन्वये) मूलमहत्वाच्या बदलाच्या उलट होत असला, तर त्या प्रमाणाला व्यस्तप्रमाण ह्मणतात.

ह्मणजे प्रश्नांतील प्रमाणांत प्रमाणसंख्येहून इच्छासंख्या मोठी असून, फलसंख्येहून इच्छाफलसंख्या त्या पटीइतक्यावाच हिस्सा लहान येत असली, किंवा प्रमाणसंख्येहून इच्छासंख्या लहान असून फलसंख्येहून इच्छाफलसंख्या त्या हिश्याइतक्यावीच पट मोठी येत असली, तर त्याला व्यस्त प्रमाण ह्मणतात. अथवा प्रश्नाअन्वये मांडिलेल्या प्रमाणांत दक्षिणगुणोत्तराबरोबर वामगुणोत्तर मांडलें जात असल्यामुळे, एक युग्म उलट करून मांडावें लागत असलें, तर त्याला व्यस्त प्रमाण ह्मणतात.

उदाहरणार्थ. कोणतेंही काम नेमक्या मनुष्यांकडून नेमक्या

काळांत होत आहे (२ व्या प्रमाणांतील १ लें व ३ रें पद पहा), तर तें काम अधिक मनुष्यांकडून कमी काळांत होईल (२ रें व ४ थें पद पहा), आणि कमी मनुष्यांकडून अधिक काळांत होईल हें उघड आहे. ह्मणून कालाचा बदल मनुष्यांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो असें ह्मणतात. ह्याचा अर्थ काल व काम ह्यांपैकीं एक युग्म उलट मांडिलें तर त्यांचीं गुणोत्तरें समान होतात असा होतो.

कितीएक व्यस्त प्रमाणें व्यवहारावरून कळतात. जशीं.—

नेमलेल्या छताला माजरपाट घालणें असला, तर माजरपाटाच्या लांबीचा बदल रुंदीच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो. जसा.—

२ फूट रुंदी : ४ फूट रुंदी = एका छतास लागणारी ४ फूट रुंद कापडाची लांबी ल : त्याच छतास लागणारी २ फूट रुंद कापडाची लांबी हें उत्तर.

नेमलेल्या रकमेच्या मोहरा घेणें असल्या, तर त्यांच्या संख्यांचा बदल त्यांच्या दरांच्या व्यस्त प्रमाणांत होईल. जसा.—

२० रु. दर : २५ रु. दर = २५ रु. दराच्या मोहरा क : २० रु. दराच्या मोहरा हें उत्तर.

काहीं घोड्यांनीं एकच अंतर क्रमिलें, तर त्यांच्या वेगांचा बदल तें अंतर क्रमण्यास लागलेल्या काळांच्या व्यस्त प्रमाणांत होईल. जसा.—

४० से. : ६० से. = ६० सेकंदांत अंतर क्रमणाराचा वेग व : ४० सेकंदांत तें अंतर क्रमणाराचा वेग उ.

धान्य मोजकें असलें, तर तें पुरण्याच्या दिवसांचा बदल तें खाणाऱ्या मनुष्यांच्या व्यस्त प्रमाणांत होईल.

८ म. : २४ म. = २४ मनुष्यांस धान्य पुरण्याचे दिवस द : ८ मनुष्यांस तें धान्य पुरण्याचे दिवस उ.

कितीएक व्यस्त प्रमाणें शास्त्रीय विचारापासून कळतात. जशीं.—

अपूर्णांकांचे अंश समान असले, तर त्यांच्या किंमतींचा बदल त्यांच्या छेदांच्या व्यस्त* प्रमाणांत होतो.

* युग्मांतील पदांचा क्रम बदलल्यानें, किंवा त्या पदांचे जागीं त्यांचे व्युत्क्रम घेतल्यानें, त्या युग्माचें गुणोत्तर व्यस्त होतें.

$$उ० \quad \frac{७}{६} : \frac{७}{१२} = १२ : ९ = \frac{१}{६} : \frac{३}{१२}$$

ह्मणजे ७ सारख्या एकाच भाज्याला ९ व १२ अशा वे-
गळाल्या भाजकांनीं भागलें, तर ते भागाकार त्या भाजकांच्या
व्यस्त प्रमाणांत येतात.

तराजूच्या तरफांवरील वजनांचा बदल त्या तरफांच्या व्यस्त
प्रमाणांत होतो. उ०.

१५ इंच तरफ : १६ इंच तरफ = १६ इंच. तरफेच्या पदा-
र्थाचें वजन ५ : १५ इंच. तरफेचें वजन ५.

प्रकाशाचा बदल अंतरांच्या वर्गीच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो.
उदाहरण,

$१^२ : ३^२ = ३$ फूट अंतरावरच्या प्रकाशाचें मान : १ फूट
अंतरावरच्या प्रकाशाचें मान.

गुरुत्वाकर्षणाचा बदल अंतरांच्या वर्गीच्या व्यस्त प्रमाणांत
होतो.* उ०.

भूमध्यापासून समुद्रपृष्ठाचें अंतर मैल $४०००^२$:

भूमध्यापासून हिमालयाच्या शिखराचें अंतर मैल $४००५^२ =$

एका पदार्थाचा हिमालयाच्या शिखरावरील भार ४० शेर :
त्याच पदार्थाचा समुद्रतीरावरील भार ३ शेर.

अथवा

$$\frac{१}{४०००^२} : \frac{१}{४००५^२} = \text{पदार्थाचा समुद्रतीरावरील भार ३}$$

शेर : त्याचा हिमालयावरील भार ३ शेर.

वर सांगितलेलें सम प्रमाण व व्यस्त प्रमाण ह्यांच्या विचा-
रांवरून त्रैराशिकाची रीति उत्पन्न होते ती अशी.—

त्रैराशिकाची रीति.— उत्तराच्या जातीचें दिलेलें फल
३ व्या स्थलीं मांडून उत्तराचें दर्शक अक्षर ४ थ्या स्थलीं मां-
डावें, ३ व्याचें संबंधी पद १ ल्या स्थलीं मांडावें, आणि ४
थ्याचें संबंधी पद २ व्या स्थलीं मांडावें.

ह्या मांडणींत फलाचा बदल मूलमानाच्या बदलाशीं व्यस्त

* हिमालयाचें शिखर व समुद्रतीर हीं दोन्ही एकाच अक्षांशावर
असलीं, किंवा भूमि पूर्ण गोल कल्पिली तर वरील नियम लागू होतो.

प्रमाणांत होत असला, तर त्या मूलयुग्मांतील पदांची अदलावदल करावी; ह्मणजे मूल व फल हीं दोन्ही युग्में समप्रमाणांत मांडलीं जातील.

नंतर ३ व्या पदाला प्रमाण फल १ प्रमाणें मूलयुग्माच्या दक्षिणगुणोत्तरानें गुणावें (किंवा प्रमाण नियम १ सूचना १ ली व २ री प्रमाणें २ व्या पदानें गुणून १ व्या पदानें भागावें), ह्मणजे उत्तर ३ व्या पदाच्या नांवाचें येईल.

सूचना १ ली.— १ लें पद व २ रें पद हीं एका लघुतम परिमाणार्चीं असलीं, तर तिसऱ्या पदाला एका लघुतम परिमाणाचें रूप न देतां विविधाचे रीतीनें गुणाकार भागाकार करावे, व हीं पदे एका मोठ्या परिमाणार्चीं असलीं तर ३ व्या पदाला एका परिमाणाचें रूप द्यावें.

सूचना २ री.— गुणक भाजक जोडण्यापूर्वीं अंगर नंतर १ लें २ रें, व १ लें ३ रें, ह्या पदांना संक्षेप गेल्यास द्यावा.

उ. १ लें.— ३८ शेर साखरेस १११ रुपये पडतात, तर १९ शेर साखरेस काय पडेल ?

ह्या उदाहरणांत इच्छाफळाच्या जातीचे १११ रुपये आहेत, हे ३ रे स्थळीं मांडून, इच्छाफळ ४ थे स्थळीं कल्पिलें. नंतर १११ रुपयांचे संबंधी ३८ शेर हे पहिले स्थळीं मांडून, इच्छाफळाचे संबंधी १९ शेर हे दुसरे स्थळीं मांडिले. जसें.—

$$३८ शे : १९ शे :: १११ रु : इ.फ.$$

मूळ साखरेच्या निमें दुसरी साखर घेतली, तर मूळ रुपयांच्या निमेंच दुसरे रुपये पडतात, ह्मणून हें प्रमाण सम (वथायोग्य) आहे. ह्याच्या पहिल्या युग्माला १९ शेरांनीं भागतां असें प्रमाण येतें कीं,

$$२ : १ :: १११ रु : इ.फ.$$

प्र. फ. १ प्रमाणें $\frac{१}{२}$ ह्या दक्षिणगुणोत्तरानें तिसरें पद गुणिल्यानें इच्छाफल येईल,

$$\therefore इ.फ. = १११ रु. \times \frac{१}{२} = ५५॥ रुपये.$$

उ. २ रें.— ८५ मैल जाण्यास १०॥= भाडें पडलें, तर १३० मैल जाण्याला भाडें काय पडेल ?

रीतीप्रमाणें १०॥= भाडें व इच्छाफल हीं तिसरे व ४ थे स्थानीं मांडून, त्यांचे संबन्धी १ ले व २ रे स्थलीं मांडिले. जसे.—

$$८५ \text{ मै} : १३० \text{ मैल} = १०॥ = \text{रु} : \text{इष्ट रु.}$$

$$\text{संक्षेपानें} \quad १७ \text{ मै} : २६ \text{ मैल} = १०॥ = \text{रु} : \text{इ. रु.}$$

१७ मैलांपेक्षां अधिक लांबीवर गेलें तर १०॥= रु. पेक्षां अधिक भाडें पडेल. ह्मणजे भाड्याचा बदल लांबीच्या समप्रमाणांत होतो. ह्मणून हीं महत्वे समप्रमाणांत आहेत.

येथें प्रमाणफल १ प्रमाणें पहिल्या युग्माचें दक्षिणगुणोत्तर $\frac{२६}{१७}$ आहे, ह्यानें तिसरें पद गुणावयाचें, ह्मणजे २६ नीं गुणून १७ नीं भागावयाचें. ह्मणून,

$$\begin{array}{r} १०॥ = \\ २६ \\ \hline १७ \mid २७६। \end{array}$$

१६। रु. सुमारें हें उत्तर.

त्रैराशिकाचीं उदाहरणें प्रमाणनियम १ च्याही आधारेणें सोडवितां येतात.

उ. ३ रें.— नेमलेलें कुरण ८४ गाईंस १२ दिवस पुरतें, तर तें ११२ गाईंस किती दिवस पुरेल ?

रीतीप्रमाणें ८४ गा : ११२ गा : : १२ दि : इ. दि.

कुरण खाण्याला गाईं वाढल्या तर तें कमी दिवस पुरतें. ह्मणजे दिवसांचा बदल गाईंच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो, यास्तूव हें प्रमाण व्यस्त आहे. ह्मणजे गाईंच्या दक्षिणगुणोत्तराबरोबर दिवसांचें वामगुणोत्तर मांडलें गेलें आहे. ह्मणून पहिल्या युग्माचीं पदे बदलून प्रमाण सम केलें. जसें,

$$११२ \text{ गा} : ८४ \text{ गा} = १२ \text{ दि} : \text{इ.दि.}$$

एथें प्र. नि. १ प्रमाणें पहिल्या युग्माचे जागीं त्यांतील संख्यांचें युग्म घेतलें तर,

$$११२ \text{ इ. दि.} = ८४ \times १२ \text{ दि.}$$

$$\therefore \text{स. प्र. ५ प्र.} \quad \text{इ. दि.} = \frac{८४ \times १२}{९} \text{ दि.} = ९ \text{ दि.}$$

उ. ४ थें.— एक वाटसरू रोज ८ तास प्रमाणें चालून ३३ दिवसांनी आपल्या गांवीं पोचला. तो जर दररोज ६ तासप्रमाणें चालता, तर आपल्या गांवीं किती दिवसांनी पोचता ?

हा वाटसरू दररोज ८ तासां पेक्षां कमी तास चालता, तर पूर्वीची मजल होण्याला त्याला ३३ पेक्षां जास्ती दिवस लागते, असें हें प्रमाण व्यस्त आहे ह्मणून फल व इच्छाफल हीं ३ ज्या व ४ थ्या स्थलीं मांडून, फलाचा संबंधी २ ज्या स्थलीं, व इच्छाफलाचा संबंधी णहिल्या स्थलीं मांडला. जसा.—

$$६ \text{ ता} : ८ \text{ ता} :: ३३ \text{ दि} : \text{इ. दि.}$$

प्रमाण नियम १ सूचना २ प्रमाणें.

$$\text{इ.दि.} = \frac{३३ \text{ दि} \times ८}{६} = ४४ \text{ दि.} \text{ हें उत्तर.}$$

उ. ५ वें.— गव्हांच्या सोळूल्या खंडीला ३४ रु. पडतात, तर ४२५ रुपयांचा गहू बारुळे मापी किती येईल ?

प्रश्नांतील सोळूली खंडी उत्तराच्या बारुळे मापांत नेतां,

$$३४ \text{ रु.} : ४२५ \text{ रु.} = \text{वा. खं. } १।१।२ : \text{उत्तर.}$$

$$\text{संक्षेपानें} \quad २ \text{ रु.} : २५ \text{ रु.} = \text{वा. खं. } १।१।२ : \text{उ.}$$

अधिक रुपयांचें धान्य अधिक यावयाचें २५
यास्तव प्रमाण सम आहे. प्रमाणफळ १ प्र- २ $\left| \begin{array}{l} ३३।१।२ \\ \hline १.६।३.१ \end{array} \right.$ वा.खं.
माणें तिसरें पद $\frac{२५}{२}$ यांनीं गुणावयाचें ह्मणून $\frac{३३।१।२}{१.६।३.१}$ हें उ.
२५ नीं गुणून २ नीं भागलें.

उ. ६ वें.— १७ हं.वे. ३ क्वा. १६ पौं. सातूला ८ पौं. १८ शि. ९ पे. पडतात, तर किती वजन सातू २ पौं. १६ शि. ३ पे. ह्या रकमेला मिळेल ?

सातूच्या वजनाचा बदल पैशाच्या समप्रमाणांत व्हावयाचा ह्मणून असें प्रमाण मांडलें जातें कीं.—

पौं. शि. पे. पौं. शि. पे. हं. का. पौं.

$$८१८९ : २१६३ = १७३१६ : उ.$$

$$\frac{२०}{१७८ \text{ शि.}} \cdot \frac{२०}{५६ \text{ शि.}} = \frac{५}{८९१२४}$$

$$\frac{१२}{२१४५ \text{ पे.}} : \frac{१२}{६७५ \text{ पे.}} = ११ \mid \frac{८०५०२०}{११}$$

$$\therefore ४२९ \text{ पे.} : १३५ \text{ पे.} = १३ \mid \frac{७३०२२\frac{२}{११}}$$

$$\therefore १४३ \text{ पे.} : ४५ \text{ पे.} = ५२१४\frac{९०}{१४३} \text{ हें उ.}$$

$$\therefore ११ \times १३ : ५ \times ९$$

उ. ७ वें.— ४ $\frac{७}{८}$ औंस सोन्याला १९ पौंड १२ शिलिंग ६ पेन्स लंदनांत पडतात, तर ३ पौंड ११ $\frac{२}{३}$ औंस सोने तेथून मागविलें तर येथें किती रुपये किंमत पडेल? १ शिलिंगाबद्दल येथें ११ आणे द्यावे लागतात.

$$१९ \text{ पौं. } १२ \text{ शि. } ६ \text{ पे.} = ३९२॥ \text{ शि.}$$

$$= \frac{३९२॥ \times ११}{१६} \text{ रु.} = \frac{८६३५}{३२} \text{ रु.}$$

किंमतीचा बदल वजनीच्याशीं समप्रमाणांत होतो. हणून,

$$४\frac{७}{८} \text{ औं.} : ४७\frac{२}{३} \text{ औं.} = \frac{८६३५}{३२} \text{ रु.} : उ.$$

$$\begin{aligned} \text{प्र.नि. १ प्र.} \quad उ. &= \frac{८६३५}{३२} \text{ रु.} \times \frac{१३}{३} \times \frac{६}{३} \\ &= \frac{९४९८५}{३६} \text{ रु.} = २६३८ \text{ रु. } ७ \text{ आ. } ६\frac{२}{३} \text{ पै.} \end{aligned}$$

उ. ८ वें.— ३२५० रुपयांवर १४६। रु. नफा पडला, तर १०० रु. वर नफा काय पडेल?

मुद्दल कमी झाल्याने नफा तितक्यावाच हिस्सा कमी व्हावि-याचा, प्रमाण सम आहे हणून,

$$३२५० \text{ रु.मु.} : १०० \text{ रु.मु.} = १४६। \text{ रु.न.} : इच्छाफल.$$

$$\text{प्र.फ. १ प्र.} \quad इ. = \frac{११७}{१५८५} \text{ रु.} \times \frac{१४६।}{३२५०} = \frac{११७}{२६} = ४\frac{१}{२} \text{ रु.}$$

एथें चारी राशि रुपये दाखविणारे आहेत. ह्याकरितां

प्र० नि० ४ प्रमाणें मुद्दल व नफा ह्यांमध्ये गुणोत्तर संभवेल. ह्मणून प्रश्नांतील संबंधी राशि प्रमाण दाखवितील. जसें.—

३२५० रु. मु. : १४६। रु. न. = १०० रु. मु. : उ. न.

$$\therefore \text{उ. न.} = \frac{१०० \text{ रु.} \times १४६।}{३२५०} = \frac{२५ \times ५८५ \text{ रु.} \cdot ५८५ \text{ रु.}}{३२५०} = \frac{५८५ \text{ रु.}}{१३०} = ४॥ \text{ रु.}$$

ही सोय असते ह्मणून शेंकड्यावरचे हिशेब ह्याही रीतीने मांडीत असतात.

उ. ९ वें.— १०० रुपयांचें १ महिन्याचें व्याज ॥॥ येतें, तर ४०० रुपयांचें २५ महिन्यांचें व्याज काय येईल ?

येथें १ महिन्याचें १०० चें व्याज १२ आणे येतें, तर एक महिन्याचें २०० चें व्याज २४ आणे येईल. ह्मणजे मुदत एकच आहे तर रुपयांच्या इतकेच पट व्याज वाढेल. ह्मणून व्याज व रुपये यांचें प्रमाण सम मांडलें. जसें.—

१०० रु. : ४०० रु. :: $\frac{३}{४}$ रु. व्या. : इ. व्या.

पहिल्या युग्माचे जागीं त्यांतील संख्यांचें युग्म घेतां प्र. नि. १ प्रमाणें

$$१०० \times \text{इ. व्या.} = \frac{३}{४} \text{ रु. व्या.} \times ४०० = ३०० \text{ रु. व्या.}$$

$$\therefore \text{इ. व्या.} = \frac{३००}{१००} \text{ रु. व्या.} = ३ \text{ रु. व्या.}$$

आतां ४८०० रुपयांचें १ महिन्याचें व्याज ३० रुपये येतें, तर २ महिन्यांचें व्याज ६० रुपये येईल. ह्मणजे मुद्दल एकच आहे, तर महिने वाढतील तितकेच पट व्याज वाढेल. ह्मणून व्याज व महिने यांचें प्रमाण सम मांडलें. जसें.—

१ म : २५ म :: ३ रु. व्या. : इ. व्या.

ह्मणून प्रमाण नि. १ सूचना २ प्रमाणें

$$\text{इ. व्या.} = ३ \text{ रु. व्या.} \times \frac{२५}{१} = ७५ \text{ रु. व्या.} \text{ हें उ.}$$

उ. १० वें.— गाडीच्या चाकाची त्रिज्या १ फूट १० इंच आहे, तर ४ मैलांच्या चालींत त्या चाकाचे किती फेरे होतील ?

त्रिज्या १ फूट १० इंच आहे तर व्यास $\frac{११}{३}$ फूट आहे. व्यास १ मान असला तर परिघ ३.१४१६ मानें असतो ह्मणून प्रमाण.

$$१ \text{ फू.व्या.} : \frac{१३}{३} \text{ फू. व्या.} = ३.१४१६ \text{ फू.प.} : \text{चा.प.}$$

$$\therefore \text{प्र.नि. १ प्र. चाकाचा परिघ} = ३.१४१६ \text{ फू.} \times \frac{१३}{३}$$

$$= ११.५१९२ \text{ फू.}$$

४ मैलांचे फूट हे ११.५१९२ ह्या चाकाच्या परिघाच्या फुटांनी भागितां त्याचे फेरे येतील.

$$\therefore \text{चाकाचे ४ मैलांतले फेरे} = \frac{४ \times ५२८० \text{ फू.}}{११.५१९२ \text{ फू.}} = \frac{५२८}{२८७९८}$$

$$= १८३३.४६ \text{ हे उत्तर.}$$

उ. ११ वें.— दोन वर्तुळाकार क्षेत्रांचे व्यास २ : ५ ह्या प्रमाणांत आहेत, आणि पहिल्याचें क्षेत्रफळ ३ विघे आहे, तर दुसऱ्याचें क्षेत्रफळ किती एकर होईल ?

१००० विघे = ८५१ एकर असतात. म्हणून,

$$१००० \text{ वि.} : ३ \text{ वि.} = ८५१ \text{ ए.} : २.५५३ \text{ ए.}^*$$

वर्तुळांची क्षेत्रे व्यासांच्या वर्गांच्या समप्रमाणांत असतात.

म्हणून, $२^२ : ५^२ = २.५५३ \text{ ए. ह्या दोन व्या.व.} : \text{पांच व्या.व.ए.}$

$$\therefore \text{पांच व्या.व. ए} = \frac{२.५५३ \text{ ए}}{१} \times \frac{२५}{४} = \frac{६३.८२५}{४} \text{ ए}$$

$$= १५.९५६२५ \text{ ए.}$$

$$\begin{array}{r} ४० \\ \hline ३८.२५ \dots \text{ गुं.} \\ १६ \\ \hline ४ \dots \dots \text{ आ.} \end{array}$$

\therefore ५ व्यासाच्या वर्तुळाचें क्षेत्र = १५ एकर ३८ गुंठे ४ आणे. हे उत्तर.

सूचना.— कांहीं प्रश्नांत नुसते प्रमाणाचे संबंध दिलेले असतात, त्यांपासून प्रमाणाचे प्रश्न उत्पन्न करून घ्यावे लागतात. तसेंच सामान्य संख्यांचे जागीं सावयव संख्या घेतल्या तर त्रैराशिकाचे आधारानें कित्येक बहुराशिकेही सोडवितां येतात.

* अशा सोयीच्या प्रश्नांत ४ थें स्थळीं उत्तरच तोंडचेतोंडीं काढून मांडावें.

उ. १२ वें.- १० गाई व १२ हशी ह्यांना ५ दिवसांना ११२० पेंढ्या गवत लागले, तर २ गाई व ४ हशी ह्यांना दरमहा खर्च काय लागेल ? गवताचा भाव शेंकडा ४॥॥ रु. प्रमाणे आहे, आणि २ हशींच्या इतकें गवत ३ गाईंना दररोज लागतें.

आतां २ हशींचें खाणें = ३ गाईंचें खाणें
 तर १२ हशींचें ,, = १८ गाईंचें ,,
 व ४ हशींचें ,, = ६ गाईंचें ,,

तसेंच १०० पेंढ्यांना $\frac{१५}{४}$ रु. पडतात,

तर ११२० पेंढ्यांना $\frac{१५}{४}$ रु. $\times \frac{११२०}{१००}$ किंवा $\frac{२६६}{५}$ रु. पडतील.

ह्यावरून असा प्रश्न होतो कीं, १० गाई + १८ गाई ह्यांच्या ५ दिवसांच्या खाण्याला $\frac{२६६}{५}$ रु. पडतात, तर २ गाई + ६ गाई ह्यांच्या ३० दिवसांच्या खाण्याला केवढा खर्च लागेल ?

१ गाईचें १ दिवसाचें खाणें हा एक हटला हणजे गाई व खाण्याचे दिवस ह्यांच्या गुणाकारांनीं ह्या एकंच्या संख्या दाखविल्या जातात. येथें परिमाण संख्या अवयवरूपी असल्यामुळें त्या तशा मांडण्यास हरकत नाही.

२८ \times ५ गा.चें १ दि.चें खा : ८ \times ३० गा.चें १ दि.चें खा. : : $\frac{२६६}{५}$ रु. : इ.

गाईंच्या खाण्याच्या समप्रमाणांत खर्च असावयाचा. हणून,

$$इ. = \frac{२६६}{५} रु \times \frac{२८ \times ६}{२८ \times ५} = \frac{४५६}{५} रु = ९१ रु ३ आ २\frac{२}{५} पै.$$

उ. १३ वें.- कांहीं काम १८ पुरुष १६ वायका आणि १२ मुलें मिळून २० दिवसांत करितात, तर त्यांच्या २॥ पट काम १० पुरुष २१ वायका व १४ मुलें मिळून किती दिवसांत करितील ? ह्या प्रत्येकाकडून नेमलेल्या काळांत ४, २, व १, ह्या प्रमाणांत काम होतें.

वरील प्रमाणा अन्वये सर्वांच्या जागीं मुलें घेतलीं तर,

$$१८पु. + १६वा. + १२मु. = ७२मु. + ३२मु. + १२मु. = ११६मु.$$

व १०पु.+२१वा.+१४मु. = ४०मु.+४२मु.+१४मु. = ९६मु.

ह्यावरून असा प्रश्न येतो कीं.— १ काम ११६ मुलांच्या ३० दिवसांत होतें, तर २॥ कामें ९६ मुलांच्या किती दिवसांत होतील.

एथें एक मुलाचा १ दिवस (त्यांतील श्रम) हा एक आहे, किंवा मुलें व दिवस हे एकंच्या संख्येचे अवयव आहेत, आणि कामाच्या समप्रमाणांत मुलांच्या दिवसांचा (श्रमाचा) बदल व्हावयाचा आहे. ह्मणून.—

१काः^५का = ११६मुलांचे२०दि : ९६मुलांचे येणारे दि.

$$\therefore \frac{२४}{१६} य = \frac{२९}{१} \times \frac{५}{२०} \text{ मु.चे दि } \times \frac{५}{२}$$

$$\therefore य = \frac{७२५}{१२} \text{ मु.चे दि } = ६० \frac{५}{१२} \text{ मु.चे दिवस हें उत्तर.}$$

उ. १४ वें.— १५ मनुष्यें. रोज १० तासप्रमाणें खपून २८ दिवसांमध्ये ८० यार्ड लांब, ११ फूट ३ इंच उंच, व २ फूट जाड, भित बांधितात. तर ६० यार्ड लांब, १० फूट उंच, व १ फूट ६ इंच जाड, अशी भित बांधण्यास १२ मनुष्यें रोज ८ तासप्रमाणें किती आठवडे खपली पाहिजेत ?

येथें एक मनुष्याची १ तासाची मेहनत ही १ एकं ह्मटली, तर १५ मनुष्यांची १ तासाची मेहनत १५ एकं होईल, व त्यांची १० तासांची मेहनत १५ दाहीं १५० एकं होईल. तसेंच १ दिवसांत १५० एकं मेहनत होते, तर २८ दिवसांत २८ दीडें शें एकं = ४२०० एकं होईल. ह्यावरून मनुष्यें, तास, व दिवस, हे मेहनतीच्या एकंचे अवयव दाखवितात हें उघड आहे. • वरील उदाहरणांत एकं शोधणें होतें, पण ह्या उदाहरणांत एकंचे संख्येंतील एक अवयव जे दिवस ते शोधणें आहेत, ह्मणून व संक्षेप देण्याच्या सोईसाठीं ह्या परिमाणसंख्या अवयवरूपानें मांडण्यास हरकत नाहीं.

दुसरें ४ फूट लांबींत ४ घनफूट राहतात, तसेंच ४ फूट लांबीच्या ३ फूट रुंदींत ४ त्रीक १२ घनफूट राहतात, आणि ह्या चौकोनाच्या २ फूट उंचीमध्ये ४ त्रीक दुणें किंवा २४ घनफूट

राहतात. ह्याप्रमाणें घनफळाच्या संबंधांत लांबी, रुंदी, व उंची, दाखविणाऱ्या परिमाणसंख्या ह्या केवळ पटी दाखविणाऱ्या असतात. ह्यागून ह्याही संख्या अवयवरूपानें जोडून मांडण्यास हरकत नाहीं.

तिसरें लांबी, रुंदी, व उंची, ह्या संख्या एका मापाच्या असल्या, तरच त्यांचा गुणाकार त्या मापाच्या जातीचीं घनमानें दाखवील, ह्यागून ह्या संख्यांना फुटाचें रूप दिलें पाहिजे.

आतां भित वाढली तर मेहनत वाढेल, व भित कमी झाली तर मेहनत कमी होईल. ह्याप्रमाणें मेहनतीचा बदल भितीच्या (घनफळाच्या) सम प्रमाणांत व्हावयाचा, ह्यागून प्रमाण सम मांडलें. जसें.—

$$२४० \times ११\frac{३}{४} \times २ \text{ घ.फू.} : १८० \times १० \times १\frac{१}{२} \text{ घ.फू.} \\ :: १५ \times १० \times २८ \text{ दि.} : १२ \times ८ \times \text{य. दि.}$$

$$\therefore १२ \times ८ \text{ य.} = \frac{३\frac{३}{४} \times १० \times २८}{१} \text{ दि.} \times \frac{३\frac{३}{४}}{१} \times \frac{१०}{१} \times \frac{३}{२} \times \frac{१}{२\frac{३}{४}} \times \frac{३}{२} \times \frac{१}{२}$$

$$\text{व य.} = \frac{१० \times १० \times २८ \times ३}{३२ \times ८} = \frac{१०५}{८} = २१\frac{७}{८} \text{ दि.}$$

हे लोक दर आठवड्यास रविवाराखेरीज ६ दिवस खपावयाचे, ह्यागून ह्यांना ३ आठवडे व ३ $\frac{७}{८}$ दिवस लागतील हें उत्तर.

उ. १५ वें.— काहीं काम ४० मनुष्यें ५५ दिवसांत करतात. हीं मनुष्यें १५ दिवस खपल्यावर त्यांच्या मदतीस नवीं १० मनुष्यें मिळालीं, तर त्या ५० मनुष्यांकडून राहिलेलें काम किती दिवसांत पुरें होईल ?

एथें ४० मनुष्यें ५५ दिवसांत १ काम करतात.
तर ४० " १० " $\frac{१}{५}$ काम करतील.
व ४० " १५ " $\frac{१५}{५५} = \frac{३}{११}$ काम करतील.

राहिलेलें $\frac{८}{११}$ काम ४० + १० किंवा ५० मनुष्यांकडून व्हावयाचें. ह्यावरून असा प्रश्न होतो कीं.— $\frac{३}{११}$ काम ४० मनुष्यांच्या १५ दिवसांच्या मेहेनतीनें होतें, तर $\frac{८}{११}$ काम ५० मनुष्यांच्या किती दिवसांच्या मेहेनतीनें होईल ?

एथें १ मनुष्याचा १ दिवस हा मेहेनतीचा एकं हाटला असतां, मनुष्यें व दिवस हे त्याचे अवयव होतात. तसेंच मनुष्यांच्या दिवसांचा (ह० मेहेनतीचा) बदल कामाच्या समप्रमाणांत व्हावयाचा. हणून,

$$\frac{३}{९९} \text{ का} : \frac{८}{९९} \text{ का} = ४० \text{ म} \times १५ \text{ दि} : ५० \text{ म} \times \text{ज्ञेय दि.}$$

$$\therefore ३ \text{ का} : ८ \text{ का} = ४० \text{ म} \times १५ \text{ दि} : ५० \text{ म} \times \text{ज्ञ दि.}$$

$$\therefore \frac{५५}{९} \text{ म} \times \text{ज्ञ दि} = \frac{४० \text{ म} \times १५ \text{ दि.}}{९} \times \frac{८}{३}$$

$$\therefore \text{ज्ञ दि} \frac{४ \times ८}{९} \text{ दि} = ३२ \text{ दि. हें उत्तर.}$$

उ. १६ वें.— एक घड्याळ १ दिवस १४ तास ४५ मिनितांनीं २। मिनिते पुढें जातें. ह्या घड्याळानें रविवारीं अवशीचे ७ वाजतांना बरोबर वेळ दाखविण्यासाठीं, हें शुक्रवारीं वारांची तोफ होतेवेळीं किती मार्गे लावून ठेवावें ?

शुक्रवारच्या दुपारच्या तोफेपासून रविवारीं अवशीचे ७ वाजत तोंपावेतो ५५ तास होतात. १ दि. १४ ता. ४५ मि. = $३८\frac{३}{४}$ ता. = $\frac{१५५}{४}$ तास होतात. घड्याळाचें पुढें जाणें हें तासांच्या समप्रमाणांत व्हावयाचें. हणून,

$$\frac{१५५}{४} \text{ ता} : ५५ \text{ ता} = \frac{९}{४} \text{ मि.पु.जाणें} : \text{ज्ञ मि.पु.जाणें}$$

$$\therefore \text{ज्ञ} = \frac{९}{४} \text{ मि. पु. जा.} \times \frac{११}{९} \times \frac{१}{\frac{५५}{३९}} = \frac{९९}{३९} \text{ मि.पु.जा.}$$

$$= ३ \text{ मि. } ११\frac{३}{९} \text{ से. पु. जाणें हें उत्तर.}$$

उ. १७ वें.— एक घड्याळ १२ तासांत ७ सेकंद पुढें जातें, आणि दुसरें घड्याळ १२ तासांत ६ सेकंद मार्गे पडतें. हीं घड्याळें एके दिवशीं दुपारचे १२ वाजतांना बरोबर आहेत, तर ह्यांमध्ये अर्ध्या तासाचें अंतर केव्हां पडेल ? व तेव्हां प्रत्येक घड्याळ कोणता वेळ दाखवील ?

हीं घड्याळें १२ वाजतां बरोबर आहेत. तेव्हांपासून १२ तासांनीं ह्यांत १३ सेकंदांचें अंतर पडतें, व एका दिवसांत किंवा २४ तासांत ह्यांमध्ये २६ सेकंदांचें अंतर पडतें. ह्या दरानें ३० × ६० सेकंद अंतर पडण्यास किती वेळ लागेल हें शोधणें आहे.

∴ २६ से. अं. : ३० × ६० से. अं = १ दि. : इष्ट दि.

$$\therefore \text{इ.दि} = \frac{१ \text{ दि.}}{१} \times \frac{३० \times \frac{३०}{१३}}{२६} = \frac{९०० \text{ दि.}}{१३}$$

$$= ६९ \text{ दि. } ५ \text{ ता. } ३२\frac{४}{३} \text{ मि.}$$

हणजे दोन्ही घड्याळें वरोवर असल्यापासून ६९ दि. ५ ता. ३२ $\frac{४}{३}$ मि. इतक्या काळानें त्या घड्याळांत अर्ध्या तासाचें अंतर पडेल.

आतां १ लें घड्याळ १ दिवसांत १४ सेकंद पुढें जातें, हणून $\frac{९००}{१३}$ दिवसांत $\frac{९००}{१३} \times १४$ सेकंद पुढें जाईल. हणजे $१६\frac{२}{३}$ मिनिटें पुढें जाईल. तसेंच दुसरें घड्याळ $\frac{९००}{१३}$ दिवसांत $\frac{९००}{१३} \times १२$ सेकंद किंवा $१३\frac{११}{१३}$ मिनिटें मागे राहिल.

∴ १ लें घड्याळ ५ ता. ४८ $\frac{६}{१३}$ मि. दुपारानंतरची वेळ दाखवील हें १ लें उ.

व २ रें घड्याळ ५ ता. १८ $\frac{६}{१३}$ मि. दुपारानंतरची वेळ दाखवील हें २ रें उ.

उ. १८ वें.— एका मिनिटांत ३३ हजार फूटपौंद काम करणाऱ्या वाफेच्या सामर्थ्याला १ घोड्याची शक्ति हणतात, तर ८ तासांत ४१२५ टन ओझे ४ यार्द उंचीवर नेणाऱ्या स्टीम एंजिनची (वाष्पयंत्राची) शक्ति किती घोड्यांची हण्टली जाईल ?

१ पौंद वजन १ फूट उंचीवर चढविणें ह्याला एक काम हणतात, व हे कामाचे एक फूटपौंद ह्या नांवानें दर्शवितात. एका मिनिटांत ३३००० फूटपौंद काम करण्याचें जें वाफेच्या यंत्राचें सामर्थ्य त्याला १ घोड्याची शक्ति हणतात. ह्या लक्षणवरून फूट व पौंद ह्यांच्या ज्या संख्या त्या कामाच्या संख्येचे अवयव होतात, आणि मिनिटें व कामाचे एक ह्यांच्या ज्या संख्या त्या घोड्याची शक्ति दाखविणाऱ्या संख्येचे अवयव होतात, हणून यार्द, टन, व तास ह्यांना फूट, पौंद, व मिनिटें ह्यांचीं रूपें देऊन त्या संख्या शक्ति व काम ह्यांचे अवयव ले-

खल्या पाहिजेत. घोड्याच्या शक्तीचा बदल कामाच्या समप्र-
माणांत व्हावयाचा ह्मणून,

$$\begin{array}{cccc} \text{फू.} & \text{पौ.} & \text{फू.} & \text{पौ.} \\ १ \times ३३००० & : ४. \times ३ \times ४१२५ \times २० \times ११२. & & \\ \text{मि. घो.श.} & & \text{मि. घो.श.} & \\ : : १ \times १ & : ८ \times ६० \times \text{क्ष.} & & \end{array}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{४ \times ३ \times ४१२५ \times २० \times ११२}{३३००० \times ८ \times ६०} \text{ घो.श.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = ७ \text{ घो. श. हें उत्तर.}$$

उ. १९ वें.— ६० तोफांच्या ५ पाळ्या ८ मिनिटांत होत
गेल्यानें ७५ मिनिटांस ३५० मनुष्ये मरतात. ह्यावरून किती
तोफांच्या ७ पाळ्या ९ मिनिटांस होत गेल्या, तर २५ मिनि-
टांस ९८० मनुष्ये मारतां येतील ?

८ मिनिटांत ६० तोफांच्या ५ पाळ्या होतात, तर १ मि-
निटांत ६० तोफांच्या $\frac{५}{८}$ पाळ्या होतील. अर्थात ७५ मिनि-
टांत ६० तोफांच्या $\frac{५}{८}$ पाळ्यांच्या ७५ पट पाळ्या होऊन,
त्यांनीं ३५० मनुष्ये मरतात. ह्याच रीतीनें २५ मिनिटांत इष्ट
तोफांच्या $\frac{७}{९}$ पाळ्यांच्या २५ पट पाळ्या होऊन त्यांनीं ९८०
मनुष्ये मारणें आहेत. ह्मणून,

$$३५० \text{ म.} : ९८० \text{ म.} = ६० \text{ तोफा} \times \frac{५}{८} \times ७५ : \text{क्ष तोफा} \times \frac{७}{९} \times २५.$$

$$\therefore \text{क्ष तोफा} \times \frac{७}{९} \times २५ = \frac{६० \text{ तोफा}}{१} \times \frac{५}{८} \times \frac{७५}{१} \times \frac{९८०}{३५०}$$

$$\therefore \text{क्ष तो.} = \frac{९५ \text{ तो.}}{१} \times \frac{५}{८} \times \frac{७५}{१} \times \frac{९८०}{३५०} \times \frac{९}{७} \times \frac{१}{२५} = ४०५ \text{ तो.}$$

हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ह.

१. १२ हात वस्त्रास १५ रुपये पडतात, तर ८ हात व-
स्त्रास काय पडेल ?

१२ मण धान्यास १६ रुपये, तेव्हां ७२ रुपयांस किती धान्य येईल ?

१० शेर काकवीस काय द्यावें ? जर ४९५ शेर काकवीस ३९६ रुपये द्यावे लागतात.

२. ६३ रुपये सारा दिल्यानें किती विघे जमीन लावणीस मिळेल ? जर १७२ विघ्यांस ३७३ रुपये सारा पडतो.

२५ तोळे अर्गजास काय द्यावें ? जर ८० तोळ्यांस १७६ रुपये पडतात.

३. ३८५ यार्ड वस्त्रास ६३ रुपये पडतात, तर १८ रुपयांस किती यार्ड वस्त्र येईल ?

२०५ रुपयांस किती वार फलानेल येईल ? ५१ वारांस ८५ रुपये पडतात.

४. ३६ एकर ३ गुंठे, ह्यांस ४२ रुपये सारा पडतो, तर २१ एकर ३ गुंठे १४ आणे इतक्या जमिनीचा सारा किती द्यावा लागेल ?

वजन १०॥८२॥ साकर ५१ रुपयांस घेतली, तेव्हां ह्या भावानें ४॥२८॥ साकरेस काय पडेल ?

५. रु. २०१॥— ह्यांची ४१ पळे बाजरी येते, तर ६४॥— ह्यांची किती येईल ?

कैली ४७२॥३१२ जोंधळ्यांस १२८०॥२१ रुपये पडतात तर ७१२॥१०॥ जोंधळ्यांस काय पडेल ?

६. १८ विघ्यांचें शेत २४॥॥— सारा दिला असतां मिळतें, तर ह्या मानानें ४२ विघे जमिनीचा सारा किती द्यावा लागेल ?

एका गड्यास वर्षभर चाकरीबद्दल २५ रुपये द्यावे लागतात, तर त्यानें ८५ दिवस काम केल्याबद्दल त्यास काय द्यावें ?

७. एका गाडीस ८७ कोसांचें भाडें १॥— द्यावें लागतें, तर २॥॥— भाड्यांत गाडी किती लांब जाईल ?

सुताच्या कारखान्यांत २ अवर ४६ मिनिटांत, यंत्रानें ५४ पौंड कापूस पिंजून बाहेर येतो; तर २४ पौंड कापूस पिंजून बाहेर येण्यास किती वेळ लागेल ?

८. रु. ७०॥-१. दिल्यानें किती एकर जमीन लावणीस मिळेल ? पांच एकर जमिनीस ४॥- पडतात.

२० विघे जमिनीस सरकारांत सारा किती घावा लागेल ? ४४४ विघ्यांस ३४ रु., १४ आ. ३ $\frac{१}{३}$ पै पडतात.

९. २५ रुपये भाड्याच्या उत्पन्नास घरपट्टी २॥. रुपये पडते, तेव्हां ९५॥-१. भाड्याच्या उत्पन्नास किती घरपट्टी पडेल ?

९५ पौंड, १० शि. ९॥ पेन्स ह्या रकमेवर धर्मादाय खर्च किती मिळेल ? ७९१ पौंड, १३ शि. ४ पेन्स ह्यांजवर धर्मादाय खर्चास ३९ पौंड, ११ शि. ८ पेन्स मिळतात.

१०. एका गांवचें उत्पन्न २०० रुपये आहे आणि चिल्हर खर्चावद्दल १० रु. ७ आणे ६ पै मिळतात, तेव्हां दर रुपयास किती खर्च वसेल ?

ज्या घराचें भाडें २५ गिनी येतें त्यावर गांवदुरुस्तीवद्दल ४ पौंड ११ शिलिंग १०॥ पेन्स कर आहे, तर ज्या घराचें भाडें ६५ पौंड, १० शि. ६ पेन्स येतें त्यावर कर किती वसेल ?

११. १०० मनुष्ये १२ दिवसांत जें काम करतात तेंच काम ८ दिवसांत संपवावयाचें आहे, तर किती मनुष्ये लावावीं ?

शत्रूच्या वेढ्यांत सांपडलेल्या किल्ल्यांत दर मनुष्यास दर-रोज अडीच शेर प्रमाणें अन्न दिल्यास चार महिनेपर्यंत पुरेल इतकें अन्न आहे, तर तें दर मनुष्यास रोज एक शेर प्रमाणें दिल्यास किती दिवस पुरेल ?

१२. एका मनुष्याचे मीं ३०० रुपये ८ महिने उसने ठेविले होते. पुढें त्यास गरज लागली, तेव्हां त्याचा उपकार फेडावा ह्मणून मीं त्यास २०० रुपये दिले, तर हे त्याजकडे किती दिवस ठेवावे ?

जें काम १०८ मनुष्ये २६६ दिवसांत करतात, तें काम १६८ दिवसांत करावयाचें तर किती मनुष्ये लावावीं ?

१३. कोणी वाटसरू रोज १२ तास चालून ३ आठवड्यांत एका गांवीं पोहोंचतो, तो जर रोज ९ तास चालला तर त्यास त्या गांवीं पोहोंचण्यास किती दिवस लागतील ?

४७ $\frac{1}{8}$ रुपयांच्या, चवलाच्या दराच्या गांठ्या करावयास अर्धा मण साकर लागते, तर तितक्याच साकरेच्या ७० गांठ्या केल्यास एका गांठीची किंमत काय होईल ?

१४. २७ रुपये विघा दराची जमीन देऊन ३५ रुपये विघा दराची ४८० विघे जमीन व्यावयाची आहे, तर २७ रुपये दराची जमीन किती विघे द्यावी ?

शत्रूच्या वेढ्यांत सांपडलेल्या किल्ल्यांत अन्न दररोज दर मनुष्यास अडीच शेर प्रमाणें दिल्यास तीन महिने पुरेल इतकें आहे, तर तें अन्न आठ महिने पुरविणें झाल्यास दररोज दर मनुष्यास किती द्यावें ?

१५. ४० फरे मिठास १७५ रु. ५ आ. ४ $\frac{1}{2}$ पै पडतात, तर २५ फरे मिटाचें कांय झालें ?

२३५ गाईस १२५७॥ \equiv किंमत पडते, तर २० गाईस काय पडेल ?

१६. एका सावकाराचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याची मालमत्ता विकली तिचे ११८१० रुपये आले, आणि लोकांचें देणें ४७२६५ रुपये होतें, तेव्हां दामाशाईप्रमाणें दर रुपयास काय येईल ?

एका व्यापारांतल्या ३ $\frac{3}{4}$ भागांस जर २७५ रुपये पडतात, तर ४ $\frac{1}{2}$ भागांस काय पडेल ?

१७. वजनी ५॥२॥७॥. लोखंडास ५९॥ \equiv पडतात, तर दोन खंडी लोखंडास काय पडेल ?

३७४॥ रुपयांची साकर किती येईल ? ८५॥ वजन साकरेस किंमत १०॥ \equiv पडते.

१८. २३५ रु. ७ आ. ८ पै, उत्पन्नावर कर ५८ रु. १३ आ. ४ पै आहे, तर ह्या मानानें एक रुपयास काय पडेल ?

३१ रु. ४ आ. ११ पै ह्यांचें ८९ शेर तूप येतें तर ११७ रु. १२ आ. ३ पै ह्यांचें तूप किती येईल ?

१९. केली १५८४८२ बाजरीस किंमत २१५८४८१ पडते, तर ५८३८२ ची बाजरी किती येईल ती सांगा.

दर शेरस ६ आणे प्रमाणें साकरेचा दर होता, तेव्हां १५ आण्यांच्या एका गांठीचें वजन अडीच शेर भरत होतें. आतां साकरेचा भाव शेरस ५ आणे झाला आहे, तर त्याच किंमतीच्या एका गांठीचें वजन किती असावें ?

२०. एकानें १,२०,००,००० मेंढरें लोंकरीकरितां पाळळीं आहेत, त्यांपासून प्रतिवर्षीं उत्पन्न किती होईल तें सांगा. ११ मेंढरांची लोंकर साडेचारा शेर निघते, व तिचे ८ रुपये १२ आणे येतात.

३ टन ५ हॅन्ड्रेडवेट यांतून १ टन १६ हॅन्ड्रेडवेट ३ क्वार्टर १२ औंस वजा करा. आणि बाकी राहिल तिची १ क्वार्टर २७ पौंड ह्यांस १ पौ. ७ शि. ६ पेन्स ह्या दरानें किंमत काढा.

२१. एका जाहागीरदाराच्या जमिनीचें उत्पन्न ८०,५०० रुपये आहे, आणि त्यांतून उत्पन्नाचे दर शेंकड्यास १११ = सरकारांत द्यावे लागतात, तेव्हां त्यास वास्तविक उत्पन्न किती ?

४ $\frac{३}{४}$ यार्ड वस्त्रास ५ पौ. १४ शि. ४ $\frac{३}{४}$ पेन्स पडतात, तर १२ यार्ड वस्त्रास काय पडेल तें सांगा.

२२. १ $\frac{३}{४}$ हात वनातीस १॥ = पडतात, तर, २४॥ हात वनातीस काय पडेल ?

२ $\frac{३}{४}$ मण साकरेस ७ गिनी दिले, तर १७ $\frac{३}{४}$ मणांस काय द्यावें ?

२३. जमीन मोजणीची सांखळी ६६ फूट लांब असते, आणि तींत १०० कड्या असतात, त्या प्रत्येक कडीला लिंक हसणतात. आतां शेताचा एक बांध २४५६ लिंक लांब आहे, तर त्यांचे फूट किती भरतील ?

एका गांवाचें उत्पन्न १५६० रुपये आहे, आणि चिल्हर खर्चाबद्दल त्यांतून २७॥ = काढावयाचे आहेत, तर ज्याचें उत्पन्न ५२५ रुपये आहे त्यावर चिल्हर खर्चाची वांटणी काय येईल ?

२४. एक सोन्याचा दागिना वजन तोळे १४।२॥; किंमत २१४॥ रुपये असा आहे. तेव्हां दर तोळ्यास काय पडेल ?

४॥।। शेरस दहा आणे ह्या दरानें १४ $\frac{३}{४}$ शेरस काय पडेल ?

२५. $२\frac{१}{४}$ यार्ड वस्त्रास $\cdot \parallel \equiv$ पडतात, तर ५० हात वस्त्रास काय पडेल ?

कोणा एकाचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याचें देणें ३२२५ रुपये होतें, आणि येणें १०२० रुपये होतें, तेव्हां दामाशाई प्रमाणें सावकारास दर रुपयास काय मिळेल ?

२६. $६\frac{२}{३}$ यार्ड मलमलीस १ पौंड ७ शि. $९\frac{१}{२}$ पेन्स पडतात, तर $४\frac{३}{४}$ यार्ड मलमलीस काय पडेल ?

एका तारवाचे $\frac{३}{४}$ ची किंमत काय द्यावी ? $\frac{५}{८}$ ची किंमत २५५ रुपये झाली आहे.

२७. एका गृहस्थानें आपली जिनगी ९८० रुपयांस विकून दर रुपयास $\cdot \parallel \equiv$ देऊन त्यानें आपलें कर्ज फेडलें, तेव्हां त्यास कर्ज किती होतें ?

एक रुपयाचे उत्पन्नावर ८-॥ कर आहे, तेव्हां ज्यावर १३८- कर आहे त्याचें उत्पन्न किती तें सांगा.

२८. व पासून अ नें १७५१ रुपये १०२ दिवसांच्या मुदतीनें घेतले होते, तो उपकार फेडावा ह्मणून ब ला गरज लागली तेव्हां त्यास अ नें २१०॥ रुपये उसने दिले, ते त्यानें त्याजकडे किती दिवस ठेवावे ?

एका भिंतीस ३१ फूट लांबीचे चिरे ६३३६ आहेत. आतां तितकीच दुसरी भिंत बांधावयाची, परंतु चिरे $२\frac{३}{४}$ फूट लांबीचे आहेत, तर ते किती लागतील ?

२९. एका इमारतीची सावली मोजली ती १४८॥ हात भरली. आतां त्याच वेळेस उन्हांत ६॥ फूट लांबीची काठी उभी केली, तिची सावली ५१ फूट पडली, तेव्हां इमारत किती हात उंच आहे ?

३०. एक धोंडा हातांतून सोडला तो पडत असतां $३\frac{३}{४}$ सेकंदांचे शेवटीं ११५ $\frac{१}{२}$ फूट जाण्याचा वेग त्याचे आंगीं होता; ह्यावरून पहिल्या सेकंदाच्या शेवटीं व $४\frac{३}{४}$ सेकंदांच्या शेवटीं त्याचे आंगीं कोणकोणते वेग होते ?

३१. एक बैलाची गाडी दर तासांत ३ मैल प्रमाणें चालत

असतां २४ तासांत पुण्याहून कल्याणास पोहोंचते. आतां अ-
गीची गाडी दर तासांत ३२ मैल चालते, तेव्हां ती कल्याणास
किती वेळांत पोहोंचेल ?

३२. दिल्ली. शहरास शत्रूचा वेढा पडला, तेव्हां त्यांत
२२४० मनुष्यांस ३ महिने पुरे इतकें अन्न होतें, परंतु वेढा ७
महिने उठत नाही असें कळत आहे तर त्यांतून किती मनुष्यांस
बाहेर लावून द्यावे, ह्मणजे बाकीच्यांस तें अन्न पूर्वीप्रमाणें ७ म-
हिने पुरेल ?

३३. एक चाकर २० दिवसांचे ३॥ रुपये द्यावे अशा क-
रारानें ठेवला आहे, तर १२ रुपयांत त्यापासून किती दिवस
काम द्यावे ?

३४. १५॥ मण ओझे ६० मैल नेण्यास भाडें १॥ रुपया
द्यावे लागतें, तर तितकेच भाड्यांत ३॥ मण ओझे किती लांब
जाईल ?

३५. एका गृहस्थास आपल्या ४५०० रुपये वेतनांतून
५२५ रुपये वर्षास शिलक ठेवावयाचे आहेत, तर त्यानें ७३
दिवसांत खर्च किती करावा ? वर्ष ह्मणजे ३६५ दिवस.

३६. विलायतेंत १३ $\frac{२}{३}$ टन वजन माल ५०० गिनींला
घेतला, व तो मुंबईस आणायास ३० रुपये खर्च लागला. तेव्हां
तो माल मुंबईस किती रुपये शेर विकावा ?

३७. १ खंडी ३ म. १५ शेर. लोखंड मुंबईहून पुण्यास
न्यावयास भाडें १२॥ = पडतें. आतां आमचीं चार लोखंडी
यंत्रें वजन २॥३॥४॥ आहेत त्यांस भाडें काय द्यावे लागेल ?

३८. एका गृहस्थास ९००० रुपये कर्ज आहे, आणि त्याच्या
जिनगीचें उत्पन्न ३५१५॥॥ रुपये झालें. तेव्हां सावकारास
दामाशाईप्रमाणें दर रुपयास काय मिळेल, व ज्याचे ७५०
रुपये येणें आहेत त्यास तोटा किती येईल ?

३९. रु. २७१९८२८८ चें ७७ दिवसांचें व्याज रु.
३१८१३८८ पडतें, तर त्याच रकमेचें २४५ दिवसांचें व्याज
काय पडेल ?

४०. रु. २३२५।।- चें १० महिन्यांचें व्याज १०१।-॥२ पडतें, तर एवढेंच व्याज १७ महिन्यांत पडण्यास रकम केवढी पाहिजे ?

४१. ४ शि. १० $\frac{१}{३}$ पे. किंमतीचे रिक्ष दालर ५५९२६ देणें आहेत. ह्यांबद्दल ४ शि. ११ $\frac{३}{४}$ पे. किंमतीचे चुकेत किती द्यावे ?

४२. एका शिंप्यानें पौं. १०९. ३ $\frac{३}{४}$ ह्यांस १ $\frac{३}{४}$ यार्द ह्या-प्रमाणें १४७ यार्द कापड विकून पौं. १६००. ९ नफा मिळविला, तर त्याची मूल खरेदी केवढ्याची होती ?

४३. ६३८ मनुष्यांच्या 'फौजेला १२४ दिवस पुरेसें अन्न आहे. त्या फौजेत ४१८ मनुष्ये नवीं भरलीं, तर ह्या एकंदर फौजेला तें अन्न किती दिवस पुरेल ?

४४. एका सीक्विनची किंमत ९ शि. ४।। पे. असून एका कार्लिनोची किंमत पौं. ५१२. ३। आहे, तर ४५० कार्लिनोबद्दल सीक्विन किती द्यावे ?

४५. एका वाप्यानें २ टन ३ हंड्रेडवेट ३ क्वार्टर साकर १२० पौंदांस विकत घेतली, आणि भाडें वगैरे खर्चाबद्दल ५० शिलिंग दिले. ह्या व्यापारांत ६१ पौं. ५ शि. नफा करणें आहे, तर त्यानें दर हंड्रेडवेट साकरेवर दर काय टेवाव्या ?

४६. गव्हांचा भाव दर बुशिलास ७ शि. १।। पे. प्रमाणें असतो, तेव्हां ४ पेन्सांचा पांव २ पौंड ३ औंस भरतो. ह्यावरून गव्हांचा भाव दर बुशिलास ७ शि. ११ पे. प्रमाणें असेल, तेव्हां ४ पेन्सांचा पांव किती वजन भरेल ?

४७. एका गृहस्थापाशीं दर पौंडास ७ पेन्सप्रमाणें प्राप्तीचा कर जातां पौं. २४९. १९. ९ $\frac{१}{२}$ शिलक राहिलीं, तर त्याची प्राप्ति काय होती ?

४८. एका इनामदारानें प्राप्तीच्या कराबद्दल १८ पौं. १५ शि. पहिल्यावर्षीं सरकारांत भरले. पुढीलवर्षीं वाढविलेला कर दर पौंडास ९ पेन्स प्रमाणें सरकारांत घेतला. तेव्हां त्याला ५२ पौंड १० शि. भरावे लागले. ह्यावरून त्याचें इनामी उत्पन्न

केवढें होतें ? आणि पहिल्यावर्षीं कोणत्या दरानें कर बसविला होता ?

४९. एक घड्याळ सोमवारीं १२ वाजतां १० मिनिटें पुढें असून, तें प्रत्यहीं ३ मिनिटें १० सेंकद फाजील चालतें; तर तें येत्या शनवारीं सकाळचे १० वाजतांना केवढा काल दाखवील ?

५०. ११५ ग्यालनांच्या द्राक्षीच्या पिंपाला पौं. ९७. १५ पडतात, तर एक ग्यालनांत ज्या वाटल्या ६.४ भरतात त्याच्या दर एके डझनाला काय पडेल ?

५१. गहूं ५५.५ शिलिंगांस, क्वार्टर विकतो, तेव्हां ६ पेन्सांचा पांव ३.४३७५ पौंद भरतो. हल्लीं ह्या किंमतीचा पांव २.८१२५ पौंद भरत आहे, तर गव्हांचा दर काय आहे ?

५२. जर्मन मैलाचे २१३६ इतका इंग्लिश मैल असतो. तर जो मनुष्य दर तासांस ४ इंग्लिश मैल चालतो, तो एक जर्मन मैल केवढ्या वेळांत चालेल ?

५३. १००० मनुष्यांच्या फौजेला २८ दिवसांची अन्नसामग्री ठेविलेली होती, ११ दिवसांनीं तिच्या मदतीस नवी फौज आल्यामुळें ती सामुग्री ५ दिवसांत खपली, तर मदत आलेल्या फौजेत किती लोक होते ?

५४. एका मनुष्याचें वार्षिक उत्पन्न पौं. ३९८. १५. २ होतें ह्यानें दर पंधरवड्यास पौं. १९. २. ८ प्रमाणें १८६८ तले पहिले १७ आठवडे पावेतो खर्च केला. पुढें त्यानें दररोजचा खर्च कांहीं कमी करून, त्या सालच्या अखेरीस २० पौंद शिलक पाडले, तर खर्च कमी किती केला ?

५५. एक घड्याळ तारीख २ डिसेंबर रोजीं मध्यान्हानंतरचे १० वाजतेवेळीं १.४ मि. पुढें होतें, आणि ता. ७ डिसेंबर रोजीं मध्यान्हापूर्वींचे ९ वाजतेवेळीं ८ मि. मार्गें होतें, तर तें बरोबर कोणते वेळीं होतें ?

५६. एका खेड्याचा वसूल १५६८५ पौं. १५ शि. असून ह्या खेड्यावर २१३७ पौं. ८ शि. ९ पे. नवीन कर बसविण्याचें ठरलें आहे. तर वसुलाचे प्रत्येक पौंदावर फार्दिगापावेतो

ठोक सुमारानें काय कर वसविला पाहिजे ? आणि पाँ. ५४३-१२-८ वसुलावर काय कर वसेल ?

५७. ३२ पौंदर तोफेचें वजन ३ टन ४ हं.वे. असतें. आणि १८ पौंदर तोफेचें वजन २ टन २ हं.वे. असतें. तर किती १८ पौंदरतोफा ३२ पौंदर १८९ तोफांच्या वजना इतक्या होतील ?

५८. ४ मनुष्य १५ तास प्रमाणें खपले, ३ मनुष्य १२ तास प्रमाणें खपले, आणि ८ मनुष्य ३ तास प्रमाणें खपले, तेव्हां त्यांना ३ पाँ. ५ शि. दिले आहेत. तर एक मनुष्य दररोज ११ तास प्रमाणें ६ दिवस खपला आहे, त्याबद्दल त्यास काय द्यावें ?

५९. एक घड्याळ २८ नोवेंबर रोजीं दुपारानंतरचे १०।। वाजतां १.२ मि. पुढें होतें. दुसऱ्या दिवशीं दुपारानंतरचे ११ वाजून ३० मिनिटांचे वेळीं तें बरोबर होतें. तर तें तारीख ७ डिसेंबर रोजीं दुपारानंतरचे १।। वाजतां किती मिनिटें मागे होतें ?

६०. नेमलेल्यां काळांत ४ पुरुष जेवढें द्रव्य मिळवितात, तेवढेंच ७ बायका मिळवितात. आतां ४८ पुरुष आणि १४ बायका ह्यांनीं मिळून ४२ पाँ. ७ शि. मिळविले आहेत, तर २० पुरुष व किती बायका मिळून २७ पाँ. ४ शि. ६ पे. मिळवितील ?

६१. एका देशांत १३००००००० मॅढ्या आहेत, तर दर हंड्रेडवेटास ८ पाँ. १५ शि. प्रमाणें त्यांच्या लोंकरीचें उत्पन्न प्रतिवर्षीं किती होईल ?

६२. एका कुरणांतलें गवत ७ बैल किंवा ११ घोडे ३७ दिवसांत खातात, तर ५ बैल आणि ८ घोडे किती दिवसांत खातील ?

६३. ३ पाँद ७३ ऑंस कापसाचें सूत २६४ मैल १०१० यार्ड लांब होतें. तर भूगोलाभोंवतीं २५००० मैलांच्या वेढा देण्याला किती वजनाचें सूत लागेल ?

६४. २३ फूट ६ इंच लांब आणि १५ फूट ९ इंच रुंद

जमिनीवर हांतरण्याला ५४ यार्ड २॥ फूट लांबीची सत्रंजी ला-
गते, तर तिची रुंदी केवढी असेल ?

६५. १२ बैल आणि ३५ मेंढ्या ४ दिवसांत ६ टन ७
हं.वे. गवत खातात, तर ४ बैल आणि ६ मेंढ्या ह्यांना दर
आठवड्यास खर्च काय लागेल? १ टन गवतास ३ पौं. १५
शि. पडतात, आणि नियमित काळांत २ बैलांइतकें गवत ५
मेंढ्या खातात, असें घ्या.

६६. ९० फूट लांबीची होडी तिला बांधलेल्या ४८० फूट
लांबीच्या जहाजाला दर तासास ६ मैल ह्या दरानें चालवीत
आहे, आणि होडी व जहाज ह्यांच्यामधलें चन्हाट ६० बांवा
लांबीचें आहे. एक २८० फूट लांबीची महागिरी दर तासास
१० मैल प्रमाणें त्याच दिशेस चालली आहे, तर ही महागिरी
जहाजाशीं आल्यापासून किती वेळानें होडीला सोडून पुढें
जाईल ?

६७. एका दिवसांत एक घड्याळ ४ मि. १७ से. फाजील
चालतें. आणि दुसरें ३ मि. १३ से. मागें पडतें. हीं घड्याळें
गेल्या सोमवारीं दुपारचें १२ वाजतांना खऱ्यावेळेशीं २॥ मि-
निटांचे फरकानें असून, पहिलें पुढें व दुसरें मागें अशीं होतीं.
हल्लीं अर्ध्या तासाचें अंतर दोहोंमध्ये पडलें आहे, तर हल्लींचा
वार आणि तास सांगा.

६८. ३० शिलिंगांस क्वार्टरप्रमाणें ओट (नांवाचा दाणा).
विकतो, तेव्हां एका घोड्याचा दर आठवड्याचा खर्च १७ शि.
६ पे. पडतो. परंतु २६ शिलिंगांस क्वार्टरप्रमाणें ओट विकतो,
तेव्हां ह्या खर्च १६ शि. २॥ पे. पडतो. ह्यावरून घोडा उभ्या-
वर्षांत किती ओट खातो ?

६९. ५ घोडे व १२ खेचरें मिळून २५८९६ पौं. ओक्षें
नेमलेल्या लांबीवर नेतात, तर ९ घोड्यांचे मदतीस किती खे-
चरें दिलीं असतां ३३७ हं. वे. ३ क्वार्टर. २० पौं. ओक्षें
नेमलेल्या लांबीवर नेतां येईल ? एक खेचर एका घोड्याच्या
३ पठ ओक्षें नेतें.

७०. गुरुवारीं सकाळीं दोन घड्याळांत एकदम ९ वाजतात, आणि बुधवारीं सकाळीं पहिल्यांत ११ ला १० मि. कमी असतां दुसऱ्यांत ११ वाजतात, तर त्या संध्याकाळीं दोहोंमध्ये एकदम ९ वाजण्यासाठीं मंदाचा कांटा किती पुढें सारावा, अगर जलदाचा कांटा किती मागें सारावा ?

७१. १५ पुरुष, १२ बायका, व ९ मुलें, ५० दिवसांत कांहीं काम करितात. तर त्याच्या दुप्पट काम ९ पुरुष, १५ बायका, व १८ मुलें, किती दिवसांत करतील ?

७२. कांहीं काम ४ पुरुष, किंवा ६ बायका किंवा ९ मुलें २७॥ दिवसांत करितात, तर तें काम (१) ४ पुरुष व ९ बायका किती दिवसांत करतील ? आणि (२) ५ पुरुष व ८ मुलें किती दिवसांत करतील ?

७३. १ ग्रेन सोनें पिटलें तर त्याचा वर्ख ५६ चौ. इ. क्षेत्राचा होतो, तर असले वर्ख १ इंच उंचींत किती राहतील ? १ घनफूट सोनें १० हं. वे. ३ क्वा. ११ पौंड वजन भरतें.

७४. गाडीच्या पुढच्या व मागच्या चाकांचे व्यास, १॥ फूट व २॥ फूट अनुक्रमें आहेत, तर मागच्याच्या फेऱ्यांपेक्षां पुढच्याचे फेरे ५६० अधिक होण्याला ती गाडी किती लांब गेली पाहिजे ?

७५. एक घड्याळ दुपारचे १२ वाजतांना $६\frac{७}{९}$ मिनिटें मागें होतें. हें २०॥ तासांत १२ मिनिटें मागें पडतें, तर दुपारानंतर ह्याचे कांटे चौथ्यानदां एकत्र होतील तेव्हां खरा काळ काय असेल ?

७६. ३ मैल लांबीच्या चिंचोळ्या खिडींतून १० पायदळ पलटणी जावयाच्या आहेत. ह्या रस्त्यांत प्रत्येक पळटण १७६ यार्ड लांबी पावेतो पसरते, आणि शेवटचा १ मैल रस्ता खराव असल्यामुळें त्या रस्त्यांत दर मिनिटास २॥ फुटांच्या ७५ पावलांवरून २॥॥ फुटांचीं ४० पावलें पडत आहेत, तर ह्या खिडींतून ह्या पळटणी आरमार निघून जाण्याला किती वेळ लागेल ?

संयुक्तप्रमाण अथवा बहुराशिक.

ज्या प्रमाणांत अनेक मूलयुग्मांच्या संयुक्त गुणोत्तराबरोबर फलयुग्माचें (हा० फलमहत्वाच्या क्रमिक राशींतील आद्यंतींच्या राशींचें) गुणोत्तर असतें, किंवा ज्यांत उत्तर शोधण्याला तिहीं-पेक्षां अधिक राशि दिलेले असतात, त्याला संयुक्तप्रमाण अथवा बहुराशिक ह्मणतात.

अथवा फलमहत्वाचा संबंध ज्या अनेक मूलमहत्वांशीं असतो, त्यांतील दुसरीं मूलमहत्वे एकसारखीं असतां फलमहत्वाचा बदल एकाच मूलमहत्वाप्रमाणें होतो, तेव्हां तो हिशेब एकाच साध्या-प्रमाणानें होतो. परंतु दुसरीं मूलमहत्वे एकसारखीं असतां फलमहत्वाचा बदल प्रत्येक मूलमहत्वाप्रमाणें होतो, तेव्हां तो हिशेब अनेक साध्या प्रमाणांच्या परंपरेनें होतो. हा परंपरेचा हिशेब बहुत त्रैराशिकांनीं होतो, आणि संयुक्त गुणोत्तरांचें साम्य मांडिल्यानेंही होतो, ह्मणून ह्याला बहुराशिक ह्मणतात, आणि संयुक्तप्रमाणही ह्मणतात.

उदाहरण.— ३० विघे शेत १० दिवसांत ९ मनुष्यें कापितात; तर ४० विघे शेत तितकेच दिवसांत किती मनुष्यें कापितील ?

ह्या उदाहरणांत मनुष्यें हें फलमहत्व किंवा उत्तरमहत्व आहे, ह्मणजे फलाची किंवा उत्तराची जात दाखविणारें महत्व आहे, आणि विघे व दिवस हीं त्याशीं संबंध ठेवणारीं मूलमहत्वे आहेत (त्रैराशिकाची रीति पहा). ह्यांपैकीं दोन्ही शेतें कापण्याचे दिवस एकसारखेच १० दिले आहेत, तेव्हां मनुष्यांचा बदल विघ्यांच्या सम प्रमाणानें झाला पाहिजे. ह्मणून हें उदाहरण एका त्रैराशिकानें होतें. जसें.—

३० वि. : ४० वि. :: ९म. : $\frac{४०}{३०} \times ९म. = १२म.$ हें उत्तर.

ह्या उदाहरणांत दिवसही वेगळाले दिले, ह्मणजे हें उदाहरण त्रैराशिकांच्या परंपरेचें किंवा बहुराशिकाचें होतें.

उदाहरण.— ३० विघे शेत १० दिवसांत ९ मनुष्यें कापितात, तर ४० विघे शेत १५ दिवसांत किती मनुष्यें कापितील ?

ह्या उदाहरणांत दोहों शेतांचे विधे वेगळाले देऊन, दिव-सही वेगळाले दिले आहेत. तेव्हां मनुष्यांचा बदल विध्यांच्या प्रमाणानें काढून, पुनः दिवसांच्याही प्रमाणानें काढिला पाहिजे. अर्थात हा बदल दोन त्रैराशिकांच्या परंपरेनें काढिला पाहिजे. वरील लक्षणाप्रमाणें प्रथम दोन्ही शेते कापण्याचे दिवस एक-सारखेच १० घेतले; तर ४० विध्यांचीं मनुष्ये १२ येतात (वरचें त्रैराशिक पहा). उपरांत दोन्ही शेतांचे विधे एकसा-रखेच ४० घेतले, तर ह्या मनुष्यांचा बदल दिवसांच्या व्यस्त प्रमाणानें व्हावयाचा ठरतो. ह्मणून,

$$१५ \text{ दि.} : १० \text{ दि.} :: १२ \text{ म.} : \frac{१०}{१५} \times १२ \text{ म.} = ८ \text{ म.}$$

हें उत्तर.

ह्या त्रैराशिकू परंपरेंत किंवा बहुराशिकांत दिलेलें फल ९ मनुष्ये आहे. हें पहिल्या त्रैराशिकाचें ३ रें पद केल्यानें त्याचें ४ थें पद १२ मनुष्ये आलें. हें ४ थें पद दुसऱ्या त्रै-राशिकाचें ३ रें पद केल्यानें त्याचें ४ थें पद ८ मनुष्ये आलें. ह्याप्रमाणें फलमहत्वाचे क्रमिकराशि ९ मनुष्ये, १२ मनुष्ये, व ८ मनुष्ये, हें उत्पन्न झालें.

आतां प्रमाणफल १ प्रमाणें ९ मनुष्ये ह्या फलाला $\frac{१०}{१५}$ ह्या पहिल्या सम गुणोत्तरानें गुणून १२ मनुष्ये हें दुसरें पद आणिलें आहे, आणि ह्या दुसऱ्या पदाला $\frac{१०}{१५}$ ह्या सम केलेल्या दुसऱ्या गुणोत्तरानें गुणून ८ मनुष्ये हें उत्तर आणिलें आहे.

दुसरें वरील प्रमाणें हीं ज्या साध्या गुणोत्तरांचीं साम्ये दाख-वितात त्यांच्या गुणाकारानें संयुक्त गुणोत्तरांचें साम्य येतें. तें असें.—

$$३० \times १५ : ४० \times १० = ९ \times १२ : १२ \times ८.$$

$$= ९ : ८.$$

ह्या साम्याचें पहिलें युग्म दोहों मूलयुग्मांचें संयुक्त गुणोत्तर दाखवितें. वरील प्रमाणांच्या परंपरेंत फलमहत्वाचे क्रमिकराशि ९ म. १२ म. व ८ म. येत असल्यामुळें त्यांचीं क्रमिक गुणो-त्तरें ९ : १२ व १२ : ८ अशीं येतात. ह्मणून ह्या साम्याचें

दुसरें युग्म ह्या क्रमिक गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर दाखवितें. तसेंच क्रमिक राशींतील आद्यंतराशींचें गुणोत्तर जें ९ : ८ तेंही दाखवितें. सारांश साध्या प्रमाणांची परंपरा आणि संयुक्त गुणोत्तरांचें साम्य (संयुक्त प्रमाण) ह्या कोणत्याही दृष्टीनें पाहिलें तरी ९ म. ह्या फलाला $\frac{४}{३} \times \frac{३}{२}$ ह्या मूल युग्मांच्या संयुक्त गुणोत्तरानें गुणून ८ म. हें उत्तर येतें. ह्यावरून,

बहुराशिकाचा नियम— कोणत्याही बहुराशिकांत फलमहत्वाशीं संबंध ठेवणारीं जीं मूलयुग्में त्यांचीं गुणोत्तरें फलमहत्वाच्या बदलाशीं सम करावीं आणि त्यांच्या संयुक्त गुणोत्तरानें (गुणाकारानें) तें फल गुणावें ह्मणजे इच्छाफल येईल. यावरून कोणत्याही बहुराशिकांत संबंधी महत्वाचीं दिलेलीं गुणोत्तरें सम केलीं, आणि त्यांच्या गुणाकारानें फलाला गुणिलें, तर उत्तर येईल.

वरच्या परंपरेंत विध्यांचें गुणोत्तर हें ९ म. : उत्तर (ह. १२ म.) ह्या गुणोत्तराशीं सम केलें आहे, आणि दिवसांचें गुणोत्तर हें १२ म. : उत्तर (ह. ८ म.) ह्या गुणोत्तराशीं सम केलें आहे. ९ म. : १२ म. व १२ म. : ८ म. हीं, संयुक्तप्रमाण नि. ५ प्रमाणें उत्तरमहत्वांतील क्रमिक पदांचीं गुणोत्तरें आहेत. ह्यावरून कोणत्याही बहुराशिकांत संबंधी महत्वाचीं गुणोत्तरें, उत्तरमहत्वांतील क्रमिक पदांच्या गुणोत्तरांशीं, अनुक्रमें, सम केलीं पाहिजेत. उपपत्तीचे दृष्टीनें हाच विचार खरा आहे. तथापि वहिवाटीचे दृष्टीनें पाहिलें, तर संबंधी महत्वाचीं गुणोत्तरें सम करण्याला उत्तरमहत्वांतील वास्तविक संख्येची गरज नसते, तिच्या नांवाची गरज असते. ह्मणून वास्तविक संख्येबद्दल दुसरी कोणतीही संख्या घेतली तरी चालते. ह्यामुळे उत्तरमहत्वाचें दिलेलें फल व उत्तर ह्यांच्या आधारानें हीं एकंदर गुणोत्तरें सम करितां येतात. ह्मणून,

बहुराशिकांची रीति.— दिलेल्या फळाचे मानराशि क्रमानें १ व्या स्थळीं मांडून तें फळ ३ व्या स्थळीं मांडावें, आणि मानराशीच्या जातीचे इच्छाराशि त्याचक्रमानें २ व्या स्थळीं मांडून इच्छाफलाचें दर्शक अक्षर ४ थे स्थळीं मांडावें.

ह्या मांडणींत फलाचा बदल ज्या मूळमानांच्या बदलांशीं व्यस्तप्रमाणांत होत असेल त्यांच्या पदांची अदलाबदल करावी, ह्यणजे फल युग्मांच्या गुणोत्तरांशीं एकंदर मूलयुग्मांचीं गुणोत्तरे सम होतील.

नंतर प्रमाण नियम ५ प्रमाणें ३ व्या स्थलींच्या फलाला मूलयुग्मांचीं दक्षिणगुणोत्तरे क्रमानें गुणक द्यावीं ह्यणजे फल क्रमाच्या शेवटचें इच्छाफल येईल.

सूचना.— १ लीं पदे व २ रीं पदे आणि- १ लीं पदे व ३ रें पद ह्यांना संक्षेप जातील ते द्यावे, किंवा गुणक भाजक जोडल्यावर अंशच्छेदांना संक्षेप जातील ते द्यावे, ह्यणजे कृत्य सोपें होईल.

येथें वरचेंच उदाहरण घेतलें, तर या उदाहरणांत शेत अधिक विस्ताराचें असून त्यास कापण्यास काळही अधिक दिला आहे. तेव्हां आतां मनुष्यांचे संख्येचा संबंध, शेताचा विस्तार आणि कापण्यास दिलेला काळ ह्या दोन गोष्टींवर आला. विस्तार वाढला तर मनुष्ये वाढतील. हें सम प्रमाण आहे. परंतु काळ अधिक दिल्यानें काम संपविण्यास मनुष्ये कमी लागतील हें व्यस्त प्रमाण झालें. मनुष्यांचा बदल विध्यांच्या समप्रमाणांत व दिवसांच्या व्यस्तप्रमाणांत होतो, ह्यणून विध्यांचें प्रमाण सम मांडून दिवसांचें प्रमाण व्यस्त मांडलें. जसें.—

स.प्र. ३० वि. : ४० वि. } : : ९ मनु. : किती मनु.
व्य.प्र. १५ दि. : १० दि. }

∴ किती मनुष्ये = $\frac{४० \times १० \times ९}{३० \times १५}$ म = ८ म. हें उत्तर.

उदा. २ रें.— ३० विधे शेत दररोज ६ तास काम करून १० दिवसांत कापून टाकण्यास ९ मनुष्ये लागतात, तर ४० विधे शेत दररोज ८ तास काम करून १५ दिवसांत कापण्यास किती मनुष्ये लागतील ?

रीतीप्रमाणें दिलेल्या फलाचे मानराशि क्रमानें १ व्या स्थलीं मांडून तें फल ३ व्या स्थलीं मांडलें, आणि मानराशींच्या पटी दाखविणारे इच्छाराशि त्याच क्रमानें दुसऱ्या स्थलीं मांडून इ-

च्छाफलाचें दर्शक ४ थ्या स्थलीं मांडलें, ह्यणजे मांडणी अशी होते कीं.—

स. प्र. ३० वि. : ४० वि. }
 व्य. प्र. ६ ता. : ८ ता. } :: ९ म. : इ. म.
 व्य. प्र. १० दि. : १५ दि. }

या उदाहरणांत कामावर लागणारे मनुष्यांची संख्या तीन गोष्टींवर अवलंबून आहे. ह्यणजे वरील दोन गोष्टींशिवाय आणखी मनुष्येही दर रोज अधिक तास काम करूं लागलीं तर तें काम पुरें होण्यास मनुष्ये कमी लागतील हें स्पष्ट आहे. ह्यणून समव्यस्तांप्रमाणें फिरवून हिशेबांतील सर्व पदे घेतलीं तर:—

∴ इ. म. = $\frac{४० \times ६ \times १० \times ९}{३० \times ८ \times १५}$ म. = ६ म. हें उत्तर.

उदा. ३ रें.— एक ६०० पत्रांचें पुस्तक १० दिवसांत लिहिण्यास ६ लेखक लागतात; तर १२०० पत्रांचें पुस्तक ४ लेखक किती दिवसांत लिहितील ?

रीतीप्रमाणें मूलराशि १ ले स्थलीं व त्यांचें फल ३ रे स्थलीं मांडून, मूलांच्या पटी दाखविणारे इच्छाराशि २ रे स्थलीं व इच्छाफलाचें दर्शक ४ थे स्थलीं मांडलें. जसें.—

स. प्र. ६०० प. : १२०० प. }
 व्य. प्र. ६ ले. : ४ ले. } :: १० दि. : इष्ट दि.

पुस्तकाचीं पत्रे वाढलीं तेव्हां दिवस अधिक लागतील हें सम प्रमाण. लेखक कमी केल्यानें दिवस अधिक लागतील हें व्यस्त प्रमाण. तेव्हां समव्यस्तांचे अनुक्रमानें संख्या घेतल्या तर.—

∴ इष्ट दिवस = $\frac{१२०० \times ६ \times १०}{६०० \times ४}$ दि. = ३० दि. हें उत्तर.

उ. ४ थें.— ११ पौ. १७ शि. ६ पे. भाड्यानें २५ मैलांवर ३ टन १६ हं. वे. नेतात, तर ५ पौ. १९ शि. २ पे. भाड्यानें ५२ मैलांवर किती वजन नेतील ?

११ पौ. १७ शि. ६ पे = २८५० पे.

५ पौ. १९ शि. २ पे = १४३० पे.

रीतीप्रमाणें फलाचे संबंधी १ ल्या स्थलीं व इच्छाफलाचे संबंधी २ व्या स्थलीं इत्यादि मांडिले. जसें.—

$$\left. \begin{array}{l} २८५० \text{ पे.} : १४३० \text{ पे.} \\ २५ \text{ मै} : ५२ \text{ मै} \end{array} \right\} ७६ \text{ हं.वे.} : ३$$

एथें भाडें वाढल्यानें ओझें वाढतें व मैल वाढल्यानें ओझें कमी होतें. ह्यणजे हंडेडवेटांचा बदल पेन्सांच्या समप्रमाणांत व मैलांच्या व्यस्तप्रमाणांत होतो. ह्यणून,—

$$३ = \frac{११० \times २५ \times ७६}{२८५० \times ५२} \text{ हं. वे} = १८ \frac{१}{३} \text{ हं. वे.}$$

उ. ५ वें.— १६ तोफांच्या ४ पाळ्या ७ मिनिटांत झाल्यानें २७० मनुष्यें १॥ तासांत मरतात, ह्यावरून किती तोफांच्या ८ पाळ्या ९ मिनिटांत झाल्यानें ४२० मनुष्यें ४० मिनिटांत मरतील ?

एथें १६ तोफा ह्या फलाचे संबंधी मानराशि १ ल्या स्थळीं, इच्छाफलाचे संबंधी इच्छाराशि २ व्या स्थळीं, इ. मांडिले तर,

$$\left. \begin{array}{l} ४ \text{ पा} : ८ \text{ पा.} \\ ७ \text{ मि} : ९ \text{ मि.} \\ २७० \text{ म} : ४२० \text{ म.} \\ ९० \text{ मि} : ४० \text{ मि.} \end{array} \right\} = १६ \text{ तो.} : \text{येणाऱ्या तो.}$$

एथें इतर संबंध काईम राहून तोफांच्या सरबत्तीच्या पाळ्या २ पट वाढल्या तर तोफांची संख्या $\frac{१}{२}$ पट होते. हें प्रमाण व्यस्त आहे.

प्रत्येक पाळीमधला काळ २ पट झाला तर तोफांची संख्या २ पट होते. हें प्रमाण सम आहे.

मरणारीं मनुष्यें दुप्पट झालीं तर तोफांची संख्या २ पट होते. हें प्रमाण सम आहे.

सरबत्तीचा काळ २ पट झाला तर तोफा $\frac{१}{२}$ पट होतात. हें प्रमाण व्यस्त आहे.

व्यस्त प्रमाणाचीं पदे बदलून घेतां,

$$५ = \frac{१ \times १ \times ४२० \times १८ \times २}{२७ \times ९ \times २७० \times ४०} \text{ तो.} = ३६ \text{ तो. हें उ.}$$

उ. ६ वें.— ग्यारिसनच्या (बंदोवस्ताच्या) ४५०० मनुष्यांना दररोज दरमाणशीं १३ औंस प्रमाणें १५ आठवड्यांना पुरेसें अन्न आहे. हें अन्न दररोज दरमाणसास १० औंस प्रमाणें देऊन २७ आठवडे पुरविणें आहे, तर यांतले किती लोक दुसरीकडे पाठवावे ?

एथें ४५०० म. ह्या फलाचे संबंधी १ व्या स्थली व इच्छा-फलाचे संबंधी २ व्या स्थली मांडले. तर,

$$\left. \begin{array}{l} १३^{\circ} \text{ औं. : } १० \text{ औं.} \\ १५ \text{ आ. : } २७ \text{ आ.} \end{array} \right\} = ४५०० \text{ म. : श्रेय म.}$$

जर माणशीं औंस २ रा हिस्सा दिले तर तें अन्न २ पट मनुष्यांस पुरतें. हें प्रमाण व्यस्त आहे.

जर आठवडे २ पट केले तर माणसें २ हिस्सा होतात. हेंही प्रमाण व्यस्त आहे.

एथें मनुष्यांचा बदल औंसांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो, व आठवड्यांचाही व्यस्त प्रमाणांतच होतो. हणून.—

$$ज्ञ = \frac{४५०० \text{ म} \times १३ \times \frac{३}{२}}{\frac{३}{२} \times २७} = ३२५० \text{ म.}$$

ह्यावरून ४५०० म. - ३२५० म. = १२५० म. दुसरीकडे पाठवावीं हें उत्तर.

कांहीं बहुराशिकें प्रश्नांतील संबंध विचारांत घेऊन तयार करावीं लागतात.

उ. ७ वें.— जर १५ घोडे व ९५ मेंढ्या १२ दिवस पोसण्याला १५० रुपये खर्च येतो, तर ३ घोडे व २५ मेंढ्या ३० दिवस पोसण्याला काय खर्च येईल ? १ दिवसाचा ६ घोड्यांचा व ५८ मेंढ्यांचा खर्च हे समान आहेत असें कल्पा.

जर ६ घोड्यांचा खर्च = ५८ मेंढ्यांचा खर्च.
तर १ घोड्याचा " = $\frac{५८}{६}$ मेंढ्यांचा "
व १५ घोड्यांचा " = १४५ मेंढ्यांचा "
आणि ३ घोड्यांचा " = २९ मेंढ्यांचा "

ह्यावरून हें उदाहरण असें होतें कीं.—

$$\left. \begin{array}{l} (१४५ + ९५) \text{ में. : } (२९ + २५) \text{ में.} \\ १२ \text{ दिव. : } ३० \text{ दि.} \end{array} \right\} = १५० \text{ रु. : क्ष}$$

एथें खर्चाचा बदल मेंढ्यांच्या समप्रमाणांत व दिवसांच्याही समप्रमाणांत होतो. ह्मणून.—

$$\text{क्ष} = \frac{१५० \text{ रु.} \times \frac{१५}{२५} \times \frac{१२}{३०}}{\frac{१५}{२५} \times \frac{१२}{३०}} = \frac{६७५}{८} \text{ रु.}$$

= ८४ रु. ६ आ. हें उत्तर.

उ. ८ वें.— जर ६० मनुष्यें रोज ८ तास खपून ६ दिवसांमध्ये १२० फूट लांब ३६ फूट रुंद व २५ फूट खोल खाडा खणतात, तर किती दिवसांमध्ये १८ मनुष्यें रोज ९ तास खपून २२५००० घनयार्ड जमीन खोदून रस्ता सपाट करितील ?

$$\begin{aligned} \text{खाड्याचे घनयार्ड} &= \frac{१२० \text{ या.}}{३} \times \frac{३६ \text{ या.}}{३} \times \frac{२५ \text{ या.}}{३} \\ &= \frac{१२० \times ३६ \times २५}{२७} \text{ घनयार्ड} \end{aligned}$$

एथें तिसरें पद ६ दिवस ह्याचे संबंधी १ ल्या स्थळीं व इच्छाफलाचें संबंधी २ व्या स्थळीं मांडतां असें उदाहरण होतें कीं.—

$$\left. \begin{array}{l} \text{व्य.} \quad ६० \text{ म.} \quad : \quad १८ \text{ म.} \\ \text{व्य.} \quad ८ \text{ ता.} \quad : \quad ९ \text{ ता.} \\ \text{स.} \quad \frac{१२० \times ३६ \times २५}{२७} \text{ घ.या.} : २२५००० \text{ घ.या.} \end{array} \right\} = ६ \text{ दि. : श.}$$

नेमलेला खड्डा खोदण्यास मनुष्यें कमी लाविलीं तर कामाचे दिवस वाढतात. हें व्यस्त प्रमाण.

नेमलेल्या खड्ड्यावर मनुष्यें अधिक तास लाविलीं तर तो खड्डा कमी दिवसांत पुरा होतो. हें व्यस्त प्रमाण.

नेमलेल्या मनुष्यांना अधिक घनयार्ड खोदावें लागलें तर दिवस वाढतात. हें सम प्रमाण. ह्मणून,

$$\begin{aligned} \text{श} &= \frac{१ \text{ दि.} \times \frac{१५}{२५} \times \frac{१२}{३०} \times \frac{१५००००}{२२५०००} \times \frac{३०}{१२}}{\frac{१५}{२५} \times \frac{१२}{३०} \times \frac{१५००००}{२२५०००} \times \frac{३०}{१२}} = \frac{६०००}{६} \text{ दि.} \\ &= १०० \text{ दि. हें उत्तर.} \end{aligned}$$

उ. ९ वें.— ग्यासाचे (धुराचे) ४ दिवे ५ रुपयांच्या खर्चात ३० दिवस पावेतो रोज ५ तास उजळतां येतात, तर १६ रु. खर्चात ८० दिवे ४ दिवस पावेतो रोज किती तास उजळतां येतील ?

एथें तिसरें पद ५ तास आहेत, ह्यांचे संबंधी राशि १ ले स्थली व इच्छाफलाचे संबंधी राशि २ रे स्थली असे उदाहरणाच्या नमुन्याने मांडले; जसे.—

$$\left. \begin{array}{l} \text{स.} \quad ५ \text{ रु.ख.} : १६ \text{ रु.ख.} \\ \text{व्य.} \quad ४ \text{ दिवे} : ८० \text{ दिवे} \\ \text{व्य.} \quad ३० \text{ दिवस} : ४ \text{ दिवस} \end{array} \right\} = ५ \text{ तास} : \text{उ.}$$

एथें नेमलेल्या दिव्यांचे रुपये वाढविले तर तास वाढतात. पण नेमलेल्या खर्चात दिवे वाढविले तर तास कमी होतात. व दिवस वाढविले तरी तास कमी होतात. सारांश, तासांचा बदल रुपयांच्या समप्रमाणांत, दिव्यांच्या व्यस्तप्रमाणांत, व दिवसांच्या व्यस्तप्रमाणांत होतो. ह्मणून.—

$$\text{उ} = \frac{१६ \text{ तास} \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{४} \times \frac{३०}{४}}{\frac{१}{५} \times \frac{१}{४} \times \frac{३०}{४}} = ६ \text{ तास हें उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ळ.

१. १५ फरे धान्य ९ मनुष्यांस ८ महिने पुरतें, तर २० फरे धान्य ६ मनुष्यांस किती दिवस पुरेल ?

२. ६६ रुपये १० आणे दिल्यानें १८ दिवसपर्यंत १६ मनुष्यें काम करतात, तर १९९ रु. १४ आणे दिल्यानें २७ दिवसपर्यंत किती मनुष्यें काम करतील ?

३. २० मनुष्यें १२ दिवसांत जें काम करतात, त्याचे तिप्पट काम पूर्वीच्या काळाच्या $\frac{१}{६}$ काळांत करावयाचें आहे, तर किती मनुष्यें लावावीं ?

४. ७ घोड्यांस २० दिवसांत १४० रुपये लागतात, तर २८० रुपये ७ दिवसपर्यंत किती घोड्यांस पुरतील ?

५. १४ घोड्यांस १६ दिवसांत गवताचे भारे ५६ लागतात, तर १२० भारे २४ दिवसपर्यंत किती घोड्यांस पुरतील ?

६. कागदाच्या ६६ रिमांत ४४ पानांचे बुकाच्या ३००० प्रति छापल्या जातात, तर आह्यांस ५० पानांचे बुकाच्या ५००० प्रति छापवयाच्या आहेत त्यांस रिमें किती लागतील ? एका रिमांत ४८० पानें असतात.

७. १२ मनुष्ये ४ महिन्यांत १६० रुपये खर्च करतात, तर ८५३॥३ आठ महिनेपर्यंत किती मनुष्यांस पुरतील ?

८. ८ मनुष्ये ५ दिवस काम करून ९० रुपये मिळवितात, तर ह्या मानानें ३२ मनुष्यांनी ३४ दिवस काम केलें असतां त्यांस काय मिळेल ?

९. १०० रुपयांत ५ मनुष्यांचा खर्च २२ आठवडे आणि ५ दिवस पर्यंत चालतो, तर १२ मनुष्यांस १५० रुपये किती दिवस पुरतील ?

१०. ७ मनुष्ये ९ पौंड १० शि. ६ पे. १०॥ दिवसांत मिळवितात, तर २८ मनुष्ये ३१॥ दिवसांत किती पौंड मिळवितील ?

११. २५ मनुष्यांनी १६ दिवस काम केलें असतां त्यांची मजुरी ७६॥३ रुपये होते. आतां मजुरीचा दर निम्में केला तर २४ दिवसांत १०३॥३ रुपये मजुरी होण्यास किती मनुष्ये कामावर लावावी ?

१२. २१ मनुष्ये ७२ विघे जमिनींतील गवत ५ दिवसांत कापतात, ह्या मानानें ४६०॥ विघे जमिनींतील गवत ६ दिवसांत कापावयाचें आहे, तर किती मनुष्ये लावावी ?

१३. ९ मनुष्यांचे कुटुंबास १२० रुपये ८ महिनेपर्यंत पुरतात, तर ह्या मानानें २४ मनुष्यांस १६ महिन्यांत किती रुपये लागतील ?

१४. बैलांच्या १२ जोड्यांनी ५ दिवसांत ११ एकर शेत नांगरलें, तर ३३ एकर शेत १८ दिवसांत नांगरावयाचें आहे त्यास किती जोड्या लावाव्या ?

१५. १० रुपये मण साखर होती, तेव्हां ३६ तोळे वजनाच्या गांठीस दोन आणे पडत होते, आतां २४ तोळे वजनाच्या गांठीस दीड आणां पडतो, तर साखरेचा भाव काय असावा ?

१६. दररोज ८ तास प्रमाणें चालून एक गृहस्थ ३ दिवसांत ६० कोस जातो, तर तोच गृहस्थ दररोज ६ तास चालून ५४० कोस लांब किती दिवसांत जाईल ?

१७. ३० खंडी गळ्या १५ कोस न्यावयास भाडें ५॥ लागतें, तर २९ रुपयांत ८८ खंडी गळ्या किती लांब नेला जाईल ?

१८. एक मनुष्य १६० मैलांची प्रदक्षिणा, रोज ११ तास चालून ८ दिवसांत संपवितो, तो जर १५ तास रोज चालू लागला, तर १००० मैलांची प्रदक्षिणा संपवायास त्यास किती दिवस लागतील ?

१९. एक खंडी हरभरे ९ घोड्यांस १५ दिवस पुरतात, तर ४० घोड्यांस लीप* वर्षातील जानेवारी व फेब्रुवारी ह्या दोन महिन्यांत किती हरभरे लागतील ?

२०. दररोज ८ तास काम करून १८ मनुष्यांनीं २४ दिवसांत ३० यार्ड लांब खाडा खणला, व रोज ६ तास प्रमाणें काम करवून ४० दिवसांत ६० यार्ड लांबीचा खाडा खणावयाचा आहे, तर मनुष्ये किती लावावीं ?

२१. ७ गवंड्यांनीं दररोज ९ $\frac{३}{४}$ तास काम करून २० $\frac{३}{४}$ दिवसांत कांहींएक काम केलें, तर त्याचे २ $\frac{३}{४}$ इतकें काम करावयास ३ गवंडी दररोज १२ तास काम करूं लागल्यास त्यांस किती दिवस लागतील ?

२२. प्रत्येक कांब, ४ फूट लांब, ३ इंच रुंद, व २ इंच जाड अशा लोखंडाच्या चार कांबींचें वजन २८८ पौंड भरतें, तर प्रत्येक कांब ६॥ फूट लांब, ४ इंच रुंद आणि तीन इंच जाड अशा १५ कांबींचें वजन किती होईल ?

प्रमाणभाग अथवा सर्कतवांटणी.

नेमलेल्या संख्यांच्या वेरजेला ती प्रत्येक संख्या अशा प्रमा-

* सन १८८४ सन १८८८ अशा ४ नीं भाग जाणाऱ्या वर्षीं फेब्रुवारीचे २९ दिवस धरितात. असल्या २९ शी फेब्रुवारीचे वर्षाला लीप वर्ष हें नांव आहे. १

णांत इष्टसंख्येचे भाग केले, तर ते भाग नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणांत होतात. ह्मणून ह्या भागांना इष्टसंख्येचे प्रमाणभाग, सप्रमाणभाग, किंवा नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणाचे भाग, असें ह्मणतात.

उदाहरणार्थ, नेमलेल्या संख्या २ व ५ आणि इष्टसंख्या २१ च्या. ह्या नेमलेल्या संख्यांची बेरीज ७ आहे. ह्मणून वरील लक्षणाप्रमाणें.—

$$७ : २ = २१ : २१ \times \frac{२}{७} = ६.$$

$$७ : ५ = २१ : २१ \times \frac{५}{७} = १५.$$

असे भाग येतात. वरच्या दोन्ही प्रमाणांत अग्रसर एकच आहेत, ह्मणून प्र. नि. ३ व स. प्र. १ प्रमाणें त्यांचे उपाग्रसर प्रमाणांत असले पाहिजेत. जसें.—

$$२ : ५ = ६ : १५.$$

हेंच सिद्ध करणें होतें. वरील कृतीनें इष्टसंख्येचे नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणांत भाग होतात. ह्यावरून हे भाग शोधण्याच्या रीति ठरतात त्या अशा.—

रीति १ ली.— नेमलेल्या संख्यांच्या बेरजेला त्यांतील १ ली संख्या, तसा इष्टसंख्येला तिचा पहिला भाग, अशा प्रमाणांच्या क्रमानें सर्व भाग शोधावे.

ह्या क्रमांत $\frac{\text{नेमलेली संख्या}}{\text{सर्वांची बेरीज}}$ ह्या गुणोत्तरांनीं इष्टसंख्या गुणून इष्टभाग येतात. ह्मणून,

रीति २ री.— नेमलेल्या संख्यांना त्यांची बेरीज छेद द्यावी, आणि त्या सर्व अपूर्णाकांनीं इष्टसंख्या गुणून तिचे सर्व भाग शोधावे.

नेमलेल्या संख्यांची बेरीज व त्या संख्या ह्या त्यांतील एकंच्या ज्या ज्या पटी असतात, त्या त्याच पटी इष्टसंख्या व तिचे भाग हे त्यांतल्या कल्पित एकंच्या असावयाच्या. ह्मणजे,

$$१ : ७ : २ : ५ = ३ : २१ : ६ : १५$$

अशीं दोन्हीकडच्या क्रमिक संख्यांचीं गुणोत्तरें समान असावयाचीं. ह्मणून,

रीति ३ री.— एकंच्या पद्धतीने नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणाचे इष्टसंख्येचे भाग शोधावे.

उ. १ लें.— वंदुकीच्या दारूमध्ये ७६ भाग सोरा, १४ भाग कोळसा, आणि १० भाग गंधक असतो. आपणास १ मण दारू करणे आहे, तर हा प्रत्येक पदार्थ किती किती घालावा ?

एथें $७६ + १४ + १० = १००$, आणि १ मण = ४० शेर, हणून, रीति १ प्र. १०० शेर दा. : ४० शे. दा. = ७६ शे. सो. : $३० \frac{२}{३}$ शे. सो.

१०० शेर दा. : ४० शे. दा. = १४ शे. को. : $५ \frac{२}{३}$ शे. को.

१०० शेर दा. : ४० शे. दा. = १० शे. गं. : ४ शे. गं.

सूचना १ ली.— नेमलेल्या संख्यांत अपूर्णांक आले तर त्यांचे समच्छेद करून त्यांच्या जागी त्यांच्या प्रमाणाचे पूर्णांक घ्यावे, हणजे कृत्य सोपें होतें.

उ० २ रें.— १००० रुपये क, ख, ग, ह्या तीन असामींस असे वांटून दिले कीं, गला जें मिळेल त्यापेक्षां त्याचा तृतीयांश खला अधिक मिळावा, आणि खला जें मिळेल त्यापेक्षां त्याच्या अर्धानें कला अधिक मिळावें, तर प्रत्येकाला काय मिळेल ?

ह्या उदाहरणाप्रमाणें गचा भाग १ हटला, तर खचा भाग $१ \frac{१}{३} = \frac{४}{३}$ होतो, आणि कचा भाग $\frac{४}{३} + \frac{४}{३}$ चा $\frac{१}{३} = २$ होतो. ह्यावरून क, ख, आणि ग, ह्यांचे भाग अनुक्रमें $२, \frac{४}{३}, व$ १ असे होतात. हणजे $\frac{६}{३}, \frac{४}{३}$ व $\frac{३}{३}$, किंवा $६, ४, व, ३$ असे होतात, आणि ह्यांची बेरीज १३ भाग येते. हणून रीति २ प्रमाणें—

कचा भाग = १००० रु. चे $\frac{६}{१३} = ४६१ \frac{७}{१३}$ रु.

खचा भाग = १००० रु. चे $\frac{४}{१३} = ३०७ \frac{२}{१३}$ रु.

व गचा भाग = १००० रु. चे $\frac{३}{१३} = २३० \frac{१०}{१३}$ रु.

सूचना २ री.— हे प्रमाणभाग भागीदारांची वांटणी इत्यादि संबधानें शोधणें असले, हणजे ह्या कृत्याला सर्कतवांटणी हणतात. भागीदारांच्या रकमा समान काळांपावेतोंच वापरलेल्या असल्या, हणजे तो काळ हिशेबांत घ्यावा लागत

नाहीं. परंतु त्या वेगळाल्या काळांपावेतो वापरलेल्या असल्या तर ते काळ हिशेबांत व्यावे लागतात. ह्यणजे रकमा व वापरणुकीचे काळ हे एकेकाच परिमाणाच्या नांवांत आणून, त्यांचे गुणाकार त्या रकमांच्या जागी हिशेबांत घ्यावे लागतात. हे भेद दाखविण्यासाठी पहिल्या प्रकाराला एकेरी सर्कत, व दुसऱ्या प्रकाराला दुहेरी सर्कत अशीं नांवे देतात.

उ० ३ रें.- क, ख, ग, ह्या तिघांनी सर्कतीने व्यापार केला. त्यांत कचे ५०० रुपये, खचे ६५० रु., आणि गचे ७०० रु., असे होते. पुढें एका वर्षानें त्या व्यापारांत ५५५ रु. नफा झाला, तो त्या तिघांस कसा वांटून द्यावा ?

हीं भांडवलें समान काळपावेतो असल्यामुळें ही एकेरी सर्कत आहे, ह्यणून नफ्याची वांटणी भांडवलांच्याच प्रमाणांत होईल. ह्यणजे ती ५००, ६५०, व ७००, अथवा १०, १३, व १४, ह्या नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणांत होईल. ह्या संख्यांची बेरीज ३७ आहे, ह्यणून एकूंच्या पद्धतीने.

$$३७ \text{ भाग} = ५५५ \text{ रु.}$$

$$\therefore १ \text{ भाग} = १५ \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{कची वांटणी } १० \text{ भाग} = १५० \text{ रु.}$$

$$\text{खची वांटणी } १३ \text{ भाग} = १९५ \text{ रु.}$$

$$\text{व गची वांटणी } १४ \text{ भाग} = २१० \text{ रु.}$$

उ० ४ थें.- क, आणि ख, ह्या दोघांनी ५००० पौंद भांडवल जमवून सर्कतीने (भागीने) व्यापार आरंभिला, त्यांत ३३०० पौंद कचे व बाकी खचे होते. तीन महिने होतांच गचे १५०० पौंद त्या भांडवलांत घालून त्याला त्या सर्कतींत घेतलें, आणि ४ महिने होतांच घचे आणखी १९५० पौंद त्या भांडवलांत घालून त्यालाही त्या सर्कतींत घेतलें. सालअखेरीस ह्या व्यापारांत १७२९ पौंद १३ शि. ९ पे. नफा आकारला. तो त्यांनी कसकसा वांटून द्यावा ?

ह्या सर्कतींत वेगळाली भांडवलें वेगळाल्या काळांपावेतो वापरलीं जातात ह्यणून ही दुहेरी सर्कत आहे. हींतील ३३००

पौंदांचा १० महिन्यांचा व्यापार = ३३०० × १० पौंदांचा १ महिन्याचा व्यापार आहे, ह्यागून महिने हे रकमांच्या पटी दाखविणारे कल्पून ह्या सर्वांच्या एकेका महिन्यापावेतो केवढ्या रकमा व्यापारांत होत्या तें काढलें. तर,

$$\begin{aligned} \text{कचे } ३३०० \text{ पौं.} \times १२ &= ३९६०० \text{ पौं.} \\ \text{खचे } १७०० \text{ पौं.} \times १२ &= २०४०० \text{ पौं.} \\ \text{गचे } १५०० \text{ पौं.} \times ९ &= १३५०० \text{ पौं.} \\ \text{घचे } १९५० \text{ पौं.} \times ८ &= १५६०० \text{ पौं.} \\ &\hline &८९१०० \text{ पौं.} \end{aligned}$$

समानकाळापावेतो वापरलेल्या रकमांचा फायदा त्या रकमांच्याच प्रमाणांत असला पाहिजे. ह्यागून,

$$\begin{aligned} \text{कची वांटणी} &= \frac{१७२९ \text{ पौं. } १३ \text{ शि. } ५ \text{ पे.}}{८९१००} \times ३९६०० \\ &= ७६८ \text{ पौं. } १५ \text{ शि.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{खची वांटणी} &= \frac{१७२९ \text{ पौं. } १३ \text{ शि. } ५ \text{ पे.}}{८९१००} \times २०४०० \\ &= \text{इत्यादि.} \end{aligned}$$

उदाहरण ५ वें.— अने ८०० रु. घेऊन व्यापारास आरंभ केला, नंतर तीन महिन्यांनी त्या व्यापारांत १००० रु. देऊन व मिळाला. पुढें त्या व्यापारांत ६ महिन्यांनी ३३० रु. नफा झाला, तो उभयतांस कसा वांटून द्यावा ?

ह्या व्यापारांत अचे ८०० रु. ९ महिने होते, व बचे १००० रुपये ६ महिने होते.

आतां ८०० रुपयांचा ९ महिन्यांचा नफा = ८०० × ९ रुपयांचा एका महिन्याचा नफा आहे. तसेंच १००० रुपयांचा ६ महिन्यांचा नफा = १००० × ६ रुपयांचा एका महिन्याचा नफा आहे. ह्यागून अ आणि ब ह्यांचे नफे ८०० × ९, आणि १००० × ६, ह्यागजे ७२०० आणि ६०००, ह्या प्रमाणांत अथवा ६ आणि ५ ह्या प्रमाणांत येतील.

हणून $\left\{ \begin{array}{l} \text{अची वांटणी } ३३० \times \frac{६}{३९} = १८० \text{ रु.} \\ \text{बची वांटणी } ३३० \times \frac{५}{३९} = १५० \text{ रु.} \end{array} \right\}$ हैं उत्तर.

उ० ६ वें.—अने ५०० रुपये, आणि बने ३०० रुपये वेऊन दोघांनीं सर्कतीने व्यापार आरंभिल्यावर ९ महिन्यांनीं त्या व्यापारांत क १००० रुपये देऊन मिळाला. पुढें ९ महिन्यांनीं पहातात तों त्या व्यापारांत २००० रुपये नफा झाला, तो तिघांस कसा वांटून द्यावा ?

ह्या प्रमाणांत ५ व्या उदाहरणाप्रमाणें अ, ब, क, ह्यांचे नफे ५०० × १८, ३०० × १८, १००० × ९ ह्या प्रमाणांत अथवा ५, ३, ५ ह्या प्रमाणांत आहेत, हणून $\frac{५}{१३}$, $\frac{३}{१३}$, $\frac{५}{१३}$ हे प्रमाण दाखविणारे अपूर्णांक आले. हणून,

$$\text{अचा भाग} = २००० \text{ रु.} \times \frac{५}{१३} = ७६९ \text{ रु. } ३ \text{ आ. } ८ \frac{४}{१३} \text{ पै.}$$

$$\text{बचा भाग} = २००० \text{ रु.} \times \frac{३}{१३} = ४६१ \text{ रु. } ८ \text{ आ. } ७ \frac{५}{१३} \text{ पै.}$$

$$\text{कचा भाग} = २००० \text{ रु.} \times \frac{५}{१३} = ७६९ \text{ रु. } ३ \text{ आ. } ८ \frac{४}{१३} \text{ पै.}$$

२००० रु.

उ. ७ वें.— क आणि च ह्यांनीं ७ : ११ ह्या प्रमाणाचीं भांडवलें एकत्र करून भागीचा व्यापार चालू केला. तीन महिन्यांचे अखेरीस कने आपल्या भांडवलाचा $\frac{१}{३}$ त्यांतून काढून घेतला. त्याच्या २ पट पैसा तेथून १ महिन्यानंतर चने त्या व्यापारांत नवा घातला. ह्या व्यापारांत ३३७ पौंद ७ शि. ६ पे. नफा झाला आहे. तर तो त्यांनीं कसकसा घ्यावा ?

एथें सप्रमाणसंख्यांचीच गरज आहे हणून कचें भांडवल ७ आणि चचें ११ झटलें. ३ महिन्यांनीं कने ७ चा $\frac{१}{३}$ त्यांतून काढल्यावर त्याचें $४ \frac{२}{३}$ भांडवल राहिलें. ४ महिन्यांनीं चने $\frac{७}{३}$ चे २ पट = $४ \frac{२}{३}$ भांडवल नवीन घातलें हणून त्याचें भांडवल $१५ \frac{२}{३}$ झालें. ह्या कारी क आणि च ह्यांचीं भांडवलें एकेका महिन्यापावेतोच केवढालीं वापरलीं गेलीं तें काढलें. तर,

$$\left. \begin{array}{l} ७ \times ३ = २१ \\ ४ \frac{२}{३} \times ९ = ४२ \end{array} \right\} = ६३ \text{ हें कचें भांडवल.}$$

$$\left. \begin{array}{l} ११ \times ४ = ४४ \\ १५\frac{२}{३} \times ८ = १२५\frac{१}{३} \end{array} \right\} = १६९\frac{१}{३} \text{ हैं चचेँ भांडवल.}$$

$$\therefore \text{कची वांटणी} = \frac{३३७ \text{ पौं. } ७ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}}{२३२\frac{१}{३}} \times ६३.$$

$$= \frac{३३७ \cdot ३७५ \times १८९}{६९७} \text{ पौं.}$$

$$= ९१ \text{ पौं. } ९ \text{ शि. } ८ \text{ पे. सुमारें.}$$

$$\text{व चंची वांटणी} = \frac{३३७ \text{ पौं. } ७ \text{ शि. } ६ \text{ पे.}}{२३२\frac{१}{३}} \times \frac{५०८}{३}.$$

$$= २४५ \text{ पौं. } १७ \text{ शि. } १० \text{ पे. सुमारें.}$$

प्रमाणभागावरून नानाप्रकारच्या प्रश्नांचे उलगडे विचाराच्या आधारें करितां येतात.

उ. ८ वें.— तीन तालुक्यांतल्या लोकांनी त्यांतील वस्तीच्या अनुरोधानें १८२ लोक (किंवा त्यांचे पगार) बंदोवस्ताच्या फौजेंत पाठवावयाचे आहेत. त्यांतील वस्ती, पहिल्यांतील २४५६, दुसऱ्यांतील ७३५, आणि तिसऱ्यांतील ४३६१ अशा आहेत. तर त्यांपासून किती किती लोक घ्यावे तें पोक्त विचारानें सांगा.

$$\text{एथें एकंदर वस्ती} = २४५६ + ७३५ + ४३६१ = ७५५२$$

$$\therefore १ \text{ ल्या ता. वां.} = \frac{२४५६ \times १८२ \text{ लो.}}{७५५२} = ५९'१८ \text{ लो.}$$

$$२ \text{ न्या ता. वां.} = \frac{७३५ \times १८२ \text{ लो.}}{७५५२} = १७'७१ \text{ लो.}$$

$$\text{व } ३ \text{ न्या ता. वां.} = \frac{४३६१ \times १८२ \text{ लो.}}{७५५२} = १०५'०९ \text{ लो.}$$

आतां वरच्या दशांशस्थलांमुळें १ मनुष्याचा तोटा येतो तो कोणत्या तालुक्यापासून घ्यावा हा विचार राहिला. हा मनुष्य १ ल्या, २ न्या, अगर ३ न्या, तालुक्यापासून घ्यावयाचा हाटला ह्मणजे त्याला वाजवीपेक्षां फाजील देणें पडेल. ह्या फाजील देण्याचीं मानें अनुक्रमें. '८२, '२९, '९१ अशीं येतात. ह्यावरून

१ जास्ती मनुष्य २ व्या तालुक्यापासून घेतला पाहिजे असे प्रथमदर्शनी वाटते.

परंतु हीं फाजील देणीं त्या त्या तालुक्यांतील लोकांवर वांटलीं जावयाचीं, ह्मणून ह्या प्रत्येक तालुक्यांतील व्यक्तींवर हें फाजील देणें काय वसेल हें पाहिलें, तर तीं व्यक्तिसंबंधीं मानें अनुक्रमें.—

$\frac{१८२}{२४५६}$; $\frac{२९}{७३५}$; $\frac{९३}{४३६९}$; ह्मणजे ०३३; ०३९; ०२०८; अशीं येतात. ह्यावरून ३ व्या तालुक्यापासून १ मनुष्य अधिक घेतला तर त्याबद्दलचें ओझे त्यांतील प्रत्येक व्यक्तीवर अगदीं थोडें पडतें. ह्मणून हा मनुष्य ३ व्या तालुक्यापासून घ्यावा. अर्थात् ५९, १७, व १०६, ह्याप्रमाणें लोक घ्यावे.

उ. ९ वें.—निर्यामित दाळांत ३ बाप्ये व ४ मुलगे काम करितात तितकेंच २ बाप्ये व १६ मुली करितात, आणि ४ बाप्ये व २ मुलगे काम करितात तितकेंच १२ मुलगे व १२ मुली करितात. एका बाप्यानें १ मुलगा व एक मुलगी ह्यांच्या मदतीनें कांहीं काम करून ४४ शिलिंग बक्षीस मिळविलें आहे, तर त्यांतून केवढालें बक्षीस त्यांना द्यावें ?

३ बा.चें + ४ मु.चें का. = २ बा.चें + १६ मुलींचें का.
स.प्र.३प्र. १ बा.चें + ४ मु.चें का. = १६ मुलींचें का.

व ४ बा.चें + १६ मु.चें का. = ६४ मुलींचें का.

पुनः ४ बा.चें + २ मु.चें का. = १२ मु.चें + १२ मुलींचें का.

∴ ४ बा.चें का. = १० मु.चें + १२ मुलींचें का.

ह्या बरोबरींत १६ मुलांचें काम दोन्ही बाजूंस मिळविलें तर

४ बा.चे + १६ मु.चें का. = २६ मु.चें + १२ मुलींचें का.

स.प्र.१प्र. ६४ मुलींचें का. = २६ मु.चें + १२ मुलींचें का.

५२ " " = २६ मु.चें काम.

व २ " " = १ मु.चें काम.

परंतु १ बा.चें + ४ मु.चें का. = १६ मुलींचें काम.

∴ १ बा.चें का. = ८ मुलींचें काम.

ह्यावरून वाप्या, मुलगा, व मुलगी ह्यांची वक्षिसं ८, २ व १ ह्या प्रमाणांत ठरतात.

आतां १ वाप्याचें + १ मुलाचें + एक मुलीचें काम

$$= ११ मुलीचें काम = ४४ शि.$$

$$\therefore १ मुलीचें " = ४ शि.$$

$$१ मुलाचें किंवा २ मुलीचें " = ८ शि.$$

$$व १ वाप्याचें किंवा ८ मुलीचें " = ३२ शि. हीं उत्तरें.$$

उ. १० वें. — सोनें दर औंसास ३ पौं. १७ शि. १०॥ पे. प्रमाणें आहे. एक सोन्यारुप्याच्या तारांची बुटीदार जाळी ८ पौंड वजनाची असून, तिची किंमत ६३७ पौंड ७ शि. आहे. परंतु हींत सोन्यारुप्याचें प्रमाण उलट देखिले असतें, तर हिची किंमत २५९ पौंड १ शि. झाली असती. ह्यावरून ह्या जाळींत सोनें व रुपें हीं कोणत्या प्रमाणांत आहेत तें सांगा, व रुप्याची दर काय आहे तें सांगा.

एथें मूळची जाळी व उलट प्रमाणाची जाळी अशा दोन्ही घेतल्या तर त्यांत सोनें व रुपें हीं प्रत्येकीं अठरा अठरा पौंड होऊन त्यांची किंमत ६३७ पौं. ७ शि. + २५९ पौं. १ शि. होईल. म्हणजे ८९६ पौं. ८ शि. होईल. म्हणून,

$$१८ पौं. सोनें + १८ पौं. रुपें = ८९६ पौं. ८ शि.$$

$$\text{परंतु } १८ \text{ पौं. सोनें} = १८ \times १२ \text{ (३ पौं. १७ शि. १०॥ पे.)}$$

$$= ८४१ \text{ पौं. १ शि.}$$

$$\therefore \text{स.प्र.३प्र. } १८ \text{ पौं. रु.} = ५५ \text{ पौं. ७ शि.}$$

$$\therefore १ \text{ पौं. रु. किंवा } १२ \text{ औं. रु.} = ३ \text{ पौं. १॥ शि.}$$

$$व " १ \text{ औं. रु.} = ५ \text{ शि. १॥ पे. हें प.उ.}$$

$$\text{आतां } १८ \text{ पौं. जाळीची किंमत} = ६३७ \text{ पौं. ७ शि.}$$

$$व १८ \text{ पौं. जाळी रुप्याची}$$

$$\text{असती तर तिची किंमत} = ५५ \text{ पौं. ७ शि.}$$

$$\therefore \text{बाकी} = ५८२ \text{ पौं.}$$

ह्या जाळींत कांहीं सोनें असून त्याची किंमत रुप्याच्या किं-

तीन वर्षांनीं ७९१ रुपये नफा झाला, तो त्यांस कसा वांटून द्यावा ?

३. १५३० रुपये ५ मनुष्यांस वांटून द्या. असे कीं, ते भाग $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$, आणि $\frac{१}{७}$ ह्या प्रमाणांत येतील.

४. ९६ कशी सोने ४ तोळे घेऊन तें ९० कशी ५ तोळे सोन्यांत मिळविलें, त्या मिश्राचा एक दागिना साडेचार तोळे वजन आहे, तेव्हां त्यांत शुद्ध सोने किती आहे तें सांगा.*

५. एक तोफू २॥३ वजनाची ओतावयाची आहे, तर तिच्या मिश्र धातूंत तांबें व कथील किती किती घालावें ? तोफेच्या धातूंत १०० भाग तांब्यास २१ भाग कथील असतें.

६. सुर्ती रुपयांत ३७ भाग रुपें आणि ३ भाग तांबें असतें असें ह्मटलें तर एक रुपयांत शुद्ध रुपें किती असेल तें सांगा. रुपयाचें वजन साडे अकरा मासे आहे.

७. अ आणि व ह्यांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्या व्यापारांत त्यांचीं भांडवलें ५ : ४ ह्या प्रमाणांत होतीं. पुढें तीन महिन्यांनीं आपल्या भांडवलाचे अनुक्रमें $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{३}{४}$ त्यांनीं त्यांतून काढून घेतले, आणि वर्षाच्या अंती पाहतात तों त्या व्यापारांत त्यांस ३३५ रुपये नफा झाला, तो त्यांनीं कसा वांटून द्यावा ?

८. ९० कशी सोने ८ तोळे, आणि ९२ कशी सोने ९ तोळे हीं दोन्ही सोनीं कस माहित नाही अशा तिसऱ्या प्रकारच्या ६ तोळे सोन्यांत मिळविलीं, आणि त्या मिश्र सोन्यास कस ८८ आला, तेव्हां सहा तोळे सोने कोणते कसाचें होतें तें सांगा.

९. १४०० ह्या संख्येचे असे चार भाग करा कीं, १, २, ३, ४ ह्या संख्यांत जें प्रमाण आहे, तें प्रमाण त्या भागांत येईल.

१०. अ, ब, क, ह्यांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, तेव्हां त्यांचीं भांडवलें $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{५}$ ह्या प्रमाणांत होतीं; पुढें ४ महिन्यांनीं अ ने आपल्या द्रव्याचा $\frac{१}{३}$ त्यांतून काढून घेतला, आणि ९ महिन्यांत एकंदर २०० रुपये नफा मिळाला तो वां-

* शुद्ध सोने १०० कशी मानलें आहे.

दून वेऊन त्यांनीं व्यापार सोडला, तेव्हां प्रत्येकास नफा किती आला तो सांगा.

११. विलायतेंत वंदुकीच्या दारूंत ७५ भाग सोरा १० भाग गंधक, आणि १५ भाग कोळसा, ह्याप्रमाणें आग्नेय (जळणारे) पदार्थ असतात व फ्रान्स देशांतील दारूंत ७७ भाग सोरा, ९ भाग गंधक, आणि १४ भाग कोळसा, ह्याप्रमाणें आग्नेय असतात. आतां दोन्ही देशांतील दारू अर्धा अर्धा मण घेऊन एकत्र केली, तर त्या मिश्रणांत सोरा, गंधक व कोळसा हे पदार्थ किती किती होतील ?

१२. आठवड्यांतील रविवार खेरीज करून बाकीच्या दिवसांत अ दररोज ६ तास काम करितो, आणि व पहिले दोन दिवस खेळतो, आणि बाकीच्या चार दिवसांत दररोज काम ६ तास, ८ तास, १० तास, आणि १२ तास, ह्याप्रमाणें करतो. असें एका महिन्यांत त्या उभयतांनीं मिळून ११६ रुपयांचें काम केलें, तेव्हां प्रत्येकास काय मिळालें तें सांगा.

१३. मद्रास इलाख्यांतील मोहोरांचें सोने ९० कशी असतें व एका शेंरांत २४ मोहरा भरतात, तेव्हां १०० मोहोरांत शुद्ध सोने किती असतें ?

१४. अ आणि व ह्या उभयतांनीं मेंढ्या चारण्याकरितां एक कुरण एक वर्षाच्या बोलीनें २७५ रुपयांस घेतलें. त्यांत आरंभीं अ ने ८० मेंढ्या घातल्या, आणि व ने १०० घातल्या. पुढें सहा महिन्यांनीं प्रत्येकानें आपआपल्या अर्ध्या मेंढ्या विकल्या, आणि त्या कुरणांत क च्या ५० मेंढ्या घेतल्या, तेव्हां वर्षाचे अंती प्रत्येकानें काय द्यावें ?

१५. पाणी दोन वायूंच्या मिश्रणापासून होतें, व त्या मिश्रणांत ८८९ भाग आक्सिजन आणि १११ भाग हैद्रोजन असतो, तेव्हां एक घनफूट पाण्यांत ह्यणजे १००० औंस पाण्यांत हे दोन्ही वायु किती किती असतील ?

१६. ३००० रुपये अ, व, क, ह्या तिघांस वांटून द्यावयाचे

ते असे कीं, अला वच्या दुप्पट, आणि कला, अ आणि व ह्यांच्या वेरजेच्या दुप्पट. तेव्हां प्रत्येकास किती रु. येतील ?

१७. ८०, ८५, ९० आणि ९५, ह्या चार कसांचें सोनें अनुक्रमें १०, ४, २ आणि ४ तोळे घेऊन एकत्र केलें, तर तें मिश्र सोनें कोणते कसांचें होईल ?

१८. वरील मिश्र सोनें शुद्ध होण्याकरितां १७ तोळे राही-पर्यंत जाळलें, तर त्या वाकीचे सोन्यास कस काय लागेल, अथवा जर जाळून बाकी राहिलेल्या सोन्याचा कस ९८ आला, तर सोनें किती जळून गेलें तें सांगा.

१९. एका विहिरींतील गाळ काढावयास अ, व, क, ह्या तिघांस बोलाविलें, परंतु पांश्या दोनच होऊन हणून पहिल्यानें अ आणि व कामास लागले. त्यांत अ एका घटकेंत ३७ पांश्या गाळ काढी, आणि व ४० पांश्या काढी. ह्याप्रमाणें पांच घटका काम केल्यावर पुढें ते प्रत्येक दर घटकेस पांच पांश्या गाळ कमी काढूं लागले. ह्याप्रमाणें ५ घटका गेल्यावर अ थ-कला, तेव्हां क एकटा कामास लागला, तो एक घटकेंत ३० पांश्या काढी; ह्याप्रमाणें काम करून २२ घटकांत त्यांनीं सर्व गाळ काढला. त्या मजुरीबद्दल त्यांस ६॥ रुपये मिळाले, तेव्हां प्रत्येकांनै काय घ्यावें तें सांगा.

२०. अ आणि व ह्या उभयतांनीं पांचपांचशें रुपये घेऊन सर्कतीनें व्यापार आरंभिला. पुढें तीन महिने झाल्यावर अनें आपल्या भांडवलांतून २०० रुपये काढून घेतले, आणि वनें २०० रु० आपल्या भांडवलांत घातले, व पुढें आणखी तीन महिने गेल्यावर पुन्हा त्याचप्रमाणें केलें आणि वर्षाच्या अखेरीस हिशेब पाहतात तों व्यापारांत वूड घेऊन ४०० रुपयांचा भाल शिल्लक राहिला, तो त्यांस वांटून घेणें आहे तर प्रत्येकास किती येईल तें सांगा.

२१. पौंड ५९३. ८. ६. ह्यांचे २'३ : ३'४५ : ५'६२९ ह्या प्रमाणांत वांटे करा.

२२. एकाची जिनगी ४७१ पौं. १२ शि. ६ पे. आहे.

ह्यानें मृत्युपत्रांत अशी इच्छा लिहिली आहे कीं, आपल्यामागे ह्या जिनगीचा $\frac{1}{2}$ कला द्यावा, $\frac{1}{3}$ खला द्यावा, $\frac{1}{4}$ गला द्यावा, आणि $\frac{1}{5}$ घला द्यावा. ही याची इच्छा अमलांत आणतां येणार नाहीं हें स्पष्ट करा, आणि वरील जिनगी या प्रमाणांत वांटा.

२३. एका आरबापाशीं ५ घोडे होते. ह्यानें मृत्युपत्रांत अशी इच्छा लिहिली होती कीं, आपल्या जिनगीची निम्में पहिल्या मुलाला, त्याची निम्में दुसऱ्या मुलाला, व त्याची निम्में तिसऱ्या मुलाला ह्या रीतीनें बिनकसर वांटणी तिघांत करून द्यावी, तर प्रत्येकाच्या वांट्यास किती किती घोडे येतील ?

२४. एक साव्हीरीन क, ख, ग, या तिघांत २ प्रकारांनीं वांटा. प्रथम कला द्याल त्याचा $\frac{2}{3}$ खला अधिक द्या, आणि खला द्याल त्याचा $\frac{1}{4}$ गला अधिक द्या. नंतर कला द्याल त्याचा $\frac{1}{5}$ खला अधिक द्या, आणि क, ख, ह्यांना द्याल त्याचे $\frac{2}{3}$ गला द्या.

२५. तीळ, कडई व भुयमूग ह्यांच्या तेलानीं भरलेलीं भांडीं अनुक्रमें ३६, ५४ व ७८ शेरांचीं आहेत. हीं तिन्ही भांड्यांतलीं तेलें एकत्र करून पुन्हां तीन भांड्यांत भरलीं, तर भुयमुगाच्या तेल्याच्या भांड्यांत तिळाचें व कडईचें तेल किती किती शेर जाईल ?

२६. प, फ, ब, भ, ह्या चौघां पातीदारांनीं मिळून २३८०० पौंडांचा व्यापार ४ महिने केल्यानें त्यांना अनुक्रमें पौं. २६. ११. ८; पौं. ३७. ४. ४; पौं. ५३. ३. ४; पौं. ६३. १६; ह्याप्रमाणें नफा झाला. ह्यावरून त्यांच्या पात्या केवढाल्या होत्या ?

२७. व, आणि फ ह्यांनीं ५०० व ३०० रुपये एकत्र करून संकतीनें व्यापार चालू केला. चार महिन्यांनीं वनें आपलें भांडवल दुप्पट केलें, आणि रचे ३५० रु० त्या संकतींत घेतले. सहा महिन्यांचे अखेरीस फनें आपलें भांडवल तिप्पट केलें आणि वर्पाचे अखेरीस ह्यांना ७५० रु. नफा झाला, तर ह्याची वांटणी कसकशी होईल ?

२८. क आणि ख ह्यांनी ४ : ५ प्रमाणार्ची भांडवलें घेऊन भागीदारीचा व्यापार चालू केला, तीन महिन्यांनी त्यांनी आपापल्या भांडवलाचे $\frac{1}{8}$ व $\frac{3}{8}$ हे त्यांतून काढून घेतले, वर्षाचे अखेरीस त्यांना ४३६ पौं. ९ शि. ६ पे. नफा झाला, हा इस-मवार कसा वांटवा ?

२९. ३४ पौं. १५ शि. १० पे. कर्जावद्दल क्रौन, शिलिंग व पेन्स हीं नाणीं ४ : ७ : १० ह्या प्रमाणांत दिलीं, तर प्रत्येक प्रकारचीं रुप्यां किती किती होतीं ?

३०. अ आणि ब ह्यांनी २१ गिनीला १ कुरण भाड्यानें घेतलें. ह्या कुरणांत अनें १० घोडे १॥ महिना, ३० बैल २ महिने, आणि १०० मेंढ्या ३१ महिने ठेविल्या; आणि बनें ४० घोडे २॥ महिने, ५० बैल ३१ महिना, आणि ११५ मेंढ्या ३ महिने ठेविल्या. घोडा, बैल व मेंढी ह्यांच्या एका दिवसांतल्या खादी ३ : २ : १ ह्या प्रमाणांत असतात, तर त्यांनीं किती किती पैसा द्यावा ?

३१. ७६५० रुपये, १० पुरुष ३२ स्त्रिया आणि ४८ मुलें ह्यांत वांटणें आहेत ह्यांत एका पुरुषाइतका पैसा दोन स्त्रियांस देणें आहे, व ३२ स्त्रियांना ४८ मुलांच्या दुप्पट पैसा द्यावयाचा आहे, तर प्रत्येक स्त्रीला काय मिळेल ?

३२. २३ हंड्रेडवेट १ क्वार्टर ९ पौंड यांचे १११ घनफूट $\frac{3}{8}$ घनयार्ड ह्या प्रमाणांत भाग करा.

३३. तीन अपूर्णाकाची बेरीज $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ आहे, आणि पहिल्याची २२ पट दुसऱ्याची २३ पट आणि तिसऱ्याची २४ पट ह्या संख्या समान येत आहेत. ह्यावरून ते अपूर्णाक सांगा.

३४. ३२ ग्यालन ३ क्वार्टर १॥ पिंट इतका प्रवाही पदार्थ चार भांड्यांत वांटवा. असा कीं, पहिल्यास दुसरा तसे ९ : १४ दुसऱ्यास तिसरा तसे २१ : २५ आणि तिसऱ्यास चौथा तसे २० : ३३.

३५. एक पौंड चहा, एक पौंड काफी, व एक पौंड साखर, ह्यांस मिळून ५ शि. ८॥ पेन्स पडत आहेत. ७ पौंड

चहाची किंमत १६ पौंड काफीच्या किंमतीइतकी आहे, आणि ३ पौंड काफीला ११ पौंड साखरेइतका पैसा पडत आहे, तर प्रत्येकाची किंमत सांगा.

३६. अशा तीन महत्तम पूर्ण संख्या सांगा की त्यांची बेरीज १ प्रयुतापेक्षां कमी व्हावी, पहिली व दुसरी ह्या संख्यांचे प्रमाण ५ यार्ड २ फू. ६ इंच. : ५ या. ३ क्वा. २॥ नेल, हे असावे. आणि दुसरी संख्या ही तिसरीचे $\frac{३ \text{ हं. } ३ \text{ क्वा. } १२ \text{ पौ.}}{४ \text{ हं. } २ \text{ क्वा. } १६ \text{ पौ.}}$ ह्यांबरोबर असावी.

३७. पांच शहरांनी मिळून २०० शिपाई द्यावयाचे आहेत. शहरांतील लोकसंख्या अनुक्रमे २८३००, २५७५०, १६४३२, ८४५०० आणि २३६४८, अशा आहेत. तर प्रत्येक शहराने किती किती शिपाई द्यावे ते पूर्ण विचाराने सांगा.

शतमान गणित.

शतमान गणित ह्याचा अर्थ शंभरांच्या मापांचे गणित असा आहे. व्यवहारांत दर या शब्दाचा उपयोग प्रत्येक माप आणि एका किंवा दिलेल्या मापांचे फल, असा दोन अर्थी होतो. म्हणून ह्या गणितांत दर शेंकड्या याचा अर्थ प्रत्येक शेंकड्यास असा घेतला पाहिजे, आणि शेंकड्याचा दर याचा अर्थ शेंकड्याचे फल असा घेतला पाहिजे.

व्याजवट्टा, हुंडीपांडी, दुकानदारी, भागीदारी, दलाली, असा कोणताही धंदा असो, त्यांत शेंकड्याच्या दरावर (फलावर) लक्ष ठेविले तरच तो धंदा नियमितपणाने चालविता येतो. तसेच पोटधंद्यांतील नफानुकसाने ही दर शेंकड्यास आणिली तरच ती परस्परांशीं ताडून पाहता येतात, एरव्ही येत नाहीत.

उदाहरणार्थ, भागीदारांच्या मंडळीच्या एका शाखेला ५०००० रु. भांडवलावर ४१२५ रु. नफा झाला, आणि दुसऱ्या शाखेला ३२५०० रु. भांडवलावर २४३७॥ रु. नफा झाला असे समजा. येथे दोहों शाखांची मूळमाने किंवा भांडवलें वेगळाली आहेत. म्हणून त्यांच्या नफ्यावरून कोणत्या शाखेचे

काम भरभराटीनें चालतें ह्याचें अनुमान होत नाहीं. पण हेच ह्यांचे नफे १०० ह्या एकाच संख्येवरचे आणावे, ह्मणजे पहिल्या शाखेचा नफा दरशेंकडा ८। रु. पडला, व दुसऱ्या शाखेचा नफा दरशेंकडा ७।। रु. पडला, असें कळून त्यांची तुलना सहज होते, व शक्य असेल तर त्यांच्या कामांत सुधारणा करितां येते.

ह्या तुलनेच्याच उद्देशानें लोकसंख्येच्या कोष्टकांत लोकसंख्येची वृद्धि अग्नू क्षय, लोकसंख्येतील शेतकी करणारे, वेगळाले धंदे चालविणारे, लिहिणेंवाचणें जाणणारे, इत्यादि लोक दर शेंकड्यास किती आहेत त्या संख्या काढून दिलेल्या असतात.

उदाहरणार्थ, एका शहरांतील वस्ती गेल्या दहा वर्षांत ३४५७५ पासून ३७३४१ पावेतो वाढली आहे असें समजा. एथें ३४५७५ : २७६६ वाढ ही १०० : ८ वाढ आहे, ह्मणजे दर शेंकडा ८ वाढ आहे.

शतमानगणितांत मूळें व फळें हे सजातीय राशि एकाच नांवाचे घेतात, यामुळें त्यांचा संबंध १०० : ८। नफा असा मोघमपणानें किंवा भावसंख्येनीं सांगतां येतो, आणि या सांगण्याचा अर्थ १०० पैसे : ८। पैसे नफा, १०० पौंड : ८। पौंड नफा, असा पाहिजे त्या विशेष संख्यांनींही दर्शवितां येतो. वाराच्या दारवेंत कोळशाचें मान शेंकडा १५ असतें, या ह्मणण्याचा अर्थ १०० तोळे दारू : १५ तोळे कोळसा, किंवा १०० मण दारू : १५ मण कोळसा, असा पाहिजे त्या विशेष संख्यांशीं लागू करितां येतो.

शतमानगणिताचे प्रश्न एकमानगणितानें सोडवितां येतात, तरी या कामाचें उत्तम हत्यार ह्मटलें तर प्रमाणगणित किंवा त्रैराशिक व बहुराशिक हें आहे.

शतमानगणितांत नेहमीं १०० नीं गुणण्याभागण्याचें काम पडतें, आणि हें काम दशांशसंख्येतील चिन्ह दोन स्थळें पुढेंमागे सारण्यानें होतें, ह्मणून या गणितांत दशांश अपूर्णाकांचा उपयोग करण्यांत विशेष सोय असते.

रुपयांची देवघेव $\frac{9}{६४}$ रुपयापावेतो व्हावयाची, आणि पाँड्यांची देवघेव $\frac{9}{६०}$ पाँडपावेतो व्हावयाची, यावरून या गणिताचें उत्तर रुपये किंवा पाँड असतील तेव्हां त्यांत दोन किंवा चार दशांशस्थळें घेतलीं ह्मणजे पुरे होतील (पृ. ८१ संक्षिप्त कृत्ये पहा).

प्रकार १ ला.— दिलेल्या शेंकडेवारीवरून किंवा शेंकड्याच्या दरावरून दिलेल्या राशीचें फळ शोधणें.

उदाहरण १ लें.— म्युनिसिपल कमिटीची पट्टी वसूल करणाराला शेंकडा ३॥ टक्यांच्या दरानें १३६५॥ = वसुलांतून काय मिळेल ?

येथें १०० रु. व : : ३॥३६५॥ = रु. व : : ३॥ रु. मि० : इ. मि.

$$\therefore \text{इ. मि.} = \frac{३॥ \times १३६५॥}{१००} = \frac{३.५ \times १३६५.८७५}{१००}$$

$$\therefore \frac{१३६५॥}{३॥} = \frac{१३६५.८७५}{३.५}$$

$\begin{array}{r} ४०९७॥ = \\ ६८२॥ = \\ \hline १००) ४७'८०॥ - \\ \quad १६ \\ \hline १२'८९ \\ \quad १२ \\ \hline १०'६८ \end{array}$	$\begin{array}{r} ४०९७.६२५ \\ ६८२.९३७५ \\ \hline १००) ४७'८०.५६२५ \\ \quad १६ \\ \hline १२'८९०००० \\ \quad १२ \\ \hline १०'६८ \end{array}$
---	--

४७॥॥॥२ सुमारें मिळतील हें उत्तर.

ह्या प्रकारच्या उदाहरणांत ह्याच नमुन्याचें त्रैराशिक व्हावयाचें. ह्मणून,

रीति.— दिलेल्या राशीला दराच्या शतांशानें गुणावें, ह्मणजे किंमत येईल.

उदाहरण २ रें.— ६४५७३१२ लोकांच्या वस्तींत शेंकडा १७ ह्या मानानें शेतकी करणारे लोक किती आहेत ?

$$\text{शे० करणारे} = ६४५७३१२ \times \frac{१७}{१००} = १०९७७४३.०४$$

प्रकार २ रा.— दिलेल्या राशीच्या फलावरून त्याची शेंकडेवारी किंवा शेंकड्याचा दर शोधणे.

उदाहरण ३ रें.— एका माळणीने २ रुपयांचा भार्जीपाला घाऊक खरेदी करून किरकोळीने विकला, त्यावर तिला ॥॥ मिळाले. ही मिळकत शेंकडा कोणत्या दराने पडली ?

२ रु. ख. : १०० रु. ख. : : ॥॥ मि. : उ. मि.

$$उ = \frac{१०० \times ॥॥}{२} = २५ रु. या दराने मिळकत झाली.$$

∴ रीति:— दिलेलें फळ त्याच्या राशीनें मोजून त्याची १०० पट करावी, ह्याणजे ती शेंकड्याचें फल दाखवील.

उदाहरण ४ थें.— एका शहरची वस्ती ३८८५१ पासून ४४५६५ पावेतो गेल्या १० वर्षांत वाढली आहे. ही वाढ दर-शेंकड्यास किती पडली ?

येथें ४४५६५ - ३८८५१ = ५७१४ ही वाढ असून, ३८८५१ हा त्या वाढीचा मूळराशि आहे. ह्याणून,

$$\text{शेंकडा वाढ} = \frac{५७१४}{३८८५१} \times १०० = १४.७०७$$

$$३८८५१) ५७१४००$$

$$१८२८९०$$

$$२७४८६$$

$$२९०$$

$$१८$$

प्रकार ३ रा.— राशीचें फल आणि त्याचा दरशेंकड्याचा दर ह्यापासून तो राशि शोधण्याचा.

उदाहरण ५ वें.— भागीदारांच्या मंडळीला एका वर्षांत २४५७॥१ नफा झाला आहे. हा नफा दरशेंकड्यास ३॥॥ टक्के प्रमाणे विभागला जातो, तर त्या मंडळीचें भांडवल काय आहे ?

येथें ३॥॥ नफा : २४५७॥१ - न : : १०० रु.भां : क्षभां.

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{२४५७.५६२५ \times १००}{३.७५} = \frac{१६३८३७५}{३.७५} = ६५५३५ रु.भां.$$

∴ रीति:— फलाच्या १०० पटीला शेंकड्याच्या दराने भागावे, ह्याणजे मूळराशि येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. का.

१. एका शालेंत प्रतिवर्षीं नेमलेल्या कार्ळीं १२५ चे जागीं १८० मुलें हाजर राहूं लागतात. ही वाढ शेंकडा किती मुलांची होते ?

५६८ पाँ. ६ शि. ८ पे. ह्यांवर शेंकडा १२ $\frac{३}{४}$ प्रमाणें केवढी रक्कम आकारेल ? आणि ह्या आकारलेल्या रकमेवर शेंकडा ११० प्रमाणें केवढी रक्कम आकारेल ?

२. लंदन शहरची लोकसंख्या १८६१ पासून १८७१ पावेतो शेंकडा ३३०११ प्रमाणें घटली असून १८६१ तली लोकसंख्या ११३३८७ होती, तर १८७१ त तेथली लोकसंख्या केवढी असावी ?

३. हदर्सफील्ड नामक शहरची लोकसंख्या १८६१ पासून १८७१ पावेतो शेंकडा १०१०४३ प्रमाणें वाढली असून १८७१ तली येथील लोकसंख्या ७०२५३ होती, तर १८६१ त येथें केवढी लोकसंख्या होती ?

४. कांहीं माल कने ३४५ पाँ. १५ शिलिंगांस खरेदी करून तो त्या खरेदीवर शेंकडा १५ नफा घेऊन खला विकला. खने आपल्या खरेदीवर शेंकडा १५ तोटा सोसून तो माल गला विकला. तर गने ह्याची किंमत काय दिली ?

५. कांहीं माल कने शेंकडा २२॥ नफा घेऊन खला विकला. खने तो ७॥ नफा घेऊन गला विकला. गला ह्या मालाची किंमत २६३ पाँ. ७ शि. ६ पे. पडली तर कने हा केवढ्याला घेतला होता ?

६. ८ तील १ हा शेंकडा किती ह्यणावा ? ७ भाग २४॥ पैकीं हे शेंकडा किती ह्यणावे ? आणि ७५ तले ३७; १६५ तले ४३ $\frac{३}{४}$ व ४६५५ तले ८६९०७५ हे शेंकडा किती किती ह्यणावे ?

७. १ पाँदांत ६ पेन्स ह्यांना शेंकडा काय ह्यणावे ? तसेंच ३ शि. १०॥ पे. १ पाँदापैकीं; व २४ पाँ. ५ शि. १० पे. ह्यांपैकीं २ पाँ. १६ शि. ८ पे.; ह्यांना शेंकडा काय ह्यणावे ?

८. इंग्लंडच्या संयुक्त राज्याची लोकसंख्या तारीख ३ ए-प्रिल १८७१ रोजी भरली ती येणेप्रमाणे.—

इंग्लंड आणि वेल्स....	२२७०४१०८
स्कातलंड.	३५५८६१३
आयर्लंड.	५४०२७५९
आइल आव मान व चानल मधलीं वेटे....					१४४४३०
फौजेंतले, लढाऊ जहाजावरचे, व खलाशी....					२०७१९८

ही प्रत्येक लोकसंख्या ह्या संयुक्त राज्यामध्ये शेंकडा किती लोक दाखविते?

९. इंग्लंड आणि वेल्स येथील लोकसंख्या १८०१ साली ८८९२५३६ होती, १८२१ साली १२०००२३६ होती, १८५१ साली १७९२७६०९ होती, आणि १८७१ साली २२७०४१०८ होती, तर ह्या प्रत्येक कालविभागांत आणि आद्यंतांमधल्या एकंदर कालविभागांत शेंकडा किती किती लोकसंख्या वाढली?

१०. आयर्लंडांतली लोकसंख्या १८५१ साली ६५५१९७० होती, व १८६१ साली ५४०२७५९ होती. ही लोकसंख्या दर १० वर्षांत शेंकडा किती किती घटली तें सांगा.

११. १८७१ साली स्कातलंडची लोकसंख्या ३३५८६१३ होती, आणि तींत पुरुषांची संख्या १६०१६३३ होती. तर लोकसंख्येच्या शेंकड्यास स्त्रिया किती आहेत? आणि स्त्रियांच्या शेंकड्यास पुरुष किती आहेत?

१२. वाण्यानें जर १३ द्रामांनीं कमी वजनाचा पौंड वाळगिला, तर त्याला ह्या लबाडीपासून शेंकडा काय मिळेल?

१३. ३७ भाग चांदी व ३ भाग हीण ह्यांच्या मिश्रणाला नाण्याचें (स्तांदर्द) रुपें ह्णतात. हें नाण्याचें रुपें १ पौंडत्राय घेऊन त्याचे ६६ शिलिंग पाडतात. ह्या रुप्याची किंमत दर औंसस ५ शि. $\frac{३}{४}$ पेन्स असेल तेव्हां शिलिंगाचें नाणें शेंकडा नफा काय दाखवील?

१४. आगत मालाच्या किंमतीवर शेंकडा ८॥॥ प्रमाणें

३८६३८ = जकात जमली आहे. तर देशांत किती किंमतीचा माल आला ?

१५. १३७३३१-११ ह्या कर्जाच्या फेर्डांत सावकार लोकांनी १३०८१ रु. स्वीकारिले, तर त्यांनी शेंकडा सूट किती दिली ?

१६. एका कर्जदाराला शेंकडा ३ सूट मिळाली असतां २१० पौं. ३ शि. ४ पे. द्यावे लागतात. ह्याला शेंकडा ४ सूट मिळाली तर काय द्यावे लागेल ?

१७. एका गृहस्थानें १५० एकरांची शेती ४६२४ पौं-डांस विकत घेतली. त्यांतील इमल्याची व बांधवंधान्याची दुरुस्ती करून ती शेती दर एकरास ३० शिलिंग प्रमाणें सा-न्यानें कुळांना दिला. ह्या खटपटीनें त्याला शेंकडा ४॥ टक्के मिळूं लागले आहेत, तर त्यानें दुरुस्तीकडे केवढी रक्कम खर्चिली ?

१८. एका गंवड्यानें दर चौरस यार्डास १५ शि. ९ पेन्स प्रमाणें अर्धा एकर जमीन घेतली, आणि तिजवर २०९४ पौं. ५ शि. खर्चून इमारत बांधिली. ह्याला खर्चिलेल्या रकमेवर शेंकडा ९ टक्के मिळविण्याची इच्छा आहे, तर त्यानें ह्या इमा-रतीचें सालीना भाडें काय द्यावे ?

१९. एका मनुष्याला शेंकडा ४॥ प्रमाणें व्याजाचें उत्पन्न ३६४ पौं. १० शि. होत आहे, तर त्याचें मुद्दल काय आहे ? ह्या उत्पन्नावर दर पौंडांस ५ पेन्स प्रमाणें प्राप्तीचा कर द्यावा लागतो आहे, तर हा कर देण्याकडे त्यांतलें किती मुद्दल खर्ची पडतें ?

२०. एका वार्षिक उत्पन्नांतून शेंकडा १० प्रमाणें इन्कम-ट्याक्स द्यावा लागला. बाकी राहिलेल्या रकमेतून दरपौंडास २ शि. १॥ पे. प्रमाणें दुसरा कर देतां बाकी २५७४ पौंड राहिली, तर तें वार्षिक उत्पन्न काय आहे ?

२१. भांडवल जमविलेल्या मंडळीच्या नफ्यांतून दरपौंडास ७ पेन्स प्रमाणें इन्कमट्याक्सची रक्कम वजा होते. बाकी रक-मेतून शेंकडा ३ $\frac{१}{४}$ प्रमाणें म्यानेजराला (व्यवस्थापकाला) पगार

मिळतो, ही पगाराची रक्कम ४३६ पौंड १६ शि. ६ पे. होते, तर त्या मंडळीचें मूळचें उत्पन्न काय ?

२२. एक मनुष्य इस्टेटीचा पैसा वसूल करणाराला शेंकडा ५ टक्के देतो. हा आपल्या मिळकतीचा सप्तमांश आयुष्याच्या विम्यावद्दल भरतो, ह्यावर इन्कमट्याक्स पडत नाही; बाकीवर ह्याला दरपौंदास १० पेन्स प्रमाणें ३८ पौंड १९ शि. इन्कमट्याक्स पडतो, तर ह्याचें एकंदर उत्पन्न काय ?

२३. एका मंडळीचें भांडवल ६४८७५ पौं. आहे, व तिचा एकसालचा नफा ५१४३ पौं. ११ शि. ८ पे. आहे. हा नफा पाव टक्क्यापावेतां विभागला तर शेंकडा महत्तम विभाज्य काय आकारेल ? व पुढील सालाची बाकी काय राहिल ?

२४. द्राक्षीनामक मद्यांत शेंकडा ७.५ मीनाची अल्कोहोल आहे. हें मद्य थिजलें तेव्हां वर्फांत अल्कोहोल राहत नाही, हणून त्यांतील वर्फे काढून टाकिलें ह्यामुळें त्या द्राक्षी मद्यांत शेंकडा ८.७५ मीनाची अल्कोहोल आढळली. हें द्राक्षी मद्य मूलारंभीं ५०४ ग्यालन होतें, तर त्यांतून वर्फ्याच्या रूपानें शेंकडा पाणी किती निघालें ?

२५. शिशाच्या खार्णींतून जो खनिज बाहेर काढितात, त्यांत प्रथमतः १५.९ शेंकडा शिसें होतें, हा खनिज धुतला तेव्हां त्यांतून शिशाचा भाग न जातां नुसता दगडाचाच भाग धुपून गेला. ह्यामुळें त्यांत शेंकडा ८७.४५ भाग शिसें आढळलें. हा शिशाचा खनिज प्रथमतः २१६ टन ५ हंड्रेडवेट होता. तर, त्यांतून किती दगड धुपून गेला ?

अडत, दलाली, विमा, व कसर.

अडत.— मालाची खरेदी विक्री करून देणारा अडत्या (इं. एजेंट) ह्याला त्या मालाच्या किंमतीप्रमाणें जो पैसा ठरलेल्या शेंकड्याच्या दरानें द्यावा लागतो, त्याला अडत (इं. कमिशन) हणतात.

दलाली.— ठेवी, बिल्स आव एक्सचेंज (हुंड्या), तारवें,

तारवावरील माल, वगैरेंची खरेदी विक्री करून देणारा जो दलाल (इ. ब्रोकर) त्यास त्या मालाच्या भर किंमतीवर जो पैसा ठरलेल्या शेंकड्याच्या दरानें द्यावा लागतो त्याला दलाली (इ. ब्रोकरेज) म्हणतात.

विमा.— हा नुकसानी भरण्याचा मक्ता आहे. विमा उतरणाराची (देणाराची) अमुक प्रकारची नुकसानी झाली तर ती भरण्यासाठी आपण इतकी रक्कम देऊं असा विमेदार करार करितो, आणि त्याच्या बदला त्या रकमेवर ठरलेल्या शेंकड्याच्या दरानें दरसाल अगर एकदा विमा देणारा विमेदाराला पैसा देतो.

विम्याच्या लेखाला विमेकरार (इ. पालिसी) म्हणतात, आणि त्याच्या बदला विमा देणारा जो पैसा देतो त्याला वर्ताळा (इ. प्रीमियम) म्हणतात.

विम्याचे सामान्य प्रकार आयुष्याचा, अग्नीचा व जलमार्गाचा हे आहेत. ह्यांपैकीं पहिले दोन प्रकारचे विमे घेणाऱ्या मंडळ्या असतात. जलमार्गाचे विमे मंडळ्या घेतात व साधारण लोकही घेतात.

आयुष्याचा विमा.— हा ज्याच्या नांवानें दिलेला असतो त्याच्या मरणावरावर त्यांत लिहिलेली रक्कम त्याच्या वारसाला देऊं असा विमेदाराचा करार असतो. ह्या विम्याचा वर्ताळा बहुतकरून वर्षास देतात.

अग्नीचा विमा.— ह्यांत नोंदलेल्या मालमत्तेचें नोंदलेल्या किंमतीपावेतो अग्नीनें झालेलें नुकसान भरून देण्याचा विमेदाराचा करार असतो. ह्या विम्याचा वर्ताळा बहुधा वर्षास देतात. व त्याचा दर १०० डा ४—॥ पासून ५। रु. पावेतो असतो.

जलमार्गाचा विमा.— ह्यांत नोंदलेल्या तारवाचें, मालाचें, अगर दोहोंचें, नेमलेल्या सफरीत अगर १२ महिन्यांपेक्षां कमी मुदतीत व करारांत नोंदलेल्या किंमतीपावेतो जें नुकसान होईल, तें भरून देण्याचा विमेवाल्याचा करार असतो. ह्या विम्याचा वर्ताळा एकदाच द्यावयाचा असतो.

जलमार्गाचा विमा साधारणतः पुष्कळ मनुष्ये मिळून घेतात, आणि त्यांतील प्रत्येक मनुष्य विमेकराराखालीं आपलें नांव लिहून त्यापुढें आपल्या जबाबदारीची रक्कम मांडतो, ह्मणून जलमार्गाचा विमा घेणारांना खालीं-लिहिणारे (इं. अंदर-रायतर) ह्मणतात.

विमा देणारा किंवा उतरणारा मनुष्य आपल्या मालमत्तेची किंमत, विम्याचा वर्ताळा, व त्या संबंधी खर्च, हें सारें भरून घेतां यावे अशा श्रेतानें विमा देतो तेव्हां त्याला खर्चासुद्धां विमा ह्मणतात.

कसर.— मोठांले व्यापारी हे रोख किंमत देणाऱ्या ग्राहकांना शेंकडा नेमलेल्या दरानें जी सूट देतात तिल्लु कसर ह्मणतात.

कमिशन, दलाली, वगैरे हीं दिलेल्या राशीचीं दिलेल्या शेंकड्याच्या दरानें घेणारीं फलें दाखवितात, ह्मणून त्यांचे हिशेब शतमानगणिताच्या पहिल्या प्रकाराच्या रीतीनें होतात.

उदाहरण १ लें.— एका अडतवाल्यानें ५८३॥≡ रुपयांचा माल विकला आहे, तर १०० डा ३॥॥ रु. प्रमाणें त्यानें किती अडत घ्यावी ?

शतमानगणित रीति १ प्रमाणें.

$\begin{array}{r} ५८३॥\equiv \\ ४-\frac{१}{४} \\ \hline २३३४॥ \\ \frac{३}{४} १४५॥\equiv \\ \hline २१८८॥-१ \end{array}$	$\begin{array}{r} १००) २१८८॥-१०० \\ \hline १६ \\ १४८९॥ \text{ आणे.} \\ \hline ४ \\ ८५ \text{ पाव आणे.} \end{array}$
--	--

∴ २१॥॥=१०० अडत घ्यावी.

उदाहरण २ रें.— एका ३६ वर्षीच्या मनुष्याला रु. घेण्याच्या करारानें आयुष्याचा विमा करणें आहे. याला वर्ताळ्याचा भाव दरसाल दरशेंकडा २८१२८७.२ प्रमाणें आहे, तर वर्ताळ्याबद्दल प्रतिवर्षी काय घावें लागेल ?

रु.	३१२५	१००) ८७'१०'९३७५	१६
	२॥॥॥॥१'२		१६
	६२५०		१७
	१५६२'५		१२
	७८१'२५		९
८॥.	$\frac{१}{८}$	९७'६५६२५	
८८१'२	$\frac{१}{५}$	१९'५३१२५	∴ . . . प्रतिवर्षी देणें.
		८७१०'९३१५	= ८७८१८९

उदाहरण ३. रें.- एका तारवांत ५२७० पाँ. ६ शि. किमतीचा माल आहे. वर्ताळ्याचा दर शेंकडा ५ गिनींप्रमाणें आहे, विमेरोख्याचा कर (मनुति) शेंकडा ४ शिलिंगप्रमाणें आहे, आणि कमिशन शेंकडा $\frac{७}{६}$ पडतें, तर खर्चासुद्धां विमा केवळ्या रकमेचा द्यावा ? आणि वर्ताळा केवळा द्यावा ?

एथें १०० बदल वर्ताळा = ५ पाँ. ५ शि. ० पे.

कर = ० ४ शि. ० पे.

कमिशन = ० ८ शि. ९ पे.

∴ एकंदर विमेखर्च = $\frac{५२७० \text{ पाँ. } ६ \text{ शि. } ० \text{ पे.} + ० \text{ शि. } ४ \text{ पे.} + ० \text{ शि. } ८ \text{ पे. } ९ \text{ पे.}}{१००}$

खाली लिहिणारापासून नुकसान भरून घ्यावें लागलें तर त्याच्या दर शेंकड्यांत ५ पाँ. १७ शि. ९ पेन्स हे विमेखर्चाचे असावयाचे, बाकीचे ९४ पाँ. २ शि. ३ पेन्स हे मालाबद्दल असावयाचे, आणि तो शेंकडा खर्चासुद्धां विम्याची रक्कम असावयाचा. ह्मणून,

९४ पाँ. २ शि. ३ पे. : ५२७० पाँ. ६ शि. = १००

: खर्चासुद्धां विम्याची रक्कम.

तसेंच ९४ पाँ. २ शि. ३ पे. : ५२७० पाँ. ६ शि. = ५ पाँ.

१७ शि. ९ पेन्स : इ. विमेखर्च.

आणि ९४ पाँ. २ शि. ३ पे. : ५२७० पाँ. ६ शि. = ५ पाँ.

५ शि. : इ. वर्ताळा.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. खा.

१. एका घराची किंमत ५५१६॥ रुपये आहे, त्याचा विमा देणें झाल्यास काय द्यावें लागेल? विम्याचा दर, शेंकडा $३\frac{१}{८}$ प्रमाणें आहे.

२. ४२ वे वर्षी कोणाएकास आपले जिवाचा विमा २२८६ रुपयांचा उतरणें आहे, आणि ह्या वयाला विम्याचा दर, शेंकडा ३॥ रुपये आहे. तर त्यास दरसाल काय द्यावें लागेल?

३. ४२७॥— किंमतीच्या मालाचा विमा करणें आहे, परंतु माल भरून देण्याचा प्रसंग आल्यास, विम्याबद्दल भरलेला पैसाही मिळावा, असें मनांत आहे, तर किती रकमेचा विमा करावा? विम्याचा दर, शेंकडा $३\frac{३}{८}$ आहे.

४. २८७॥— किंमतीचा माल घेतला, त्याचा रोख पैसा दिल्यास शेंकडा ५ रुपये कमी होतात, तेव्हां रोख पैसा देणें झाल्यास किती द्यावा?

५. २७३७॥ रुपयांचीं मोल्यें घेतलीं, त्याबद्दल शेंकडा १॥— प्रमाणें दलालीचा आकार काय होईल?

६. शेंकडा $७\frac{३}{४}$ प्रमाणें ७५१२ रुपयांच्या मालाचा विमा उतरणें आहे, परंतु मालाचा नाश वगैरे झाल्यास त्याची किंमत व विम्याबद्दल भरलेला पैसा हीं दोन्ही परत मिळावीं असें आहे, तर विमेखर्चाबद्दल आज किती पैसा भरावा?

७. ३७५० पौंड १६ शि. ८ पेन्स किंमतीचा माल विकण्याबद्दल त्या दुकानदारानें कमिशन काय द्यावें? कमिशनचा भाव शेंकडा $१\frac{३}{४}$ प्रमाणें ठरलेला आहे.

८. एका दलालाच्या मार्फत १५४५ पौंड १७ शि. ६ पेन्स किंमतीच्या प्रामेसरी नोती एका गृहस्थानें विकत घेतल्या आहेत. त्यांबद्दल दलाली काय त्यानें द्यावी? दलालीचा भाव शेंकडा २ शिलिंग ६ पेन्स प्रमाणें आहे.

९. एका ठोक विकरी करणाराचे वहीस पौं. ३५९०१४०९ खातें बाकी निघत आहे. हिजवर शेंकडा २॥— प्रमाणें कसर कापून घेऊन त्यास रोख रकम काय द्यावी?

१०. एका गृहस्थाचीं घरें ३५७० पौंड किंमतीचीं आहेत. ह्यांचा विमा शेंकडा १ शिलिंग ६ पेन्स ह्या साधारण दरानें देणें आहे. ह्याचें दुकान व वखार हीं २८३० पौंड किंमतीचीं आहेत. ह्यांचा विमा शेंकडा २ शिलिंग ६ पेन्स ह्या धोक्याच्या दरानें देणें आहे, तर ह्यांबद्दल वर्ताळा काय आकारेल ?

११. एका जहाजाचें भरताड २५८५ पौंड किंमतीचें आहे, त्याच्या विम्याबद्दल देणें काय पडेल ? वर्ताळ्याचा दर शेंकडा ३५ शिलिंग आहे, विमेरोख्याची मनुति शेंकडा २ शिलिंग आहे, आणि दलाली शेंकडा २ शिलिंग ६ पेन्स प्रमाणें पडत आहे.

१२. एका एजेन्तानें पौंद ७९६५३.१२.६ किंमतीचा माल विकला आहे. ह्यावर त्याला शेंकडा $३\frac{३}{४}$ प्रमाणें कमिशन मिळावयाचें आहे. ह्या कमिशनच्या शेंकड्यास $२२\frac{३}{४}$ प्रमाणें आफिसखर्च होतो, तर त्याला निवळ नफा काय राहिल ? आणि तो माल पुरवणाराला केवढी रक्कम देईल ?

१३. एका दलालानें निळीच्या पांच पेठ्या १८ हंद्रेदवेत ३ क्वार्टर २२ पौंद नक्की वजनाच्या दरपौंदास ५ शि. १० पेन्स ह्या दरानें खरेदी केल्या. ह्या खरेदीवर शेंकडा $\frac{५}{८}$ दरानें दलाली काय मिळेल ?

१४. एका मनुष्यानें ४५ वर्षांच्या वयांत आयुष्याचा विमा प्रत्येकांत ३८५० पौंदांचा ह्याप्रमाणें दोन आफिसांत दिला. विम्याचे दर शेंकडा पौंद ३.१९.१० व पौंद ३.१४.७ प्रमाणें अनुक्रमें आहेत. तर त्याला वर्षास काय घावें लागेल ?

१५. एका व्यापाऱ्यानें पौंद ७९.१५.१० च्या विलांतून पौंद ४.०.०.९ $\frac{३}{४}$ कसर कापून घेतली आहे. ही कसर त्यानें शेंकडा काय दरानें कापून घेतली ?

१६. एका व्यापाऱ्यानें वखार व तींतील माल ह्यांमिळून विमा १२५०० पौंद रकमेचा दिला आहे, ह्यांतील $\frac{३}{४}$ वखारीची रक्कम व $\frac{५}{८}$ मालाची रक्कम आहे. वखारीचा विमा शेंकडा १२ शि. ६ पेन्स दरानें दिला आहे आणि मालाचा विमा शेंकडा २४ शि. ६ पेन्स दरानें दिला आहे, तर वर्ताळा काय आकारेल ?

१७. १५३२५ पाँद किंमतीचे जहाजाचा विमा जरूर पडल्यास खर्चसुद्धां पैसा वसूल करितां यावा अशा बेटानें देणें आहे. वर्ताळा शेंकडा २॥ गिनीप्रमाणें आहे. विमेरोख्याची मनुती शेंकडा ४ शि. प्रमाणें आहे. आणि ब्रोकरेज (दलाली) शेंकडा $\frac{१}{४}$ प्रमाणें आहे. तर ह्या विम्याबद्दल एकंदर खर्च काय येईल ?

१८. एक जहाज व त्यांतील माल मिळून किंमत ३४५७ पाँद, १० शि, ६ पे. आहे. वर्ताळ्याचा दर शेंकडा ४॥ गिनी आहे. रोख्याची मनुती शेंकडा ४ शि. आहे. एजेंताचें कमिशन शेंकडा $\frac{१}{२}$ गिनी आहे. आणि मालाची हानि झाल्यास विमेखर्चसुद्धां पैसा मिळावू असा इरादा आहे. तर विमेखर्च सांगा.

नफातोटा. ०

नफा किंवा तोटा हा त्याच्या निवळ रकमेवरून पहात नाहींत, खरेदीच्या किंमतीच्या संबंधानें पाहतात. उदाहरणार्थ, एक ५ आण्यांच्या खरेदीचा पदार्थ ६ आण्यांस विकला आणि दुसरा १० आण्यांच्या खरेदीचा पदार्थ १५ आण्यांस विकला, तर ह्या प्रत्येक विक्रीमध्ये निवळ नफा एकेक आण्याचाच होतो. तरी पहिल्या विक्रीमध्ये $\frac{१}{५}$ नफा आहे आणि दुसऱ्या विक्रीमध्ये $\frac{१}{३}$ नफा आहे असें ह्मणतात, अथवा पहिल्या विक्रीमध्ये दुप्पट नफा झाला असें ह्मणतात. ह्यावरून लक्षांत येईल कीं कोणत्याही विक्रीमध्ये जो निवळपणें नफा अगर तोटा होतो, तो खरेदीच्या किंमतीचीच कांहीं पट आहे असें कल्पून विचारांत घेतात. पुढील नमुने पहा.

व्यापार करणारे लोक हे कोणत्याही खरेदीची किंमत दाखविण्याला १०० ही संख्या आधारभूत घेऊन दरशेंकड्यास नफा अगर तोटा काय झाला तो पहातात. ह्या प्रमाणाचा नमुना खरेदीची किंमत : तीवरचा नफा किंवा तोटा : : १०० किंमत : शेंकडा नफा किंवा तोटा. (क)

एथें किंमत व नफा अगर तोटा हीं पदे एकाच जातीचीं असतात, ह्मणून प्र. नि. ४ प्रमाणें त्यांमध्ये गुणोत्तरें संभवतात.

वरच्या प्रमाणावरून लक्षांत येईल कीं शेंकडा १५ नफा ह्याचा अर्थ १०० : १५ नफा. हाणजे १०० ही खरेदीची किंमत हटली तर तिचे $\frac{१५}{१००}$ हे नफा दाखवितील. तसेंच शेंकडा ९ तोटा ह्याचा अर्थ १०० ही खरेदीची किंमत हटली तर तिचे $\frac{९}{१००}$ हे तोटा दाखवितील.

व्यापारांत घातलेल्या रकमेवर दरशेंकड्यास नफा काय होतो हेंच व्यापाऱ्याला मुख्यत्वेकरून कळावयाला पाहिजे असतें. हें कळलें हाणजे नफ्याचें मान थोडेंसे वाढविलें असतां अधिक लाभ होईल, का नफ्याचें मान थोडेंसे कमी केलें असतां गिऱ्हाइकी वाढून वरचेवर रक्कम मोकळी होत गेल्यानें अधिक लाभ होईल, हें ठरवितां येतें. कधीं कधीं जुन्या झालेल्या मालाला गिऱ्हाइक झटेनासें होऊन त्या मालामध्ये उगोच पैसा गुंतून राहतो. असें झालें हाणजे तो माल दरशेंकड्यास कांहीं तोटा सोसून विकून टाकतात, आणि तो पैसा अधिक नफा देणाऱ्या मालांत घालून त्यांतल्या कांहीं नफ्यानें तो तोटा भरून काढतात. ह्याप्रमाणें शेंकडा नफा व शेंकडा तोटा ह्या दोन्ही गोष्टी व्यापारी लोकांना विचारणीय होतात.

• दुसरें.— खरेदीची किंमत १०० नीं दाखविली, हाणजे शेंकडा विक्रीची किंमत ही १०० + शेंकडा नफा, किंवा १०० - शेंकडा तोटा, ह्यानें दाखवितां येईल. हाणून नमुना

खरेदीची किं : विक्रीची किं :: १०० : १०० + शेंकडा
नफा किंवा १०० - शेंकडा तोटा. (ख)

तिसरें.— एकाच नमुन्याचा पदार्थ दोन दरांनीं विकला असला, तर त्याचे शेंकडा विक्रीचे दरही दोन येतील. जसे.—

खरेदीची किं : १ ली विक्रीची किं :: १०० : १ ला
शेंकडा वि. दर.

व खरेदीची किं : २ री विक्रीची किं :: १०० : २ रा
शेंकडा वि. दर.

ह्या दोन प्रमाणांत १ लीं पदें व ३ रीं पदें एकच आहेत,

हणून २ रीं पदें व ४ थीं पदें हीं प्रमाणांत असलीं पाहिजेत.
हणून प्रमाणाचा नमुना.

१ली विक्रीची किं : २ री विक्रीची किं :: १ला शेंकडा

विक्रीचा दर : २रा शेंकडा विक्रीचा दर. (ग)

वरच्या तीन प्रमाणांच्या साहाय्याने नफ्यातोऱ्यासंबंधी एकंदर प्रश्न सोडवितां येतात.

उदाहरण १ लें.— कलावतु १॥ रुपयास तोळा प्रमाणें ३६ रुपयांची घेतली, आणि ती १॥ रुपयांस तोळाप्रमाणें विकली, तर शेंकडा नफा काय पडला ?

एथें १॥ रुपयावर १० नफा होत आहे, हणून नमुना क प्रमाणें.

१॥ रु. : १० न. :: १००० रु. : शेंकडा नफा.

∴ शेंकडा नफा = १००० रु. × $\frac{१०}{१०००}$ = १०० रु. × $\frac{१}{१०}$.

= १६॥२.

उदाहरण २ रें.— पोलाद १०२ शेर ह्याप्रमाणें घेतलें, आणि शेंकडा ५ रु. सोऱ्याने विकलें, तर दरशेरास विक्रीचा भाव काय ?

शेंकडा ५ रु. तोटा ह्याचा अर्थ खरेदीची किंमत १०० नीं दाखविली तर विक्रीची किंमत १०० - ५ ह्यांनीं किंवा ९५ नीं दाखविली जाईल हणून नमुना ख प्रमाणें.

१०२ : विक्रीचा दर = १०० : ९५.

∴ विक्रीचा दर = १०२ × $\frac{९५}{१००}$ = $\frac{२१६६}{२०}$ = १०८३.

अथवा खरेदीचा दर = १०२.

शेंकडा ५ हणजे किंमतीचा $\frac{१}{२०}$ तोटा = $\frac{१०२}{२०}$.

∴ विक्रीचा दर = १०८३.

उ. ३ रें.— १२५ वार कापड ९५ रुपयांस विकलें तर शेंकडा ५ रु. नफा होतो, तर त्या कापडाची खरेदीची किंमत काय ?

एथें १०५ रुपयांत १०० रुपये खरेदीचे आहेत ह्यागून नमुना ख प्रमाणें.

$$१०५ \text{ रु. वि.} : १०० \text{ रु. ख.} = ९५ \text{ रु. वि.} : \text{य रु. ख.}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{९५ \text{ रु.} \times \frac{१००}{१०५}}{१} = \frac{९९०० \text{ रु.}}{१०५} = ९०४७४७.$$

उ. ४ थें.- कापड १०४ वार प्रमाणें विकल्यास शेंकडा ४ रु. तोटा होतो तर तें शेंकडा १० रु. नफा होण्यासाठीं कोणते दरानें विकारें ?

ह्या उदाहरणांत १ लें शेंकडा विक्रीचें उत्पन्न १०० - ४ किंवा ९६ रु. आहे, आणि २ रें शें. वि.चें उत्पन्न १०० + १० किंवा ११० रु. आहे ह्यागून नमुना ख प्रमाणें.

$$९६ \text{ रु. उ.} : ११० \text{ रु. उ.} = १०४ \text{ दर} : २ \text{ रे विक्रीचा दर.}$$

$$\therefore २ \text{ रे वि. दर.} = \frac{१०४ \times ११०}{९६} = \frac{२२०५०}{९६} \text{ आणे.}$$

$$= २२ \text{ आ. } ११ \text{ पै.} = १०६०११. \text{ हें उ.}$$

उ. ५ वें.- एक घड्याळ ३४ पौं. १० शि. विकलें तर शेंकडा ८ तोटा होतो, तर तें ३८ पौंदांस विकलें असतां शेंकडा नफा अगर तोटा काय होईल ?

ह्यांत १ ला विक्रीचा दर ३४ $\frac{१०}{१००}$ पौं. व २ रा विक्रीचा दर ३८ पौं. आहे आणि १ लें शेंकडा विक्रीचें उत्पन्न १०० - ८ = ९२ पौं. आहे ह्यागून प्र. ग अन्वये.

$$३४\frac{१०}{१००} \text{ द.} : ३८ \text{ द.} = ९२ \text{ रु. शें. उ.} : २ \text{ रें शें. उ.}$$

$$\therefore २ \text{ रें शें. उ.} = ९२ \times \frac{३८}{३४\frac{१०}{१००}} = \frac{९२ \times ७६}{३४} = \frac{३०४}{३}$$

$$= १०१\frac{१}{३}.$$

$$\therefore \text{शेंकडा नफा} = १\frac{१}{३}.$$

उ. ६ वें.- ५ पौं. ५ शि. ६ पे. ह्यांस १ हंड्रेडवेट प्रमाणें लोणी विकलें तर शेंकडा ५ $\frac{५}{१००}$ नफा होतो, तर १ शि. ३ पे. ह्यांस १ पौंद प्रमाणें लोणी विकलें तर शेंकडा नफा काय होईल ?

दुसऱ्या दराच्या दर हंड्रेडवेटाची विक्रीची किंमत
 = ११२ × १। शि. = ७ पौंद, हणून ग प्रमाणा अन्वये.
 ५ पौ. ५ शि. ६ पे : ७ पौ = १०५ $\frac{१}{३}$: १०० + शेंकडा नफा.
 $\therefore १०० + \text{शेंकडा नफा} = \frac{२११}{२} \times \frac{\frac{७}{११}}{\frac{१०५}{४०}} = \frac{२११}{२} \times \frac{७ \times ४०}{२११}$
 = १४०

\therefore शेंकडा नफा = ४०

उ. ७ वें.— एकू व्यापाऱ्यानें अठरा अठरा टांचण्यांच्या रांगांचे कांहीं कागद खरेदी केले आणि ते अकरा अकरा टांचण्यांच्या रांगांचे करून घेतल्या दरानें विकले तर त्याला शेंकडा नफा काय होईल.

येथें १८ च्या रांगांची खरेदी असून ११ च्या रांगांची विक्री आहे हणून खरेदी विक्रीच्या किंमती ह्या संख्यांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतात जशा.—

खरेदीची किं. : विक्रीची किं. : : ११ : १८.

परंतु खरेदीची किं. : विक्रीची किं. : : १०० : शें. वि. किं.

$\therefore ११ : १८ : : १०० : \text{शें. वि. किं.}$

\therefore शेंकडा वि. किं. = $\frac{१८ \times १००}{११} = १६३\frac{७}{११}$

\therefore शेंकडा नफा = $६३\frac{७}{११}$ हें उत्तर.

उ. ८ वें.— एका व्यापाऱ्यानें १२६० क्वार्टर धान्य खरेदी केले. त्यापैकी एक पंचमांश धान्य शेंकडा ५ नफ्यानें विकले, एक तृतीयांश धान्य शेंकडा ८ नफ्यानें विकले, आणि बाकीचें धान्य शेंकडा १२ नफ्यानें विकले. हें सगळें धान्य शेंकडा १० नफ्यानें विकले असतें, तर त्याला २३ पौ. १३ शि. जास्त मिळाले असतें. ह्यावरून दरक्वार्टरास खरेदीची किंमत काय होती ?

१२६० क्वा. चा. $\frac{१}{३} = २५२$ क्वा., १२६० क्वा. चा. $\frac{१}{३} = ४२०$ क्वा.

हणून बाकीचें धान्य = ५८८ क्वार्टर.

शेंकडा ५ प्रमाणें २५२ क्वा. वरचा नफा = २५२ क्वा. चे $\frac{५}{१००}$
 खरेदीचे दरानें.

∴ वास्तविक नफा =

$$= २५२ \text{ का.चे } \frac{५}{१००} + ४२० \text{ का.चे } \frac{५}{१००} \\ + ५८८ \text{ का.चे } \frac{३२}{१००} \\ = १२६० \text{ का.} + \frac{३३६०}{१००} \text{ का.} + \frac{७०५६}{१००} \text{ का.} \\ = \frac{११६७६}{१००} \text{ का.} = ११६\frac{७६}{१००} \text{ का. खरेदीचे दराने}$$

व कल्पित नफा = १२६० का.चे $\frac{१}{१००}$ = १२६ क्वार्टर.

दोन नफ्यांचें अंतर = $९\frac{६}{१००}$ का.

$९\frac{६}{१००}$ का.ची खरेदीची किं. = २३ पै. १३ शि. = ४७३ शि.

$$\therefore १ \text{ का.ची खरेदीची किं.} = \frac{४७३ \text{ शि.}}{९\frac{६}{१००}} = \frac{४७३}{२३} \times २५ \text{ शि.} \\ = \frac{१०७५}{२३} \text{ शि.} = २पै. ११शि. \\ २\frac{१}{४} \text{ पे. } \frac{१}{४}$$

अभ्यासाकरिता उदाहरणें. गा.

१. दरमणी ५॥ रुपयेप्रमाणें बदाम घेतले, तर ते कोणते दरानें विकले ह्मणजे शेंकडा २० प्रमाणें नफा होईल ?

२. तांदूळ एक पल्ल्यास आठ रुपयेप्रमाणें घेतले, आणि ९ रुपयांनीं पल्ला विकले, तर शेंकडा नफा काय होईल ?

३. जमिनीपासून लोखंड काढण्यास दरमणी ४ रुपये खर्च लागतो; तर तें लोखंड ४ रुपये १० आण्यांनीं मण विकल्यास दर शेंकडा किती नफा होईल ?

४. एका दुकानदारानें साखर दरमणी १०॥ प्रमाणें विकली तींत त्यास शेंकडा १२॥ रुपये नफा झाला; तेव्हां खरेदीचा दर काय तो सांगा.

५. एके गृहस्थाचा एका तारवांत $\frac{१}{१०}$ विभाग आहे; त्या तारवाची किंमत ६६००० रुपये आहे, आणि त्याचा विमा शेंकडा ९१ रुपयेप्रमाणें दिला आहे. आतां हें तारुं जर फुटलें किंवा दुसऱ्या कांहीं कारणानें त्याचा नाश झाला, तर त्या गृहस्थास बूड काय येईल ?

६. कोणी ग्रंथकारानें एका ग्रंथाच्या ५०० प्रती छापून त्या दरप्रतीस २॥ रुपयेप्रमाणें विकल्या; त्यांत त्यास ३७७॥ रुपये

नफा झाला, व विकण्यावद्द कमिशन ३४ रुपये द्यावे लागले. तेव्हां प्रती छापण्यास खर्च काय लागला तो सांगा.

७. कोणीएकाने तांदूळ दरपल्ल्यास ८॥२ प्रमाणे विकले, त्यांत त्यास शेंकडा ५॥ रुपये नफा झाला. आतां ते जर त्यानें दोन आण्यांनीं शेर विकले असते तर शेंकडा नफा किती झाला असता ?

८. दररुपयास ८८२॥ व ८८३ ह्या दोन् दरान्चें सारख्या किंमतीचें तूप एकत्र करून तें दररुपयास ८८२॥९ प्रमाणे विकलें; तेव्हां त्यास शेंकडे नफा काय झाला ?

९. दोन आण्यांनीं शेर व तीस आण्यांनीं शेर ह्या दोन प्रतींच्या साखरांपैकीं पहिली ५ शेर व दुसरी ८ शेर घेऊन एकत्र करून तें मिश्रण २॥ आण्यांनीं शेर स्विकलें, तर शेंकडा तोटा काय होईल ?

१०. एका गृहस्थानें कागदांचीं ५० रिमें खरेदी केलीं, आणि त्यांवर शेंकडा ८ रुपये नफा व्हावा, ह्या हेतूनें प्रत्येक रिम ११॥ रुपयांस विकण्याचा ब्रेत केला. परंतु पुढें पाहतो तों त्यांतून ५ रिमें अगदीं खराब निघालीं. तेव्हां तीं खेरीज करून बाकीचीं रिमें त्यानें ११॥ रुपयेप्रमाणें विकलीं, तेव्हां त्यास नफा किंवा तोटा किती झाला तें सांगा.

११. एका बोहऱ्यानें टांचण्यांचे १५० कागद २॥॥ रुपये कोडीप्रमाणें घेतले, त्या वेळेस प्रत्येक कागदावर दरओळींत १८ टांचण्यांप्रमाणें ७ ओळी होत्या; नंतर त्यानें प्रत्येक ओळींत ११ टांचण्या ठेवून ते सर्व कागद घेतलेल्या किंमतीस विकले, तेव्हां त्यास दरशेंकडा नफा काय झाला तें सांगा.

१२. एका व्यापाऱ्यानें बाजरीच्या ४ गाड्या १५० रुपयांस खरेदी केल्या आणि मुदलावर शेंकडा १२ रुपये नफा व्हावा अशा ब्रेतानें ती बाजरी तो विकणार होता, परंतु पुढें त्यास आढळलें कीं, २१ रुपयांची बाजरी अगदीं खराब झाली, तेव्हां ती खेरीज करून बाकीचे बाजरीवर वरच्या दरानें नफा किती होईल ?

१३. एका गृहस्थानें ४० पौंदांस कांहीं माल घेऊन त्यांतला निम्में माल शेंकडा ५ नफ्यानें विकला आहे. ह्या एकंदर मालावर शेंकडा २० टक्के नफा होण्यासाठीं राहिलेला माल केवढ्याला विकावा ?

१४. प्रत्येक पदार्थ ६ शिलिंग ९ पेन्सांस विकला असतां शेंकडा १७ टक्के नफा होतो तर त्याची किंमत $४\frac{१}{३}$ पेन्स कमी केली असतां नफा काय होईल ?

१५. १०० पौंद चहा २ शिलिंग २ पेन्सांस पौंद प्रमाणें घेऊन २ शिलिंग ६ पेन्सांस पौंद प्रमाणें विकला. आणि १०० पौंद साखर $४\frac{१}{४}$ पेन्सांस पौंद प्रमाणें घेऊन $५\frac{३}{४}$ पेन्सांस पौंद प्रमाणें विकली तर ह्या व्यापारांत शेंकडा नफा काय होईल ?

१६. एका घट्टगारानें २५० मेंढ्या विकत घेऊन त्या ५३२ पौंड ५ शिलिंग १० पेन्सांस विकल्यानें त्याला शेंकडा $१६\frac{२}{३}$ नफा झाला ह्यावरून प्रत्येक मेंढीची खरेदीची किंमत काय ?

१७. एका शिष्यानें ३६७२ वार कापड ३ शि. २ पे. नीं वारप्रमाणें घेतलें. ह्यांतील $\frac{१}{३}$ कापड ३ शि. ६ पेन्सांनीं वारप्रमाणें विकलें. बाकींतील $\frac{१}{२}$ कापड ३ शि. ११ पेन्सांनीं वारप्रमाणें विकलें. एकंदरींत शेंकडा १२॥ टक्के नफा होण्यासाठीं त्यानें राहिलेलें कापड कोणत्या दरानें विकलें ?

१८. जडकामाचें सोनें १ पौंद घेतलें, तर त्याला पौं. ३६ . ७ . ६ पडतात. ह्या सोन्याची २९ पेनिवेट, ८ ग्रेन वजनाची सांखळी केली. तिची घडाई पौं. ४ . १० द्यावी लागली. ही सांखळी केवढ्याला विकावी ह्मणजे शेंकडा ३७॥ नफा होईल ?

१९. एका दाणेवाल्यानें २५० बुशेल गहूं ६ शि. ८ पेन्सांस बुशेलप्रमाणें विकला. ह्या विक्रींत त्याला शेंकडा ७॥ टक्के तोटा झाला; ह्मणून १५० बुशेल गहूं शेंकडा १२॥ नफ्यानें विकला तर त्याला ह्या विक्रींत नफा काय झाला. व एकंदरींत नफा काय झाला ?

२०. एका काळीनें २ शि. ११ पेन्सांस बुशेलप्रमाणें ६ पौं. २ शि. ६ पेन्सांचे सफरचंद घेतले; ह्यांतील कांहीं माल खराब

झाला तरी वाकीचा माल शेंकडा ३० नफ्याने विकला तेव्हां ६ पौं. १६ शि. ६ पेन्स उत्पन्न झाले. तर किती बुशेल सफरचंद खराब झाले असावे ?

२१. एका व्यापाऱ्याने ३१५० यार्ड कापड घेतले होते. ह्यांतील $\frac{2}{3}$ शेंकडा ६ नफ्याने विकले, $\frac{1}{3}$ शेंकडा ८ नफ्याने विकले, $\frac{1}{6}$ शेंकडा १२ नफ्याने विकले, आणि वाकीचे शेंकडा ३ तोऱ्याने देऊन टाकले. याचे एकंदर कापड शेंकडा ५ नफ्याने विकले असते, तर त्याला हल्लीपेक्षा १२ पौं. १ शि. ६ पेन्स अधिक मिळाले असते; तर ह्या कापडाची खरेदीची किंमत दरयार्दास काय होती ? ०

२२. एक गुत्तेवाला रम नामक दारू १५ शिलिंगांस १ ग्यालन घेऊन तींत १ क्वार्ट पाणी मिसळवो, आणि ती १६ शिलिंगांस ग्यालनप्रमाणे विकतो; आणि तो ब्रांडी नामक दारू २२ शिलिंगांस १ ग्यालन घेऊन तींत ३ पिंट पाणी मिळवितो, आणि ती २३ शिलिंगांस ग्यालनप्रमाणे विकतो; व तो जीन नामक दारू ११ शिलिंगांस १ ग्यालन घेऊन तींत २॥ पिंट पाणी मिळवितो, आणि ती १२ शिलिंगांस ग्यालन प्रमाणे विकतो. ह्या गुत्त्यांत जीनच्या २ पट रम खपते, आणि ब्रांडीच्या २ जीन खपते, तर त्याला शेंकडा नफा काय होतो ?

२३. एका व्यापाऱ्याने कांहीं पैशांना एल प्रमाणे कापड घेऊन तितक्याच पैशांनी यार्ड प्रमाणे ते कापड विकले तर त्याला शेंकडा नफा काय होईल ? तसेच त्याने कांहीं पैशांनी यार्ड प्रमाणे कापड घेऊन ते तितक्याच पैशांनी एल प्रमाणे विकले, तर त्याला शेंकडा तोटा काय होईल ?

२४. एका मनुष्याने ७२ यार्ड कापड ८ पौंद १४ शिलिंगांस विकले तेव्हां त्याला ११०५२ यार्दांच्या किंमतीइतका नफा झाला. तर त्याला शेंकडा नफा काय झाला ?

२५. जर व्यापाऱ्याने खरेदीवर शेंकडा २५ प्रमाणे अधिक किंमत ठेविली. आणि त्याने आपल्या ग्राहकांना शेंकडा १२ टके प्रमाणे कसर कापून दिली; तर त्याला नफा काय होईल ?

२६. एक घड्याळ २५ गिनींला घेतलें आहे. हें घड्याळ केवढ्याला विकावें, हणजे ग्राहकाला शेंकडा २॥ टक्के कसर देऊन विकणाराला शेंकडा ३० टक्के नफा होईल ?

२७. एक रेशमी कापड दर्यादास १४ शि. ५॥ पेन्स प्रमाणें घेतलें आहे. हें दर्यादास काय किंमतीला विकलें, तर शेंकडा १७॥ टक्के नफा होऊन त्याच्या ग्राहकाला शेंकडा ३॥ टक्के कसर कापून देतां येईल ?

२८. दरपांदास १ शि. ८ पेन्स, आणि २ शि. १ पे. या दरांचा चहा ५ : २ याप्रमाणानें मिश्र केला आहे. हा मिश्र चहा कसा पाँद विकावा, हणजे मूळ खरेदीवर शेंकडा ३३ टक्के नफा होईल ?

२९. एका व्यापाऱ्यानें दर हंद्रेदवेतास ८ पाँ. १० शि. प्रमाणें काफी आणि २ पाँ. १० शि. प्रमाणें चिकोरी घेतली आहे. ह्यांतील ५ भाग चिकोरीशीं ७ भाग काफी मिसळून तें मिश्र कसा पाँद विकावें हणजे मूळ खरेदीवर शेंकडा १६ $\frac{२}{३}$ प्रमाणें नफा होईल ?

३०. ६ शि. ६ पे. दराच्या ४ पाँ. तमाखूत ५ शि. ८ पे. दराचा किती पाँ. तमाखू मिळविला तर तें मिश्रण ७ शि. १० पे. दरानें विकून त्यास शेंकडा ३३ $\frac{१}{३}$ प्रमाणें नफा करितां येईल.

३१. ३ शि. व २ शि. दरांचे चहा किती किती पाँद मिसळले तर तें मिश्रण २ शि. ७॥ पेन्सांस पाँ. प्रमाणें विकून त्यास शेंकडा २० टक्के नफा होईल ?

३२. एका कलालानें २८ शिलिंगांस ग्यालन प्रमाणें कांहीं द्राक्षी, ४२ शिलिंगांस ग्यालन प्रमाणें कांहीं ब्रांडीशीं मिसळली आहे. हें मिश्रण ३५ शिलिंगांस ग्यालन प्रमाणें विकलें, तर त्या द्राक्षीच्या किंमतीवर शेंकडा १५ नफा होतो, आणि ब्रांडीच्या किंमतीवर शेंकडा २० नफा होतो; तर द्राक्षी व ब्रांडी या कोणत्या प्रमाणांत मिसळल्या होत्या ?

३३. कोणी द्राक्षी मद्याचा व्यापारी २ प्रकारच्या द्राक्षी कांहीं प्रमाणानें एकत्र करून तें मिश्र मूळ खरेदीवर शेंकडा ८

नफ्यानं विकृतो आहे; ह्यानं प्रत्येक प्रकारची द्राक्षी मिश्राच्याच दरानं ग्यालन प्रमाणें विकली असती, तर त्याला त्यांच्या खरे-दींवर शेंकडा १० व ६ प्रमाणें नफा झाला असता; ह्यावरून तो ह्या दोन प्रकारच्या द्राक्षी कोणत्या प्रमाणानं एकत्र करितो ?

व्याज.

दुसऱ्याच्या मालकीचें द्रव्य परत करण्याच्या कबुलातीनं त्या-पासून कोणी वापरण्याला घेतो, तेव्हां त्या द्रव्याला ऋण किंवा कर्ज हणतात, तें घेणाराला ऋणको किंवा कर्जदार हणतात, आणि तें देणाराला धनको किंवा सावकार हणतात.

कर्ज घेतलेलें द्रव्य परत होईपर्यंतच्या त्याच्या उपयोगाबद्दल जी ठरविलेली वाढ कर्जदारानं सावकाराला द्यावी लागते तिला व्याज हणतात.

कर्ज घेतलेल्या द्रव्याला मुद्दल हणतात.

मुद्दल कर्जदाराच्या उपयोगांत राहिल्याचा जो विचारणीय काळ त्याच्या संख्येला काळमानं किंवा मुदती हणतात.

मुदलांतील दरशेंकड्यास दरमुदतीस (प्रत्येक काळमानास) जें व्याज पडतें त्याला व्याजाचा दर हणतात.

दरशेंकड्यास दरमहिन्यास जें व्याज पडतें त्याला विशेषे करून मिती हणतात तरी केव्हां केव्हां दरही हणतात.

मुद्दल आणि व्याज मिळून जी रक्कम होते तिला रास किंवा गांशि हणतात.

व्याजाचे प्रकार सरळव्याज आणि चक्रवाढव्याज असे दोन आहेत.

सरळव्याज.

जें व्याज एकंदर मुदतीपावेतों मुदलावरच आकारलें जातें, त्या मुदतींतील प्रत्येक काळमानाच्या व्याजावर आकारलें जात नाहीं, त्याला सरळव्याज हणतात.

व्याजाच्या प्रत्येक प्रश्नांत मुद्दल, मुदती किंवा काळमानं, व्याजाचा दर, आणि व्याज, ह्या चार गोष्टींचा संबंध असतो.

ह्या चोहोंपैकीं कौणत्याही तीन गोष्टींपासून चवथी काढतां येते, ह्मणून ह्या उदाहरणांचे मुख्य प्रकार चार होतात.

प्रकार १ ला.— मुद्दल, मुदती, व दर, ह्यांपासून व्याज किंवा राशि काढावयाचा.

उदाहरण १ लें.—दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याज ह्या दरानें ७२५ रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज व राशि काय होईल ?

ह्या उदाहरणाचें रूप असें आहे कीं, १ वर्षांस शंभर रुपयांस ५ रुपये व्याज, तर ३ वर्षांस ७२५ रुपयांस किती व्याज ?

$$\left. \begin{array}{l} १ वर्षां का. : ३ वर्षां का. \\ १०० रु. मु. : ७२५ रु. मु. \end{array} \right\} = ५ रु. व्या. : काय व्या.$$

व्याजाची वाढ कालमानांच्या समप्रमाणांत व मुदलाच्याही समप्रमाणांत व्हावयाची. ह्मणून.—

$$\begin{aligned} \text{काय व्या.} &= ५ रु. व्या. \times \frac{७२५}{१००} \times ३ = १०८.७५ रु. \\ &= १०८ रु. १२ आ. \\ &\text{हैं पहिलें उत्तर.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{व राशि} &= ७२५ रु. मुद्दल + १०८ रु. १२ आ. \\ &= ८३३ रु. १२ आ. \quad \text{हैं दुसरें उत्तर.} \end{aligned}$$

सूचना १ ली.— वरच्या बहुराशिकांतलें प्रथम १ लें त्रैराशिक करून नंतर दुसरें त्रैराशिक करावें ह्मणजे व्याज आकारण्याचा १ ला समंजस क्रम दिसून येतो, जसा.—

क्रम १ ला.— दर व मुदत ह्यांचा गुणाकार करावा ह्मणजे १०० रुपयांचें त्या मुदतीचें व्याज येतें. नंतर तें व्याज मुदलानें गुणून १०० नें भागावें ह्मणजे त्या मुदलाचें त्या मुदतीचें व्याज येतें.

पुनः प्रथम दुसरें त्रैराशिक करून नंतर पहिलें त्रैराशिक करावें ह्मणजे व्याज आकारण्याचा २ रा समंजस क्रम दिसून येतो, जसा.—

क्रम २ रा.— दर व मुद्दल ह्यांचा गुणाकार करून तो शंभरानें भागावा ह्मणजे त्या मुदलाचें १ कालमानाचें व्याज

येतें. नंतर तें व्याज मुदतींनां गुणावें हणजे त्या मुदलाचें त्या मुदतीचें व्याज येतें.

सावकारलोक बहुराशिकें अगर त्रैराशिकें मांडीत नाहींत वर दिलेल्या कोणत्याही समजस क्रमानें व्याजाची आकारणी करितात.

उदाहरण २ रें.— दरसाल दरशेंकडा २। रु. व्याज पडतें, तर २१२॥— चे २॥ वर्षांचें व्याज काय ?

२॥॥ मुदत.	६०॥
२। दर.	२१२॥—
५॥	१२७५॥=.
॥॥ { शंभरांचें २॥॥	२६॥—
६०॥ { मुदतीचें व्याज. १००)	१३१०॥

१००) १३१५०॥ (१३०॥) हें उ.

उदाहरण ३ रें.— ३२५॥ रुपयांचें व्याज ता. २३ दिसेंबर सन १८८४ पासून ता. २६ मार्च सन १८८७ पावेतो दोन्ही तारखा धरून किती येईल ? व्याजाचा दर दरसाल दरशेंकडा ४ रुपये आहे.

ता. २३ दि. १८८४ पासून ता. २२ दिसेंबर सन १८८७ पावेतो दोन्ही तारखा धरतां वर्षें तीन होतात. पुढील दिवस

१८८७ दि. ९	३२५.५ रु.
१८८८ जाने. ३१	४ दर.
फेब्रु. २९	१०० १३०२.०
मार्च २६	९५

∴ मुदलाचें १ वर्षांचें व्याज = १३०२ रु.

∴ मुदलाचें १ दिवसाचें व्याज = $\frac{१३०२}{३६५}$

व मुदलाचे ९५ दिवसांचें व्याज = $\frac{१३०२ रु \times ९५}{३६५}$

$$= \frac{२४७.३८६}{७३}$$

$$= ३.३९ \text{ रुपये}$$

आणि मुदलाचें ३ वर्षांचें व्याज = १३.०२ रु. × ३.
= ३९.०६ रु.

∴ एकंदर व्याज = ४२.४५ रु. = ४२ रु. ७ आ. २ पै
हैं उत्तर.

रीति.— मुद्दल, मुदती व दर ह्यांना गुणाकार एका मु-
दतीच्या १०० ^{ह्या मुदतीने} स्वर्णांनी भागवा, ह्यणजे व्याज येते.

एथें मुद्दल = म, मुदती किंवा कालमाने = क, दर = द,
व्याज = व्य, आणि राशि = र हे सूचकवर्ण घेतले तर वरील
रीति सामान्य पद्धतींनी थोडक्यांत दाखवितां येतात. जशा.—

$$\text{व्य} = \frac{\text{म. क. द}}{१००} \dots \dots \dots १$$

$$\text{आणि र} = \text{म} + \frac{\text{म. क. द}}{१००} \dots \dots \dots २$$

१ ल्या पद्धतीला स. प्र. ४ व ५ प्रमाणें गुणक भाजक घेऊन
तींतील प्रत्येक वर्णावरोवर किंमती काढाव्या ह्यणजे सरळव्या-
जाच्या सर्व प्रकारच्या रीति हिनें दाखविल्या जातात. जशा.—

$$\text{म} = \frac{१०० \text{ व्य}}{\text{क. द}} \dots \dots \dots ३$$

$$\text{क} = \frac{१०० \text{ व्य}}{\text{म. द}} \dots \dots \dots ४$$

$$\text{आणि द} = \frac{१०० \text{ व्य}}{\text{म. क}} \dots \dots \dots ५$$

उदाहरण ४ थें.— २४० पौं. १२ शि. ६ पे. ह्यांचें दर-
साल दरशेंकडा २॥ प्रमाणें ८॥॥ वर्षांचें व्याज काय ?

पद्धतिप्रमाणें विविधांत.

दशांशांत.

पौं. शि. पे. फा.				पौं.	
२४०	१२	६	० म.	२४०	६२५
	.	२५.	द.		२ $\frac{१}{२}$
<hr/>				<hr/>	
४८१	५	०	.	४८१	२५०
१२०	६	३		१२०	३१२५
<hr/>				<hr/>	
६०१	११	३		६०१	५६२५
	९ $\frac{१}{४}$		क.		९ $\frac{१}{४}$
<hr/>				<hr/>	
५४१४	१	३	०.	५४१४	०६२५
- १५०	८	९ $\frac{३}{४}$		- १५०	३९०६
<hr/>				<hr/>	
१००)५२'६३	१३	५ $\frac{१}{४}$		१००)५२'६३	६७१९
	२०				२०
<hr/>				<hr/>	
१२'७३	शि.			१२'७३४३८०	शि.
	१२				१२
<hr/>				<hr/>	
८'८१ $\frac{३}{४}$	पे.			८'८१२५६०	पे.
	४				४
<hr/>				<hr/>	
३'२५	फा.			३'२५०२४०	फा.

हणून ५२ पौं. १२ शि. ८ $\frac{३}{४}$ पे. हें उत्तर.

वर दर्शविलेले म द क आणि १०० ह्यांचे गुणाकार व भागाकार हे पद्धति १ मधें किंमती ठेविल्याप्रमाणेंच झाले आहेत हें तपासून पहा. संख्या लहान असल्या तरच हें कृत्य आडव्या मांडणीनें करितात.

सूचना २ री.— मुदतीचे जागीं महिने व दिवस मोघम (नांवावांचून) दिलेले असले तर एका मुदतीचे जागीं एका वर्षाचे महिने १२ व एका महिन्याचे दिवस ३० धरून त्या भागाप्रमाणें उत्तर काढतात.

उदाहरण ५ वें— ५१२ रु. १३ आ. ४ पै. ह्यांचें शें-कडा ४ $\frac{३}{४}$ रुपये दरानें ३ वर्षें ७ महिने २१ दिवसांचें व्याज काय ?

प. १. प्र. विविधांत.

रु. आ. पै.

म.	५१२	१३	४
द.		४	रु.
१०००	२०५१	५	४
१००	२५६	६	८
१०	६४	१	८
क.	२३७१	१३	८
			३ वर्ष
६ म.	७११५	९	०
१ म.	११८५	१४	१०
१५ दि.	१९७	१०	५
६ दि.	९८	१३	२
	३	८	५
	१००१	८६	३७
			८०
			१६

६०० . . आ.

दशांशांत.

रु.

५१२	८३३३
	४
२०५१	३३३३
२५६	४१६६
६४	१०४१
२३७१	८५४०
	३ व.
७११५	५६२०
११८५	९२७०
१९७	६५४५
९८	८२७२
३	५३०९
१००१	८६
	३७
	५०१६
	१६

६०००२५६आ.

हणून ८६ रु. ६ आ. ० पै हें उत्तर.

सूचना ३ री.- मुदत आठवड्यांत दिली असली तर एका मुदतीच्या जागी ५२ आठवडेच घेऊन ५२०० नां भागितात.

उदाहरण ६ वें.- दरसाल दरशेंकडा ४^१/_२ टक्के प्रमाणें ३२०॥=॥ चें १७ आठवड्यांचें व्याज काढा.

$$३२०॥=॥$$

$$४॥$$

$$१२८३॥=$$

$$१६०॥=॥$$

$$१४४४८=॥$$

$$१७$$

$$५२ \left\{ \begin{array}{l} १३ \\ ४ \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} २४५५०॥= \\ १८८८॥ \end{array} \right.$$

$$१०० | ४^{\circ} ७२^{\circ} =$$

$$४$$

$$२' ८८ पा.$$

$$४$$

$$३' ५४ आ.$$

$$४$$

$$२.१६ पा.आ.$$

हणून ४॥=॥ हें उत्तर.

सूचना ४ थी.— मुदत दिवसांत दिली असली तर मुद्दल मुदतीचे दिवस व दर ह्यांच्या गुणाकाराला ३६५०० नीं भागावें अथवा मुद्दल मुदतीचे दिवस व दराची दुप्पट ह्यांच्या गुणाकाराला ७३००० नीं भागावें.

एथें गुणाकार हा भाज्य, व ७३००० हा भाजक ह्या दोहोंच्याही $१ + \frac{१}{३} + \frac{१}{३०} + \frac{१}{३००}$ इतकाल्या पटी केल्या, तर त्याचा भागाकार बदलणार नाही व भाजकाची पट १०००१० इतकी येईल. जशी.—

$$\begin{array}{r|l}
 ७३००० & \\
 \frac{१}{३} \text{ चा } \frac{१}{३०} & २४३३\frac{१}{३} \\
 \frac{१}{३०} \text{ चा } \frac{१}{३०} & २४३३\frac{१}{३} \\
 \hline
 & १०००१०
 \end{array}$$

ह्या भाजकाच्या पटींत १० हा तिचा $\frac{१}{१००००}$ वजा केला, तर बांकी १००००० पट राहते. ह्यावरून येथें जी भाजकाची कृति केली तीच भाज्याशीं करून त्यांवरचीं पांच स्थलें मोजून दशांश चिन्ह केलें तर ती संख्या इच्छिला भागाकार दाखवील. ह्मणून,

तृतीयांशादि रीति.— दशांशा खेरीज भाज्याखालीं त्याचा तृतीयांश मांडावा, त्याखालीं त्याचा दशांश व त्याखालीं त्याचा दशांश मांडावा, ह्या सर्वांच्या बेरजेतून तिचा दशसहस्रांश वजा करावा, आणि त्या बाकीवरचीं ५ स्थलें मोजून दशांश चिन्ह करावें, ह्मणजे इच्छिला भागाकार येईल.

उदाहरण ७ वें.— ४२० रुपये ११ आणे ह्यांचें शेंकडा $४\frac{१}{३}$ दरानें ता. १९ मार्च १८६८ यापासून ता. ८ सप्तंबर १८७० पावेतो मुदतीचें व्याज काय होईल ?

एथें कर्ज घेतल्याची ता-
रीख व फेडण्याची तारीख
मिळून एक दिवस धरावयाचा
झणून मूळची तारीख सोडून
शेवटची मोजली तर तारीख
१९ मार्च १८७० पावेतां २
वर्षे होतात.

२ वर्षांचे दिवस	७३०
मार्च	१२
एप्रिल	३०
मे	३१
जून	३०
जुलई	३१
आगस्ट	३१
सप्टेंबर	८
	<u>९०३</u>

सूचना ४ थीप्रमाणें #

मुद्दल रुपये ४२०६८७५
दराची रपट ९

दिवस.

३७८६९८७५
९०३
११३५८५६२५
३४०७५६८७५
७३,००० | ३४१८९२७३१२५
४९८ (४६८३४६
६०९
२५२
३३७
४५३

अथवा तृतीयांशादि रीतीने,

३४१८९२७३१२५
११३९६४२
११३९६४
११३९६
४६८३९२९
४६८वजा १००००
४६८३४६९ रु.
१६
१३३५३७६ आ.
१२
४२४५१२ पै.

∴ ४६ रुपये १३ आणे ४ पै हैं उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. घा.

१. ५०० रुपये मुद्दलाचें दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये प्रमाणें पांच वर्षांचें व्याज किती येईल ?

२. दरसाल दरशेंकडा ४ रुपये प्रमाणें ३ वर्षांचें ३०५ रुपयांचें व्याज काय होईल ?

३. मुदल पौंड ३७५, यांस व्याज दरसाल दरशेंकडा ४ पौंड प्रमाणें वर्षें ३ झालीं, व्याज काय येईल ?

४. ११३५ रुपयांची रास ४ वर्षींनीं किती होईल, जर व्याजाचा दर ३ रुपये प्रमाणें आहे.

५. १२४५ रुपयांचें १५ वर्षींचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ४ $\frac{३}{४}$ रुपये प्रमाणें किती होईल ?

६. २००० पौंडांची रास १२ $\frac{१}{४}$ वर्षींनीं किती होईल, जर व्याज दरसाल दरशेंकडा ३ $\frac{१}{२}$ पौंड प्रमाणें आहे.

७. दरसाल दरशेंकडा ३ $\frac{३}{४}$ रुपये व्याजाप्रमाणें ८ $\frac{३}{४}$ वर्षींनीं ५७५ रुपयांची रास किती होईल ?

८. ५॥ वर्षींनीं ३२५॥ रुपयांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ५॥ रुपये प्रमाणें किती होईल ?

९. ५०० पौंड १३ शि. ४ पे. ह्यांचें २ $\frac{३}{४}$ वर्षींचें २ $\frac{३}{४}$ पौंड प्रमाणें व्याज किती होईल ?

१०. १५० रुपये मुदलाचें दरसाल दरशेंकडा ४ रुपये प्रमाणें ३ $\frac{५}{२}$ वर्षींचें व्याज काय द्यावें ?

सूचना.— मुदतींत वर्षें, महिने व दिवस हे असले तर त्यांस व्यवहारी अपूर्णाकांत वर्षींचें रूप देऊन उत्तर वर सांगितल्याप्रमाणें काढावें. अथवा वर्षें, महिने व दिवस ह्यांचें व्याज निरनिराळें करून मग त्यांची बेरीज घ्यावी.

११. दरसाल दरशेंकडा ४ $\frac{३}{४}$ रुपये प्रमाणें ५०० रुपयांचें व्याज, सन १८५१ चे मार्च महिन्याचे १ ले तारखेपासून १८५३ तील जानेवारीच्या ९ वे तारखेपावेतो करून एकंदर रास काय होईल ती सांगा.

१२. ७५०० रुपयांची रास, मेच्या ५ वे तारखेपासून २६ आक्टोबर पावेतो, दरसाल दरशेंकडा ३ $\frac{०}{१००}$ प्रमाणें काय होईल ?

१३. ११५८॥ $\frac{३}{४}$ ह्यांची, सन १८४० च्या मार्च महिन्याचे २६ वे तारखेपासून १८४२ च्या आक्टोबर महिन्याचे ३० वे तारखेपर्यंत रास, शेंकडा २॥ रुपये प्रमाणें व्याज केल्यानें किती होईल ?

१४. मुद्दल रुपये ३५४७।-, व्याजाचा दर २।।=, चार वर्षे आणि २२५ दिवस झाले, व्याज किती होईल ?

१५. ३ वर्षे ११० दिवसांचे व्याज २२५।।. रुपयांचे दर-साल दरशेंकडा १३८=।।. प्रमाणे, किती तें सांगा.

१६. पौं. ३३. १३. ४ चें १५ वर्षांचे व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ $\frac{३}{४}$ प्रमाणे काय येईल ?

१७. ६५४१। रुपयांचे ४।। वर्षांचे दरसाल दरशेंकडा ४।। रुपयेप्रमाणे व्याज काय होईल ?

१८. पौं. ३४५०. १२. ७ पेन्सचे ८।। वर्षांचे ४ $\frac{३}{४}$ दराने व्याज काय ?

१९. ४५७ रु. १२ आण्यांचे १।। वर्षांचे २।। दराने व्याज सांगा.

२०. रु. ९६४९।= चें ५।। दराने १ वर्षे २१९ दिवसांचे व्याज काढा.

२१. पौं. ३१७. १०. २ $\frac{३}{४}$ चें ३ $\frac{३}{४}$ दराने ३ वर्षे ७३ दिवसांचे व्याज काय आकारेल ?

२२. पौं. २७. १६. ९ चें दरसाल दरशेंकडा पौं. ३. १२. ६ प्रमाणे ४ वर्षे ७ महिन्यांचे व्याज आकारा.

२३. १००० गिनींचे ४ $\frac{३}{४}$ दराने १ वर्षे ५ महिन्यांचे व्याज काढा.

२४. रु. ४६०१।। चें ४।। दराने ३ वर्षे, ८।। महिन्यांचे व्याज काढा.

२५. रु. ५५०७८५८४ चें ४८१२ दराने २ वर्षे ९ महिने २५ दिवसांचे व्याज काढा.

२६. रु. २६६६८१०८८ चें ३८८ दराने १९ आठवड्यांचे व्याज सांगा.

२७. पौं. ९८७. १५. ८ $\frac{३}{४}$ चें पौं. ४. १३. ४ दराने ३७ आठवड्यांचे व्याज काय ?

२८. रु. २२८५।।= चें ४।। दराने १ वर्षे २३ आठवड्यांचे व्याज काय ?

२९. पौं. ११०८. १३. ९ चें $५\frac{३}{४}$ दरानें १९१ दिवसांचें व्याज काढा.

३०. रु. १८४१।।। चें ५।। दरानें तारीख १७ जुलई-पासून तारीख ५ दिसेंबरपावेतों व्याज काढा.

३१. पौं. ८५३. ०. १० चें $३\frac{३}{४}$ दरानें १८ वी जूनपासून २५ वी सप्तेंबरपावेतों व्याज काढा.

३२. पौं. ३०५७. १४. ७ चें $४\frac{३}{४}$ दरानें एप्रिल ६ वीपासून अक्तोबर २७ वीपावेतों व्याज काढा.

३३. पौं. १२५३. ८. ५ चें $३\frac{३}{४}$ दरानें तारीख १६ जानेवारीपासून तारीख २३ मार्च (लीप वर्षाचा) पावेतों व्याज काढा.

३४. पौं. १६४. १५. ११ चें $५\frac{३}{४}$ दरानें तारीख ९ नवंबर १८६७ पासून तारीख ३ मार्च १८६८ पावेतों व्याज काढा.

३५. पौं. १३२७. ३. ८ चें $५\frac{३}{४}$ दरानें तारीख १८ अक्टोंबर १८६९ पासून तारीख २७ मे १८७१ पावेतों व्याज आकारा.

प्रकार २ रा.— मुदत व्याजाचा दर व व्याज ह्यांपासून मुद्दल काढण्याचा.

उदाहरण ८ वें.— दरसाल दरशेंकडा ६। रुपयेप्रमाणें ४।। वर्षांत २७० रुपये व्याज येण्याला मुद्दल केवढें असावें ?

एथें ६। रुपये = ६.२५ रुपये, व ४।। वर्षें = ४.५ वर्षें, ह्या किंमती घेऊन वरील उदाहरण बहुराशिकाचे नमुन्यांत मांडिल्लें जसें.—

स. ६.२५ रु. व्या. : २७० रु. व्या. }
व्य. १ वर्ष : ४.५ वर्षें } = १०० रु. मु. : उ. मु.

एथें ६.२५ रुपये व्याज १ वर्षास येण्याला १०० रुपये मुद्दल लागतें, तर २७० रुपये व्याज १ वर्षांत येण्याला मुद्दल जास्त पाहिजे. म्हणून हें प्रमाण सम आहे.

दुसरें १ वर्षास ६.२५ रुपये व्याज येण्याला १०० मुद्दल लागतें, तर ४.५ वर्षास ६.२५ व्याज येण्याला मुद्दल कमी पुरेल. म्हणून हें प्रमाण ठीक आहे.

मुदलाचा बदल व्याजाशीं सम प्रमाणांत व कालाशीं व्यस्त प्रमाणांत होतो ह्मणून दुसरें प्रमाण बदलून बहुराशिक मांडिलें पाहिजे. जसें.—

$$\left. \begin{array}{l} ६२५ \text{ रु. व्या. : } २७० \text{ रु. व्या.} \\ ४५ \text{ वर्षे. : } १ \text{ वर्षे} \end{array} \right\} = १०० \text{ रु. मु. : उ मु.}$$

$$\therefore \text{उ.} = \frac{१०० \times २७०}{६२५ \times ४५} = ९६० \text{ रुपये हें उत्तर.}$$

वरील गुणकभाजक हे सामान्य पद्धति २ मध्ये किंमती ठेविल्या प्रमाणेंच आहेत. ह्यावरून वरच्या उदाहरणाच्या किंमती सा० प० २ मध्ये मांडून आडव्या मांडणीनें हें उत्तर निघेल हें उघड आहे.

सूचना ५ वी.— ह्या प्रश्नांत दिलेल्या मुदतीचें इच्छिलें मुदलाचें व्याज न देतां राशि दिला असला, तर त्यांतील व्याज हा राशि अज्ञात राहातो. ह्मणून मुदल बहुराशिकानें किंवा २ व्या पद्धतीनें काढितां येत नाहीं. तें प्रमाणभागांच्या आधारानें काढावें लागतें.

उदाहरण ९ वें.— दरसाल दरशेंकडा ६ रुपये व्याजाच्या दरानें ५ वर्षांत ८१२॥ रु० राशि येण्याला मुदल केवढें पाहिजे ?

६ रु. दरानें १०० रुपयांचें पां० ५ वर्षांचें व्याज ३० रु० होतें. ह्यावरून १३० रुपये राशीत १०० रु० मु. ३० रु० व्याज आहे. ह्याच प्रमाणाचा ८१२॥ रुपयांचा कोणता तरी एक प्रमाणभाग पाहिजे आहे. ह्मणून त्रैराशिकानें.—

$$१३० \text{ रु. रा. : } ८१२.५ \text{ रु. रा. : : } १०० \text{ मु. : क्षरित मु.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = १०० \text{ रु. मु.} \times \frac{८१२.५}{१३०} = \frac{१२५०}{२} \text{ रु.} = ६२५ \text{ रु.}$$

हें उत्तर.

प्रकार ३ रा.— मुदल, व्याजाचा दर व व्याज ह्यांपासून मुदत काढण्याचा.

उदाहरण १० वें.— दरशेंकडा दरसाल ५ रुपये प्रमाणें १३६० रु. मुदलाचा राशि १८०२ रु. होण्याला मुदत केवढी पाहिजे ?

१८०२-१३६० = ४४२ रुपये व्याज येतें. एथें १०० रुपयांचें १ वर्षांचें ५ रुपये व्याज येतें, तर १३६० रुपयांच्या किती वर्षांस ४४२ रुपये व्याज येईल, हा प्रश्न आहे. ह्यांत वर्षे हीं रकमेच्या पटी दाखविणारी आहेत. ह्मणून त्रैराशिक.—

रु. व. रु. व.

$$१०० \times १ : १३६० \times \text{क्ष} = ५ \text{ रु. व्या.} : ४४२ \text{ रु. व्या.}$$

$$\therefore \text{प्र.नि. १ प्र. } ५ \times १३६० \text{ क्ष} = १०० \times ४४२.$$

$$\text{व } \text{क्ष} = \frac{\frac{१००}{५} \text{ रु.} \times ४४२}{\frac{५}{१} \times \frac{१३६०}{५}} = ६\frac{१}{२} \text{ वर्षे हें उत्तर.}$$

हें उदाहरण बहुराशिकांत मांडून व उ. ६ येथील नमुन्याप्रमाणें समव्यस्त पाहून सामान्य पद्धति ३ मध्ये किंमती ठेवूनही सोडवा.

उदाहरण ११ वें.— दरसाल दरशेंकडा ८ रु. व्याजाप्रमाणें मुदलाच्या तिप्पट राशि होण्याला मुदत केवढी लागेल ?

शंभर रुपये मुदलाचें २०० रुपये व्याज येण्याला जेवढा काळ लागेल, तेवढाच काळ कोणत्याही मुदलाचें व्याज त्याच्या दुप्पट येण्याला लागेल. ह्मणून त्रैराशिकाप्रमाणें.—

$$८ \text{ रु. व्या.} : २०० \text{ रु. व्या.} = १ \text{ व.} : \text{क्ष.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = १ \text{ व.} \times \frac{२००}{८} = २५ \text{ व. हें उत्तर.}$$

प्रकार ४ था.— मुदल, मुदत, व्याज ह्यांपासून व्याजाचा दर काढावयाचा.

उदाहरण १२ वें.— ५२० पौंड मुदलाची ९ वर्षांत ७५४ पौंड रास होण्याला व्याजाचा दर केवढा ठेवावा ?

व्याज = ७५४ पौंड - ५२० पौं. = २३४ पौं. येतें. सामान्य पद्धति ४ मध्ये किंमती ठेविल्यानें.—

$$\text{द} = \frac{५०० \times \text{व्या.}}{\text{म. क.}} = \frac{\frac{५००}{५२०} \times २३४}{\frac{५}{२६} \times \frac{९}{५}} = ५ \text{ पौं. हें उत्तर.}$$

अथवा एकमान गणितानें.—

$$५२० \text{ पौं. चें } ९ \text{ वर्षांचें व्याज} = २३४ \text{ पौं.}$$

तर	५२०	पै.चे	१	वर्षांचें	व्याज	=	$\frac{२३४००}{५}$	=	२६.
	१	"	१	"	"	=	$\frac{२६}{५२०}$	=	$\frac{१००}{२०}$
∴	१००	"	१	"	"	=	$\frac{१०००००}{२०}$	=	५०००० पै.

उदाहरण १३ वें.— १२ $\frac{३}{४}$ वर्षांत दाम दुप्पट होण्याला व्याजाचा दर केवढा पाहिजे ?

मुद्दल १०० रुपये झटलें तर त्याचें व्याज १०० व्हावयाचें झणून.—

$$१०० \text{ रु. चें } २\frac{३}{४} \text{ वर्षांचें व्याज} = १०० \text{ रु.}$$

$$\text{तर } १०० \text{ रु. चें } १ \text{ वर्षांचें } = \frac{१०० \text{ रु.} \times २}{२\frac{३}{४}} = ८० \text{ रु. हें उ.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. डा.

पुढील उदाहरणें सोडविण्यांत एकमान गणित प्रमाण गणित (त्रैराशिक किंवा बहुराशिक) आणि ४ सामान्य पद्धति ह्यांचा उपयोग सोईस पडेल तसा करावा.

१. २ $\frac{३}{४}$ वर्षांत १०२॥ रुपयांचें १२॥ व्याज होण्यास व्याजाचा दर काय लावावा ?

२. दरसाल दरशेंकडा ६॥ रुपयें प्रमाणें एका वर्षांत रास ४५८— होण्यास मुद्दल काय असावें ?

३. ४९८ रु. १२ आणे ह्यांचें व्याज १०॥ रुपये होण्यास मुदत किती असावी ? व्याजाचा दर वरच्या प्रमाणेंच आहे.

४. १४६ दिवसांत २०० रुपयांचें व्याज ४॥ रुपये होण्यास व्याजाचा दर काय असावा ?

५. दरसाल दरशेंकडा ५॥ रुपये व्याजांन ७३२॥ मुद्दलाचे सव्याज रु. १७०९॥ होण्यास किती वर्षे लागतील ?

६. दरसाल दरशेंकडा ४ $\frac{३}{४}$ रु. व्याजाप्रमाणें ४९ रुपये व्याज दरसाल उत्पन्न होण्यास मुद्दल काय असावें ?

७. ४१२७ रुपयांचें व्याज एका वर्षांत ९२॥ होण्यास व्याजाचा दर काय असावा ?

८. मुद्दल किती रुपये असले झणजे २ वर्षे १ महिन्यांत,

५ $\frac{३}{४}$ रु. व्याजाच्या दरानें १२१ रु. १३ आणे ४ पै, व्याज उत्पन्न होईल ?

९. व्याजाचा दर कोणता लावावा ह्मणजे २२०॥— मुदलाचे एक वर्षांत सव्याज रु. २४०६ $\frac{३}{४}$ ॥ होतील ?

१०. ४१९ रुपये मुदलाचे सव्याज ४८६॥ रुपये, दर-साल दरशेंकडा ४६ $\frac{३}{४}$ प्रमाणें होण्यास मुदत किती असावी ?

११. ३ वर्षे ७३ दिवसांत दरसाल दरशेंकडा ६ $\frac{३}{४}$ रुपये प्रमाणें १०६— व्याज होण्यास किती रुपये मुद्दल असावे ?

१२. शेंकडा ४॥ रुपयेप्रमाणें ८१२॥०॥ मुदलाचें ७७१॥॥ $\frac{३}{४}$ ॥ व्याज होण्यास मुदत किती असावी ?

केवढ्या मुदलाचा राशि

१३. ५ वर्षांत ३॥ च्या दरानें पौंद ७६२. १६. ४ $\frac{३}{४}$ होईल ?

१४. १ $\frac{३}{४}$ वर्षांत ३ $\frac{३}{४}$ दरानें रुपये २३५६६९०६८ होईल ?

१५. १५॥ वर्षांत २॥॥ दरानें रु० ८४३६॥ $\frac{३}{४}$ होईल ?

केवढ्या मुदलाचें

१६. पौंद ३६. १२. ६ व्याज २ $\frac{३}{४}$ वर्षांत ३ $\frac{३}{४}$ दरानें होईल ?

१७. रुपये २३९६६८८ व्याज १॥ वर्षांत ४॥ $\frac{३}{४}$ दरानें होईल ?

१८. रुपये १३७॥ $\frac{३}{४}$ ॥ व्याज १॥॥ वर्षांत ३॥॥ दरानें होईल ?

केवढे मुदलाचा राशि

१९. रु. १३५७७६— इतका २ वर्षे ७ महिन्यांत ४॥ दरानें होईल ?

२०. रु. ७२५६। इतका २ वर्षे ९ महिने, १८ दिवसांत २॥ दरानें होईल ?

२१. ३ $\frac{३}{४}$ दरानें १ वर्षे ९ महिने २४ दिवसांत रु. ५७८६५६४ व्याज येण्याला मुद्दल केवढें पाहिजे ?

केवढ्या मुदलाचा राशि

२२. २४० दिवसांत ३ $\frac{३}{४}$ दरानें पौं. ३४६. १३. ४ होईल ?

२३. १६ जून पासून ७ नवंबर पावेतो ५॥ दरानें रु. ५८२। होईल ?

व्याजाचा दर काय असला तर—

२४. पौं. १७०. ६. ३ मुदलाचा राशि ३ वर्षांत १९० पौंड १५ शि. होईल ?

२५. रु. ३३३५५४ मुदलाचा राशि ४॥ वर्षांत रकम ३८२५१५४ होईल ?

२६. रु. २३९८१ चें व्याज रु. २२६॥ होण्याला २ वर्षे १० महिने लागतील ?

२७. रु. ७५०६ चें व्याज रु. १५८७१४२ होण्याला ५ वर्षे ७ म. २० दि. लागतील ?

२८. ६॥ वर्षांत मुदलाच्या $\frac{३}{४}$ व्याज आकारण्याला व्याजाचा दर काय असावा ?

२९. १६ वर्षे ८ महिन्यांत मुदलाचें $\frac{५}{८}$ व्याज आलें आहे. ह्या व्याजाचा दर सांगा.

३०. ७४३ पौं. १० शिलिंगांचें व्याज ८७ दिवसांनीं ७ पौं. १९ शि. ६ पे. आकारलें आहे. ह्या आकारणींत व्याजाचा दर काय घेतला ?

३१. ३४० पौं. १२ शि. ६ पेन्सांचा राशि दरसाल दरशेंकडा ४ दरानें ३८१ पौं. १० शि. होण्याला मुदत केवढी पाहिजे ?

३२. $२\frac{३}{४}$ दरानें १००० गिनींचें व्याज १०३ पौं. ९ शि. ४ $\frac{१}{२}$ पे. येण्याला किती वर्षे, किती महिने मुदत लागेल ?

३३. ३॥॥ दरानें २२५१ पौं. १७ शि. ६ पे. ह्यांची रास केवढ्या मुदतीनें २७२८ पौं. १ शि. $\frac{३}{४}$ पे. होईल ?

३४. $७\frac{१}{३}$ दरानें मुदलाचे १॥ पट राशि होण्याला मुदत केवढी लागेल ?

३५. १८७० ची १ ली जानेवारी ह्या दिवशीं एका गृहस्थानें ४८३५ पौं., $३\frac{३}{४}$ दरानें कर्ज घेतले आहेत. ही रकम व्याज, मुदल मिळून ५००० पौं. होईल त्या दिवशीं परत करण्याची कबुलायत आहे; तर ती मुदत कधीं भरेल ?

३६. एका मुदलापासून दरसाल दरशेंकडा $३\frac{१}{२}$ टक्यांच्या सरळ वाढीनें रु. ५०६७॥— होण्यास १० वर्षे लागलीं

आहेत, तर त्यापासून रु. ७०३८।॥ राशि होण्यास किती वर्षे लागतील ?

३७. एकानें दुसऱ्याला दरसाल दरशेंकडा ३ टक्यांच्या दरानें कांहीं रक्कम कर्ज दिली, तिचे त्याला ७२ दिवसांनीं २९३ पौं. १२ शि. $\frac{१}{२}$ पेन्स मिळाले. ह्यावरून रक्कम केवढी होती ?

३८. वर्षाचे आरंभीं ३२७० रु. कांहीं दरानें कर्जा दिले आहेत तेथून ९ महिन्यांनीं ४००० रु. पूर्वीच्या दुप्पट दरानें कर्जा दिले आहेत. वर्षाचे अंतीं ह्या दोन्ही रकमांचें व्याज १३१।।। रु. आकारत आहे तर पहिल्या रकमेचा दर काय आहे ?

३९. ४ टक्यांच्या दरानें केवढ्या रकमेचें व्याज दररोज १ पेनी होईल ? आणि ३।। टक्यांच्या दरानें केवढ्या रकमेचें व्याज दररोज १ गिनी होईल ?

४०. ५८१२५ रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज रु. ८७१।।।= होतें, तर रु. २९०६२।। चें १०६ वर्षांचें व्याज काय होईल ? व व्याजाचा दर काय असेल ?

४१. सरकारी खजिन्यांत भरणें असलेल्या ३५८७ पौं. १५ शिलिंगांच्या बिलांचें ४८ दिवसांचें व्याज दररोज दरशेंकडा १ $\frac{१}{२}$ पे. प्रमाणें काय होईल ? तसेंच ह्या दरानें १८८९ सालीं व्याजाचा दर दरसाल दरशेंकडा काय पडेल ?

४२. केवढ्या मुदलाचा राशि $३\frac{१}{२}$ दरानें व १० वर्षांनीं पौं. ४२५. १९. $४\frac{३}{४}$. $\frac{१}{२}$ होईल ? आणि राशि येथून केवढ्या मुदतीनें पौं. ४५३. ११. ७ होईल ?

चक्रवाढ व्याज.

दिलेल्या मुदलाचें एका मुदतीचें व्याज आकारून तें मुदलांत मिळवितात, आणि तो राशि दुसऱ्या मुदतीच्या व्याजाला मुद्दल धरितात. अशा रीतीनें मुद्दल व व्याज ह्या दोहोंवरही जें व्याज वाढतें त्याला चक्रवाढ व्याज म्हणतात.

एक मुदत ही साधारणपणें १ वर्षाची असते; तरी विशेष ठरावांत अर्ध्या वर्षाची, पाव वर्षाची, १ महिन्याची अशी कोणत्याही कालमानाची असूं शकते.

प्रकार १ ला.- मुद्दल, मुदती व व्याजाचा दर ह्यांपासून चक्रवाढीची रास अगर व्याज काढण्याचा.

रीति.— दिलेल्या मुदलाचें दरमुदतीच्या दरशेंकड्याच्या दरानें १ ल्या मुदतीचें सरळव्याज आकारून तें मुदलांत मिळवावें, आणि तो राशि दुसऱ्या मुदतीला मुद्दल समजावा. अशा रीतीनें दरएक मुदतीचें व्याज आकारीत जावें, हाणजे मुदतीच्या अखेरीचा राशि येईल. त्या राशींत मुद्दल वजा करावें हाणजे त्या एकंदर मुदतीचें व्याज येईल.

उदाहरण १ ले.- दरसाल दरशेंकडां ४ रुपये प्रमाणें ७५० रुपयांचें ३ वर्षांचें चक्रवाढ व्याज काय होईल ?

७५० रु. १ ले वर्षाचें मुद्दल.

४ रु. दर.

१००) ३००० पहिले वर्षाचें व्याज.

१८० रु. २ रे व. मुद्दल.

४

१००) ३१२० रु. २ रे व. व्याज.

१६

३२० आ.

१२

२४० पै.

८११ रु. ३ आ. २४ पै. ३ रे व. मुद्दल.

४

१००) ३२४४ रु. १२ आ. ९६ पै. ३ रे व. व्याज.

१६

७९६ आ.

१२

२०२ पै.

८४३ रु. ७ आ. २ पै. ३ वर्षांची रास.

७५० रु.

मुद्दल.

९३ रु. ७ आ. २ पै. ३ व. च. व्याज.

सूचना १ ली.- मुदलावर आणे पै आल्यास त्यांना रुप-
याचें दशांशरूप द्यावें, मुदती थोड्या असल्यास ३ व फार अ-
सल्यास ४ दशांशस्थळें त्यांत ठेवावीं, आणि १०० नीं भाग-
ण्यासाठीं गुणाकारावरचीं दोन दशांशस्थळें कसरीसुद्धां हातचे
वेऊन सोडून द्यावीं, ह्मणजे कृत्य थोडक्यांत होतें.

उदाहरण २ रें.- ८७०२०१० ची रास दरगाल दर-
शेंकडा ४॥॥ रु. प्रमाणें १ वर्षानें केवढी होईल ? व्याज दर
सहा माहीस घेण्याचा करार आहे.

सहा सहा महिन्यांच्या मुदती १ वर्षांत २ होतात, आणि
दरमुदतीस दरशेंकड्यास व्याज २ = दरानें पडतें. ह्मणून,

	८७०१७७१	१ लें मुद्दल.
२	१७४३५	} १ व्या मुदतीचें व्याज.
१०	२१७९	
८ =	१०८९	
	८९२४७४	२ रें मु. मुद्दल.
	१७८४९	} २ मुदतीची रास.
	२२३१	
	१११६	
	९१३६७०	२ मुदतीची रास.
	१६	
	५८७२०	आ.
	१२	
	१०४६४०	पै.

९१०५०१० ही २ मुदतीची रास हें उत्तर.

सूचना २ री.- शेवटची मुदत अपुरी असली तर पुन्या
मुदतीचें व्याज काढावें आणि मग तें पूर्वीच्या राशीशीं मिळवून
इच्छिळा राशि काढावा.

उदाहरण ३ रें.- ७५ पौंढ १४ शि. ९ पे. ह्यांची रास
२ वर्षे ७ महिने २१ दिवसांची ४१० दरानें व चक्रवाहीने
काढा.

	पौंव.		पौंव.
	७५°७३७५ १ले व.मु.		८२°३११८ ३ रे व.मु.
४	३°०२९५	४	३°२९२४
४	°१८९३	४	°२०५७
	७८°९५६३ २रे व.मु.		३°४९८१ ३रे व.व्या.
		१	१°७४९०
४	३°१६८२	१	°२९१५
४	°१९७३	१५	°१४५७
	८२°३११८ २रे व.रा. ६ दि.	१०	°०५८३
	२°२४४५ ७म.२१दि.व्या.		२°२४४५
	८४°५५६३ पौंव		
	२०		
	११°१२६० शि.		
	१२		
	१°५१२० पे.		

∴ ८४ पौं. ११ शि. १^१/_२ पे. हा इच्छिलेला राशि.

उदाहरण ४ थें.- ५४९॥ = ह्यांच्या दरसाल दरशेंकडा ५॥
दराच्या ३ वर्षांच्या सरळ व चक्रवाढ व्याजांत फरक केवढा येईल ?

	५४९°८७५०	} = ३०°२४३१ सर.व्या. १ वर्षांचें.
५	२७°४९३८	
॥	२°७४९३	३
	५८०°११८१	} = ९०°७२९३ " ३ वर्षांचें.
५	२९°००५९	
॥	२°९००६	
	६१२°०२४६ ३ रे मुं.	
	३०°६०१२	
	३°०६०१	
	६४५°६८५९ ३ वर्षां. रा. चक्र.	
	५४९°८७५० मुद्दल.	
	९५°८१०९ ३ व. च.वा. व्याज.	
	९०°७२९३ ३ व. स. व्याज.	
	५°०८१६ = ५६१६४ फरक हें उत्तर.	

उदाहरण ५ वें.- दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये प्रमाणें
१ रुपयाची ३ वर्षांची रास काय होईल ?

रु. मु. रु. मु. रु. व्या. रु. व्या.

$$१०० : १ : : ५ : \frac{१}{१००} \times ५ = ०.०५ रु.$$

∴ १ रुपयाची १ वर्षांची रास = १.०५ रु.

दुसरे वर्षी १.०५ रु. हें मुद्दल होतें. त्याचें व्याज १ वर्षाचें
काढिलें तर,

रु. मु. रु. मु. रु. व्या. रु. व्या.

$$१०० : १.०५ : : ५ : \frac{१.०५}{१००} \times ५ = १.०५ \times ०.०५ रु.$$

∴ १ रुपयाची २ वर्षांची रास = १.०५ रु. + १.०५ × ०.०५ रु.

$$= १.०५ (१ रु. + ०.०५ रु.)^*$$

$$= १.०५ \times १.०५ रु.$$

$$= १.०५^२ रु.$$

तिसरे वर्षी १.०५^२ रु. हें मुद्दल होतें. ह्याचें व्याज १ व-
र्षाचें काढिलें तर,

रु. मु. रु. मु. रु. व्या. रु. व्या.

$$१०० : १.०५^२ : : ५ : \frac{१.०५^२}{१००} \times ५ = १.०५^२ \times ०.०५ रु.,$$

∴ १ रुपयाची ३ वर्षांची रास = १.०५^२ रु. + १.०५^२ × ०.०५ रु.

$$= १.०५^२ (१ रु. + ०.०५ रु.)$$

$$= १.०५^२ \times १.०५ रु.$$

$$= १.०५^३ रु.$$

वरील उदाहरणांत १.०५ हा अंक १ रुपयाची १ वर्षांची
रास दाखविणारा असून, त्यावरील घात २ व ३ हे वर्षे दाख-
विणारे आहेत. ह्यावरून १ रुपयाची कितीही मुदतीची रास
चक्रवाढ व्याजानें काढणें असली, तर १ रुपयाची १ मुदतीची

* व्यवहारी अपूर्णाकांची मिळवणी येथील सूचना ४ थी पहा.

रास काढावी, आणि तींतील अंकांचा त्या मुदती इतका घात करावा; ह्मणजे येणारा घात ह्या राशींतील रुपयांची संख्या दाखवील.

आतां मुद्दल २ पट झालें तर रास २ पट होते. ह्यावरून मुद्दल कितीही पट झालें, तरी रास तितकेच पट होईल हें उघड आहे. ह्मणून,

दुसरी रीति— सांगितले दराप्रमाणें एक रुपयाचें व्याज एका मुदतीस करावें, आणि त्यांत तो मुद्दल एक रुपया मिळवावा. नंतर मुदतीच्या संख्येइतका त्याचा घात करून त्यास मुदलानें गुणावें, तो गुणाकार रास येईल. नंतर त्यांत मुद्दल घजा करावें, बाकी राहिल तें चक्रवाढ व्याज समजावें.

येथें मुद्दल = म, मुदत किंवा तींतील कालमानें = क. एका रुपयाची एका मुदतीची रास = ए आणि चक्रवाढीची दिलेल्या मुदतीची रास = र असे सूचक वर्ण घेतले तर वरील रीति सामान्य पद्धतीच्या रूपानें थोडक्यांत दर्शवितां येते. जशी.—

$$र = म. ए^क; \dots\dots\dots १$$

ह्या पद्धतीपासून म आणि ए ह्यांच्या किंमती येतात. त्या अशा,—

$$म = \frac{र}{ए^क}; \dots\dots\dots २$$

$$\text{आणि, } ए^क = \frac{र}{म} \dots\dots\dots ३$$

या पद्धतींत किंमती ठेवून चक्रवाढ व्याजाची उदाहरणें सोडवितां येतात.

उदाहरण ६ वें.— दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये प्रमाणें ३० रुपयांचें ३ वर्षांचें चक्रवाढ व्याज काय येईल ?

$$१०० \text{ रु.} : १ \text{ रु.} = ५ \text{ रु. व्या.} : १०५ \text{ रु. व्या.}$$

$$\therefore \text{ ए} = १.०५$$

$$\text{व आतां र} = \text{म. ए}^३ = ३० \text{ रु.} \times १.०५^३$$

$$\begin{array}{r} १.०५^३ \\ १.०५ \\ ५२५ \\ \hline ३४.७२८७५० \end{array}$$

$$\begin{array}{r} १०५ \\ \hline १.१०२५ \text{ वर्ग} \\ १.०५ \\ \hline ५५१२५ \\ ११०२५ \\ \hline १.१५७६२५ \text{ घन} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ३० \\ \hline ३४.७२८७५ \\ ३० \\ \hline ४.७२८७५ \\ १६ \\ \hline ११.६६००० \\ १२ \\ \hline ७.९२ \end{array}$$

\therefore ४८११८८ हैं उत्तर.

प्रकार २ रा.— मुदत, व्याजाचा दर व राशि ह्यांपासून मुदल काढण्याचा.

उदाहरण ७ वें.— दरसाल दरशंकडा ४ रुपये प्रमाणें ३ वर्षांनीं ८४३८७८२ ही चक्रवाढीची रास होण्याला मुदल केवढें पाहिजे ?

४ रुपये दरानें १ रुपयाची ३ वर्षांची रास १.१२४९ येते. या राशींत १ रुपया मुदल व १.२४९ रु. व्याज असतें ह्याच प्रमाणाचे भाग दिलेल्या राशींत असावयाचे. ह्याणून त्रैराशिकानें.

$$१.१२४९ \text{ रु. रा.} : ८४३.४४८ \text{ रु. रा.} = १ \text{ रु. मु.} : \text{क्ष मुदल.}$$

$$\therefore \text{क्ष मु.} = \frac{१ \text{ रु.} \times ८४३.४४८}{१.१२४९} = ७५० \text{ रुपये मु.} \text{ हैं उत्तर.}$$

येथें क्षच्या किंमतीच्या अंशस्थळीं दिलेली रास असून छेदस्थळीं ए^३ आहे, ह्याणजे १ रुपयाच्या वर्षांच्या राशीचा ३ घात आहे. ह्यावरून पद्धति २ मध्ये किंमती ठेविण्यानेंही हें उत्तर येईल.

प्रकार ३ रा.- मुद्दल, मुदत आणि राशि ह्यांपासून व्याजाचा दर शोधावयाचा.

उदाहरण ८ वें.- ३० रुपये मुद्दलाची रास ३ मुदतींनीं ३४८११८८ आणून दिली आहे, तर व्याजाचा दर काय होता ?

येथें मुद्दल = ३० रुपये, रास ३४८११८८ = ३४७२८७५ आणि मुदत किंवा क = ३ ह्या किंमती ३ व्या पद्धतींत टेलिया हणजे असें येतें कीं,

$$ए^३ = \frac{३४७२८७५}{३०} = ११५७६२५.$$

आतां ११५७६२५ हा १०५ ह्याचा घन आहे.

∴ ए = १०५

व १०० ए = १०५

ह्या राशींत १०० रु. मुद्दलावर व्याज ५ रुपये आहे. ह्यावरून व्याजाचा दर दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये होता असें ठरतें.

ह्या तिसऱ्या प्रकारच्या उदाहरणांत वेगळाल्या घातांचीं मुळें काढावीं लागतात. आणि ४ व्या प्रकारच्या उदाहरणांत क हा घात कितवा तेंच शोधावें लागतें. हीं दोन्ही कामें लागतमाच्या (घातावलीच्या) साह्यानें सहज करितां येतात.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. चा.

१. दरसाल दरशेंकडा २॥ रुपयेप्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें ९५॥= ह्यांची रास २ वर्षांनीं काय होईल ती सांगा.

२. दरसाल दरशेंकडा व्याज ४ रुपयेप्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें ३० रुपयांची रास तीन वर्षांनीं किती होईल ती सांगा.

३. दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें १३४१ रुपये १३ आणे ह्यांचें दोन वर्षांचें सरळ व्याज व चक्रवाढ व्याज ह्यांत अंतर किती पडेल ?

४. ५५०० रुपये मुद्दलाचें दरसाल दरशेंकडा सहा रुपये प्रमाणें तीन वर्षांचें सरळ व्याज व चक्रवाढ व्याज ह्यांत अंतर किती पडेल तें सांगा.

५. दरसाल दरशेंकडा ४ रुपये व्याजाप्रमाणें ३५८ रुपयांचें चार वर्षांचें चक्रवाढ व्याज किती होईल ?

६. ३०० पौंडांचें ३ वर्षांचें चक्रवाढ व्याज, दरसाल दर शेंकडा $२\frac{३}{४}$ पौंडप्रमाणें किती होईल ?

७. दरमहा दरशेंकडा ९ आणे व्याजाप्रमाणें हजार, रुपयांचें १० वर्षांचें चक्रवाढ व्याज व सरळव्याज किती होईल तें सांगा.

८. ५७ रुपयांचें सव्वा वर्षांचें दरमहा दरशेंकडा तेरा आणेप्रमाणें चक्रवाढ व्याज काय होईल ?

९. १३२॥ = चें दरमहा दरशेंकडा चौदा आणेप्रमाणें २ वर्षें ३ महिने सात दिवस ह्यांचें चक्रवाढ व्याज किती होईल ?

१०. दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें ३७०० रुपयांचें ६ वर्षांनीं चक्रवाढ व्याजानें व्याज व मुद्दल मिळून किती रुपये होतील ?

११. कोणीएकानें एकापासून ६०० रुपये दरसाल दरशेंकडा चार रुपये व्याजानें घेतले, त्याची मुदत सात वर्षांची होती, परंतु त्यानें १ वर्षानें २०० रुपये परत केले, व पुढें ३ वर्षे गेल्यावर १५० रुपये परत केले; तेव्हां ह्या रकमांचें व्याज वजा होऊन मुदतीस त्याजकडे चक्रवाढ व्याजानें एकंदर बाकी किती निघेल ?

चक्रवाढ व्याजाचा राशि केवढा होईल ?

१२. पौंद ७५६. ३.४ चा २ वर्षांचा $३\frac{१}{४}$ दरानें.

१३. रु. ६५३२॥ चा ३ वर्षांचा $२\frac{१}{२}$ दरानें.

१४. रु. २५५४६। = चा ६ वर्षांचा $६\frac{३}{४}$ दरानें.

चक्रवाढ व्याज शोध

१५. रु. ८७६४१३४८ चें ४ वर्षांचें, $२\frac{३}{४}$ दरानें.

१६. पौं. १६२७. १५. ६ चें ३ वर्षांचें $६\frac{५}{८}$ दरानें.

१७. रु. १५७७४५४४ चें ६ वर्षांचें $३\frac{७}{८}$ दरानें.

१८. पौं. १८६. १४. ९ चें २॥ वर्षांचें ६ दराचें ६

माही फेडीचें.

१९. रु. ८५०११॥० चें ३ वर्षांचें ४॥॥ दरानें ६ माही फेडीचें.

२०. रु. ६४६९६१६८ चें १॥॥ वर्षांचें ८ दरानें ३ माही फेडीचें.

२१. पौं. २३५०. ५. ९ चें २ वर्षांचें ३॥॥ दराचें ३ माही फेडीचें.

२२. एकापासून अ आणि ब ह्या प्रत्येकानें ७८७७॥ रु. ५ वर्षांचे मुदतीनें ७॥ दरानें नेले. पहिल्याचा करार सरळ व्याजाचा व दुसऱ्याचा चक्रवाढ व्याजाचा आहे. तर या दोघांच्या देण्यांत अंतर काय पडेल ?

२३. १०००० गिर्नांचें ४ वर्षांचें ३॥॥ दरानें सरळ व्याज आणि ह्याच रकमेचें ह्याच मुदतीचें ३॥॥ दरानें चक्रवाढ व्याज ह्यांत अंतर काय पडेल ?

२४. पौं. ३३३३. ६. ८ चें $३\frac{१}{२}$ वर्षांचें $३\frac{१}{२}$ दरानें सरळ व चक्रवाढ व्याजांमधलें अंतर सांगा.

२५. एका मुदलाच्या ३ वर्षांच्या ४॥॥ दराच्या सरळ व चक्रवाढ व्याजामधलें अंतर पौं. ८०१३. ७ $\frac{३}{४}$ आहे, तर तें मुदल काय ?

२६. एक मनुष्य प्रत्येक वर्षाचे आरंभीं २८० पौंद शिल्लक पाडून ते ३॥॥ दरानें चक्रवाढ व्याजीं लावितो आहे; तर ५ वर्षांचे अंती त्यापाशीं किती पैसा जमेल ?

२७. एका शहरांत ७६५२४० लोकसंख्या असून ती दरसालास दरशेंकडा २.७ प्रमाणें वाढत आहे, तर त्या शहरांत ५ वर्षांचे अंती केवढी लोकसंख्या आढळेल ?

२८. इंग्लंड आणि वेल्सची लोकसंख्या १८७१ तल्या एप्रिलांत २२७०४१०८ होती. आणि ती दरवर्षास दरशेंकडा १.२४ प्रमाणें वाढत होती तर ह्या दरानें ती १८७५ च्या एप्रिलांत किती भरेल ?

२९. पौं. ५२७. १७. ६ ह्यांचे २ वर्षे ९ महिने २५ दिवसांचें $४\frac{३}{४}$ दरानें सरळ व चक्रवाढ ह्या व्याजांत काय अंतर पडेल ?

३०. एक पेढीवाला दरसाल दरशेंकडा $३\frac{१}{२}$ दरानें कांहीं कर्ज घेऊन त्याचें व्याज साल अखेरीस देतो. हा कर्ज घेतलेला पैसा तो दरसाल दरशेंकडा ५ दरानें व दर तिमाहीस व्याज आकारण्याच्या करारानें दुसऱ्या पेढीवाल्याला देतो, आणि त्याचें व्याज साल अखेरीस घेतो. ह्या हिकमतीनें दरवर्षास तो २०० पौंद मिळवितो, तर तो कर्ज किती घेतो ?

३१. केवढ्या मुदलाची ५ दराची व ४ वर्षांची चक्रवाढीची रास पौं. ४०५. ३. ४॥ होईल ?

३२. दोन वर्षांनीं $३\frac{१}{२}$ दरानें चक्रवाढीची रास ३६० पौंद १० शिलिंग होण्याला आज केवढी रक्कम व्याजीं लावावी ?

३३. एक इष्टेट का हा ८०००० पौंदांच्या रोकडीवर मागत आहे, आणि तीच इष्टेट खं हा ९५००० पौंद चार वर्षांचे अंती देण्याच्या करारावर मागत आहे. एथें सालिना शेंकडा ४॥ दरानें चक्रवाढ व्याज आकारून ह्यांतली फायदेशीर मागणी कोणती व केवढ्यानें फायदेशीर ?

३४. दरसाल दरशेंकडा $४\frac{१}{२}$ टक्यांच्या व तीन वर्षांच्या चक्रवाढ व्याजाची रास ६६७ पौंड १५ शिलिंग होण्याला मुद्दल केवढें पाहिजे ?

कसर आणि आजची किंमत.

मुदतीच्या हुंडीचा ऐवज, मुदतीच्या रोख्याची रक्कम, घराचें भाडें, असलें जें देणें, तें मागण्याचा अधिकार त्यांतील मुदतीपावेतों मालकाला नसतो. ह्मणून असलें देणें आज रोख द्यावयाचें असलें तर तें देणारानें त्या दोघांमधल्या ठरलेल्या दरानें त्या मुदतीच्या व्याजाइतका पैसा कसर ह्मणून काढून घ्यावा, आणि राहिलेली जी मुख्य रक्कम ती त्या देण्याची आजची किंमत किंवा रोख किंमत ह्मणून मालकाला द्यावी, अशी वहिवाटे व्यापारी लोकांत आहे.

उदाहरणार्थ, एका दुकानदाराची ६०३ रुपयांची एका महिन्याच्या मुदतीची हुंडी एका पेढीवाल्यावर आली आहे असें समजा. आतां ह्या दुकानदाराला ६०० रुपये एक महिन्यापावेतों वापरण्याला सांपडले, तर त्यांवर गेला बाजार ३

रुपये नफा करितां येईल अशी त्याची खात्री असते. तसेंच पेढीवाल्याचे पडून राहणारे ६०० रुपये एक महिनापावेतो व्रिनधोकपणानें व्याजीं लावण्याला सांपडून, त्यावर ॥० प्रमाणें मिती सुटली, तर त्यांत तोही खूप होतो. ह्याप्रमाणें दोघांच्याही विचारानें हुंडीची कसर आठ आण्यांच्या मितीनें कापून द्यावीघ्यांवी असें ठरते.

एथें पेढीवाल्याचे ६०० रुपये दुकानदाराकडे व्याजीं लागले जाऊन, महिन्याचे अखेरीस त्यांची रास ६०३ रुपये ही त्याला हुंडीचे रुपये हणून मुदतीस मिळाली जाते. ह्या रास्त विचारानें रोख किंवा आजची किंमत, व कसर, ह्यांचीं लक्षणें ठरतात तीं अशीं.—

लक्षणें.— मुदतीच्या देण्याचा जो भाग आजरोजीं मुद्दल समजून व्याजीं लाविला, तर त्याची दिलेल्या दराची त्या मुदतीची रास त्या देण्याइतकीच होईल, त्या भागाला त्या देण्याची आजची किंमत किंवा रोख किंमत हणावें आणि त्या भागाच्या व्याजाला त्या देण्याची कसर हणावें.

ह्या लक्षणावरून अशी रीति उत्पन्न होते कीं मुदतीचें देणें हें राशि समजावें, आणि १०० रुपये (किंवा १ रुपया इ.) मुद्दल, व त्याचें दिलेल्या दराचें त्या मुदतीचें व्याज, ह्यांच्या प्रमाणांत त्याचे भाग करावे; हणजे मुदतीच्या देण्याची आजची किंमत व कसर हीं प्रमाणभागांच्या रीतीनें काढावीं.

उदाहरण १ लें.— विचारदासापासून व्यापारदासानें ४०० रुपये घेतले आहेत. ह्यांची रास ५ महिन्यांनीं आठ आणे मितीनें ४१० रुपये आणून द्यावी असा करार आहे. ह्या रोख्याचे तीन महिने भरून गेले आहेत, तर ह्याची आजची रोख किंमत व कसर काय ?

ह्या उदाहरणांत शिल्लक राहिलेली मुदत २ महिन्यांची आहे, व १०० रुपयांचें २ महिन्यांचें व्याज आठ आणे मितीनें १ रुपया होतें. ह्यावरून १०१ देण्याची आजची किंमत १०० रुपये व कसर १ रुपया ठरते. हणून त्रैराशिकाप्रमाणें.

१०१ रु. दे : ४१० रु. दे = १ रु. क : य. क.

∴ य = $\frac{४१० \times १ रु.}{१०१} = ४ रु. ० आ. ११ पै.$

तसेंच. १०१ रु. दे : ४१० रु. दे = १०० रु. किं : क्ष. किं.

∴ क्ष = $\frac{४१० \times १०० रु.}{१०१} = ४०५ रु. १५ आ. १ पै.$

आतां शेंकडा आठ आणे महिना प्रमाणें ४००. रुपयांचें व्याज दरमहा २ रु. होतें, हणून भरलेल्या तीन महिन्यांचें व्याज ६ रु. व मुद्दल ४०० रु. मिळून होणारी रास जी ४०६ रु. तीच आजची किंमत असली पाहिजे असें प्रथमदर्शनीं कोणाला वाटतें. परंतु एथें त्यानें आणखी एक गोष्ट विचारांत घेतली पाहिजे. ती ही कीं ४०६ रु. ही रक्कम २ महिन्यांनंतरच्या देण्याचा भाग दाखविते, आणि ४०५ रु. १५ आ. १ पै. ही रक्कम ४१० रु. ह्या मुदतीच्या देण्याची आज मिळण्याजोगी रोख किंमत दाखविते. ही रोख किंमत आजमितीस व्याजां लाविली तर ती दोन महिन्यांनीं ४१० रु. ह्या देण्याची बरोबरी करिते, हणून हीच त्या देण्याची आजची किंमत हाटली पाहिजे.

४१० रु. हे दोन महिन्यांनंतर येणारे असल्यामुळे ते आजमितीस घेण्याचा अधिकार विचारदासाला येत नाही, हणून त्या रकमेवरचें व्याज काढून घेण्याचा अधिकार व्यापारदासालाही येत नाही. तथापि ह्या विचाराकडे आपले देशांतले व इंग्लंड देशांतलेही व्यापारी लोक लक्ष देत नाहीत. व्यापारी लोक कसर व आजची किंमत ह्या शब्दांचे अर्थ वेगळ्यारीतीनें करतात. ते असें.—

मुदतीच्या देण्याचें जें त्या मुदतीचें व्याज त्याला व्यापारी-कसर हणतात आणि ही कसर त्या देण्यांत वजा होऊन जें येतें त्याला व्यापारी आजची किंमत हणतात. उदाहरणार्थ, वरचेंच उदाहरण खाली सोडविलेले पहा.

१०० रु. ये : ४१० रु. ये. } = $\frac{१}{२}$ रु. व्या. क. : येणारी व्या. क.
१ म. : २ म.

∴ व्या. क. य. = $\frac{४१० \times २ \times \frac{१}{२} रु.}{१००} = ४ रु. ९ आ. ७ पै.$

व ४१० रु. - (४ रु. ९ आ. ७ पै) = ४०५ रु. ६ आ. ५ पै.
अशा रीतीने ४ रु. ९ आ. ७ पै. ही रक्कम व्यापारी देणे-
दार कसर हणून कापून घेतो.

आणि ४०५ रु. ६ आ. ५ पै. ही रक्कम मुदतीने देण्याच्या
रकमेची आजची किंमत हणून मालकाला देतो.

ह्याप्रमाणे व्यापारीकसर ही पूर्वी सांगितलेल्या खऱ्या
कसरीपेशां फाजील असते हणून आपण कसर या शब्दाने
खरी कसर घेऊं आणि हिला व्यापारीकसर हणूं.

आतां, लक्षणांप्रमाणे पाहतां.

∴ आज किंमत + आज किंमतीचे व्याज = मुदतीचे देणे.

आज किंमत + खरी कसर = मुदतीचे देणे.

व आज किंमतीचे व्याज + खऱ्या कसरीचे व्याज = व्या-
पारीकसर.

अर्थात् व्यापारी देणेदार हे खऱ्या कसरीपेशां त्या कसरीचे
त्या मुदतीचे व्याज फाजील कापून घेतात आणि तितक्याच मा-
नाने आज किंमत कमी देतात. ही व्यापारी कसर खरी कसर
नव्हे. ही देणेदारांना फायदेशीर होणारी वाव आहे. देणेदाराला
कांहीं फायदा देऊन त्याला कसर हणावे, ही गोष्ट व्यापारी घेणे-
दारांच्या ह्या व आणखीही एक दोन कृत्यांत दिसून येते. जशी.—

दाणागोटा, तूप, गूळ, साखर, खोबरें, तेल, इत्यादि दे-
शीमाल ठोक विक्रीने विकणारे अडतवाले हे, रोख पैसा दे-
णाराला शेंकडा आठवाराआणे मितीने कसर कापून देतात.
कापड, छऱ्या, कागद, सूत, सुया, टांचण्या, इत्यादि विलायती
माल ठोक विक्रीने विकणारे मुंबई वगैरे ठिकाणचे मोठाले
व्यापारी हे, रोख पैसा देणाराला शेंकडा तीन चार रुपयांच्या
दराने कसर कापून देतात. असल्या ठोक विक्री करणाऱ्या
मोठाल्या व्यापाऱ्यांना उचापतीचा पैसा ताबडतोब गोळा करणे
असला, हणजे ते नेमलेल्या मुदतींत हिशेब पुरा करून देणारांना
शेंकडा दहा रुपये प्रमाणे कसर कापून मिळेल अशा जाहिराती
देतात. असल्या उदाहरणांत अडतवाले, मोतीवाले, वगैरे

एका महिन्यानें पैसा घेतात अगर एका महिन्याचे व्याजाइतकी कसर कापून देतात, तसेंच मोठाले व्यापारी, हे एका वर्षानें पैसा घेतात अगर एका वर्षाच्या व्याजाइतकी कसर कापून देतात, इतकें खरें आहे. तथापि हें येणें मालाच्या खरेदीबद्दल असतें, ह्याकरितां ग्राहकांच्या हातीं माल दिल्याबरोबर त्याची किंमत घेण्याचा अधिकार अडतवाले व मोठाले व्यापारी ह्यांकडे येतो, ह्याणून ह्या कसरीला व्याज हें नांव प्राप्त होत नाहीं. व्यापारी घेणेदार हा खऱ्या कसरीच्या व्याजाइतकी कसर देणेदाराला आपल्या व्याजांतून बक्षिसादाखल फाजील कापून देतो हें व्यापारीकसरींत दर्शविलें आहे; त्याच नमुन्यानें हे व्यापारी ही कसर आपल्या नफ्यांतून बक्षिसादाखल कापून देत असतात. उदाहरणार्थ, अडतवाल्यांकडे गाडीवाले वगैरे जे लोक माल आणतात, त्यांना राहण्याला व माल ठेवण्याला जागा देणें, त्यांना जेऊं घालणें, त्यांचा माल विकून रोख पैसा हातीं देणें, असल्या बाबींबद्दल दरपल्ल्यास चारसहा आणे प्रमाणें नफा अगर अडत त्यांच्यापासून अडतवाले घेत असतात. त्याच नफ्यांतून शेंकडा आठबऱ्हा आणेप्रमाणें भाग ते आपल्या ग्राहकांना कसर ह्याणून कापून देतात. अशाच रीतीनें मोठाले व्यापारी जो माल इंग्लिश व्यापाऱ्यांकडून घेतात, तो माल सुमारें शेंकडा ३५ टक्के नफा घेऊन ग्राहकांना पतीवर देत असतात, व त्यांतूनच पांच दहा टक्केप्रमाणें नफा या ग्राहकांना कसर ह्याणून कापून देत असतात. ह्याप्रमाणें हीही व्यापारीकसर वर जी खरी कसर ह्याणून सांगितली तिच्या सदराखाली घेत नाहीं. ह्या कसरीचीं उदाहरणें साध्या त्रैराशिकानें किंवा सरळ व्याजाप्रमाणें करावयाचीं हें उघड आहे.

देण्याच्या चिठ्ठीचा.— एक मनुष्य दुसऱ्यापासून पैसा घेतो, आणि तो पैसा त्या दुसऱ्याला (अगर तो सांगेल त्याला) नेमलेल्या मुदतीस तिसऱ्यानें देऊन, तो आपले नांवें लिहिण्याविषयी जी चिठ्ठी त्या तिसऱ्या मनुष्यावर देतो, तिला आपल्या भाषेंत हुंडीचिठ्ठी ह्याणतात, आणि इंग्रजी भाषेंत बिल-आव्-

एक्सचेंज हणतात. एक मनुष्य दुसऱ्या मनुष्याला (किंवा तो सांगेल त्याला) नेमलेल्या मुदतीस पैसा देण्याचा करार ज्या चिठ्ठीत लिहितो, तिला इंग्रजीत प्रामिसरी नोट (दस्तऐवज) हणतात.

हुंडी मुदतीची असली तर ती दाखविल्यापासून अमुक दिवसांनी पैसा द्यावा अशी मुदत लिहिलेली असते. ही मुदत भरण्यापूर्वी पैसा घेणे असला, तर राहिलेल्या मुदतीबद्दल कसर कापून द्यावी लागते. हुंडी २१ दिवसांपेक्षा अधिक मुदतीची असली, तर तिजवर भकाई ह्या नांवाने ४ दिवसांची कसर आणखी कापून द्यावी लागते.

बिल-आव-एक्सचेंज मुदतीचे असले तर त्यांत व प्रामिसरी नोटीमध्ये ती लिहिण्याचे तारखेपासून अमुक महिन्यांनी पैसा द्यावयाचा अशी मुदत लिहिलेली असते. ही मुदत ती लिहिण्याच्या तारखेपासून त्याच तारखेपावेतो महिने गणून मोजावयाची असते, आणि त्यांचा पैसा देणारांला तीन दिवसांची ग्रेस (सवलत) द्यावयाची असते. ह्यावरून ता० १ जानेवारीचे दोन महिन्यांच्या मुदतीचे बिल असेल तर त्याची मुदत ता० १ मार्च रोजी नांवाने सरते तरी ते ता० ४ मार्च रोजी पैसा घेण्याला योग्य होते. तसेच तीन महिन्यांच्या मुदतीचे बिल ता० ३० किंवा ता० ३१ जानेवारीस लिहिलेले असले, तरी ते ता० ३० एप्रिल रोजी नांवाचे पैसा घेण्याजोगे होते आणि ता० ३ मे रोजी खरोखर पैसा घेण्याजोगे होते.

असेल बिल वाळगणाराला त्याचा रोख पैसा करणे असला हणजे ते तो एखाद्या पेढीवाल्याकडे किंवा बिले वटावणाराकडे नेतो. ह्या बिलाचा ज्याशी संबंध आहे ते मनुष्य योग्यतेचे आहेत, अशी त्या पेढीवाल्याची किंवा बिले वटावणाराची खातरी असली, तर तो ते बिल स्वीकारतो आणि राहिलेल्या मुदतीची कसर कापून घेऊन बाकीचा पैसा ते बिल वाळगणाराला देतो.

येथे पेढीवाला अगर बिले वटावणारा हा त्या बिलांतील मुदतीचे राहिलेले दिवस आणि माफीचे तीन दिवस ह्यांची व्यापारीकसर कापून घेतो.

उदाहरण २ रें.— ३४३ पौं. .१५ शि. ६ पे. रकमेचें विल एप्रिलच्या १५ वीस लिहिलेलें चार महिन्यांच्या मुदतीचें आहे. हें मेच्या ८ वीस $४\frac{३}{४}$ दरानें वटावलें आहे तर तें विल बाळगणारास काय मिळालें ?

मे.	२३	} ह्यां विलाचे ४ महिने आगष्टच्या १५ व्या तारखेस पुरे होऊन तें आगष्टच्या १८ व्या तारखेस पैसा घेण्याला योग्य झालें ह्मणजे मेच्या ८ व्या तारखेपासून १०२ दिवसांनीं हें पैसा घेण्याजोगें झालें ह्मणून १०२
जून.	३०	
जुलई.	३१	
आगष्ट.	१८	
	<u>१०२</u>	

दिवसांचें व्याज काढलें पाहिजे. दिलेल्या रकमेचें दशांशरूप ३४३.७७५ पौं. येतें. ह्मणून,

$$\left. \begin{array}{l} १०० \text{ पौं. : } ३४३.७७५ \text{ पौं.} \\ ३६५ \text{ दि. : } १०२ \text{ दि.} \end{array} \right\} = ४\frac{३}{४} \text{ पौं. : क्ष.}$$

व्याजाचा बदल मुद्दल व मुदत ह्यांच्या समप्रमाणांत व्हावयाचा.

$$\begin{array}{r} ३४३.७७५ \text{ पौं. मु.} \\ \quad \quad \quad ९\frac{३}{४} \text{ दुप्पट दर.} \\ \hline ३०९३.९७५ \\ १७१.८८७ \quad \quad \quad U \\ \hline ३२६५.८६२ \\ \quad \quad \quad १०२ \text{ दि.} \\ \hline ०६५३१७२४ \end{array}$$

$$\underline{३२६५८६२}$$

$$७३०००) ३३३११७.९२४$$

∴	$\frac{१}{३}$	१.११०३९	} पृष्ठ २२१ येथील तृतीयांशादि रीतीनें.
	$\frac{१}{३}$	१११०४	
	$\frac{१}{३}$	१११०	
	$\frac{१}{३}$	<u>४५,६३७१</u>	
	$\frac{१}{३}$	४५	

$$१०००००) ४.५६३२६ \text{ पौं.} = ४\text{पौं. } ११\text{शि. } ३\text{पे. कसर का.}$$

व बाकी ३३९२११७४ = ३३९ पौं. ४ शि. ३ पे. माल-
काला दिले. हीं उत्तरें.

उदाहरण ३ रें.— चैत्रशुद्ध प्रतिपदेस एकानें सावकारास असा रोखा लिहून दिला होता कीं, आजपासून ११ महिन्यांनीं तुजला रोख ५०० रुपये देऊन हा कागद सोडवून नेईन परंतु त्या गृहस्थास कार्तिक वद्य १२ स कागद सोडवून घेण्याची ऐपत आली; तर दरसाल दरशेंकडा ४ रुपये व्याजाप्रमाणें, सावकारानें केवढी रक्कम घेऊन त्याच्या हवालीं कागद करावा? वर्षांचे दिवस ३६० धरावे.

खुलासा—कार्तिक व. १९ पासून फाल्गुन शु. १ पर्यंत ९४ दिवस होतात. तेव्हां इतके दिवसांचें व्याज ५०० रुपयांत कमी करून सावकारानें गृहस्थास त्याचा कागद परत द्यावा.

१०० रुपयांचें ३६० दिवसांचें व्याज ४ रुपये आहे, तर ९४ दिवसांचें व्याज $\frac{९४}{३६०} = \frac{४७}{४५}$ होईल. हणून.—

$$१०० + \frac{४७}{४५} : ५०० = \frac{४७}{४५} \text{ रु. क. : ज्ञेय क.}$$

$$\therefore \text{ज्ञक.} = \frac{४७}{४५} \text{ रु.} \times \frac{५००}{१} \times \frac{४५}{४७} = \frac{२३५००}{४५४७}$$

$$= ५१२६५॥ \text{ पै.}$$

हणून सावकारानें ५०० रु. - ५१२६५॥ = ४९४६१३६॥
घेऊन त्या गृहस्थास त्याचा कागद परत द्यावा.

उदाहरण ४ थें.— दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये दरानें ३ वर्षांच्या देण्यावर ४९ $\frac{३}{४}$ रु. कसर कापली आहे, तर तें देणें व त्याची आजची किंमत काय ?

५ रुपये दरानें १०० रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज १५ रुपये होतें. कसरीचा (व्याजाचा) बदल मुदलाच्या समप्रमाणांत व्हावयाचा, व राशीच्या समप्रमाणांतच व्हावयाचा. हणून.—

$$१५ \text{ रु. क. : } ४९\frac{३}{४} \text{ रु. क.} = १०० \text{ रु. आज किं. : क्ष आज किं.}$$

$$\therefore \text{आ. किं. क्ष.} = \frac{१००}{१५} \text{ रु.} \times \frac{९२}{४} \times \frac{१}{१५} = \frac{९२००}{९}$$

$$= ३३० \text{ रु.}$$

आणि ३ वर्षांचें देणें = ३३० रु. + ४९॥ रु.
= ३७९॥ रु. हें १ लें उत्तर.

हें २ रें उत्तर.

उदाहरण ५ वें.— दीड वर्षांच्या देण्यावर व्यापारीकसर ५४ रुपये कापली असून खरी कसर ४९.५४१ रुपये आकारत आहे, तर कसरीचा दर कोणता व देण्याची रक्कम कोणती ?

येथें ५४ रु.— ४९.५४१ रु. = ४.४५९ रुपये, हें खऱ्या कसरीचें १८ महिन्यांचें व्याज आहे. ह्मणून,

$$\left. \begin{array}{l} ४९.५४१ रु. : १०० रु. \\ १८ म. : १२ म. \end{array} \right\} = ४.४५९ रु. व्या. : य दर.$$

कसरीचा बदल मुदलाच्या व मुदतीच्या समप्रमाणांत व्हावयाचा. ह्मणून,

$$य. = \frac{४.४५९ रु. \times १०० \times ३२^२}{४९.५४१ \times ३६} = \frac{८९९.८००}{१४८.२२३}$$

= ६ रु. हा दरसाल दरशेंकडा कसरीचा दर.
हें १ लें उत्तर.

$$\left. \begin{array}{l} आतां स. ६ रु.व्या. : ५४ रु.व्या. \\ व्य. १२ म. : १८ म. \end{array} \right\} = १०० रु.दे. : क्षदेणें.$$

मुदलाचा बदल व्याजाच्या समप्रमाणांत व मुदतीच्या व्यस्त प्रमाणांत व्हावयाचा. ह्मणून.—

$$क्ष = \frac{१०० रु. \times ५४ \times ३२^२}{६ \times ३६} = ६०० रु. देणें हें २ रें उत्तर.$$

उदाहरण ६ वें.— ७१५ रु. देण्यावर ३ रु. दरानें ६५ रु. कसर आकारते, तर त्या देण्याची मुदत काय ?

७१५ रु. दे.— ६५ रु. क. = ६५० रुपये आजची किंमत अगर मुदल आहे, व ६५ रुपये हे त्याचें शोधण्याच्या मुदतीचें व्याज आहे. ह्मणून.—

$$\left. \begin{array}{l} व्य. १०० रु. मु. : ६५० रु. मु. \\ स. ३ रु. व्या. : ६५ रु. व्या. \end{array} \right\} = १ वर्षकाळ : शकाळ$$

मुदतीचा बदल मुदलाशीं व्यस्त प्रमाणांत व व्याजाशीं समप्रमाणांत होतो. ह्मणून.—

$$श = \frac{१ वर्ष \times ३६० \times ६५}{६५० \times ३} = ३\frac{१}{३} वर्षें.$$

= ३ वर्षें ४ महिने, हें इच्छाफल.

सूचना.— एका रुपयाच्या एका मुदतीच्या राशीचा त्या मुदतीइतका घात केला, तर तो १ रुपयाचा त्या मुदतीचा चक्रवाढ व्याजाचा राशि दाखवितो. ह्या राशीची आजची किंमत १ रु. दाखवितो, आणि कसर १ वर्ची दशांशपंक्ति दाखविते, ह्मणून मुदतीच्या देण्याची आजची किंमत व कसर ही ह्याच प्रमाणभागांच्या आधारानें काढितां येतात. ~

उदाहरण ७ वें.— तीन वर्षांच्या देण्याची कसर (व्याज) दरसाल दरशेंकडा ४ रुपये प्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें ३२॥॥ रु. आकारते आहे, तर त्या देण्याची आजची किंमत काय ?

शेंकडा ४ ह्या दरानें १ रुपयाची ३ वर्षांची चक्रवाढीची रास $१.०४^३$ येते. हींतून १ रुपया वजा केला ह्मणजे बाकी चक्रवाढीचें व्याज राहिल. ह्मणून.—

$(१.०४^३ - १)$ रु. व्या. : ३२.७५ रु. व्या. = १ रु. मु. : क्ष.मुद.

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{१ \times ३२.७५}{१.०४^३ - १}$$

१.०४	१,२,४,८,६,४)	३२.७,५०००	(२६२.२८५६
१.०४		७७७७२०		१६
१.०४	००	२८५३६		४.५६९६
	४१६	३५६३		१२
१.०८१६	००	१०६६		६.८३५२
	४३२६४			६८
१.१२४८६४				६८
१				६८

६८ ∴ रु. २६२८४८७
६ ही आजची किंमत—

४८६४ हे १ रु. चें व्याज.

उदाहरण ८ वें.— ३२४ पौंड १६ शि. ९ पे. ४ वर्षांनीं आहेंत. ह्यांवर शेंकडा $३\frac{१}{२}$ प्रमाणें चक्रवाढीनें केवढी पावी ?

शेंकडा ३.५ दरानें १ रुपयाची १ वर्षांची रास १.०३५ होते. ह्मणून.—

	४		
	१°०३५	: ३२४°८७५	= १ रु. आ. किं. : क्ष.
∴	क्ष =	$\frac{१ \text{ रु.} \times ३२४.८७५}{१.०३५}$	
१°०३५	१,१,४,७,५,२,२)	३२४°८३७५	(२८३°०७७४
१°०३५		९५ ३३३ १	२०
१°०३५		३ ५३ १३	५°५४८०
३१०५.		८८७	१२
५१७५		८४	६°५७६०
१.०७१२२५		४	
३२१३७		०,	
५३५६			
१°१०८७१८		३२४. पौं. १६ शि. ९ पे. देणें.	
३३२६१		२८३ पौं. १ शि. ६ $\frac{३}{४}$ पे. आज किं.	
५५४३		४१ पौं. १५ शि. २ $\frac{३}{४}$ पे. कसर.	
१°१४७५२२		कापावी हें उत्तर.	

अभ्यासाकारितां उदाहरणें. छा.

१. साडेतीन वर्षांनीं १५१ पौंड १७ शि. ६ पे. मिळावयाचे, अशा रोख्याचें दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडप्रमाणें व्याज कमी करून आज रोख पैका घेतला, तर किती पौंड व्याज कापलें जाईल ?

२. ४ वर्षांनीं ५९८ रुपये ९ आणे मिळावयाचे, असें खत दरसाल दरशेंकडा ५ $\frac{३}{४}$ रुपयेप्रमाणें व्याज कमी करून देणें आहे, तर त्याची आज किंमत किती व्हावी ?

३. एक वर्ष ११५ दिवसांनीं रु. ५९८॥ \equiv एकास द्यावयाचे आहेत, ते दरसाल दरशेंकडा ५ रु. प्रमाणें व्याज कमी करून तो आज मागेल तर त्यास किती रुपये द्यावे ?

४. ३॥ वर्षांनीं २१०॥ \equiv मिळावयाचे, अशा रोख्याची आज किंमत करणें झाल्यास दरसाल दरशेंकडा ७८ \equiv प्रमाणें किती कमी होईल ?

पुढील रोख्यांच्या मुदती भरण्याच्या पूर्वी त्यांचा पैसा घेतला तर प्रत्येक रकमेचें व्याज किती कापलें जाईल ?

रोख्याची मितो व मुदत. चांद्रवर्षाचें मान ३६० दि. धरावें. इंग्रजीमानाचें वर्ष ३६५ दि. धरावें.	मुदतीनंतर पैसा एकंदर मिळाव- यांचा तो.	मुदतीचे पूर्वी पैसा घेतल्याची मितो व व्याजाचा दर.
५. { चैत्र शुद्ध १५ मु- दत ८ महिन्यांची.	रु. ३३७॥.	भाद्रपद वद्य १२. ५ रु. शें. प्र.
६. { आश्विन वद्य ४ मु- दत ३ महिन्यांची.	रु. १२३८८=	मार्गशीर्ष वद्य १. ३ रु. शें. प्र.
७. { वैशाख शुद्ध ३ मु- दत १ महिन्याची.	रु. ८१२॥=	वैशाख वद्य १३. ६ रु. शें. प्र.
८. { ता. ६ मार्च मुदत ७ महिन्यांची.	पौं. शि. पे. ४१९ १२ १	ता. १५ सप्टेंबर. ५ पौं. शें. प्र.
९. { ता. १२ सप्टेंबर मु- दत ५ महिन्यांची.	५०३ १० ६	ता. १६ ज्यानेवारी. ४ पौं. शें. प्र.
१०. { ता. ३० एप्रिल मु. ९० दिवसांची.	१२५८.१६ ३	ता. २२ जून. ४ पौं. शें. प्र.
११. { ता. ५ आगस्त मु. ५ महिन्यांची.	रु. पा. आ. ११५ ३ २ ३॥	ता. ३ दिसेंबर. ३ रु. शें. प्र.
१२. { ता. २५ दिसेंबर मु. २ महिन्यांची.	१८४६ १ १	ता. ८ फेब्रुवारी. ६ रु. शें. प्र.
१३. { ता. ३१ मे मुदत ४ महिन्यांची.	१६७० ३ ३	ता. ३ सप्टेंबर. ४ रु. शें. प्र.

आज किंमत केवढी द्यावी ?

कधी	काय द्यावयाचें दर (सालीना शेंकडा) तर
१४. २ वर्षांनीं रु. ९२६५	४॥ " "
१५. ३ " पौं. ६०५.१०.६.	४ पौं. १५शि. " "
१६. १८ महिने, गिनी २५	पौं. ३.१२.६ " "
१७. १५॥ वर्षें रु. ८४३६॥.	२॥ " "

१८. ३ वर्षे ५ म. पौं. १२४३.२.६ ३.२.६ "
 १९. ४ व. ९० दि. पौं. ११४४.८.१ २ $\frac{३}{४}$ "
 कसर केवढी कापून व्यावी ?

- कधीं काय घावयाचें दर (सालीना शेंकडा) तर
 २०. ९ म. नीं पौं. ४१२०.८.७ ४ "
 २१. ४ म. पौं. १२३८२.४.० ३ $\frac{३}{४}$ "
 २२. २ व. ९ म. पौं. ४५० ४॥. "
 २३. १ व. ११५ दि. गिनी १००० ३॥. "
 २४. ५५ दि. पौं ८६२.१०.०. ४॥. "
 २५. १३६ दि. पौं. ३२८५.१५.०. ५।. "
 २६. १ वर्षानें शेंकडा १ दरानें १ पौंड देणें त्याची आज किंमत काय ?

२७. ३ महिन्यांनीं ३२८ पौं. १३ शि. ५ पे. देणें आहेत, त्यांची आजची किंमत ३२५ पौं. ८ शि. ४ पे. आहे तर कोणत्या दरानें कसर कापली ?

२८. पौं. १३७३५ ची ३ $\frac{३}{४}$ दरानें ३३५ पौंड कसर कापिली आहे तर रक्कम किली पूर्वी दिली ?

२९. केवढी रक्कम १ वर्ष ४ महिन्यांनीं देणें असली तर तिची कसर ४ $\frac{३}{४}$ दरानें ४८ पौंड ९ शि. कापली जाईल ?

३०. एका व्यापाऱ्याला रोख पैसा दिला तर पौंड २०. ५. ६॥. च्या १२ महिन्यांनीं देण्याच्या खात्यांतून १९ शि. ३॥. पेन्स बाद घालितो, ह्यावरून तो कोणत्या दरानें कसर कापून देतो ?

३१. एक ईस्तेत, क ३७८०० पौंड रोकडीला मागतो, आणि ख ४५४०० पौंडांच्या ४ वर्षांच्या मुदतीच्या रोख्याला मागतो. येथें ५ दराचें व्याज विचारांत घेऊन ह्यांतील कोणती मागणी केवढ्यानें फायदेशीर आहे तें सांगा ?

३२. १९६ पौंड ४ शि. ४ $\frac{३}{४}$ पे. ६ महिन्यांनीं ८ दरानें घावयाचे आहेत, ह्या देण्यावरची कसर आणि ह्या देण्याचें व्याज ह्यांत फरक काय पडेल ? रामचंद्र भारकर पटवर्धन.

३३. पौंड ७८. ९. ९. आजपासून ८ महिन्यांनी देणें आहेत, ह्यावर कसर पौंड ३.०. ४ $\frac{१}{२}$ इतकी कोणत्या दरानें आकारेल ?

३४. आजपासून ३१. वर्षांच्या देण्यावर ५॥॥. दरानें पौंड १६. १४. ९ इतकी कसर आकारते, तर तें देणें केवढें असावें ?

३५. पौंड ५८९. ६. ३ कांहीं मुदतीने घ्यावयाचे असून त्यांची आजची किंमत ३ $\frac{१}{२}$ दरानें ५०० गिणी होत आहे तर ती मुदत काय असावी ?

३६. दोनवर्षांचें ४९४ पौंड १० शिलिंगांचें ३॥॥. दराचें व्याज आणि दोनवर्षांनी देणें असलेल्या ४९४ पौंड १० शिलिंगांची ३॥॥. दराची कसर ह्यांतील अंतर सांगा.

३७. एका धनगरानें १२० पौंडांच्या १२ महिन्यांच्या मुदतीच्या रोख्यावर ७५ मेंढ्या विकत घेतल्या, आणि त्याच दिवशीं त्या प्रत्येकीस ३५ शिलिंग रोख घेऊन विकून टाकिल्या, ह्या व्यापारांत त्याने नफा काय केला तें सांगा. मूळचा विकणारा पांच दरानें कसर कापून देऊन रोख पैसा घेण्यास कबूल आहे.

३८. २॥॥. वर्षांचें पौ. २४६. १३. ४ चें ५॥॥. दराचें व्याज, आणि २॥॥. वर्षांनी देण्याच्या पौ. २८३. १९. ६ ची ५॥॥. दराची कसर, ह्यांतील अंतर दाखवा; आणि मुदतीच्या देण्याच्या आज किंमतीचें व्याज हें त्या देण्याची कसर दाखवितें हें स्पष्ट करा.

३९. नोकरीचा पगार महिन्याच्या शेवटी देण्याबद्दल आरंभी दिला, तर सालीना शेंकडा ४ $\frac{३}{४}$ दरानें त्या पगाराचा केवढा भाग कमी द्यावा ?

४०. जर व्यापाऱ्याने आपल्या मालाला रोकडीची व सहामाही मुदतीची अशा दोन किंमती लावल्या; तर सालीना शेंकडा ७ $\frac{३}{४}$ दरानें ह्या किंमती कशा प्रमाणांत ठेवाव्या ? एका पदार्थाची वरील मुदतीची किंमत ३३ पौंड ४ शि. असली तर रोकडीची किंमत काय असावी ?

४१. दोनशें पंचाहत्तर पौंडांची नेमलेल्या मुदतीची कसर २५ पौंड असली तर (१) त्यांची दुप्पट मुदतीची कसर काय होईल ? आणि (२) त्यांची निपट मुदतीची कसर काय होईल ?

४२. ५२२ पौंड १० शिलिंगांचें नेमलेल्या मुदतीचें व्याज पौं. ३४. ७. ६ आहे तर त्याच रकमेची त्याच मुदतीची कसर काय होईल ?

४३. आठ महिन्यांनीं देण्याच्या रकमेवरील कसर $६\frac{३}{४}$ दरानें पौंड ४३. १५. $९\frac{३}{४}$ आकारते, ह्या देण्याची आजची किंमत सांगा.

४४. एका रकमेचें दोन वर्षांचें व्याज ७१ पौंड १६ शि. $७\frac{१}{२}$ पे. आहे आणि त्या रकमेची त्या मुदतीची कसर ६३ पौंड १७ शि. आहे तर सालीना शेंकडा दर व रक्कम सांगा. (पद्धति ३ री पहा.)

४५. एका रकमेचें $४\frac{३}{४}$ दराचें $२\frac{१}{२}$ वर्षांचें व्याज व कसर ह्यांचें अंतर पौं. २. १२. $७\frac{३}{४}$ आहे, तर त्या रकमेवरील कसर व ती रक्कम सांगा. (पद्धति पहा.)

४६. एका मनुष्यानें ३० गिनींस एक घोडा विकत घेतला. आणि लागलाच तो ६ महिन्यांनीं येणाऱ्या ३८ पौंड १० शिलिंगांस विकला. ह्या रकमेच्या व्याजाचा दर सालीना शेंकडा ६।० घेऊन ह्याला शेंकडा नफा काय झाला तो सांगा.

४७. मी ३५०० पौंडांस एक जमीन घेऊन ती लागलीच ४००० गिनींस विकत दिली. ह्या रकमेचे दोन समान हप्ते ३ व ६ महिन्यांनीं यावयाचे आहेत, येंथें रकमेचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ६ प्रमाणें घेऊन मी ह्या व्यापारांत नफा केवढा मिळविला तें सांगा.

४८. एका मनुष्याचें वेतन १००० गिनी असून त्या ४ तिमाहींच्या समान हप्त्यांनीं दिल्या जात आहेत, तर वर्षाचे आरंभीं काय द्यावें ? हणजे ते दरसाल दरशेंकडा ५ टक्केप्रमाणें ४ ही हप्ते दिले जातील ?

४९. सावकाराकडे सालीना शेंकडा ३।।० टक्केप्रमाणें आज

मितीस केवढी रकम ठेवावी ह्याणजे त्याला प्रत्येक वर्षाचे अखेरीस २५० पौंडप्रमाणें ३ वर्षें पावेतो रकमा तंतोतंतपणें दिल्या जातील ?

५०. एका सावकाराला आजपासून ३ महिन्यांनीं १२५ पौंड देणें आहेत, आणि आजपासून ७ महिन्यांनीं ९० पौंड देणें आहेत, तर आज मितीस त्याकडे दरसाल दरशेंकडा. ४। प्रमाणें केवढी रकम ठेवावी ?

५१. एक बिल ३३ पौंड, १५ शिलिंग रकमेचें व दोन महिन्यांच्या मुदतीचें तारीख १७ जुलई रोजी लिहिलें, आणि तारीख ११ आगष्ट रोजी $३\frac{३}{४}$ दरानें वटावलें तर तें बाळगणाराला केवढी रकम मिळेल ?

५२. पौंड ८४३. १२. ६ रकमेचें ६ महिन्यांच्या मुदतीचें बिल १८ वी दिसेंबर रोजी लिहिलें आणि २६ वी जानेवारी रोजी $५\frac{१}{३}$ दरानें वटाविलें तर त्यावर कसर काय आकारेल ?

५३. पौंड ५६२. २. ६ रकमेचें व तारीख ४ सप्टेंबर रोजी लिहिलें ५ महिन्यांच्या मुदतीचें बिल त्याच दिवशीं $६\frac{१}{३}$ दरानें वटावलें तर त्याची किंमत पेढीवाला काय देईल ? व ती आजच्या खऱ्या किंमतीपेक्षां किती कमी पडेल ?

५४. पौंड ३२१. ४. ३ चें व दोन महिन्यांच्या मुदतीचें बिल तारीख ३१ दिसेंबरास लिहिलें आहे, आणि १४ जानेवारीस $४\frac{३}{४}$ दरानें वटावलें आहे, ह्या बिलावर वटावणावळ किंवा कसर काय आकारेल ? आणि ती खऱ्या कसरेपेक्षां अधिक किती असेल ?

५५. एक बिल पौंड ७७१६. ६. ९ चें अक्टोबर महिन्याच्या १० व्या तारखेस ९ महिन्यांच्या मुदतीचें लिहिलें आहे. हें मार्चाच्या १५ व्या तारखेस ६। दरानें वटावलें तर त्यावर पेढीवाला केवढी रकम कापील ? आणि खरी कसर केवढी आकारेल ?

५६. १२५० पौंडांची रकम आजपासून ४ वर्षांनीं याव-

याची आहे. हीवर ४। दराच्या चक्रवाढीने आजमितीस केवढी कसर आकारेल ?

५७. एक १८ वर्षांचा मुलगा * वयांत आल्यावर त्याला २३५० पौंड द्यावयाचे आहेत. ह्यांची $3\frac{3}{4}$ दराने व चक्रवाढ व्याजाने आज किंमत सांगा.

५८. आजपासून १। वर्षाने २४५ पौंड, ५ शिलिंग द्यावयाचे आहेत. ह्यांची ५॥ टक्यांच्या दराने व ३ माहीच्या चक्रवाढीने आज किंमत काय ?

५९. पौंड २४५०. १८. ९ हे ३॥ वर्षांनी द्यावयाचे आहेत, ह्यांवर ३॥। दराने व चक्रवाढीने आजमितीस केवढी कसर कापावी ?

६०. दहा हजार पौंड ४ वर्षांनी द्यावयाचे आहेत, ह्यांची आज किंमत ५॥। दराच्या सरळव्याजाने काढली व ५॥। दराच्या चक्रवाढ व्याजाने काढली तर त्यांत अंतर काय पडेल ?

६१. आजमितीस केवढी रक्कम भरली तर दरसाल दरशेंकडा $4\frac{1}{2}$ टक्केप्रमाणे चक्रवाढव्याजाने प्रत्येक वर्षाचे अखेरीस ३६५ पौंड प्रमाणे ३ वर्षेपावेतो घेतां येतील ?

ठेव.

कोणत्याही देशाच्या सरकाराला लढाई वगैरे सार्वजनिक कामासाठी वसुलांतून न भागण्यासारखी मोठी रक्कम उभी करण्याची पाळी येते, तेव्हां ते सरकार त्या देशाच्या पतीवर दरसाल दरशेंकडा ३, ४, किंवा ५ टक्के व्याजाच्या प्रामिसरी नोटी (दस्त ऐवज) त्या रकमेइतक्या किंमतीच्या काढून विक्रीला मांडिते. ह्या उसनवारीच्या अगर कर्जाच्या रकमेला पब्लिक फंड किंवा सार्वजनिक भांडवल आणि स्टाक किंवा ठेव हीं नावे देतात. ह्याणून फंडांत पैसा भरणे किंवा ठेव विकत घेणे ह्याचा अर्थ एकंदर उसनवारीचा वाटा विकत घेणे असा करितात.

* मनुष्य २१ वर्षांचा झाला म्हणजे तो वयांत आला असें इंग्लंडांत समजतात.

भागीने व्यापार करणाऱ्या लोकांच्या समुदायाला कंपनी किंवा मंडळी ह्मणतात. ह्या मंडळ्या १०, १००, १०००, अशा पाँडांच्या रकमेला व तिजवद्दलच्या रोख्याला शेअर किंवा भाग (पाती) असे नांव देतात. ह्या भागांचे सर्व हक्के वसूल झाले, ह्मणजे त्या एकंदर भांडवलाला बहुतकरून स्ताक अगर ठेव हें नांव देत असतात. कारण शेअर वेगळाले लेखले आहेत तोंपावेतों ते सगळालेच द्यावे व्याव लागतात. परंतु सगळे शेअर मिळून एक ठेव ह्मटली ह्मणजे तिच्या केवढ्याही हिश्याची देवघेव करितां येते.

रेलवे वगैरे कंपनींच्या भांडवलांत नियमित ठेव आणि सामान्य ठेव असे दोन प्रकार सामान्यतः असतात. नियमित ठेवीचें व्याज सरकारी प्रामिसरी नोटीच्याप्रमाणें ठरलेल्या दरानें मिळतें, ह्या ठेवीला ग्यारंतीद स्ताक (हमी घेतलेली ठेव) ह्मणतात. साधारण ठेवीचें व्याज नफ्याच्या मानानें अधिकउणें मिळत असतें ह्या ठेवीला ओपन स्ताक अगर शेअर (मो-कळी ठेव अगर भाग) ह्मणतात.

सरकारी नोटीचें व्याज आणि कंपनीच्या शेअरांचें किंवा मंडळीच्या भागांचें व्याज अगर नफा ह्यांना दिव्हिदेंद किंवा विभाज्य ह्मणतात. हें विभाज्य सहा सहा महिन्यांनीं वांटून ज्याचें त्याला देतात.

सरकारी प्रामिसरी नोटींना सिक्युरिती (रोखे) हेंही नांव चालतें. ह्या नोटी साधारणतः सगळाल्या विकसाप्त, तथापि अडचणीच्यावेळीं भागानेही दुसऱ्याला विकतां येतात. ह्या नोटीचें सरकारांत रजिष्टर (नोंदणी बूक) ठेवलेलें असतें. त्यांत ह्या नोटी किंवा नोटीचे भाग एकाच्या नांवावरून काढून दुसऱ्याच्या नांवावर चढविले जातात. मंडळीच्या पात्यांच्याही नोंदी अशाच रीतीनें त्या त्या मंडळ्या ठेवीत असतात.

प्रामिसरी नोटीचें मुद्दल सोईस पडेल तेव्हां शकडा शंभरप्रमाणें फेडण्याचा अधिकार सरकाराकडे असतो, पण तें मुद्दल सरकारापासून वसूल करण्याचा अधिकार नोट बाळगणाराकडे

नसतो. ह्यावरून ह्या उत्पन्नाला ठेवीचें व्याज ह्मणण्यापेक्षां उसनवारीवरचें दोन हत्यांचें वर्षासन ह्मणणें विशेष बरें दिसतें. वेगळाल्या ठेवींना त्यांतील व्याजाच्या किंवा वर्षासनाच्या दरावरून शेंकडा ३ ची ठेव, ३॥ ची ठेव, अशीं नांवें देतात.

ठेवींवद्दल सहांमाही व्याज घेण्याच्या मुदती सर्वांच्या एकच नसतात. ह्मणून ज्यांचें व्याज घेतलें गेलें त्या ठेवी विक्रीला काढतात. आणि ज्यांच्या व्याज घेण्याच्या मुदती जवळ ठेपल्या त्या ठेवी मागूं लागतात. तसेंच ज्या मंडळीचे व्यापार भरभराटीने चालतात, त्यांच्या भागांवर विभाज्य त्या नफ्याप्रमाणें अधिक मिळूं लागतें, ह्मणून ते भाग घेण्याला श्रीमान लोक उद्युक्त होतात; आणि ज्या मंडळ्यांचे व्यापार खालावलेले असतात त्यांचे भाग विक्रायाला काढतात. दुसरे विशेष नफ्याचे व्यापार करण्याच्या सोई दिसूं लागल्या ह्मणजे श्रीमान लोक ठेवींतला पैसा काढून त्या व्यापारांत घालूं लागतात; आणि ह्याच्या उलट प्रकार घडला, ह्मणजे बाहेरचा पैसा काढून ठेवींत घालूं लागतात. अशा रीतीनें ठेवींचे व भागांचे ग्राहक नित्यशः अधिकउणे होतात, ह्यामुळे ह्यांच्या किंमती नेहमीं अधिकउण्या होतात.

उदाहरणार्थ, आपणास ४ रुपये शेंकडा व्याजाचा १०० रुपयांचा एक रोखा विकावयाचा आहे आणि त्यावेळेस बाहेर व्याजाचा दर दरशेंकडा ५ रुपये आहे, तर आपले शेंकडा ४ रुपये व्याज मिळण्याच्या १०० रुपयांच्या रोख्याचे १०० रुपये कोणी देणार नाहीं. ५ रुपये शेंकड्याप्रमाणें ८० रुपयांचें व्याज ४ रुपये होतें, ह्मणून १०० रुपयांचा रोखा ८० रुपयांस जाईल. असें झालें ह्मणजे ४ रुपये शेंकड्याची ठेव ऐशींच्या भावानें जात आहे असें ह्मणतात.

कोणतीही ठेव शेंकडा शंभरप्रमाणें विकत असली ह्मणजे तिचा भाव बरोबरीस आहे असें ह्मणतात. शंभर पौंडांच्या ठेवीचे १०५ पौंड मिळत असले, ह्मणजे तिचा भाव ५ वर्ताळ्याचा आहे असें ह्मणतात. शंभर पौंडांच्या ठेवीचे ९५

पौंड मिळत असले हणजे तिचा भाव ५ बट्ट्याचा आहे असे हणतात. तसेच ठेवीच्या भावांत जो पूर्वीच्यापेक्षां चढउतार होतो त्याला तेजीमंदी हणतात.

कोणत्याही सरकारच्या ठेवी कंपनीचे शेअर, किंवा मंडळीच्या पात्या ह्यांच्या खरेदी आणि विक्री ह्या ब्रोकर किंवा दलाल ह्यांच्या मार्फतीने होतात. ह्या खटपटीबद्दल त्याला जे चावे लागते त्याला ब्रोकरेज किंवा दलाली हणतात. कोणत्याही सरकारच्या ठेवीची दलाली त्या ठेवीच्या शेंकड्यास $\frac{1}{4}$ असते हणजे १०० पौंडांस २ शि. ६ पे. व १०० रुपयांस २ आणे पडते. उदाहरणार्थ सरकारी ठेव. ९२ $\frac{3}{4}$ भावाने विकली तर ती घेणाराला $९२\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = ९२\frac{1}{2}$ मिळतात. इतरांच्या दलाली वेगळाल्या असतात व त्या उत्पन्नाच्या शेंकड्यावर असतात.

ज्या उदाहरणांत दलालीचा उल्लेख केला असेल किंवा ज्यापुढे द. हे अक्षर लिहिले असेल त्याच उदाहरणांत दलाली विचारांत घ्यावयाची हा सामान्य संकेत लक्षांत ठेवावा.

पुढे जी उदाहरणे दिली आहेत त्यांवरून वर सांगितलेला प्रकार चांगला समजेल, व ठेवीचे हिशेब कसे होतात हेही लक्षांत येईल.

उ. १ लें— जर ३५०० रुपये देऊन एक ठेव दरशेंकडा ३॥ रुपये व्याजाची अठ्ठाणवच्या भावाने घेतली, तर वर्षास व्याजाचे उत्पन्न काय होईल ते सांगा.

येथे ९८ रुपयांचे व्याज ३॥ रुपये येते असे झाले.

हणून वर्षाचे उत्पन्न = $\frac{३५००}{१००} \times ३॥ = १२५$ रुपये. हे उत्तर.

उ. २ रें.— ३॥ रुपये व्याजाचे हिस्से $९९\frac{1}{2}$ भावाने विकत आहेत, तर किती पैसा भरला हणजे वर्षास १४० रुपये व्याज उत्पन्न होईल ? शंभर रुपयांचा एकेक हिस्सा आहे.

$\frac{१४०}{३॥}$ इतके हिस्से विकत घेतले पाहिजेत, आणि प्रत्येक हिस्शास $९९\frac{1}{2}$ रुपये पडतात, हणून,

$$\text{उत्तर.} = \frac{१४०}{३॥} \times ९९\frac{७}{८} = ३९९५ \text{ रुपये}$$

उ. ३ रें.- ३॥ रुपये व्याजाची ९९ भावानें जाणारी २९००० रुपयांची ठेव विकून, ९० $\frac{५}{८}$ ह्या भावाची ३ रुपये व्याजाची ठेव घेतली, तर व्याजाच्या उत्पन्नांत भेद किती पडेल ?

२९००० रुपयांच्या ठेवीचें ३॥ रु. शेंकड्याप्रमाणें १०१५ रु. व्याज येईल. २९००० रुपयांची ठेव ९९ भावानें दिली तर तिचे $\frac{२९००० \times ९९}{१००} = २८७१०$ रुपये येतील, व हे रुपये तीन रु. व्याजाच्या ठेवींत घातले तर $\frac{२८७१०}{९०\frac{५}{८}} \times ३ = ९५०$

रु. ६ $\frac{३}{४}$ आणे व्याज येईल. ह्मणून पूर्वापेक्षां ६४ रु. ९ $\frac{३}{४}$ आणे तोटा होईल. हें उत्तर.

उ. ४ थें.- ३ दराची ठेव ९० $\frac{५}{८}$ भावानें मिळत आहे तर ८२५ पौंड रोकडीला केवढी ठेव मिळेल ? दलाली हिशेबांत घ्या.

एथें $९०\frac{५}{८} + \frac{१}{८} = ९०\frac{३}{४}$ पौंडांना शंभरांची ठेव मिळते. ह्मणून,

$$९०\frac{३}{४} \text{ पौं. रो. : } ८२५ \text{ पौं. रो.} = १०० \text{ पौं. ठे. : क्षठे.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = १०० \text{ पौं.} \times ८२५ \times \frac{४}{३६३} = ९०९ \text{ पौं. } १ \text{ शि. } ९\frac{३}{९} \text{ पे.}$$

हें उत्तर.

उ. ५ वें.- आपल्या रोकडीला ४ दराचें व्याज पडण्याकरितां ३॥ दराची ठेव कोणत्या भावानें मिळाली पाहिजे ? दलाली विचारांत घ्या.

एथें ४ व्याजाला १०० मुद्दल तर ३॥ व्याजाला केवढें मुद्दल हें शोधिलें पाहिजे. ह्मणून,

$$४ : ३॥ = १०० \text{ पौं. : क्ष पौं.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = १०० \text{ पौं} \times \frac{७}{३} \times \frac{१}{४} = \frac{७००}{४} \text{ पौं.} = ८७\frac{३}{४} \text{ पौं.}$$

८७ $\frac{३}{४}$ पौंडांतच दलाली दिली पाहिजे ह्मणून ठेवीचा भाव $८७\frac{३}{४} - \frac{१}{४} = ८७\frac{२}{४}$ पौंड असला पाहिजे.

उ. ६ वें.- एका गृहस्थानें ४ दराच्या ठेवींत १०० $\frac{३}{४}$ भावानें १५४९ पौंड घातले आहेत तर त्याला सहामाही विभाज्य केवढें मिळेल ?

एथें १०० $\frac{३}{४}$ पौंडांचें सहामाहीचें व्याज २ पौंड ह्या दरानें १५४५ पौंडांचें व्याज काढिलें पाहिजे.

∴ १०० $\frac{३}{४}$ पौ. : १५४५ पौ. = २ पौ. : इष्टविभाज्य.

∴ इष्टविभाज्य = $\frac{२ \text{ पौ.} \times १५४५ \times ४}{४०३}$

= ३० पौ. १३ शि. ४ $\frac{३२०}{४०३}$ पे. हें उत्तर.

उ. ७ वें.— ३ दराच्या ठेवीचें व्याज ५ जानेवारीला मिळतें. ही ठेव २३ एप्रिल रोजी ९३ $\frac{५}{८}$ पौंडांच्या भावानें घेतली तर कोणत्या दरानें व्याज पडेल ?

५ जानेवारीपासून २३ एप्रिलपावेतो १०८ दिवस होतात.

१०० पौंडांचें ३ दरानें १०८ दिवसांचें व्याज १७ शि. ९ पे. होतें. आतां ९३ पौ. १५ शि. ० पे. ही ठेवीची किंमत दलालीसुद्धां आहे. व ० पौ. १७ शि. ९ पे. हें ठेवीचें जमलेलें व्याज आहे.

∴ ९२ पौ. १७ शि. ३ पे. ही ठेवीला खरी किंमत पडली.

∴ ९२ पौ. १७ शि. ३ पे. : १०० $\frac{५}{८}$ पौ. = ३ पौ. दर : इष्टदर.

∴ इष्टदर = $\frac{३ \text{ पौ.} \times १०० \times ८०}{७४२९}$ = ३ पौ. ४शि. ७। पे. हें उत्तर.

उ. ८ वें.— एका गृहस्थाला १०४५ पौंड एथून दोन वर्षांनीं व्यावयाचे होते. ह्या फेडीसाठीं रकम तय्यार राहून तीस व्याजाचीही मदत व्हावी ह्या उद्देशानें त्यानें आजमितीस कांहीं रकम ३ दराचे ठेवींत घालून एथून एक वर्षानें आणखी तेवढीच रकम त्या ठेवींत घातली, आणि मुदत भरतांच ती व्याज मुद्दलमुद्धां रकम काढून तें कूर्ज तंतोतंतपणें फेडलें. ह्या तिन्ही वेळां त्या वेठीचा भाव ७३ चाच होता, तर त्यानें केवढी रकम प्रत्येकवेळीं ठेवींत घातली ?

ह्या गृहस्थानें पहिल्यासालचें व्याज ठेवींत घातलें व त्यावर दलाली पडली नाहीं असें समजा. आणि त्यानें प्रत्येकवेळीं रही रकम ठेवींत घातली असें माना. एथें,

७३ पौंडांचें व्याज ३ पौंड येतें.

तर १ पौंडाचें ,, $\frac{३}{७३}$ पौंड येईल.

∴ र पौंडाचें ,, $\frac{३र}{७३}$ पौंड ,,

व $\frac{३र}{७३}$ पौंडाचें ,, $\frac{३}{७३} \times \frac{३र}{७३}$ पौंड = $\frac{९र}{५३२९}$ पौंड येईल.

आतां पहिली रकम र व तिचें दोनवर्षांचें व्याज मिळून
 $r + \frac{६र}{७३}$, दुसरी रकम र व तिचें एकवर्षाचें व्याज मिळून
 $r + \frac{३र}{७३}$, आणि पहिल्या रकमेचें व्याज दुसऱ्यावर्षीं ठेवींत गा-
 तलें गेलें त्याचें एकवर्षाचें व्याज $\frac{९र}{५३२९}$, इतके पौंड दोन-
 वर्षांचे अखेरीस ठेवींत होते व त्यांचीं १०४५ पौंड कर्ज फिटलें.
 ह्यागून,

$$२र + \frac{६र}{७३} + \frac{९र}{५३२९} = १०४५ \text{ पौंड.}$$

$$\therefore \frac{११३२४}{५३२९} र = १०४५ \text{ पौंड.}$$

$$\therefore र = \frac{५३२९ \times १०४५}{११३२४} \text{ पौंड.}$$

$$= ४९१ \frac{४५९}{५३२९} \text{ पौंड. हें उत्तर.}$$

उ. ९ वें.- शेंकडा ३ दराच्या ठेवीचा भाव ९५ आहे,
 आणि सरकार ३ दराच्या ५०००००० पौंडांच्या ठेवीला अर्ज
 मागत आहे. ही ठेव घेणाराला ३ दराच्या ५ प्रयुताच्या ठे-
 वीवर ३। दराची कांहीं ठेव मिळावयाची, तर सावकारानें स-
 दराच्या रकमेवर ३। दराची ठेव केवढ्या रकमेची मागावी ?

प्रथम ३ दराच्या व ९५ भावाच्या ठेवीची रोकडींत किंमत
 काढली. तर,

$$१०० \text{ पौं. ठे : } ५०००००० \text{ पौं. ठे} = ९५ \text{ पौं. : क्ष पौं.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = ५०००० \times ९५ \text{ पौं.} = ४७५०००० \text{ पौं. येतात.}$$

$$\text{आणि } ५०००००० - ४७५०००० = २५०००० \text{ पौं. येतात.}$$

हा २५०००० पौंडांचा तोटा भरण्यापुरती ३। दराची ठेव
 भागितली पाहिजे. ह्यागून ३। दराच्या ठेवीची रोकडींत किंमत
 काढिली. तर,

$$३ \text{ पौं. व्या. : } ३ \frac{१}{४} \text{ पौं. व्या.} = ९५ \text{ पौं. : क्ष पौं.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = ९५ \text{ पौं.} \times \frac{१३}{४} \times \frac{१}{३} = \frac{१२३५}{१२} \text{ पौं.} = १०२\frac{११}{१२} \text{ पौंड.}$$

आतां $१०२\frac{११}{१२}$ पौंड भावाची ठेव २५०००० पौंड रोक-डीस किती घ्यावी इतका प्रश्न राहिला. हणून,

$$\frac{१२३५}{१२} \text{ पौं.} : २५०००० \text{ पौं.} = १०० \text{ पौं.ठे.} : \text{क्ष पौं.ठे.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = २५००००.०० \text{ पौं.ठे.} \times \frac{१२}{१२३५}$$

$$= २४२९१ \frac{१२३५}{१२३५} \text{ पौं.ठे.} = २४२९१५ \text{ पौं.ठे.} = २४२९१५ \text{ पौं.ठे.} = २४२९१५ \text{ पौं.ठे.}$$

उ. १०. वें. - एका मनुष्याचे ५०० पौंड ग्रेत ईस्टर्न रेलवेचे सामान्य ठेवीत आहेत, आणि ८०० पौंड साउथ वेस्टर्न रेलवेचे नियमित ठेवीत आहेत. ह्यांपैकी पहिल्या रकमेचे विभाज्य शेंकडा $१\frac{३}{४}$ दराने मिळाले, आणि दुसऱ्या रकमेचे विभाज्य शेंकडा ४ दराने मिळाले, हणून ह्या ठेवी त्याने ४८ व ९५ ह्या भावांनी अनुक्रमे विकून त्यांतील निमें रकमेचे त्याने केप येथील तांब्याच्या खाणीचे शेअर घेतले. हे शेअर २४ पौंडांचे असून त्यांवर व्याज शेंकडा ६ प्रमाणे पडे, हणून हे शेअर त्याला ६ वर्ताळ्याने मिळाले. राहिलेली अर्धी रकम त्याने एका जाईतस्ताक व्यांकेच्या ठेवीत घातली ह्या खटपटीने त्याचे वार्षिक उत्पन्न ९ पौंड ५० शि. वाढले, तर त्या जाईतस्ताक व्यांकेच्या व्याजाचा दर काय आहे ?

ह्याचे मूळचे व्याजाचे उत्पन्न ५०० पौंड ठेवीचे $१\frac{३}{४}$ दराने व ८०० पौंड ठेवीचे ४ दराने मिळून ४० पौं. १५ शि. होते. ठेवीच्या विक्रीची जमा ५०० ची ठेव ४८ भावाने व ८०० ची ठेव ९५ भावाने मिळून १००० पौंड झाली. पैकी ५०० पौंड त्याने २४ पौंडांचे भागांत घातले. ह्याचे व्याज शेंकडा ६ प्रमाणे २४ चे भागाला $१\frac{१३}{१२}$ पौंड मिळते, व ह्या भागाची किंमत ६ वर्ताळ्याने ३० पौंड पडते. हणून,

$$३० \text{ पौं.} : ५०० \text{ पौं.} = १\frac{१३}{१२} \text{ पौं. व्या} : \text{क्ष व्या.}$$

$$\therefore ३० \text{ क्ष} = ५०० \times \frac{३६}{१२} \text{ पौं. व्या} = २० \times ३६ \text{ पौं. व्या.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{२० \times ३६}{३०} = २४ \text{ पौं. व्या.}$$

आतां मूळचे उत्पन्न ४० पौं. १५ शि. व वाढ ९ पौं. १० शि. मिळून ५० पौं. ५ शि. ह्यांतून २४ पौंड वजा दिले

हणजे २६ पौं. ५ शि. बाकी राहतात. हे त्याला ५०० पौं-डांच्या व्याजाबद्दल जाइतस्ताक व्यांकेकडून मिळतात हणून.

५०० पौं. : १०० पौं. = २६ $\frac{३}{४}$ पौं. व्या : क्ष व्या.

∴ क्ष = $\frac{१०५ \text{ पौं. व्या}}{४} \times \frac{३००}{१००} = ५\frac{३}{४}$ पौंड व्याज हें उत्तर.

उ. ११ वें.— एका व्यापाऱ्याच्या हिशेबांत असें आलें कीं आपलीं रोकडे ४॥ दराच्या व १११ भावाच्या ठेवींत घातली तर जें उत्पन्न होईल, त्यापेक्षां ती ४ दराच्या ९६ भावाच्या ठेवींत घातली तर १०० रुपये अधिक उत्पन्न होतील. ह्यावरून त्याची रोकड केवढी आहे ?

दुसऱ्या ठेवींत ९६ रुपयांचें व्याज ४ रु. येतें.

तर १ रुपयाचें व्याज $\frac{४}{९६}$ रु. किंवा $\frac{१}{२४}$ रु. येईल.

पहिल्या ठेवींत १११ रुपयांचें व्याज $\frac{१११}{१११}$ रु. येतें.

तर १ रुपयाचें $\frac{१११}{१११}$ रु. किंवा $\frac{३}{४}$ रु. येईल.

हणून १ रुपयाच्या उत्पन्नांतील अंतर = $(\frac{१}{२४} - \frac{३}{४})$ रु.
= $\frac{१}{१२ \times ७४}$ रु.

आतां $\frac{१}{१२ \times ७४}$ रु. उत्पन्न वाढण्यास १ रु. मुद्दल

तर १ रु. $\frac{१}{१२ \times ७४}$ रु. मुद्दल

व १०० रु. $\frac{१००}{१२ \times ७४}$ रु. मुद्दल हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. जा.

१. ८२ $\frac{१}{४}$ भावानें विकणारी १००० रुपयांची ठेव आपले नांवें करून ठेवण्यास किती रुपये द्यावे लागतील, व तीच ठेव शेंकडा ८६ $\frac{३}{४}$ भावानें विकल्यास किती नफा होईल ?

२. ३ रुपये व्याजाच्या दराच्या ठेवींतून ७२ भावानें जाणारी ५०० रुपयांची ठेव काढून ते रुपये ९० च्या भावाचे ४ रु. व्याजाच्या ठेवींत घातले तर व्याजाच्या मिळकतींत भेद किती पडेल ?

३. ३ रुपये व्याजाच्या दराची ठेव जेव्हां ७४ $\frac{३}{४}$ भावानें जात होती तेव्हां तिजपैकीं ३००० रुपये किंमतीची ठेव आर्ही आपले नांवें केली तर वर्षांत व्याजाची मिळकत काय होईल ?

४. ४ रुपये व्याजाच्या दराची ठेव ९२ $\frac{१}{४}$ भावानें जात

होती तेव्हां पेढीवर १११० रुपये ठेविले होते. आतां आ-
ह्रांस १०० रुपये नफा व्हावा अशी इच्छा आहे, तर ती ठेव
कोणते दरानें विकवी ?

५. २७६६॥ \equiv रुपये ठेवीचा रोखा २४९० रुपयांस वि-
कत मिळत आहे, तर ठेवीचा भाव काय आहे तो सांगा.

६. ४९४ रुपयांस, शेंकडा ९२ $\frac{३}{४}$ भावाची ठेव-कृती रुप-
यांची मिळेल ? ठेव घेण्यास कमिशन शेंकडा आठ आणि
घावें लागतें.

७. ९०॥ \equiv भावानें ८५० रुपयांचा रोखा विकत घ्याव-
याचा आहे आणि दलाली शेंकडा ८ \equiv पडते, तर त्या रो-
ख्यावद्दल किती रुपये रोख घावे लागतील ? व पुढें तोच रोखा
८९॥ भावानें विकला तर तोंटां किती होईल ?

८. एक ८९॥ रुपये भावाची ३ रुपये व्याजाची ठेव
आहे, व दुसरी ९८ $\frac{३}{४}$ भावाची ३॥ रुपये व्याजाची ठेव आहे,
तेव्हां नफा कोणते ठेवीत होईल ?

९. ८१ भावानें जाणारे ३ रुपये व्याजाचे ठेवीसाठीं •
११८८ रुपये भरले तर किती रुपयांची ठेव विकत मिळेल
आणि व्याजाचें उत्पन्न काय होईल ?

१०. मुंबईत कापसाचे कारखान्याचे भांडवलांत, प्रत्येक
हिस्सा ५०० रुपयांचा असे आमचे १० हिस्से आहेत; शेंकडा
व्याजाचा दर ६ रुपये आहे. आतां हे हिस्से ९८ भावानें
जात आहेत; तेव्हां आह्रांस येथील ठेव काढून रेलवे कंपनीच्या
कारखान्यांत ठेवायाची आहे, तेथील व्याजाचा दर ५ रुपये
आहे व ते हिस्से शेंकडा ११० भावानें मिळत आहेत, तर
असें करण्यांत नफा किंवा तोटा किती होईल व दरसाल
व्याज काय मिळेल तें सांगा.

११. एका कारखान्यांत ४६५० रुपये देऊन ९३ भा-
वाचा आणि ३॥ रुपये शेंकडा व्याजाचा एक रोखा विकत
घेतला. आतां त्या रोख्याचा भाव ८ आणि उत्तरला आहे,
तेव्हां तो रोखा विकल्यास तोटा किती होईल ?

१२. दरसाल ५०० रुपये व्याज उत्पन्न होण्याकरितां ३॥ रुपये व्याजाच्या दराच्या ९४। चे भावाच्या नोटी कितती रुपयांच्या घ्याव्या ?

१३. एका मनुष्याजवळ ३००३ रुपये आहेत, त्याने त्यांच्या ३॥ रुपये शेंकडा व्याजाच्या दराच्या वलंदेजी नोटी ४९॥ रुपये भावाने घेतल्या, तेव्हां त्यास वर्षाची प्राप्ति काय होईल ?

१४. शेंकडा ३ रुपये व्याजाच्या दराच्या बंगालचे नोटीचा भाव ८९ $\frac{३}{४}$ रुपये होता, तेव्हां कांहीं रुपयांच्या नोटी विकत घेतल्या, व पुढे सहा महिन्यांनी त्यांचे व्याज घेऊन ९४ $\frac{३}{४}$ रुपये भावाने विकल्या, तेव्हां व्यजासुद्धां एकंदर ५४ रुपये नफा झाला. तेव्हां आरंभी कितती रुपये दिले होते ते सांगा.

१५. एका गृहस्थाने १८५५० रुपये एका कारखान्यांत घातले, तेव्हां शेंकडा ३ रुपये व्याजाच्या हिश्यांचा भाव ८९ रुपये होता, पुढे त्याने हे हिस्से विकून दुसरे हिस्से शेंकडा ३॥ रुपये व्याजाचे ९७॥ भावाने घेतले, तेव्हां वर्षास व्याज अधिक कितती मिळू लागले ते सांगा.

१६. पौंड २३१७.४ $\frac{१}{२}$ रोकडीच्या शेंकडा ४ $\frac{३}{४}$ वट्ट्याच्या भावाची ठेव केवढी येईल ? द.

१७. रु. ५५०६॥ $\frac{१}{२}$ ना ख नामक रेलवेची ठेव ८॥ वर्ताळ्याच्या भावाने केवढी येईल ?

१८. पौं. ९७६३. ६. ८ ची ठेव ९७ भावाने विकली तर रोकड काय येईल ? द.

१९. रु. १२५०५। किंमतीची दच लोकांची शेंकडा ४ ची ठेव ६४ $\frac{१}{२}$ भावाने विकली तर रोकड काय येईल ?

२०. पौं. ३२५७. १५. ६ ची ठेव खरेदी करण्याला ९१ $\frac{३}{४}$ भावाने पैसा काय पडेल ? द.

२१. रु. ३९२५१। इतकी रोकड उत्पन्न करण्याला ९१ $\frac{३}{४}$ भावाची केवढी ठेव विकली ? द.

२२. शेंकडा ३ च्या व ९१ $\frac{३}{४}$ भावाच्या ठेवींत पैसा घातला तर दरसाल दरशेंकडा व्याज काय मिळेल ? द.

२३. ल रेलवेची ठेव $११७\frac{७}{८}$ भावानें घेतली तर दरसाल दरशेंकडा व्याज काय मिळेल ? ह्या ठेवीचें विभाज्य शेंकडा $५\frac{१}{२}$ प्रमाणें प्रतिवर्षीं देतात.

२४. म रेलवेची ठेव $८८\frac{३}{४}$ भावानें मिळत आहे. हिचें सहामाही विभाज्य शेंकडा २१ प्रमाणें देतात, तर त्यांत पैसा घातला असतां दरसाल दरशेंकडा व्याज काय मिळेल ?

२५. इतलींतल्या ५ दराच्या ठेवींत घालावयाच्या पैशावर दरशेंकडा ८॥ व्याज पडण्याला ती कोणत्या भावानें विकत घ्यावी ?

२६. व्यांकेच्या ठेवीचें विभाज्य दरशेंकडा ४१ प्रमाणें दर सहामाहीस मिळतें. ह्या ठेवींत घालण्याच्या पैशावर दरसाल दरशेंकडा पौं. ५. ६. ३ व्याज सुटण्याला ती कोणत्या भावानें घ्यावी ?

२७. एकाजवळ पौं. १७८३५. १८. ९ ची ३ दराची ठेव आणि पौं. ३२४७. ८. ११ ची $३\frac{१}{२}$ ची ठेव आहे. तर ह्यांचें वार्षिक उत्पन्न काय ?

२८. जर आपण पौं. २७६४३. १७. ६ हे $९१\frac{५}{८}$ भावानें ३ दराच्या ठेवींत घातले तर दरसाल व्याज काय मिळेल ? द.

२९. दरसाल २०० गिनी उत्पन्न होण्याला $३\frac{१}{२}$ दराच्या व $९६\frac{५}{८}$ भावाच्या ठेवींत केवढी रक्कम घातली पाहिजे ? द.

३०. व्यांकेच्या ठेवीचें विभाज्य दरसाल दरशेंकडा १० टक्के प्रमाणें मिळतें व ही ठेव $२५०\frac{३}{४}$ भावानें विकत आहे. ह्या ठेवींत किती पैसा घालावा ह्मणजे दरसाल ५४५ पौं. १८ शि. ९ पे. मिळतील ?

३१. $९२\frac{५}{८}$ भावाच्या ठेवींत १३५९ पौं. १५ शि. घातले आणि लागलीच ती ठेव $९४\frac{१}{४}$ भावानें विकून रक्कम मोकळी केली तर ह्या व्यापारांत नफा काय होईल ?

३२. एका मनुष्यानें ३॥ दराच्या व ९१ भावाच्या ठेवींत २५५० पौंड घातले. आणि त्या ठेवीचें एक सहामाही विभाज्य घेऊन ती ठेव $९०\frac{७}{८}$ भावानें विकून टाकली तर त्याला मिळकत काय होईल ?

३३. एका मनुष्याने ११७॥ भावाची ३५५९ पाँ. १०शि. ची ठेव घेतली आणि तिचे दरसाल दरशेंकडा ५॥ प्रमाणे सहामाही विभाज्य घेऊन ती ११९ $\frac{३}{४}$ भावाने विकली. तर ह्यांत त्याला रोखीच्या शेंकड्यास काय मिळेल ?

३४. एका मनुष्याने शेंकडा ४ ची डच ठेव ६५॥ भावाने घेतलेली ६९८ $\frac{२}{३}$ भावाने विकून १२५ पाँ. १२ शि. ६ पे. मिळविले, तर त्याने ह्यांत किती पैसा घातला होता ?

३५. एका मनुष्याने एम्. रेलवेची ठेव ८८ $\frac{३}{४}$ भावाने खरेदी केली आणि तिचे दरसाल दरशेंकडा ४ $\frac{१}{२}$ प्रमाणे सहामाही विभाज्य घेऊन ती ९३ $\frac{३}{४}$ भावाने विकली. ह्या कृत्यांत त्याला १४२ पाँ. १० शि. मिळाले आहेत ह्यावरून त्याने केवढी ठेव खरेदी केली असावी ?

३६. एका मनुष्याने ३ दराच्या व ९२ $\frac{३}{४}$ भावाच्या ठेवींत २५३५० पाँ. घातले आहेत. ह्या खटपटींत २५० पाँ. मिळविणे आहेत, तर तिचे एक सहामाही विभाज्य घेऊन ती त्याने केवढ्या दराने विकावी ?

३७. ३ दराच्या व ८९॥ भावाच्या ठेवींत पैसा घालावा ? का ३॥ दराच्या व ९५ भावाच्या ठेवींत पैसा घालावा ? द.

३८. व्यांकेच्या ८ दराच्या ठेवीचा भाव २२१ $\frac{३}{४}$ आहे आणि रेलवेच्या ३ दराच्या ठेवीचा भाव ९३ $\frac{७}{८}$ आहे तर ह्यांपैकी कोणत्या ठेवींत पैसा घालणे हे केवढ्या दराने फायद्याचे होईल ?

३९. एका मनुष्यापाशी पाँ. ६८२०. १७. ६ ची ३॥ दराची ठेव आहे. ही ठेव ९२ $\frac{१}{४}$ भावाने विकली तर रेलवेची ११७॥ भावाची केवढी ठेव येईल ?

४०. जर शेंकडा ३ दराच्या व ९१ भावाच्या ठेवींत ५३३० पाँ. घातले व शेंकडा १ $\frac{३}{४}$ भाव वाढल्यावर ती ठेव विकली तर कानडाच्या राज्यांतली १०२ $\frac{३}{४}$ भावाची ठेव केवढी येईल ?

४१. ३००० पाँडांची ३ दराची ठेव ८९ $\frac{३}{४}$ भावाने दिली

तर ३॥ दराची व ९८॥ भावाची ठेव केवढी मिळेल ? आणि व्याजाच्या उत्पन्नांत केवढा बदल होईल ?

४२. ४ टक्के दराची पाँ. १७०८. ७. ६ ची ठेव १०२ $\frac{३}{४}$ भावानें देऊन ३ टक्के दराची ठेव ८८ $\frac{७}{८}$ भावानें घेतली तर उत्पन्नांत काय बदल होईल ?

४३. एका मनुष्याने २॥ दराच्या व ६३॥ भावाच्या ठेवीत ३५६५ पाँड घातले. ह्या ठेवीचा भाव उतरून ५८ झाला तेव्हां ती ठेव विकून ४ दराची ठेव ९६ $\frac{७}{८}$ भावानें घेतली. तर त्याच्या उत्पन्नांत नफा अगर नुकसान काय झालें असेल ?

४४. एका मनुष्याला ४ दराच्या ठेवीपासून पाँ. २२६. १९. २ उत्पन्न होत असत. ही ठेव त्यानें बरोबरीस विकली आणि ती रक्कम ७ दराच्या १४८॥ भावाच्या ठेवीत घातली तर उत्पन्नांत फरक काय पडेल ?

४५. तीन दराचें वर्षासन ता. १७ फेब्रुआरी रोजी ९२॥ भावानें घेतलें तर उत्पन्नाच्या दरांत फरक काय होईल. द. ह्याचें विभाज्य ता. ५ एप्रिल व ता. ५ अक्तोबर ह्या दिवशीं दिलें जातें.

४६. एका मनुष्यानें शेंकडा ३ दराच्या ठेवीत ९४ $\frac{३}{४}$ भावानें ८०६३ पाँड घातले. आहेत. तर दरएक पाँड उत्पन्नांत १० पेन्स इन्कमट्याक्स वजा जातां त्याला वार्षिक उत्पन्न केवढें होईल. द.

४७. ३ दराच्या व ९१॥ भावाच्या ठेवीत केवढी रक्कम घालावी ह्मणजे दरपाँडाचे उत्पन्नास १० पेन्सप्रमाणें इन्कमट्याक्स वजा जातां ह्याला २३० पाँड वार्षिक उत्पन्न होईल ?

४८. प्रत्येक पाँडाच्या उत्पन्नास ११ पेन्सप्रमाणें प्राप्तीवरील कर वजा जातां १०३० पाँड वार्षिक उत्पन्न व्हावें, अशी इच्छा आहे, तर ३ दराच्या ठेवीत ३२८५० पाँड कोणत्या भावानें घालावे ?

४९. २॥ दराच्या ठेवीचा भाव ८३॥ आहे ह्याच मानाचें व्याज पडण्यासाठीं ३॥ दराच्या ठेवीचा भाव काय असावा ?

५० एका गृहस्थाचा पैसां आस्त्रेलियांतल्या वसाहतीच्या व्यापारांत एकोत्रा मितीनें लागला होता. तो काढून त्यानें इंग्लंदांतल्या ३ दराच्या ठेवींत ९४ $\frac{३}{४}$ भावानें घातला आहे व त्याला इंग्लंदांत प्रतिवर्षी २४०० पौंड मिळत आहेत तर त्याला आस्त्रेलियांत काय मिळत होतें ?

५१. प्र. मनुष्यापाशीं ४६७५ पौंडांची ५ दराची ठेव आहे. तर त्याला प्रतिवर्षी ८४३ पौं. १० शि. उत्पन्न होण्यासाठीं ४॥ दराच्या व १०२१ भावाच्या ठेवींत आणखी किती पैसा त्यानें घालावा ?

घातप्रकरण.

घात.—कोणतीही संख्या मूळ घेऊन तिला तीच संख्या पुनःपुनः गुणक जोडली, तर त्या मूलसंख्यारूपी अवयवांनीं जो गुणाकार दाखविला जातो त्याला, त्या मूलसंख्येचा, त्या अवयवांइतका, घात हणतात. उदाहरणार्थ.—

$२ \times २ = ४$ ह्यांना २ चा वर्ग किंवा द्विघात हणतात.

$\frac{३}{५} \cdot \frac{३}{५} \cdot \frac{३}{५} = \frac{२७}{१२५}$ ह्यांना $\frac{३}{५}$ चा घन किंवा त्रिघात हणतात.

$६ \times ६ \times ६ \times ६ = १२९६$ ह्यांना ६ चा चतुर्घात हणतात.

$१० \times १० \times १० \times १० \times १० = १०००००$ ह्यांना १० चा पंचघात हणतात.

स. स इ. आवृत्ति अ = क ह्याला सचा अघात हणतात.

वरील घात संख्या ह्या मूलसंख्यारूपी अवयवांनीं होणाऱ्या आहेत व मूलसंख्येच्या गुणिकांचे (आवृत्तींचे) गुणाकारही आहेत. ह्याप्रमाणें वर दिलेला घातसंकेत व पहिल्या भागांत दिलेला घातसंकेत हे एकच आहेत.

कोणत्याही घातांतली अवयवांची किंवा आवृत्तींची जी संख्या तीच त्या घाताची वाचक असते, हणून तिला घातवाचक किंवा घातप्रकाशक हणतात. उदाहरणार्थ, वरील घातांचे वाचक किंवा प्रकाशक अनुक्रमें २, ३, ४, ५ आणि अ हे आहेत.

संकेतानें घात दाखविणें असला तर मूलसंख्येच्या मार्थीं उ-
जवीकडे वारीकसा घातप्रकाशक मांडून त्यानें तो दाखवि-
तात. ह्मणून,

$२^२$ ह्याचा अर्थ $२ \times २ = ४$ असा होतो.

$(\frac{३}{५})^३$ " " $\frac{३}{५} \cdot \frac{३}{५} \cdot \frac{३}{५} = \frac{२७}{१२५}$ " "

स^अ " " स. स इ आवृत्ति अ = येणारी
संख्या असा होतो.

वरच्या घातसंकेतांत कितीएक नियमांचा समावेश (किंवा
स्वीकार) होतो. ते नियम येणेंप्रमाणें.—

नियम १ ल्या.— मूलसंख्येचा कोणताही घात हा तिच्या
प्रत्येक अवयवाचा तोच घात केल्यानें होतो. जसा.—

$$३५^३ = ७^३ \times ५^३$$

$$\begin{aligned} \text{कारण. } ३५^३ &= ३५ \times ३५ \times ३५ \\ &= ७ \times ५ \times ७ \times ५ \times ७ \times ५ \\ &= ७ \times ७ \times ७ \times ५ \times ५ \times ५ \\ &= ७^३ \times ५^३ \end{aligned}$$

नियम २ रा.— अपूर्णाकाचा कोणताही घात हा त्याच्या
अंशछेदांचा तोच घात केल्यानें होतो. जसें.—

$$\left(\frac{२}{५}\right)^३ = \frac{२^३}{५^३}$$

$$\begin{aligned} \text{कारण. } \left(\frac{२}{५}\right)^३ &= \frac{२}{५} \times \frac{२}{५} \times \frac{२}{५} \\ &= \frac{२ \times २ \times २}{५ \times ५ \times ५} \\ &= \frac{२^३}{५^३} \end{aligned}$$

विद्यार्थ्यांस घातप्रकरणाची चांगली माहिती व्हावी ह्याजक-
रितां पुढील उदाहरणें दिलीं आहेत तीं सर्व त्यांनीं करावीं.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. झा.

१. $५५^२$; $४१६^२$; $३६^३$; $००२९^४$.

२. $\left(\frac{२}{३}\right)^२$; $\left(\frac{५}{३}\right)^३$; $\left(\frac{३}{४}\right)^४$; $\left(\frac{१६}{९}\right)^४$.

$$३. (२॥०)^२; (०॥०)^२; (०१०)^३; (००)^४.$$

$$४. २^२; ०२^२; ००२^२; ००२^२.$$

$$५. (४१२)^३; (४१०२)^३; (४०१२)^३; (०४१२)^३.$$

टीप— पूर्णांक संख्येचा घात केला तर तिची किंमत वाढते, परंतु अपूर्णांक संख्येचा घात केला तर तिची किंमत कमी होते. उदाहरणार्थ—

$$(२)^२ = २ \times २ = ४ \text{ ह्यापेक्षां}$$

$$(०२)^२ = ०२ \times ०२ = ०४ = \frac{४}{१०} \text{ हे कमी आहेत.}$$

$$\text{तसेच } (१२)^२ = १२ \times १२ = १४४ \text{ ह्यापेक्षां}$$

$$(१०२)^२ = १०२ \times १०२ = १०४०४ = १०\frac{४०४}{१००} \text{ हे कमी आहेत.}$$

$$\text{व } (०१२)^२ = ०१२ \times ०१२ = ००१४४ = \frac{१४४}{१०००} = \frac{१४४}{१०००} \text{ हे फारच कमी आहेत.}$$

$$(५)^२ = ५ \times ५ = २५ \text{ ह्यापेक्षां}$$

$$(०५)^२ = ०५ \times ०५ = ०२५ = \frac{२५}{१०} \text{ हे कमी आहेत.}$$

नियम ३ रा.— संख्येच्या घातांचा गुणाकार हा घातप्रकाशकांच्या बेरजेने दाखविला जातो. जसा.—

$$३^२ \times ३^४ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^६ = ३^{४+२}$$

$$३ \times ३^५ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^६ = ३^{५+१}$$

$$३^३ \times ३^३ = ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^६ = ३^{३+३}$$

नियम ४ था.— संख्येच्या घातांचा भागाकार हा भाज्याचा घातप्रकाशक उणा भाजकाचा घातप्रकाशक ह्या वजाबाकीने दाखविला जातो. जसा.—

$$३^४ \div ३^२ = \frac{३ \times ३ \times ३ \times ३}{३ \times ३} = ३ \times ३ = ३^२ = ३^{४-२}$$

$$३^५ \div ३ = \frac{३ \times ३ \times ३ \times ३ \times ३}{३} = ३ \times ३ \times ३ \times ३ = ३^४ = ३^{५-१}$$

फल १ लें— संख्येचा १ घात याचा अर्थ तीच संख्या असा होतो. २ रें— संख्येचा शून्य घात याचा अर्थ १ असा होतो. आणि ३ रें— संख्येचा उणा घात याचा अर्थ एक भागिला त्या संख्येचा तो घात असा होतो.

$$\left. \begin{aligned} \text{जसा } ४^३ \div ४^२ &= ४^{३-२} = ४^१ \\ &= \frac{४ \times ४ \times ४}{४ \times ४} = ४ \end{aligned} \right\} \text{ ह्याणून } ४^१ = ४$$

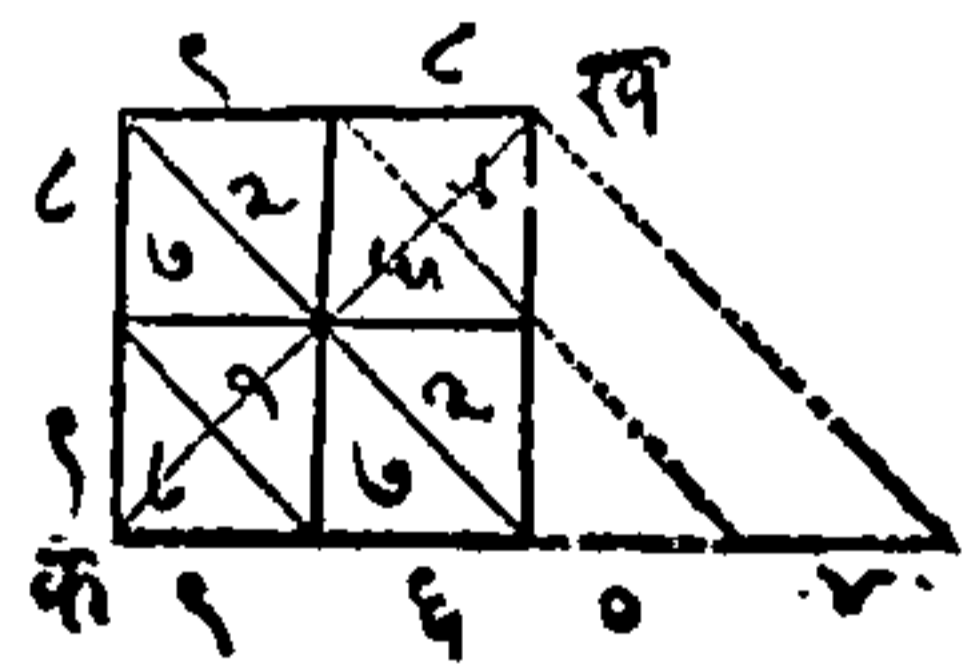
र्णांकांत १ नें दाखवून, अपूर्णांकांत १ च्या अंशानें दाखविली, आणि त्या दोहोंशींही संख्यालेखन, वेरीज, वगैरे एकंदर कृत्यांचे नियम लागू केले. ह्याच नमुन्यानें मूलसंख्येचा घातप्रकाशक ह्या घातप्रकरणांत १ नें दाखविला असून, तो मूलप्रकरणांत १ च्या अंशानें दाखविणें आहे. ह्याकरितां वरचे घातप्रकरणीं नियम १ लागू केले, तसेच ते १ च्या अंशाशींही लागू करितां येतात, ही गोष्ट एथें विद्यार्थ्यांनीं लक्षांत ठेविली पाहिजे.

नियम ६ वा.— द्विपद मूलसंख्येच्या वर्गाविषयीं—दोन पदांच्या वेरजेचा वर्ग हा, त्या दोन पदांचे वर्ग, आणि त्या पदांच्या गुणाकाराची २ पट, ह्यांचे वेरजे इतका असतो. हाणजे मूलसंख्येचीं पदे दाखविण्यास द आणि ए घेतले तर असें येतें कीं.—

$$(d + e)^2 = d^2 + 2de + e^2$$

उदाहरणार्थ, ९ दशक आणि ८ एकडे ह्यांच्या वेरजेनें होणारी संख्या ९८ ही घ्या. ह्या ९८ चा वर्ग पुढील कोष्टकांत कोष्टकी गुणाकाराचे रीतीनें केला आहे तो पहा.

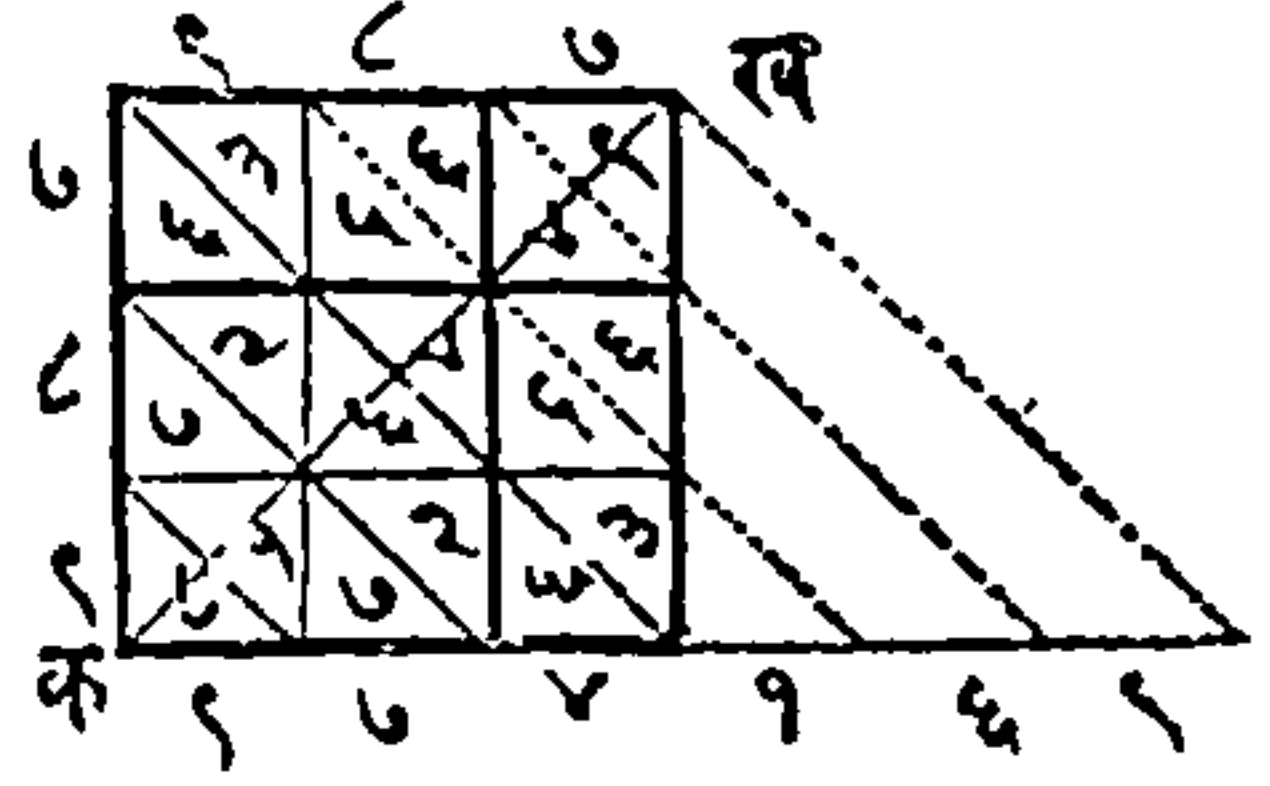
ह्या कोष्टकामध्ये 'कख' कर्णावरील दोन चौरसांत ८१ शेंकडे व ६४ एकडे आले आहेत. हे ९ दशक व ८ एकडे ह्यांचे वर्ग आहेत तसेंच ह्या चौरसांच्या दोही कडच्या भरतीच्या चौकोनांत ७२ दशक ७२ दशक आले आहेत. हे ९ दशक व ८ एकडे ह्यांच्या गुणाकाराची २ पट आहेत. हेंच वरील नियमांत सांगितलें आहे.



सूचना ३ री.— ९० + ८ ह्यांचा वर्ग बीजगणिताच्या पद्धतीनें (आडव्या मांडणीनें) केला असतांही वरील पदे उत्पन्न होतात, ही गोष्ट विद्यार्थ्यांनीं ताडून पहावी.

उदा० २ रें.— पुढील कोष्टकांत ९८७ चा वर्ग वरच्याच रीतीनें केला आहे. तो पहा.

आतां ९८७ ही संख्या ९८ दशक आणि ७ एकडे ह्या दोन संख्यांच्या बेरजेने झालेली आहे, ह्यापून 'कख' कर्णावरच्या मोठ्या चौरसांत ९ ८ दशकांचा वर्ग येतो, व धाकड्या चौरसांत ७ एकड्यांचा वर्ग येतो. तसेंच ह्या चौरसांच्या



दोहोंकडच्या भरतीच्या चौकोनांत ह्या संख्यांच्या गुणाकाराची २ पट येते. ह्यावरून येथेही दोन संख्यांच्या बेरजेच्या वर्गाचा नियम लागू होतो हे उघड आहे. $(९८० + ७)^२$ हा आडव्या मांडणीने करून त्यांतील पदे चौरसांतील संख्यांशीं ताडून पहा.

मूळ संख्येवर एक अंक चढविला, ह्यापुजे ती संख्या दशक स्थळीं जाऊन तिचा वर्ग शतक स्थळीं जातो. ह्या वर्गास त्या बाहेरची गोमुखी जोडिली ह्यापुजे ह्या संयुक्त संख्येचा वर्ग होतो. ह्या गोमुखींतलीं पदे $२ द. ए + ए^२ = (२ द + ए) . ए$ हा गुणाकार असतो. ह्यापून,

फल.— मूळ संख्येवर एक अंक चढविला तर त्या संयुक्त संख्येचा वर्ग दोन स्थळांनीं वाढेल, आणि तो मूळ संख्येची दुप्पट व चढविलेला अंक यांच्या बेरजेची चढविलेल्या अंका-इतकी पट ह्या गुणाकाराने वाढेल.

दशक व एकडे ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाशीं वरील नियम खरा आहे हे सिद्ध झाले. आतां एकडे व एकडे ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाशीं या नियमाचा खरेपणा पाहण्यासाठीं, पहिल्या कोष्टकावरचे ९ व ८ हे दोन्ही अंक एकडे समजा. एकड्यांचा वर्ग एकडेच व्हावयाचा ह्यापून ९ चा वर्ग ८१ व ८ चा वर्ग ६४ हे एकडे आहेत. एकड्यांचा गुणाकार एकडेच यावयाचा, ह्यापून ७२ व ७२ हेही एकडेच आहेत. ह्या चार संख्यांची बेरीज २८९ एकडे येते, हाच ९ आणि ८ मिळून होणाऱ्या १७ चा वर्ग आहे. $(९ + ८)^२$ आडव्या मांडणीने करून तीं पदे चौरसांतील एकड्यांशीं ताडून पहा.

या रीतीने दुसऱ्या कोणकावरचे अंक ९, ८, व ७ हे एकडे कल्पिले, तर कख कर्णावरच्या मोठ्या चौरसांत १७ चा वर्ग घेतो, व धाकट्या चौरसांत ७ चा वर्ग घेतो, आणि भरतीच्या काटकोन चौकोनांत १७ व ७ यांच्या गुणाकाराची २ पट घेते. ह्या कल्पनेप्रमाणे ह्या कोणकांतल्या नऊही संख्या एकड्यांच्याच ठरून त्यांची बेरीज ५७६ येते. हाच ९, ८ व ७ मिळून होणाऱ्या २४ चा वर्ग आहे. ह्यावरून वरील नियम कोणत्याही दोन संख्यांच्या बेरजेच्या वर्गाशी खरा आहे, असें झटले पाहिजे.

उदाहरण १ लें.— ७ चा वर्ग संयुक्त संख्येच्या रीतीने करा. येथें ७ = ४ + ३ आहेत ह्यांन,

$$7^2 = (4 + 3)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 3 + 3^2 \\ = 16 + 24 + 9 = 49 \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण २ रें.— १२१४ चा वर्ग संयुक्त संख्येच्या रीतीने करा ?

$$(12 + \frac{14}{100})^2 = 12^2 + 2 \times 12 \times \frac{14}{100} + (\frac{14}{100})^2 \\ = 144 + 3\frac{36}{100} + \frac{196}{10000} \\ = 147\frac{376}{100} \text{ हें उत्तर.}$$

नियम ७ वा.— द्विपद मूलसंख्येच्या घनाविषयीं.—संख्येचीं दोन पदे दाखविण्यास द आणि ए हे वर्ण घेतले तर त्यांच्या बेरजेचा घन असा होईल कीं.—

$$(d + e)^3 = d^3 + 3d^2.e + 3d.e^2 + e^3.$$

ह्या विचारासाठीं ३ दशक व २ एकडे मिळून होणारी संख्या घेऊं आणि तिचा घन करितांना दर एक अंकाचें आपण काय काय करितों हें पाहूं.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline \end{array}$$

६४ } हा संयुक्त संख्येचा वर्ग पुनः तिने गुणतांना
९६ } दर एक अंकाचा गुणाकार त्याच्या स्थळाप्रमाणें
वेगळाला लिहिला.

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 28 \end{array}$$

१२०	८	}	२ ह्यांनीं पहिली ओळ गुणून.
१२०			
१८००	१२०	}	२ ह्यांनीं दुसरी ओळ गुणून.
१८००			
१८००	१२०	}	३ ह्यांनीं पहिली ओळ गुणून.
१८००			
२७०००	१८००	}	३ ह्यांनीं दुसरी ओळ गुणून.
२७०००			

३२७६८ एकंदर बेरीज, हा ३२ चा घन झाला.

ह्या ३२ च्या घनांत २७ हा दशकांचा घन आहे. ३ वेळ १८ ही दशकांचा वर्ग गुणिले एकडे ह्यांची ३ पट आहे. ३ वेळ १२ ही दशक गुणिला एकड्यांचा वर्ग ह्यांची ३ पट आहे. आणि ८ हा एकड्यांचा घन आहे. येंथें दशकांबद्दल द आणि एकड्यांबद्दल ए हे वर्ण घ्या. ह्मणजे हीच कृति वरच्या ७ व्या नियमांतल्या पद्धतींत दर्शविली आहे हें उघड दिसेल.

वरील विचारांत ३ हे दशक व २ हे एकडे घेतले होते. आतां ३ व २ हे दोन्ही एकडेच ह्मटले तर ३२ ह्याचा अर्थ ३ + २ होईल व ह्या संयुक्त संख्येच्या वर्गातील अंक ९, ६, ६, ४ हे एकडे दाखवितील. आणि त्या खालच्या घनांतले अंक ८, १२, १२ इ० हेही एकडेच दाखवितील. हे अंक वरील पद्धतीनेच आलेले असून ह्यांची बेरीज १२५ येते. हाच ३ व २ मिळून होणाऱ्या ५ चा घन आहे. ह्यावरून द आणि ए ह्यांच्या जागी कशाही दोन संख्या घेतल्या तरी वरील पद्धतीने त्यांच्या बेरजेचा घन होईल हें सिद्ध होतें.

द्विपद संख्येचा घन मांडण्याची पद्धति ही उल्लेखाच्या किंवा बीजगणिताच्या आडव्या मांडणीने गुणाकार केले ह्मणजे उत्पन्न होते. जशी.—

$$४० + ५ = ४० + ५$$

$$४० + ५ = ४० + ५$$

$$\frac{४०^२ + ४० \times ५}{+ ४० \times ५ + ५^२}$$

$$\therefore (४० + ५)^२ = ४०^२ + २ \times ४० \times ५ + ५^२$$

$$(४० + ५) = ४० + ५$$

$$\frac{४०^३ + २ \times ४०^२ \times ५ + १ \times ४० \times ५^२}{+ १ \times ४०^२ \times ५ + २ \times ४० \times ५^२ + ५^३}$$

$$\therefore (४० + ५)^३ = ४०^३ + ३ \times ४०^२ \times ५ + ३ \times ४० \times ५^२ + ५^३$$

ह्यांत ४ दशक किंवा ४० झुकडे ह्यांचे जागीं द आणि ५ एकड्यांचे जागीं ए ठेवावा हाणजे वरील पद्धति येते. जशी.—

$$(द + ए)^३ = द^३ + ३ द^२ \cdot ए + ३ द \cdot ए^२ + ए^३$$

∴ फळ.— मूलसंख्येवर अंक चढविला तर तो द्विपदसंख्येचा घन मूलसंख्येच्या घनापेक्षां ३ स्थलांनीं वाढेल, आणि तो ३ द^२ \cdot ए + ३ द \cdot ए^२ + ए^३ ह्या घदांनीं वाढेल, किंवा (३ द^२ + ३ द \cdot ए + ए^२) \cdot ए ह्या गुणाकारानें वाढेल.

उदाहरण १ लें.— ३६ चा घन संयुक्त संख्येच्या पद्धतीनें मांडा.

$$(३० + ६)^३ = ३०^३ + ३ \times ३०^२ \times ६ + ३ \times ३० \times ६^२ + ६^३$$

आतां $३०^३ = २७०००$

$३ \times ३०^२ \times ६ = १६२००$

$३ \times ३० \times ६^२ = ३२४०$

$६^३ = २१६$

∴ $३६^३ = ४६६५६$

उदाहरण २ रें.— (३६० + ४) ह्या संयुक्त संख्येचा घन मांडा.

नि. ७ प्र. $३६०^३ = ४६६५६०००$

$३ \times ३६०^२ \times ४ = १५५५२००$

$३ \times ३६० \times ४^२ = १७२८०$

$४^३ = ६४$

∴ $(३६० + ४)^३ = ४८२२८५४४$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. जा.

१. $३^५ \times ३^४$; $५^२ \times \left(\frac{१}{३}\right)^२$; $\left(१\frac{७}{८}\right)^३$; $(४^३)^२$; $\{(३ \cdot २)^२\}^४$
२. $५^३ \div ५^२$; $(२॥०)^४ \div (२॥०)^३$; $१५^{१०} \div १५^{१०}$
३. $० \cdot २^{१०}$; $२ \cdot ३४७८९^०$; $५ \cdot २३८^१$.
४. $२ \cdot १५^३$; $३ \cdot ३^३$; $०८^३ \cdot ४^३$; $८^३ \div ४^३$.
५. $२५^३ \cdot १०^४ \div ५^६$; $१२५^२ \div १५०^३$.

मूलप्रकरण.

दिलेली संख्या ज्या संख्येचा जो घात असते, त्या संख्येला दिलेल्या संख्येचें, त्या घाताइतक्यावें मूल ह्मणतात. उदाहरणार्थ,

८ चा वर्ग ६४ आहे, तर ८ ना ६४ चें वर्गमूल ह्मणतात.

$\frac{२}{३}$ चा घन $\frac{८}{२७}$ आहे, तर $\frac{२}{३}$ ना $\frac{८}{२७}$ चें घनमूल ह्मणतात.

५ चा चतुर्घात ०६२५ आहे, तर ५ ना ०६२५ चें चतुर्घातमूल ह्मणतात.

मचा अ घात सनें दर्शविला, तर मला सचें अघात-मूल ह्मणतात.

मूलप्रकाशक.— पूर्वीच्या प्रकरणांत अवयववाचक किंवा आवृत्तिवाचक अंकाला मूलसंख्येचा घातप्रकाशक ह्मटलें, तसेंच ह्या प्रकरणांत त्याला घातसंख्येचा मूलप्रकाशक ह्मटलें आहे.

हे प्रकार वरच्या 'डावीउजवीकडच्या उदाहरणांवरून मनांत आणा.

मूल दर्शविण्याचा संकेत.— संख्येचें कोणतेंही मूल दर्शविणें असलें तर तिच्या आरंभी $\sqrt{\quad}$ हें कान्हाखेरीज मकारा-सारखें मूलचिन्ह काढून त्याचे डेळक्यांत किंवा पोटांत मूलप्रकाशक लिहितात. जसे.—

* ह्या चिन्हाचें मकाराशीं सादृश्य असावें हें यथायोग्य आहे. तथापि, मूल ह्या अर्थाचा इंग्रजी शब्द रूट हा असल्यामुळे इंग्लिश लोकांनीं त्यांच्या रकाराच्या सादृश्यानें हें चिन्ह योजिलें आहे, व हें आपण त्यांच्यापासून घेतलेलें आहे. ह्याप्रमाणें ही समंजस व यथायोग्य योजना सहज बनलेली आहे. हें स्मरणांत असावें.

$$\sqrt{64} = 8; \sqrt{9.96} = 9.8; \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)} = \frac{2}{3};$$

$$\sqrt[4]{0.625} = .5; \sqrt[3]{स} = म.$$

वर्गमूल.

अनेक अंकांच्या संख्येंत दशक व एक हीं दोन पदे असा-
वयाचीं, आणि ह्या द्विपदसंख्येच्या वर्गावर तींतील एकच्या व-
र्गावरील अंक यावयांचा. उदाहरणार्थ १४, १२४ इत्यादि-
कांच्या वर्गावर ४ च्या वर्गावरील अंक यावयाचा हें उघड
आहे.

संख्यांचे एक १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, हे असून
ह्यांचे वर्ग अनुक्रमें १, ४, ९, १६, २५, ३६, ४९, ६४,
८१, हे आहेत. संख्येवर शून्य असलें तर तिचे वर्गावर शून्यच
येतें. ह्मणून,

नियम १ ला.—संख्येच्या पुऱ्या वर्गावर ०, १, ४, ५,
६, व ९, ह्यांतलाच अंक यावयाचा. ह्यावरून संख्येवर २, ३,
७, व ८, ह्यांतील अंक असला, तर तिचें वर्गमूल तुटणार नाहीं.

पूर्ण संख्येवर १, २, ३, इत्यादि शून्यें असलीं, तर तिच्या
वर्गावर २, ४, ६, इ० सम संख्याक शून्यें येतात, आणि सं-
ख्येवर शून्याखेरीज अंक असल्यास तिच्या वर्गावर शून्य येत
नाहीं. ह्मणून,

नियम २ रा.—पूर्ण वर्गावर सम संख्याक शून्यें याव-
याचीं. ह्यावरून संख्येवर १, ३, ५ इ० विषम शून्यें असलीं, तर
तिचें वर्गमूल तुटणार नाहीं.

दशांश संख्येवर शून्याखेरीज अंक असला, तर तिच्या वर्गा-
वर शून्य न येतां, दशांश स्थळें दुप्पट (सम संख्याक)
येतात. ह्मणून,

नियम ३ रा.—दशांश संख्येच्या पूर्ण वर्गावर सम
संख्याक दशांश स्थळें यावयाचीं. ह्यावरून दशांश संख्येवर शू-

* वर्गमूल दर्शविणें असतें तेव्हां मात्र मूलचिन्हांत मूलप्रकाशक
अंक घालीत नसतात.

न्याखेरीज अंक असून दशांश स्थळें १, ३, ५, अशीं विपम असलीं, तर तिचें वर्गमूळ तुटणार नाहीं.

नियम ४ था.— पूर्ण संख्येचें वर्गमूळ पूर्ण संख्या संभवत नसलें, तर जिचे अंशच्छेद पूर्ण संख्या आहेत अशी अपूर्ण संख्याही संभवणार नाहीं.

संभवत असेल तर $\sqrt{५७} = ७\frac{५}{२}$ किंवा $\frac{६८}{२}$ आहेत, आणि $\frac{६८}{२}$ हें अतिसंक्षेपरूप आहे असें कल्पा. हे पूर्णांकीं अंशच्छेद पुरें वर्गमूळ दाखविणारे आहेत, तर लक्षणाप्रमाणें पाहतां,

$$\frac{६८}{२} \times \frac{६८}{२} \text{ किंवा } \frac{६८^२}{२} = ५७ \text{ असले पाहिजेत.}$$

एथें ६८ व ९ ह्या संख्या स्वतंत्रपणें विगुण (निरवयव) नाहींत, तथापि $\frac{६८}{२}$ हें अतिसंक्षेपरूप असल्यामुळें, ह्या संख्या परस्परांशीं विगुण आहेत. ह्मणजे ह्यांपैकीं एकीचा कोणताही गुण (अवयव) दुसरींत नाहीं अशा ह्या विगुण आहेत.

मूलसंख्येंत जे जे गुण असतात ते तेच तिच्या वर्गांत दुहेरी होतात. त्यांतला एकही गुण लोपत नाहीं, आणि त्यांत कोणताही गुण नवीन येत नाहीं. ह्यावरून उघड आहे कीं ९ चा कोणताही गुण जर ६८ त नाहीं, तर ९ च्या वर्गाचा कोणताही गुण ६८ त किंवा ६८ च्या वर्गांत असणार नाहीं.

$$\text{परंतु } \sqrt{५७} = \frac{६८}{२} \text{ आहे असें कल्पण्यांत } \frac{६८^२}{२} = ५७$$

हा विरुद्ध स्वीकार होतो. ह्मणजे ६८ च्या दुहेरी गुणांत ९ चे समग्र दुहेरी गुण व ५७ आहेत हा विरुद्ध स्वीकार होतो. ह्मणून ही कल्पना खोटी आहे. ह्यावरून ६८^२ व ९^२ आणि ६८ व ९ ह्या संख्या जे अंशच्छेद दाखविण्यासाठीं घेतल्या, ते अंशच्छेद पूर्ण संख्यांचे नाहींत हें उघड आहे. हेंच वरील नियमांत सांगितलें आहे.

जर दोन संख्या परस्पर विगुण असल्या, तर त्यांचे कोणतेही घात परस्पर विगुण असतील. ह्मणून,

फल.— पूर्ण संख्येचें कोणतेंही मूल पूर्ण संख्या संभवत

नसलें, तर पूर्णांकी अंशच्छेदांची' अपूर्ण संख्याही संभवणार नाही.

करणि किंवा अमेय संख्या.— जी संख्या पूर्ण संख्येने दर्शविली (मोजिली) जात नाही, आणि पूर्णांकी अंशच्छेदांच्या अपूर्ण संख्येनेही दर्शविली जात नाही, तिला करणी संख्या किंवा अमेय संख्या म्हणतात. उदाहरणार्थ, $\sqrt{2}$, $\sqrt{57}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{7}$, इ० संख्या करणी किंवा अमेय होत.

पुरी घातसंख्या.— ज्या संख्येचे मूळ पूर्ण किंवा अपूर्ण संख्येने वरोवर दर्शविले जाते, तिला पुरी घातसंख्या म्हणतात. उदाहरणार्थ, $\sqrt{36}$, $\sqrt{\frac{8}{5}}$, $\sqrt[3]{924}$, $\sqrt[6]{9}$, ह्या पुऱ्या घातसंख्या आहेत.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{57}$, इ० करणी संख्या ह्या पुऱ्या घातसंख्या नव्हत, म्हणून ह्यांचीं मूळे विनकसर निघत नाहीत. पुऱ्या घातसंख्यांचीं मूळे मात्र विनकसर निघतात.

एकांकी पूर्ण संख्येच्या वर्गात १ किंवा २ अंक येतात, (नऊ अंकांचे वर्ग पहा).

एकांकी दशांश संख्येच्या वर्गात नेहमीं २ अंक येतात. (२ चा वर्ग ०४ पहा).

ह्या कोणत्याही संख्येवर एक एक अंक चढवीत गेलें, तर प्रत्येक अंकाच्या चढवणीस, पहिल्या संख्येच्या वर्गावरतीं भावी संख्येच्या वर्गामध्ये,

$$९^२ = ८१$$

दोन दोन अंकां वाढत जा- $९८^२ = ९६०४$

तात (बाजूच्या वाढी पहा). $९८७^२ = ९७४१६९$

ह्या प्रत्येक चढवणीस पहिल्या संख्येच्या वर्गावरची द्विपद-संख्येच्या वर्गाची वाढ ही पहिल्याच्या चौरसावरील गोमुखीने किंवा $(२६ + ९) \times ९$ ह्या वर्गपूरकानें दाखविली जाते. उदाहरणार्थ, पूर्वीचे कोष्टकी वर्ग अनुक्रमें पहा. ह्यांत पहिल्या ९ दशकांचा वर्ग जो ८१ शें त्याशीं $(२ \times ९६ + ८) \times ८$ किंवा $२ \times ७२० + ६४$ हा गोमुखीतला वर्गपूरक जोडला म्हणजे $(९६ + ८)$ किंवा १८ ह्या दोनअंकी संख्येचा वर्ग

होतो. तसेच पुढच्या ९८ ' दशकांचा वर्ग जो ९६०४ शें त्याशीं (२×९८ द. + ७) × ७ हा गोमुखींतला वर्गपूरक जोडला ह्मणजे (९८ द. + ७) किंवा ९८७ हा तीनअंकी द्विपदसंख्येचा वर्ग होतो. ह्याच पद्धतीने मोठाल्या संख्यांचे वर्ग व्हावयाचे हें वरच्या दोन कोष्टकांवरून उघड आहे.

ह्यावरून इष्ट संख्येंत एक किंवा दशांशचिन्ह ह्मणपासून दोन दोन अंकांचे भाग करीत गेलें; तर डावीकडच्या पहिल्या भागांत मूळांतल्या पहिल्या अंकाचा वर्ग वजा होईल, आणि पहिल्या भागांतली बाकी व दुसरा भाग ह्यांत त्यावरच्या दुसऱ्या अंकानें होणाऱ्या द्विपदसंख्येचा वर्गपूरक (चौरसावरील गोमुखी) वजा होईल. ह्याप्रमाणें पहिल्या दोन भागांत पहिल्या दोनअंकी संख्येचा वर्ग वजा केला ह्मणजे त्यांतली बाकी व तिसरा भाग ह्यांत ती दोनअंकी संख्या व तिसरा अंक ह्या द्विपदसंख्येचा वर्गपूरक (त्या चौरसावरील गोमुखी) वजा होईल. ह्या क्रमानें इष्ट मूळाचे अंक सांपडत जातील. ह्मणून,

वर्गमूल काढण्याची रीति.

१. इष्ट संख्येंत एकच्या स्थलावर खूण करून पूर्णांक देणारा भाग तोडावा. तेथून पूर्णांकांत व दशांशांत दुसऱ्या दुसऱ्या स्थलांवर खुणा करून स्थलांक देणारे भाग तोडीत जावें. दशांशांवरचा भाग एक अंकाचा झाला, तर त्यावर शून्य चढवून तो भाग दोन अंकांचा करून घ्यावा. ह्या भागांइतकाले पूर्णांक व दशांश इष्ट मूळांत येतील.

२. प्रथम डावीकडच्या पहिल्या भागांत जाईल तेवढा मोठा वर्ग वजा करून बाकीवर दुसरा भाग घ्यावा, ह्मणजे ती संख्या सुमाराचा वर्गपूरक भाज्य दाखवील.

३. नंतर वजा केलेल्या वर्गाचें मूल उजवीकडे द स्थली मांडून त्याची दुप्पट डावीकडे भाजक स्थली मांडावी. ही संख्या २ द हा सुमाराचा भाजक दाखवील.

४. ह्या दुपटीने वर्गपूरक भाज्यांतल्या एक खेरीज संख्येला

जो भाग लागेल तो उजवीकडे ए स्थलीं मांडून डावीकडच्या दुपटीवरही मांडावा. ही संख्या वर्गपूरक भाज्याचा (२ द + ए) हा खरा भाजक दाखवील.

५. ह्या खऱ्या भाजकाला उजवीकडच्या ए भागानें गुणून तो गुणाकार भाज्यांत वजा द्यावा, ए भाग मोठा ठरला तर त्याहून लहान भाग लावावा, ह्मणजे पहिल्या दोन भागांत (द + ए)^२ वजा होईल. ह्या बाकीवर तिसरा भाग घ्यावा ह्मणजे ती संख्या नवा सुमाराचा वर्गपूरक भाज्य दाखवील. ह्मणजे (द + ए) ह्या दोनअंकी संख्येला द_२ हा हटलें, आणि पुढील भागाला ए_२ हा हटलें, तर (२ द_२ + ए_२) ए_२ हा गुणाकार सुमारें दाखवील.

६. नंतर उजवीकडचा ए भाग डावीकडच्या ए भागांत मिळवावा, ह्मणजे तेथें उजवीकडच्या दोनअंकी मूळाची, दुप्पट होईल किंवा ती २ द_२ हा सुमाराचा भाजक दाखवील.

७. ह्या दुपटीनें कलम ४, ५, व ६ प्रमाणें पुढील भाग लावून नवे भाज्य भाजक तयार करावे. अशी कृति इष्ट संख्येंत केलेले भाग संपत तोंपर्यंत करून तींतील दशांशांतल्या भागांइतक्याच्या स्थलीं उजवीकडच्या मूलसंख्येंत दशांशचिन्ह करावें.

सूचना १ ली.— एकादा भाग शून्याचा लागला तर डावीकडच्या दुपटीवर शून्य द्यावें, मधला भाज्य बाकी समजून त्यावर नवा भाग घ्यावा, आणि त्या भाज्याला पुढील भाग वसवावा.

सूचना २ री.— शेवटच्या स्थलीं बाकी शून्य झाली तर तें मूळ विनकूसर खरें समजावें आणि बाकी राहिली तर तें मूळ शेवटच्या दशांश स्थलाइतक्या कसरीनें खरें समजावें.

उदाहरण १ लें.— पुढील संख्येचें वर्गमूल काढणें आहे असें समजून तींत केलेले भाग पहा.

९	९७४१६९(९८७)
९	८९
९८८	९६४९
८	९५०४
९९६७	९३७६९
७	९३७६९
	००००

भाग तीन झाले हणून मूळांत तीन अंक येतील.

वर्ग संख्येचे डावेकडचा पहिला भाग ९७ ह्यांत मुख्यत्वे- करून ह्या संख्येचे मूळांतल्या पहिल्या अंकाचा वर्ग आहे. हणून ९७ त मोठा वर्ग कोणता वजा जाईल तो शोधून तो त्याचे खाली मांडला. ह्या ८९ चे वर्गमूळ ९ हा त्या मूळांतल्या पहिला अंक हणून उजव्या बाजूस भागाकार स्थळी मांडिला आणि ८९ वजा देऊन आलेल्या बाकीवर दुसरा भाग ४९ हा घेतला. ह्या ९६४९ वरून ९ या वरचा दुसरा भाग शोधितां येतो. हणून या संख्येला नवा सुमाराचा भाज्य झटले आहे.

ह्या ९६४९ त कोष्टकी वर्गावरच्या पहिल्या गोमुखीतील संख्या मुख्यत्वे असावयाच्या हणजे पहिल्या दुसऱ्या अंकांच्या गुणाकाराच्या २ पट दशक व दुसऱ्या अंकांच्या वर्गा इतके एकडे असावयाचे. (कारण अंकावर अंक आला की, पहिल्याला दशक दुसऱ्याला एकडे हें नांव येतें.) हणून डाव्या बाजूस ९ खाली ९ मांडून त्यांची बेरीज १८ ह्यांनी ९६४ दशकांना भाग पाहिला तेव्हां ८ चा भाग लागला. आतां पहिल्या अंकाचे दुप्पट १८ डावीकडे आहेत. त्यांवर हे ८ मांडून झालेल्या १८८ खाली ८ मांडून त्यांनी गुणिलें तर तो गुणाकार पहिल्या दुसऱ्या अंकांच्या गुणाकाराचे दुप्पट दशक व दुसऱ्या अंकाचे वर्गा इतके एकडे ह्यांचे बेरजे इतका येतो. हणून तो गुणाकार ९६४९ खाली मांडून त्यांत वजा दिला. आणि आलेल्या बाकीवर पुढचा ६९ चा भाग घेऊन ९३७६९ हा नवा सुमाराचा भाज्य तयार केला.

वरच्या दोन वजावाटींत ९८ ह्या दोनअंकी संख्येचा वर्ग

वजा झाला. ह्या ९८ वर दुसरा भाग लागणार हणून ९८ हे द (दशक) व त्यावर येणारा भाग हे ए (एकडे) झाले. १३७६९ मध्ये ह्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराचे २ पट दशक व वरच्या अंकांच्या वर्गा इतके एकडे असले पाहिजेत. डावेकडच्या १८८ ह्या संख्येत ८ मिळविले हणजे ९८ ची दुप्पट होते. ही दुप्पट दशकाची आहे हणून तिने भाज्यावरचा एक अंक सोडून बाकी १३७६ ह्या दशकांना भाग पाहिला तो ७ चा लागला. ७ डावेकडच्या १९६ दशकांवर मांडून त्याचे खाली मांडले आणि दोहोंचा गुणाकार केला. हा गुणाकार ९८ दशक व ७ एकडे ह्यांचे गुणाकाराची दुप्पट व ७ एकड्यांचा वर्ग ह्यांचे बेरजे इतका आला. हणून तो भाज्यांत वजा दिला. बाकी काहीं नाही, हणून दिलेले संख्येचे वर्गमूळ ९८७ हे झाले.

एकंदरीने घात करतांना आपण ज्या ज्या संख्यांची वेरीज केली त्याच संख्या, मूळ काढितांना आपण शोधून काढून त्या उलट वजा केल्या.

उदाहरण २ रे. - १८६६२४ ह्या संख्येचे वर्गमूळ काढा.

४	१८६६२४ (४३२)
४	१६
८३	२६६
३	२४९
८६२	१७२४
२	१७२४९
	००००

ह्या उदाहरणांत प्रथम ४ या संख्येवर चिन्ह करून तेथून डावेकडे एक एक अंक टाकून चिन्हे केलीं. तेव्हां १८, ६६, २४ असे भाग झाले. आतां पहिला भाग १८ ह्यांतून ४ चा वर्ग १६ वजा जातो, हणून ४ हे भागाकार-

स्थळी लिहून त्यांचा वर्ग १६ हा १८ त वजा केला, तेव्हां बाकी राहिले २. त्यांवर दुसरा भाग ६६ हा घेतला, तेव्हां २६६ झाले. नंतर भागाकारस्थळीचे ४ ह्यांची दुप्पट ८ भाजकस्थळी लिहिली. ८ ही संख्या भाज्यांकांतील २६ ह्या संख्येत ३ वेळां वजा जाते, हणून ३ हे भागाकारस्थळचे ४ ह्या संख्येवर लिहून भाजकस्थळचे ८ यां संख्येवरही लिहिले. तेव्हां भाजकस्थळी ८३ झाले. ह्यांस ३ नीं गुणून तो गुणाकार २६६

यांत वजा केला, तेव्हां बाकी राहिले १७; त्यावर घेतले २४, तेव्हां १७२४ हा नवा भाज्य झाला.

आतां ३ हे भाजकस्थळचे ८३ त मिळविले, तेव्हां झाले ८६, ह्मणजे भागाकारस्थळीच्या ४३ ची दुप्पट. हांनीं १७२ ह्यांस २ चा भाग जातो, ह्मणून २ हे भागाकारस्थळीं लिहून, ८६ वर लिहिले, तेव्हां ८६२ हा भाजक झाला, ह्यास २ नीं गुणून तो गुणाकार १७२४ हा भाज्य १७२४ ह्यांत वजा केला; बाकी राहिलें ० ह्मणून वर्गमूळ ४३२, हें उत्तर.

उदाहरण ३ रें.— १०२९१२६४ ह्यांचें वर्गमूळ काढा.

३	१०२९१२६४ (३२०८
३	९
६२	१२९
२	१२४
६४०८	५१२६४
८	५१२६४
	-४

उदाहरणांत दशांशस्थळें ३ होतीं, ह्मणून वर शून्य देऊन दशांशांतले भाग दोन दोन अंकांचे केले, ह्मणजे (मूळ नि. १ क. २ प्र.) दशांशाचा छेद वर्ग संख्या केला, आणि मागील रीतीप्रमाणें वर्गमूळ

काढलें. ह्या उदाहरणांतील दशांशांत दोन भाग आहेत ह्मणून वर्गमूळांत दोन स्थळांमागे दशांश द्विंह केले.

उत्तर ३२०८ सुमारें.

सूचना ३ री.— जेव्हां वर्गमूळ बरोबर निघत नाहीं, तेव्हां वर्गमूळांत इच्छिलीं दशांशस्थळें येतील इतकीं दिलेल्या संख्येवर दशांश शून्यें द्यावीं.

उदाहरण ४ थें.— १२ चें वर्गमूळ तीन दशांशस्थळांपर्यंत बरोबर पाहिजे. येथें तिहींच्या दुप्पट १२ वर शून्यें दिलीं. जसें,—

३	१२.०००००० (३.४६४
३	९
६४	३००
४	२५६
६८६	४४००
६	४११६
६९२४	२८४००
४	२७६९६
	७०४

उत्तर ३.४६४ इ.

उदाहरण ५ वें.— ५३५.१४६ ह्यांचें वर्गमूळ तीन दशांश-स्थळांपर्यंत काढा.

२	५३५.१४६००० (२३.१३३
२	४
४३	१३५
३	१२९
४६१	६१४
१	४६१
४६२३	१५३६०
३	१३८६९
४६२६३	१४९१००
३	१३८७८९
	१०३११

ह्या उदाहरणांत पूर्णांकांतील पहिला भाग एकाच अंकाचा आला आहे. वर्गमूळांत ३ दशांशस्थळें आणावयाचीं क्षणून दिलेल्या संख्येंत ३ च्या दुप्पट ६ दशांशस्थळें पाहिजेत, पैकीं तीन दिलीं आहेत,

बाकी तीन शून्यें जास्ती घेऊन सहा स्थळें पुरीं केलीं, आणि वर्गमूळ पूर्ववत काढलें.

उत्तर २३.१३३

सूचना ४ थी.— व्यवहारी अपूर्णाकाचें वर्गमूळ काढणें झाल्यास त्या अपूर्णाकास दशांशरूप देऊन मग वर्गमूळ काढावें.

उदाहरण ६ वें.— $\frac{५}{१२}$ ह्यांचे वर्गमूळ काढा.

$$\frac{५}{१२} = ०.४१६ \quad \sqrt{४.४१६} = ०.६४५. \text{ हें उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. टा.

खाली दिलेल्या संख्यांचीं वर्गमूळें काढा.

१. २०२५; १७.३०५; ०००७२९.
२. ३; ५; ६; १२; २५.
३. $\frac{२७}{३४७}$; $\frac{९}{१२}$; $१७\frac{३}{८}$.
४. ९७.४१; १२।=; ॥≡॥
५. ८४१; १२८७; ६०८४; ४९०६.
६. $\frac{३}{५}$; $\frac{२८}{२५}$; $२\frac{१}{४}$; १५.८.
७. ६.४; ०.६४; ०.०६४; ६४०.
८. $१२\frac{३}{५}$; $६४\frac{१}{५}$; ०१८.२७; ४०.९६.

$$९. \frac{२०५}{२२५}; \frac{३०३१}{००३६}; \frac{७२८}{५२४}; \frac{३३७}{२३९}.$$

$$१०. १७६९८८४९; ६९८४८५; ७१४०२५.$$

$$११. १०८१६; ७३००८०५; ५६८२१४४४.$$

$$१२. ४५३६९; ००६४; ९५८५२१६.$$

$$१३. ७४५२९; ३३७०९६३६; \frac{२२५०}{३६७०}.$$

$$१४. ०००२५६; ००५९१३६१; ९८५९६.$$

१५. १७९० आणि ४४५१ यांच्या बेरजेचें वर्गमूळ, आणि वर्गमूळांची बेरीज यांत अंतर काय ?

घनमूल.

वर्गमूलांत दर्शविलेल्या विचार सरणीनें घनमूलासंबंधी नियम दिसून येतात. ते असे.—

नियम १ ला.— पूर्ण संख्येवर शून्यें असून तीं ३ च्या पटी इतकीं नसलीं, तर ती संख्या कोणत्याही संख्येचा पुरा घन असूं शकणार नाहीं.

नियम २ रा.— दशांश संख्येवर शून्याखेरीज अंक असून दशांशस्थले ३ च्या पटी इतकीं नसलीं, तर ती संख्या कोणत्याही संख्येचा पुरा घन असूं शकणार नाहीं.

नियम ३ रा.— पूर्ण संख्येचें घनमूल पूर्ण संख्या संभवत नसलें, तर तें पूर्णांकी अंशछेदांची अपूर्ण संख्याही संभवणार नाहीं.

असल्या संख्येच्या घनमूलाला करणी संख्या किंवा अमेय संख्या म्हणतात.

एकांकी पूर्ण संख्यांचे घन खाली दिले आहेत. हे लक्षांत ठेवा.

$$१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९$$

$$१, ८, २७, ६४, १२५, २१६, ३४३, ५१२, ७२९$$

एकांकी पूर्ण संख्येच्या घनांत १, २, किंवा ३ अंक येतात.

(बरील घन पहा).

एकांकी दशांश संख्येच्या घनांत नेहमीं ३ अंक येतात. (२ चा घन ००८ पहा).

ह्या कोणत्याही संख्येवर एक एक अंक चढवीत गेलें, तर

प्रत्येक अंकाच्या चढवणीस पहिल्या संख्येच्या घनावरतीं
भावी संख्येच्या घनांत तीन $३^३ = २७$
तीन अंक वाढत जातात $३६^३ = ४६६५६$
(वाजूच्या वाढी पहा). $३६.४^३ = ४८२२८.५४४$

ह्या प्रत्येक चढवणीस पहिल्या संख्येच्या घनावरची द्विपद संख्येच्या घनाची वाढ ($३ द^२ + ३ द.ए + ए^२$). ए ह्या घनपूरकानें दाखविली जाते (द्विपद घन नियमाचें फल पहा).

ह्यावरून इष्ट घनसंख्येंत एक किंवा दशांशचिन्ह ह्यापासून तीन तीन अंकांचे भाग करीत गेलें, तर डावीकडच्या पहिल्या भागांत मूळांतल्या पहिल्या अंकाची घन वजा होईल, आणि पहिल्या भागांतली बाकी व दुसरा भाग ह्यांत त्यावरच्या दुसऱ्या अंकानें होणाऱ्या द्विपद संख्येचा घनपूरक वजा होईल. ह्याप्रमाणें पहिल्या दोन भागांत पहिल्या दोनअंकी संख्येचा घन वजा केला, ह्मणजे त्यांतली बाकी व तिसरा भाग ह्यांत ती दोनअंकी संख्या व तिसरा अंक ह्या द्विपद संख्येचा घनपूरक वजा होईल. ह्या पद्धतीनें इष्ट मूळाचे अंक क्रमानें सांपडत जातील. ह्मणून,

रीति १ ली.— घनसंख्येंत एकंवर खूण करून तेथून दोन दोन अंक सोडून तिसऱ्या तिसऱ्या अंकावर दोहोंकडे खुणा करीत जावें. दशांशांतल्या उजव्या शेवटच्या भागांत स्थलें कमी असलीं तर शून्यें चढवून तो भाग पुरा करावा, आणि इष्ट मूळांतै पूर्णांक व दशांश किती किती येतील तें ठरवावें.

२. नंतर डावीकडच्या पहिल्या भागांत जाईल तेवढ्या मोठ्या अंकाचा घन वजा करून बाकीवर दुसरा भाग घ्यावा ह्मणजे ती संख्या ($३ द^२ + ३ द.ए + ए^२$). ए हा घनपूरक भाज्य सुमारानें दाखवील.

३. नंतर वजा केलेल्या घनाचें मूळ उजव्या बाजूस पहिल्या द. स्थलीं मांडून, त्याच्या वर्गाची ३ पट डाव्या बाजूस भाजक-स्थलीं मांडावी. ही $३द^२$ हा सुमाराचा भाजक दाखवील.

४. ह्या सुमाराच्या भाजकानें घनपूरक भाज्यांतील एक व

दहं अशा दोन अंकांखेरीज संख्येला भाग पाहून तो दवरतीं ए स्थलीं मांडावा. अर्थात पहिल्या अंकाला द आणि दुसऱ्या अंकाला ए ह्मणावें.

५. नंतर ३ द^२ च्या खालीं ३ द.ए, आणि ए^२ ह्या संख्या एकेक अंक पुढें जातशा मांडून सर्वांची बेरीज घ्यावी. तिला एनें गुणून घनपूरक भाज्यांत वजा द्यावी, हा भाग मोठा ठरला तर त्याहून लहान भाग लावावा, आणि बाकीवर तिसरा भाग घ्यावा, ह्मणजे ती संख्या नवा घनपूरक भाज्य दाखवील.

६. नंतर ज्या दोनअंकी संख्येचा घन वजा झाला ती द समजून, तिच्या वर्गाची ३ पट डाव्या बाजूस मांडावी. ही ३ द^२ हा नवा सुमाराचा भाजक दाखवील.

७. ह्या नव्या सुमाराच्या भाजकानें कलम ४, ५. व ६ प्रमाणें पुढील भाग लावून नवे भाज्यभाजक तयार करीत जावें. सर्व भाग संपले ह्मणजे दशांशांतल्या भागाइतक्याच्या स्थलीं, मूळसंख्येंत, दशांशचिन्ह करावें.

सूचना १ ली.— भाग शून्याचा लागला, तर डावीकडच्या वर्गाच्या ३ पटीवर दोन शून्ये द्यावीं, मधला भाज्य बाकी समजून त्यावर नवा भाग घ्यावा, आणि त्या भाज्याला पुढील भाग बसवावा.

सूचना २ री.— कांहीं दशांश स्थलें घेतल्यावरही बाकी राहिली, तर तें मूळ त्या स्थलांशापावेतों कसरीनें खरें समजावें.

उदाहरण १ लें.— ९४८१८०८१ ह्या संख्येचें घनमूळ काढा.

$$\begin{array}{r}
 ३ \times ४^२ = ४८ \qquad ९४८१८०८१० \quad (४५०६ \\
 ३ \times ४ \times ५ = ६० \qquad \underline{६४} \\
 ५^२ = २५ \qquad \underline{३०८१८} \\
 ५४२५ \times ५ = २७१२५ \\
 ३ \times ४५^२ = ६०७५ \qquad \underline{३६९३०८१०} \\
 ३ \times ४५ \times ६ = ८१० \\
 ६^२ = ३६ \\
 \hline
 = ६१५६३६ \times ६ = ३६९३०८१६ \\
 \qquad \qquad \qquad - ००६
 \end{array}$$

ह्या उदाहरणांत ८ एकंवर प्रथम खूण करून सहस्रांश स्थलीं शून्य देऊन त्यावर खूण केली, आणि ४ सहस्रांवर खूण केली. पूर्णांकांत २ व दशांशांत १ भाग झाला ह्मणून ह्याच्या मूळांत पूर्णांकाचे २ व दशांशाचा १ असे ३ अंक येतील.

पहिला भाग ९४०० चा ह्यांत ४ चा घन वजा जातो ह्मणून घालवून मूलस्थानी ४४ लिहिले. ३० ह्या बाकीवर ८१८ हा दुसरा भाग घेतला तेव्हां ३०८१८ हा सुमाराचा घनपूरक भाज्य झाला. ह्याला ४ दशकांच्या वर्गाची ३ पट ४८०० ह्या सुमाराच्या भाजकानें ६ चा भाग लागतो, परंतु पुढील कृत्यांत तो ठरत नाही, ह्मणून ४ वर ५ चा भाग लावला.

एथें ४ हे द (ह. दहं) असून ५ हे ए (ह. एकं) आहेत ह्मणून $३ द^२ + ३ द \cdot ए + ए^२ = ५४२५$ हा खरा भाजक आला. ह्याला ए ह्मणजे ५ ह्यानें गुणून तो गुणाकार वजा दिला, तेव्हां पहिल्या दोन भागांतून ४५ चा घन वजा झाला. बाकीवर ३ रा भाग घेतला तेव्हां ३६९३०८१० हा नवा सुमाराचा घनपूरक भाज्य आला.

एथें वजा केलेल्या घनाचें मूल ४५ हा द समजावयाचा, ह्मणून ४५^२ ची ३ पट = ६०७५ ह्या सुमाराच्या भाजकानें ६ चा भाग लाविला.

एथें ४५ हे द असून ६ हे ए आहेत ह्मणून $३ द^२ + ३ द \cdot ए + ए^२ = ६१५३३६$ हा खरा भाजक आला. ह्याला ए किंवा ६ ह्यानें गुणून तो गुणाकार (घनपूरक) वजा दिला तेव्हां ००६ चा तोटा आला. ह्यावरून ४५६ हे घनमूळ सुमाराचें आहे, आणि ह्यांत १ पावेतो कसर घेतली आहे असें ठरलें.

उदाहरण २ रें.— ९२६८५९.३७५ या संख्येचें घनमूळ काढा.

$$\begin{array}{r}
 ९२६८५९३७५ \quad (०९७५ \\
 ७२९ \\
 \hline
 १९७८५९ \\
 ३ \times ९२ = २४३ \\
 ३ \times ९ \times ७ = १८९ \\
 ७२ = ४९ \\
 \hline
 २६२३९ \times ७ = १८३६७३ \\
 १४१८६३७६ \\
 \hline
 ३ \times ९७२ = २८२२७ \\
 ३ \times ९७ \times ५ = १४५५ \\
 ५२ = \dots २५ \\
 \hline
 २८३७२७५ \times ५ = १४१८६३७५
 \end{array}$$

ह्या उदाहरणांत पहिल्यानें पूर्णांकां-
तील ९ एक ह्या अं-
कावर चिन्ह करून,
तेथून डावेकडे दोन
अंक टाकून तिसरे
अंकावर चिन्ह के-
लें; तसेंच दशांशांत

पहिले दोन अंक सोडून तिसऱ्या अंकावर चिन्ह केलें; तेव्हां ९२६, ८५९, ३७५, असे भाग झाले.

पहिला भाग ९२६ ह्यांत ९ चा घन वजा जातो, हाणून ९ हा घनमूलांक भागाकारस्थळीं लिहून त्याचा घन ७२९ हा ९२६ त वजा केला. बाकी राहिले १९७, त्यांवर घेतले ८५९, तेव्हां १९७८५९ हा नवा सुमाराचा भाज्य झाला.

नंतर मूलांक ९ ह्यांचे वर्गाची ३ पट २४३, हिनें १९७८ ह्यांस ७ चा भाग जातो, हाणून ७ हे भागाकारस्थळीं लिहिले. नंतर ३×९^२ ; $३ \times ९ \times ७$; $७^३$ हे गुणाकार एकेक अंक पुढें जात असे एकाखालीं एक मांडून वेरीज केली ती २६२३९ आली. हिला ७ नें गुणून तो गुणाकार १९७८५९ ह्यांत वजा केला. बाकी राहिले १४१८६, त्यांवर तिसरा भाग ३७५ घेतला, तेव्हां झाले १४१८६३७५ हा खरा भाज्य आला. ह्यांस भाजक, ९७ हा घनमूलांक धरून पूर्वाप्रमाणेच काढला, तो असा.—

३×९७^२ ह्यानें १४१८६३ ह्यांस ५ चा भाग जातो, हाणून पूर्वाप्रमाणें ३×९७^२ ; $३ \times ९७ \times ५$; $५^३$; हे सर्व गुणाकार एकेक अंक पुढें जात असे मांडून तिला ५ नें गुणतां १४१८६३७५ आले. हे वरील भाज्यांत तंतोतंत वजा झालें तेव्हां हें घनमूल खरें समजलें पाहिजे. (मू. नि. २ पहा).

दिलेल्या संख्येतील दशांशस्थळांत एकच भाग आहे, हाणून

उत्तरांत एका अंकाच्या मागे हाणजे ५ च्या मागे दशांश चिन्ह केले.

उत्तर ९७५ हें घनमूळ.

ही कृति लांब आहे तरी दुसऱ्या रीतीस आधारभूत आहे. ह्याजकरितां पुढील उदाहरणें विद्यार्थ्यांनीं लक्ष देऊन करावीं.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. टा.

१. उ. ५७१४८२.१९०;	१६२८.१५८२.	} ह्यांचीं घनमूळें काढा.
२. उ. १३३२; ३२.१४;	२१०३५.८९.	
३. उ. $\frac{२७}{८}$;	१५.०११; १५.३.	
४. उ. $\frac{५}{६}$;	१००; १००००००.	
५. उ. ८०००;	१२५; ००१.	

हार्नर ह्या नांवाच्या एका साहेबानें मूळभागापासून सुमाराचा भाजक, दुसरा भाग, व खरा भाजक, हे एका क्रमानें उत्पन्न करित जाण्याची फार सोपी रीति बसविली आहे. तिची माहिती आपले लोकांस व्हावी ह्यागून ती पद्धतवार वरचेंच उदाहरण सोडवून ह्या पुस्तकांत दाखविली आहे. भाग पहाण्याचे व वजा करण्याचे जे अंक, संयुक्त संख्येचा घन करण्याच्या पद्धतीप्रमाणें तयार करण्यास मागील रीतींत सांगितले, तेच अंक ह्या रीतीनें एका क्रमानें तयार होत जातात, व शिवाय ही रीति घनापुढच्याही घातांचीं मूळें शोधण्याच्या कामीं लागू करितां येते.

हार्नरची रीति.

(१) कांहीं अंतरानें दोन शून्यें व दिलेली संख्या लिहा हाणजे पुढें जीं आंकड्यांचीं तीन सदरें भरत यावयाचीं त्या सदरांचे हे आद्यंक होतील.

(२) रीतीप्रमाणें एकंच्या अंकावर प्रथम खूण करून तेथून दिलेल्या संख्येचे होतील तितके तीन तीन आंकड्यांचे भाग करा.

(३) डावेकडील शेवटच्या भागांत ज्या संख्येचा घन जाईल तो इच्छिले घनमूळाचे स्थळीं पहिला अंक मांडा.

(४) हा अंक पहिले सदरांत लिहा, आणि त्याचे वर जें

असेल त्याच्याशीं तो मिळवून त्या बेरजेस तोच अंक गुणक द्या आणि गुणाकार दुसऱ्या सदरांत लिहा.

(५) वर सांगितल्याप्रमाणें ह्या दुसऱ्या सदरांतील अंकाची वरील शून्यांशीं बेरीज घेऊन त्या बेरजेस मागल्या अंकानें फिरून गुणून हा गुणाकार तिसरे सदरांतोळ संख्येचे शेवटचे भागाखालीं लिहून वजावाकी करा.

(६) वर ज्याप्रमाणें केले असेल त्याचप्रमाणें फिरून पहिले व दुसरे सदरांत करा, आणि पहिले सदरांत आणखी घनमूळाचा जो अंक आला असेल तो एकवार मिळवा.

(७) पहिले सदरांत जो अंक आला असेल त्यावर एक शून्य द्या, आणि दुसरे सदरांतील आलेल्या अंकावर दोन शून्ये द्या. तिसरे सदरांतील आलेल्या वजावाकीवर पुढचे भागांतील तीन अंक घ्या.

(८) दुसरे सदरांतील अंकांनीं तिसरे सदरांतील अंकांस भागून पाहून घनमूळाचा दुसरा अंक शोधून काढा.

(९) हा अंक पहिले सदरांतील अंकांखालीं मांडून (४), (५), (६) कलमांत सांगितल्याप्रमाणें फिरून कृति करा.

(१०) नंतर (७) वे कलमांत सांगितल्याप्रमाणें अंकावर शून्ये वगैरे देऊन मागे सांगितल्याप्रमाणें घनमूळ बरोबर अथवा जेवढें सूक्ष्म आलें पाहिजे तेवढें निघे तोंपर्यंत पुढें गणित करित जा.

(११) दिलेल्या संख्येंत दशांश अंक असेल तर गणित करतां करतां पूर्णांक भाग संपले ह्मणजे घनमूळाचे अंकांपुढें दशांश चिन्ह घालण्यास विसरूं नका.

गणित फार लांबत चाललें ह्मणजे तें तोकडें करण्याकरतां दुसरे सदरांतील एक अंक कापा, आणि पहिले सदरांतील दोन अंक कापा आणि पहिले सदरांत मूळाचे नवे नवे अंक न मिळवितां (४), (५), आणि (६) या कलमांत सांगितल्याप्रमाणें करित जा.

ताळा. आलेल्या उत्तराचा घन करून पहावा.

उदाहरण १ लें.- ९२६८५९३७५ ह्या संख्येचें घनमूळ काढा

०	०		
९२६८५९३७५	९२६८५९३७५	९२६८५९३७५	१२७५
७२२	७२२	७२२	७२२
२७०	२४३००		
२७७	१९३२		
२८४	२६२३२	१८३६७३	
	१९८८	१४९८६३७५	
२२७०	२८२२७००		
२२७५	१४५७५		
	२८३७२७५	१४९८६३७५	००००००००

ह्या ठिकाणीं ९२६ ह्या शेषटचे भागांत ९ ह्याचा घन ७२९ हा जातो ह्मणून घनमूळाचा पहिला अंक ९ आहे. हा पहिले सदरांतील शून्याखालीं मांडून बेरीज घेतली ती ९ आली. ह्यास आणखी ९ नीं गुणून गुणाकार ८१ आला, तो दुसरे सदरांतल्या शून्याखालीं लिहिला. नंतर बेरीज केली ती ८१ आली, हीस ९ नीं गुणून गुणाकार ७२९ आला, तो तिसरे सदरांतील ९२६ ह्यांच्या खालीं मांडून वजाबाकी केली, आणि बाकी १९७ राहिले ह्यांवर पुढचे तीन अंक ८५९ हे घेतले.

आतां फिरून पहिले सदरापासून आरंभ केलीं. पहिले अंकांत ९ मिळविले, बेरीज १८ आली तीस आणखी ९ नीं गुणून गुणाकार १६२ आला, तो दुसरे सदरांत ८१ खालीं लिहिला आणि बेरीज केली ती २४३ आली. पहिले सदरांत आणखी ९ मिळविले आणि २७ ह्यांवर एक शून्य चढविलें, आणि दुसरे सदरांत २४३ आले होते त्यांवर दोन शून्ये चढविलीं. ह्या दुसरे सदरांतील अंकांनीं घनमूळांतला दुसरा अंक काढण्याकरितां तिसरे सदरांतील अंकास भागून पाहिलें तों भाग ८ चा जातो असा सुमार झाला. परंतु हा तपासून पाहतां अधिक आहे असें समजल्यावर भाग ७ चा घेतला तो

घनमूळांतला दुसरा अंक झाला. हे ७ रीतीप्रमाणें पहिले सदरां-
तील २७० रांत मिळवून २७७ बेरजेस त्याच ७ नीं गुणलें आणि
तो गुणाकार दुसरे सदरांत लिहिला. हे अंक वरील अंकांशीं मि-
ळवून बेरीज २६२३९ आली, तीस ५ नीं गुणून जो गुणाकार
आला तो तिसरे सदरांत लिहिला. आणि वरील अंकांत वजा
करून १४१८६ बाकी राहिली तीवर पुढचे तीन अंक ३७५
घेतले. नंतर पहिले सदरांत ७ मिळवून बेरजेस ७ नीं गुणून
गुणाकार १९८८ आला. तो दुसरे सदरांत मिळविला, आणि
पहिले सदरांत आणखी ७ मिळवून त्या बेरजेवर एक शून्य
चढविलें, आणि दुसरे सदरांतील बेरजेवर २ शून्यें चढविलीं.

मागीलप्रमाणें फिरून दुसरे सदरांतील अंकांनीं तिसरे सद-
रांतील अंकांस भागून पाहिलें तों भागाकार ५ आला, तो घन-
मूळांतला तिसरा अंक झाला. ह्यास पहिले सदरांत मिळवून
आलेल्या बेरजेस ५ नीं गुणिलें, आणि त्या गुणाकारास दुसरे स-
दरांत मिळवून त्यास आणखी ५ नीं गुणलें, आणि गुणाकार
१४१८६३७५ आला तो तिसरे सदरांत लिहिला, त्यांतील
अंक आणि वरील रकमेचे सर्व अंक बराबर होते ह्यांन वजा-
बाकी शून्य आली आणि हें कृत्य संपलें.

आतां ९७५ ह्यांचा जर घन करून पाहिला तर पूर्वा दि-
लेल्या संख्येइतका येतो ह्यांन हें उत्तर बरोबर आहे असें
समजावें.

गणित वाढत गेलें असतां त्याचा संक्षेप कसा करावा हें दा-
खविण्याकरितां एक दुसरें उदाहरण पुढें करून दाखविलें आहे.
तें पाहिलें ह्याणजे बुक्ति ध्यांनांत येईल.

गणितकर्त्यानें इतकें मात्र लक्षांत ठेवावें कीं, जोंपर्यंत पूर्णां-
काशीं संबंध ठेवणें आहे तोंपर्यंत संक्षेप करूं नये. दशांश
भाग लागला ह्याणजे रीतीप्रमाणें गणिताचा संक्षेप करावा.

उदाहरण. ७८३१४०६ ह्या संख्येचें घनमूळ काढा.

$\frac{0}{8}$	$\times 8..$	$\frac{0}{96}$	$.. \times 8..$	$\frac{0}{96}$	$\frac{0}{96}$	$\frac{0}{96}$	$\frac{0}{96}$	$\frac{0}{96}$	$\frac{0}{96}$
$\frac{8}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{8}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{8}{800}$	$\frac{8}{800}$	$\frac{8}{800}$	$\frac{8}{800}$	$\frac{8}{800}$	$\frac{8}{800}$
$\frac{16}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{16}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{16}{800}$	$\frac{16}{800}$	$\frac{16}{800}$	$\frac{16}{800}$	$\frac{16}{800}$	$\frac{16}{800}$
$\frac{24}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{24}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{24}{800}$	$\frac{24}{800}$	$\frac{24}{800}$	$\frac{24}{800}$	$\frac{24}{800}$	$\frac{24}{800}$
$\frac{32}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{32}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{32}{800}$	$\frac{32}{800}$	$\frac{32}{800}$	$\frac{32}{800}$	$\frac{32}{800}$	$\frac{32}{800}$
$\frac{40}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{40}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{40}{800}$	$\frac{40}{800}$	$\frac{40}{800}$	$\frac{40}{800}$	$\frac{40}{800}$	$\frac{40}{800}$
$\frac{48}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{48}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{48}{800}$	$\frac{48}{800}$	$\frac{48}{800}$	$\frac{48}{800}$	$\frac{48}{800}$	$\frac{48}{800}$
$\frac{56}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{56}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{56}{800}$	$\frac{56}{800}$	$\frac{56}{800}$	$\frac{56}{800}$	$\frac{56}{800}$	$\frac{56}{800}$
$\frac{64}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{64}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{64}{800}$	$\frac{64}{800}$	$\frac{64}{800}$	$\frac{64}{800}$	$\frac{64}{800}$	$\frac{64}{800}$
$\frac{72}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{72}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{72}{800}$	$\frac{72}{800}$	$\frac{72}{800}$	$\frac{72}{800}$	$\frac{72}{800}$	$\frac{72}{800}$
$\frac{80}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{80}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{80}{800}$	$\frac{80}{800}$	$\frac{80}{800}$	$\frac{80}{800}$	$\frac{80}{800}$	$\frac{80}{800}$
$\frac{88}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{88}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{88}{800}$	$\frac{88}{800}$	$\frac{88}{800}$	$\frac{88}{800}$	$\frac{88}{800}$	$\frac{88}{800}$
$\frac{96}{8}$	$.. \times 8..$	$\frac{96}{800}$	$.. \times 8..$	$\frac{96}{800}$	$\frac{96}{800}$	$\frac{96}{800}$	$\frac{96}{800}$	$\frac{96}{800}$	$\frac{96}{800}$

वर जें उदाहरण करून दाखविलें आहे, त्यांत पहिले सदरापासून दुसरे सदरांत, आणि दुसरे सदरापासून तिसरे सदरांत अंक कसकसे येत गेले तें दाखविण्याकरितां ठिपक्यांच्या रेषा काढल्या आहेत. त्यांत जे जे वेगळाले गुणक आले तेही दाखविले आहेत. पहिल्यानें हार्नरच्या रीतीप्रमाणें ४२७ हे तीन अंक साधले. ते साधतांना पहिलें सदर १२८१ पर्यंत येऊन पोचलें, दुसरें सदर ५४६९८७ पर्यंत येऊन पोचलें आणि तिसरे सदरांत ३७६६४८३ हे अंक वजा झाले. आतां आहीं गणितांत संक्षेप करण्यास आरंभ केला. तिसरे सदरांत जे शेष अंक उरले होते, त्यांच्यावर तीन नवीं शून्यें घेण्याबद्दल, ते तसेच राखून दुसरे सदरांतील एक अंक छेकिला, आणि पहिले सदरांतील दोन अंक छेकले. तेव्हां दुसरे सदरांत ५४६९८ आणि पहिले सदरांत १२ इतके अंक मात्र राहिले. पुढचा भाग कितींचा जातो तो दुसरे सदरांतील ५४६९८ यांनीं पा-

हिला, तेव्हां तो ८ चा जातो असें समजलें. तेव्हां पहिले सदरांतील कापिलेले अंकापासून हातचे मात्र घेऊन ८ यांनीं १२ ह्यांस गुणिलें. गुणाकार १०३ आला तो दुसरे सदरांत मिळविला, आणि बेरजेस ८ नीं गुणून ४३८४०८ ही संख्या आली ती तिसरे सदरांत वजा दिली. बाकी २१७०९ राहिले. आतां दुसरे सदरांत आणखी १०३ मिळवून बेरीज ५४९०४ आली; त्यांतील वरील एक अंक छेकून ५४९० राहिले. त्याच्या पुढचा भाग २१७०९ ह्यांस कितींचा बसतो तो पाहिला तो ३ चा बसला. दुसरे सदरांतील एक अंक कापिला आहे, पहिले सदरांत राहिलेले दोन अंक तेही कापिले म्हणजे पहिलें सदर शून्य झालें. आतां पहिले सदरांतून दुसरे सदरांत अंक घेणें नाहीं. दुसरे सदरांतील छेकल्याशिवाय राहिलेले अंकांस, वर ३ चा भाग बसला आहे, त्यानें गुणून छेकलेले अंकांचे हातचे मात्र घेऊन १६४७१ आले ते तिसरे सदरांत वजा दिले. बाकी ५२३८ राहिले. पुढें दुसरे सदरांतील अंकांपैकीं दर वेळेस एक एक अंक छेकीत जाऊन साधे भागाकाराप्रमाणें, भाजक संपत तोंपर्यंत भाग बसवीत गेलों. याप्रमाणें ही कृति पुरी केली.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. डा.

पुढील उदाहरणें विद्यार्थ्यांनीं पहिल्या किंवा हार्नर साहेबांच्या रीतीनें सोडवावीं.

१. ३२७६८; ११५७६२५; २४७६७३१५२.
२. ३२४६१७५९; ७८६१०५६३१८७; ५०८८४४८.
३. १०२५५०३; ४१७३२८१; १३५७९६७४४.
४. १०२५; ३; २१९७५८३; ५.
५. २५९९६०९३७५; २४७७९१४८६०४१.
६. १३८३४८८४८४४८; ५१६४५०८७४२४.
७. $\frac{५}{६}$ आणि $३\frac{१}{३}$ यांचीं घनमूळें एक दशांशपर्यंत.
८. $\frac{५}{६}$ आणि $१\frac{१}{३}$ यांचीं घनमूळें दोन दशांशपर्यंत.
९. ६८; ०६५४; १७४; १८०३६.
१०. एकरूप तीन संख्यांचा गुणाकार ३१८९५०६०४८ इतका आहे, त्या संख्या कोणत्या ?

मूलविषयक सामान्य विचार.

मूलाचें लक्षण पाहतां $२^२ \times २^२ \times २^२ = २^६$ होतो, तर $२^६$ ला $२^६$ चें घनमूल ह्मणावें असें आहे. ह्यावरून मूलकर्म हें घात नि. ५ येथें दिलेल्या घातकर्माच्या उलट आहे ह्मणून,

नियम १ ला.—घातसंख्येचें मूल हें $\frac{\text{घातप्रकाशक}}{\text{मूलप्रकाशक}}$ ह्या भागा-

कारानें दाखविलें जाईल. जसें $\sqrt[३]{५६} = ५^{\frac{६}{३}} = ५^२$.

कोणतीही संख्यातिचा १ घात असते (घात नि. ४ फल १) ह्मणून संख्यांचीं मूले हीं वरच्या ०१ ल्या नियमाप्रमाणें $\frac{१}{\text{मूलप्रकाशक}}$ ह्या अपूर्ण घातप्रकाशकानेंही दाखवीत असतात. जशीं.—

$$\sqrt{६४} = ६४^{\frac{१}{२}} = ८$$

$$\sqrt[४]{१६} = १६^{\frac{१}{४}} = २$$

$$\sqrt[३]{८} = ८^{\frac{१}{३}} = २$$

वरच्या पहिल्या संख्येक वर्गमूल ६४ किंवा वर्गमूलांत ६४ अशा वाचतात, व त्यांपुढच्या संख्या ६४ चा $\frac{१}{२}$ घात अशा वाचतात.

संख्या मूल चिन्हांत लिहिली, ह्मणजे तिचें तें मूल काढिलें असतां जें येईल तें असा अर्थ होतो. संख्येचा मूलप्रकाशक अपूर्ण घाताच्या रूपानें तिजवर लिहिला, ह्मणजे वरील अर्थ होऊन शिवाय तिजशीं घातप्रकरणांत दिलेले नियम लागू करितां येतात. असे ह्या दोहों चिन्हांचे उपयोग वेगळाले आहेत.

नियम २ रा.— करणी संख्येचें मूल पाहिजे असलें, तर तिला छेदस्थली त्या मूलाइतकी घातसंख्या येईल असा गुणक द्यावा.

नंतर अंशचें सुमाराचें मूल अंशस्थली लिहून, छेदाचें खरें मूल छेदस्थली लिहावें.

हा अपूर्णाक त्याच्या छेदाइतक्याव्या हिश्यापावेतो फरकानें खरें मूल दाखवील.

उदाहरण.— ५९ चें वर्गमूळ $\frac{१}{९२}$ पावेतों फरकानें खरें पाहिजे. येथें $\frac{९२^२}{९२^२}$ गुणक देतां.

$$\begin{aligned}\sqrt{५९} &= \frac{\sqrt{५९ \times ९२^२}}{\sqrt{९२^२}} = \frac{\sqrt{८४९६}}{\sqrt{९२^२}} \\ &= \frac{९२}{९२} = ७\frac{२}{३} \text{ हें उत्तर.}\end{aligned}$$

कारण, अपूर्णाकाचा घात करणें झाला, तर त्याच्या अंशच्छेदांचा तो घात करावा लागतो (घात नि० २) यास्तव अपूर्णाकाचें मूळ काढणें झालें तर त्याच्या अंशच्छेदांचेंच तें मूळ काढिलें पाहिजे हणून वरील कृति खरी आहे.

. वरील अंशाच्या वर्गमूळांत फार थोडी कसर सोडली आहे. येथें ९२ वरती अर्धा किंवा पाऊण भाग लागावा एवढी मोठी कसर सोडली असतां, तरी तिचा भागाकार $\frac{१}{९२}$ पेक्षां कमीच येता. यावरून अपूर्णाकाचा छेद हा कसरेची परमावधि दाखवितो, हें ध्यानांत येईल.

उदाहरण २ रें.— $\frac{१०}{७}$ चें वर्गमूळ काढणें. येथें अपूर्णाकाचे छेदानेंच करणीचे अंशच्छेद गुणितां,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{१०}{७}} &= \sqrt{\frac{१० \times ७}{७ \times ७}} = \frac{\sqrt{७०}}{\sqrt{७^२}} \\ &= \frac{८}{७} = १\frac{१}{७} \text{ हें उत्तर.}\end{aligned}$$

उदाहरण ३ रें.— ५.७२ चें वर्गमूळ काढणें.

$$\sqrt{५.७२} = \sqrt{\frac{५७२}{१००}} = \frac{२४}{१०} = २.४ \text{ हें उत्तर.}$$

करणी संख्यांचीं मूळें बरोबर निघत नाहींत, तरी वरील रीतीनें व्यवहारी अपूर्णाकांत किंवा दशांश अपूर्णाकांत बऱ्याच मानानें खऱ्या मूळांचे जवळ जवळ काढतां येतात.

मूळ काढल्यानें पूर्णाकांची किंमत कमी होते, आणि अपूर्णाकांची वाढते. जसें.—

{	संख्या.	२५	•२५=	२२५	२•२५=
	वर्गमूळ.	५	•५=	१५	१•५=
{	संख्या.	१२५	•१२५=	६४	•००१=
	घनमूळ	५	•५=	४	•१=

व्यवहारांत वेगळाल्या घातांचीही मूळें काढण्याची गरज लागते. ह्यासाठीं हीं मूळें काढण्याच्या रीति यापुढें सांगितल्या आहेत त्या पहाव्या.

$$\begin{aligned} \text{उ. ४ थें. } \sqrt{\frac{८}{१३}} &= \sqrt{\frac{८ \times १३}{१३ \times १३}} = \sqrt{\frac{१०४}{१६९}} \\ &= \frac{१० \cdot १९८०३३ \dots}{१३} = ७८४४६४ \dots \end{aligned}$$

$$\text{किंवा } \sqrt{\frac{८}{१३}} = \sqrt{६९५३८४} = ७८४४६४ \dots$$

$$\begin{aligned} \text{उ. ५ वें. } \sqrt[३]{८\frac{५}{७}} &= \sqrt[३]{\frac{६१}{७}} = \sqrt[३]{\frac{२३८३}{३४३}} \\ &= \frac{१४ \cdot ४०४८४६६ \dots}{७} = २ \cdot ०५७८३५२ \dots \end{aligned}$$

$$\text{अथवा } \sqrt[३]{८\frac{५}{७}} = \sqrt[३]{८ \cdot ७१४२८५} = २ \cdot ०५७८३५२ \dots$$

$५^४ = (५^२)^२$ असतो (घात नियम ५). ह्यावरून,

सूचना १ ली.— कौणत्याही संख्येचें चतुर्घातमूळ काढणें झाल्यास, तिच्या वर्गमूळाचें वर्गमूळ काढावें.

तसेंच $५^६ = (५^३)^२$ किंवा $(५^२)^३$. ह्यावरून,

सूचना २ री.— संख्येचें षड्घातमूळ काढणें झाल्यास, तिच्या घनमूळाचें वर्गमूळ काढावें, किंवा वर्गमूळाचें घनमूळ काढावें.

$५^८ = (५^४)^२ = \{(५^२)^२\}^२$. ह्यावरून,

सूचना ३ री.— संख्येचें अष्टघातमूळ काढणें झालें, तर तिच्या वर्गमूळाच्या वर्गमूळाचें वर्गमूळ काढावें.

$५^९ = (५^३)^३$ ह्यावरून,

सूचना ४ थी.— संख्येचें नवघातमूळ काढणें झालें, तर तिच्या घनमूळाचें घनमूळ काढावें.

श्रेढी.

ज्या पंक्तीतील संख्या कांहीं नियमानें चढत किंवा उतरत

जातात, ह्मणजे वाढत किंवा कमी होत जातात, त्या पंक्तीला श्रेढी ह्मणतात. उदाहरणार्थ पुढील १ ली व २ री ह्या श्रेढी पहा.

श्रेढींतील संख्यांस पदे, पहिल्या पदास आदि, शेवटल्या पदास अंत्य, पदांच्या संख्येस गच्छ, आणि सर्व पदांच्या वेरजेस सर्वधन, अशीं नांवे आहेत.

श्रेढी अनेक प्रकारच्या आहेत. पैकीं ह्या पुस्तकांत गणित-श्रेढी व भूमितिश्रेढी ह्या दोन सांगावयाच्या आहेत.

गणितश्रेढी.

ज्या श्रेढींतील संख्या नेमलेल्या अंतरानें चढत जातात, किंवा उतरत जातात, तिला गणितश्रेढी ह्मणतात. जशी.—

१ ली. २, ६, १०, १४, १८, २२, २६, ३०, ३४ इ०

२ री. ३४, ३०, २६, २२, १८, १४, १०, ६, २ इ०

१ ल्या श्रेढींत कोणत्याही संख्येच्या पुढची संख्या ४ ह्या अंतरानें वाढते ह्मणून ही चढती गणितश्रेढी आहे. २ व्या श्रेढींत कोणत्याही संख्येच्या पुढची संख्या ४ ह्या अंतरानें कमी होते ह्मणून ही उतरती गणितश्रेढी आहे.

गणितश्रेढींतील पदे (ह्य० संख्या) ज्या अंतरानें एकापुढें-एक चढत किंवा उतरत जातात त्या अंतरास उत्तर ह्मणतात.

नियम १ ला.— गणितश्रेढींतील शेवटलें पद काढणें झाल्यास, उत्तर एकोनगच्छानें गुणून तो गुणाकार पहिल्या पदांत चढती श्रेढी असल्यास मिळवावा, व उतरती श्रेढी असल्यास वजा करावा.

उपपत्ति.— ह्या विचारासाठीं वरची १ ली श्रेढी घ्या. हिच्या २ ह्या आदिपदांत उत्तर मिळविल्यानें २ रें पद येतें, आणि उत्तराची २ पट मिळविल्यानें ३ रें पद येतें; ह्या क्रमावरून उत्तराची गच्छ उणा १ ही पट मिळविल्यानें अंत्यपद ३४ हें येईल. कोणतीही चढती गणितश्रेढी आदिपदांत अशाच उत्तराच्या पटी मिळून लांबावयाची, ह्मणून हा मिळवणीचा नियम चढत्या गणितश्रेढीविषयीं खरा असला पाहिजे.

वरच्या २ व्या श्रेढीच्या आदिपदांत उत्तराची गच्छ उणा १ ही पट वजा करीत गेल्यानें ती श्रेढी लांबत चालते, ह्याच री-

तीनें कोणतीही उतरती गणितश्रेढी लांबावयाची, हणून हा वजा करण्याचा नियम उतरत्या गणितश्रेढीविषयीं खरा असला पाहिजे.

उदाहरण.— आदिपद २, उत्तर ३, व गच्छ १०, ह्यांपासून शेवटचें पद काढा.

$$\text{शेवटचें पद} = २ + ३ \times ९ = २९$$

दुसरीं उदाहरणें.

आदि १०, गच्छ १०, उत्तर ५,..... अंत्यपद = ४५।

आदि ११, गच्छ २५, उत्तर ११,..... अंत्यपद = ३६॥

आदि २०, गच्छ ५१, उत्तर १०,..... अंत्यपद = ३२॥

आदि ५, गच्छ ५, उत्तर ६,..... अंत्यपद = २५.

फल.— गणितश्रेढींत आदिपद व अंत्यपद यांची वजावाकी उत्तराच्या एकोनगच्छाइतकी पट असते. हणजे,

$$(\text{गच्छ} - १) \text{ उत्तर} = \text{आदि} \times \text{अंत्य}.$$

उदाहरण १ लें.— एका श्रेढींत १० पदें आहेत, आदि ५, अंत्य ३२, तेव्हां मधलीं पदें कोणतीं तीं सांगा.

येथें एकोनगच्छ ९ आहे, हणजे आदिपदापुढें ९ पदें आहेत, हणून आदिपदांत उत्तराची ९ पट मिळून अंत्यपद झालें आहे. आदि व अंत्य ह्यांची वजावाकी २७ हणून प्रत्येक पदांचें अंतर हणजे उत्तर = $\frac{२७}{९} = ३$ आहे. ह्यांवरून श्रेढीचीं पदें, ५, ८, ११, १४, १७, २०, २३, २६, २९, ३२ हीं आहेत.

दुसरीं उदाहरणें.

श्रेढीचीं पदें २५, आदि १०, अंत्य १०६, तर उत्तर = ४.

” पदें १२, आदि २, अंत्य ११२, ” उत्तर = १०.

श्रेढीचीं पदें १०२, आदि २, अंत्य २०४, ” उत्तर = २.

” पदें ४, आदि १, अंत्य २१, ” उत्तर = ११.

उदाहरण २ रें.— आदिपद १०, अंत्य १०६, उत्तर ४ तेव्हां श्रेढींत पदें किती आहेत तीं सांगा.

$$\text{गच्छ} = \frac{\text{अंत्य}-\text{आदि}}{\text{उत्तर}} + १ = \frac{१०६-१०}{४} + १ = \frac{९६}{४} + १ = २५.$$

दुसरीं उदाहरणें.

आदि २, अंत्य ११२, उत्तर १०, तर श्रेढीचीं पदें = १२.
 आदि २, अंत्य ५०४, उत्तर २, " श्रे. प. = २५२.
 आदि २॥, अंत्य १, उत्तर ११, " श्रे. प. = ४.
 आदि ३२, अंत्य ५, उत्तर ३, " श्रे. प. = १०.

नियम २ रा.— गणितश्रेढीचें सर्वधन काढणें झाल्यास आदि व अंत्य ह्यांच्या बेरजेस गच्छानें गुणून त्या गुणाकाराची निम्पट करावी ती सर्वधन होईल.

कारण.— दिलेले श्रेढीचे पदांखालीं तींच पदें उलट क्रमानें मांडलीं, आणि त्यांच्या बेरजा केल्या, तर त्या सर्व बेरजा सारख्या येतात. उदाहरणार्थ, पुढील बेरजा पहा.

$$\begin{array}{r} ५ \quad ९ \quad १३ \quad १७ \quad २१ \quad २५ \quad २९ = ११९ \\ २९ \quad २५ \quad २१ \quad १७ \quad १३ \quad ९ \quad ५ = ११९ \\ \hline ३४ \quad ३४ \quad ३४ \quad ३४ \quad ३४ \quad ३४ \quad ३४ = २३८ \end{array}$$

वरील उदाहरणांत आदि व अंत्य ह्यांची बेरीज ३४ ह्या वरोवर सर्व पदांच्या बेरजा आहेत, व ह्या उदाहरणांत गच्छ ७ आहे. ह्मणून सर्व बेरजांची बेरीज $३४ \times ७ = २३८$ आहे, आणि ही प्रत्येक श्रेढीतील पदांच्या बेरजेचे दुप्पट आहे. ह्मणून श्रेढीतल्या पदांची बेरीज ह्मणजे सर्वधन काढणें झाल्यास आदि व अंत्य ह्यांचे बेरजेस गच्छानें गुणून आलेल्या गुणाकाराची निम्पट केली पाहिजे.

उदाहरण.— आठ पदांची श्रेढी आहे तिचें आदिपद ४ व अंत्यपद १८ आहे, तेव्हां सर्वधन किती होईल तें सांगा.

$$\begin{array}{r} \text{आदिपद } ४ \\ \text{अंत्यपद } १८ \\ \hline \text{बेरीज } २२ \\ \text{गच्छ } ८ \\ \hline २) १७६ \end{array}$$

८८ हें सर्वधन.

दुसरीं उदाहरणें.

आदि ५, अंत्य २०, गच्छ १०, तर सर्वधन	१२५
आदि १०, अंत्य २, गच्छ ४, " सर्वधन	२४
आदि १, अंत्य १००, गच्छ १००, " सर्वधन	५०५०
आदि ०, अंत्य ६०, गच्छे ५, " सर्वधन	१५०

२ व्या नियमाच्या विचारापासून कितीएक फलें उत्पन्न होतात. तीं अशीं.—

फल १ लें.— पुष्कळ संख्या गणितप्रमाणांत (ह्यणजे गणितश्रेणींत) असल्या तर आदि व अंत्य ह्यांचे बेरजेवरोवर त्यांपासून सारख्या अंतरावरच्या कौणत्याही मध्यपदांची बेरीज असते. पदें विप्रम असल्यास मध्यपदाची दुप्पट त्या बेरजेवरोवर असते.

फल २ रें.— चार संख्या गणितप्रमाणांत (ह्यणजे गणितश्रेणींत) असल्या तर आदि व अंत्य ह्यांची बेरीज मध्यपदांचे बेरजेवरोवर असते.

फल ३ रें.— तीन संख्या गणितप्रमाणांत (ह्यणजे गणितश्रेणींत) असल्या तर आदि व अंत्य ह्यांचे बेरजेवरोवर मध्यपदाची दुप्पट असते.

उदाहरण.— आदिपद २, अंत्यपद १०, तेव्हां मध्यपद किती तें सांगा.

आदिअंत्यपदांची बेरीज $२ + १० = १२$, ही मध्यपदाचे दुप्पट आहे ह्यणून मध्यपद ६ हें उत्तर.

दुसरीं उदाहरणें.

आदि ५, अंत्य २०, मध्यपद	$= \frac{५+२०}{२} = \frac{२५}{२} = १२ ॥$
आदि १०, अंत्य २, म. प.	$= \frac{१०+२}{२} = \frac{१२}{२} = ६.$
आदि १, अंत्य १००, म. प.	$= \frac{१+१००}{२} = \frac{१०१}{२} = ५० ॥$
आदि ०, अंत्य ६०, म. प.	$= \frac{०+६०}{२} = \frac{६०}{२} = ३०.$

अभ्यासांकरितां उदाहरणें. ढा.

१. एक गृहस्थ पर्वतीस गेला, तेव्हां त्यानें पहिले पायरीवर एक सुपारी, दुसरीवर ३, तिसरीवर ५, ह्याप्रमाणें

१०८ पायन्यांपर्यंत चढत्या सुपाऱ्या ठेविल्या. तेव्हां सर्व सुपाऱ्या कितती झाल्या; व एक शेरांत १०० सुपाऱ्या रहातात. तर ह्याप्रमाणें सर्व सुपाऱ्या कितती शेर होतील ?

२. आदि २॥, अंत्य १५॥, आणि गच्छ २२ तेव्हां सर्वधन काय ?

३. २४ तासांत घड्याळाचे ठोके कितती वाजतात तें सांगा. १२ तास वाजल्यावर फिरून १, २, ३ ह्याप्रमाणें वाजूं लागतात.

४. दोन वाटसरांमध्ये २५ कोसांचें अंतर आहे, त्यांत जो मार्ग आहे तो दररोज १० कोस चालतो, व पुढें आहे तो १२ कोस चालतो, तेव्हां त्या दीघांत, २५० कोस अंतर कितती दिवसांनीं पडेल तें सांगा.

५. एका हौदास तीन नळ होते, त्यांत एका घटकेंत एकांतून २ घागरी, दुसऱ्यांतून ६ घागरी, तिसऱ्यांतून १० घागरी, ह्याप्रमाणें प्रत्येक नळांतून पाणी येतें, तर तीनही नळ एकदम सोडले तर एका दिवसांत कितती घागरी पाणी येईल तें सांगा.

नियम ३ रा.— गणितश्रेढीचें आदिपद उत्तराच्या निम्मे असलें, तर $\frac{1}{2}$ उत्तर व गच्छाचा वर्ग ह्यांचा गुणाकार तिचें सर्वधन दाखवील.

उपपत्ति.— ह्या-प्रकरणाच्या आरंभीची १ ली श्रेढी ह्या प्रकारची आहे. ती श्रेढी उत्तराच्या मापानें मोजली, तर त्या मोजदातीची श्रेढी

०॥ १॥ २॥ ३॥ ४॥ ५॥ ६॥ ७॥ ८॥ ९०.
अशी होते. ह्या गणितश्रेढीचें २ रें पद १॥ येतें, ३ रें पद २॥ येतें, ह्याप्रमाणें कोणतेंही पद गच्छापेक्षां ०॥ नेच कमी येतें. ह्यावरून ही श्रेढी आरंभापासून किततीही पदांची घेतली. तरी हिच्या आद्यंतांची बेरीज गच्छाएवढी येईल, व तिला गच्छार्धानें गुणिलें ह्याणजे $\frac{1}{2}$ गच्छ एवढें तिचें सर्वधन येईल. हें सर्वधन एकडे किंवा उत्तराचीं मापें दाखवील, यास्तव त्याला उत्तरानें गुणिलें ह्याणजे खरें सर्वधन येईल. ह्याणून,

$$\text{सर्वधन} = \frac{3}{4} \text{ उत्तर} \times \text{गच्छ}^2$$

असैं येतें. हेंच वरील नियमांत सांगितलें आहे.

उदाहरण.— पदार्थ उंच ठिकाणापासून सुटला असतां, भूमीचे आकर्षणामुळें, १ ले सेकंदांत १६ फूट, २ रे सेकंदांत ४८ फूट, ३ रे सेकंदांत ८० फूट, ह्याप्रमाणें उंची क्रमितो, तर सुटल्यापासून ८ सेकंदांत किती उंची क्रमील ?

येथें दरएके सेकंदांतल्या क्रमणाला पद हाटलें तर हीं पदे ३२ फूट ह्या उत्तरानें वाढत आहेत, व ह्या गणितश्रेढीचें आदि-पद उत्तराच्या निम्मे १६ फूट आहे, हाणून १ ल्या पासून ८ पदांचें सर्वधन, किंवा

$$८ \text{ सेकंदांतील क्रमण} = १६ \text{ फूट} \times ८^2 = १०२४ \text{ फूट. हें उ.}$$

दुसरीं उदाहरणें.

१ ३ ५ इ० २० विषम संख्यांची बेरीज सांगा. उत्तर ४००
३ ९ १५ इ० २५ पदांची बेरीज सांगा. उत्तर १८७५
३.५ १०.५ १७.५ इ० २५ पदांची बेरीज सांगा.
उत्तर २१८७.५

चंद्राच्या पृष्ठभागीं उंच ठिकाणापासून सुटलेला पदार्थ, चंद्राच्या आकर्षणामुळें, १ ले सेकंदांत २.८८ फूट, दुसरे सेकंदांत ८.६४ फूट, तिसरे सेकंदांत १४.४० फूट, याप्रमाणें उंची क्रमितो, तर सुटल्यापासून ८ सेकंदांत किती उंची क्रमील ? उत्तर १८४.३२ फूट

॥ भूमितिश्रेढी.

ज्या श्रेढींतल्या संख्या नेमलेल्या गुणोत्तरानें (ह्यणजे पटीनें) चढत जातात, किंवा उतरत जातात, तिला भूमितिश्रेढी ह्यणतात. जशी.—

१ ली. ३, ६, १२, २४, ४८, ९६, १९२, इ०.

२ री. १९२, ९६, ४८, २४, १२, ६, ३, इ०.

ह्यांतील, १ ल्या चढत्या श्रेढीचें गुणोत्तर २ आहे व २ व्या उतरत्या श्रेढीचें गुणोत्तर $\frac{1}{2}$ आहे. ह्या कोणत्याही श्रेढीच्या १ ल्या पदास तिच्या गुणोत्तरानें गुणिलें तर २ रें पद येतें, गुणो-

त्तराच्या वर्गानें गुणिलें तर ३^१ रें पद येतें, ह्या क्रमावरून गुणोत्तराच्या एकोनगच्छाइतक्या घातानें गुणिलें तर अंत्यपद येईल. ह्मणून,

नियम १ ला.— भूमितिश्रेढीचे आदिपदास गुणोत्तराचा एकोनगच्छाइतका घात करून त्यानें गुणावें ह्मणजे अंत्यपद येईल. ह्मणजे,

$$\text{अंत्य} = \text{आदि} \times \text{गुणोत्तर}^{\text{गच्छ-१}} \dots \dots १$$

उदाहरण.— भूमितिश्रेढीचें आदिपद २ व गुणोत्तर ३ आहे तर ५ वें पद काय येईल ?

$$\text{अंत्य} = २ \times ३^{५-१} = २ \times ३^४ = १६२ \text{ हें उत्तर.}$$

दुसरीं उदाहरणें.

आदिपद ३ व गुणोत्तर २ तर सहावें पद काय ?

$$\text{सहावें पद} = ३ \times २^५ = ३ \times ३२ = ९६.$$

आदि १ व गुणोत्तर ५ तर, ५ वें पद = ६२५.

आदि १००, गुणोत्तर ११०, तर ३ रें पद = २५.

आदि २०, गुणोत्तर १११, तर ४ थें पद = ६७११.

नियम २ रा.— भूमितिश्रेढीचें सर्वधन काढणें, तर तिचें अंत्यपद गुणोत्तरानें गुणून त्या गुणाकारांत आदिपद वजा करावें, आणि त्या वजावाकीस एकोनगुणोत्तरानें भागावें. ह्मणजे

$$\text{सर्वधन} = \frac{\text{अंत्य} \times \text{गुणोत्तर} - \text{आदि}}{\text{गुणोत्तर} - १}$$

कारण, २, ६, १८, ५४, १६२, ह्या श्रेढीच्या त्रैजला सर्वधन हाटलें, तर ह्या श्रेढीची ३ पंढ केल्यानें असें येतें कीं,

$$३ \text{ सर्वधनें} = ६ + १८ + ५४ + १६२ + ४८६$$

$$\text{व सर्वधन} = २ + ६ + १८ + ५४ + १६२$$

$$\text{वजावाकीनें, २ सर्वधनें} = ४८६ - २$$

$$\therefore \text{सर्वधन} = \frac{४८६ - २}{३} = २४२$$

असें येतें. या युक्तीनें कोणत्याही भूमितिश्रेढीचें सर्वधन काढितां येईल हें उघड आहे. येथें ४८६ हे अंत्यपद १६२ व

गुणोत्तर ३ ह्यांचा गुणाकर दाखवितात, ह्यांत उणे केलेले २ हे आदिपद दाखवितात, आणि छेदस्थलींचे २ हे गुणोत्तरांत १ वजा करून येणारी बाकी दाखवितात. ह्यांच्या भागाकारानें सर्वधन दाखविलें जातें, ह्मणून हीच कृती वरच्या पद्धतींत व नियमांत दिली आहे.

उदाहरण १ लें.— २, ४, ८ इ० श्रेढीच्या ७ पदांचें सर्वधन काढा.

ह्या श्रेढीचें गुणोत्तर २ आहे ह्मणून नि० १ प्रमाणें.

$$\text{अंत्यपद } ७ \text{ वें} = २ \times २ = १२८$$

व नि. २ प्रमाणें.

$$\text{सर्वधन} = \frac{१२८ \times २ - २}{१} = २५४ \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण २ रें.— १, $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{९}$, इ० ५ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढा.

ह्या श्रेढीचें गुणोत्तर $\frac{२}{३}$ आहे ह्मणून नि० १ प्रमाणें.

$$५ \text{ वें पद} = १ \times \left(\frac{२}{३}\right)^४ = \frac{१६}{८१}$$

व नि. २ प्रमाणें.

$$\text{सर्वधन} = \frac{\frac{१६}{८१} \times \frac{२}{३} - १}{\frac{२}{३} - १} = \frac{-\frac{२३१}{२४३}}{-\frac{१}{३}}$$

$$= २ \frac{४३}{८१} \text{ हें उत्तर.}$$

उदाहरण ३ रें.— ४३, ४३, ४३, ४३ इ० आवर्तदशांशांची श्रेढी अनंतापावेतों घेतली तर तिचें सर्वधन काय होईल ?

ह्या श्रेढीचें रूप व्यवहारी अपूर्णाकांत असें येतें कीं,

$$\frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \text{इ०}$$

ह्या श्रेढींत $\frac{४३}{१००}$ हें गुणोत्तर आढळतें ह्मणून ही भूमितिश्रेढी आहे. हिचें सर्वधन दाखविण्याला स घेतला आणि हिची १०० पट केली. तर,

$$१०० \text{ स} = ४३ + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \text{इ०}$$

$$\text{स} = \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \frac{४३}{१००} + \text{इ०}$$

वजाबाकीनें. ९९ स = ४३ ह्मणून स = $\frac{४३}{९९}$ हें उत्तर.

दुसरीं उदाहरणें.

आदिपद १, अंत्यपद ५१२, गुणोत्तर २, तर सर्वधन = १०२३.

आदिपद १०, अंत्यपद २०४८०, गुणोत्तर २, तर सर्वधन = ४०९५०.

नियम ३ रा.— भूमितिश्रेढींत आद्यंतपदांचा गुणाकार हा तेथून समान अंतरावरील पदांच्या गुणाकाराबरोबर असतो, व मधल्या पदांच्या वर्गाबरोबर असतो.

ह्या नियमाची उपपत्ति गुणाकाराच्या प्रत्यक्ष प्रमाणावरून विद्यार्थ्यांनी लावावी.

फल.— भूमितिश्रेढीतील तीन क्रमिक पदे घेतलीं तर त्यांतील आदि व अंत्य ह्यांचा गुणाकार मध्यमपदाच्या वर्गाबरोबर असतो.

उदाहरण.— तीन क्रमिक पदांपैकीं आदि ८ व अंत्य १८ तर मध्यमपद काय ?

$$\text{मध्यमपद}^2 = ८ \times १८ = १४४$$

$$\therefore \text{मध्यमपद} = \sqrt{१४४} = १२$$

टीप.— भूमितिश्रेढीतील पदे क्रमिक प्रमाणांत असतात. उदाहरणार्थ १ ल्या श्रेढीतील पदे ६, १२, १८, हीं घेतलीं तर त्यांत ६ : १२ : : १२ : १८ असें प्रमाण असतें. याही आधारानें वरचें फल सिद्ध होतें.

दुसरीं उदाहरणें.

आदिपद ४, अंत्यपद ९, तर मध्यपद = $\sqrt{४ \times ९} = ६$

आदि १५, अंत्य ६०, तर म. प. = $\sqrt{१५ \times ६०} = ३०$

आदि २, अंत्य २५, तर म. प. = $\sqrt{५०} = ५\sqrt{२}$

भूमितिश्रेढीविपर्यां जितकें वर सांगितलें आहे तितकें अंकगणितांत पुरे आहे, अधिक माहिती करून घेणें असल्यास विद्यार्थ्यांनै बीजगणित पहावें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. णा.

१३. ४ आणि ९ ह्यांचे भूमितिमध्यप्रमाणाची ३॥पट किती ?

२ उ. आदि २, गुणोत्तर १४, गच्छ ४, सर्वधन काय तें सांगा.

३ उ. आदि १, गुणोत्तर २, गच्छ ६४, सर्वधन काय येईल?

४ उ. अखंड चार पदांची श्रेढी आहे, तिचें आदिपद ४, अंत्य ९, मधलीं पदें कोणतीं ?

५ उ. आदि ९, अंत्य ९०, गच्छ ४, गुणोत्तर किती तें सांगा.

वरच्या १ ल्या पद्धतींतल्या बरोबरीला आदीनें भागिलें तर भागाकार बरोबर येतील (व. प्र. ३). हाणून,

$$\text{गुणोत्तर} = \frac{\text{गच्छ}-१}{\text{अंत्य}} \text{ आदि}$$

फल.— भूमितिश्रेढीचें अंत्यपद भागिले आदिपद हा भागाकार गुणोत्तराच्या एकोनगच्छा एवढ्या घाताबरोबर असतो.

उ० आदिपद २, अंत्यपद ५४, आणि गच्छ ४, या श्रेढीचें गुणोत्तर काढून ह्या दोन पदांमधलीं २ भूमिति मध्यप्रमाणें किंवा क्रमिकपदें काढून दाखवा.

$$\begin{aligned} \text{गुणोत्तर} &= \frac{५४}{२} = २७ \\ \therefore \text{गुणोत्तर} &= \sqrt{२७} = ३ \end{aligned}$$

येथें २, ६, १८, ५४ ही दिलेली भूमितिश्रेढी आहे आणि ६ व १८ हीं इच्छिलेलीं भूमिति मध्यप्रमाणें किंवा क्रमिकपदें आहेत.

दुसरीं उदाहरणें.

१ उ. आदि १, अंत्य ४९, गच्छ ३ गुणोत्तर काय? उ. ७.

२ उ. आदि ३२०, अंत्य ५, गच्छ ४, गुणोत्तर काय ?
उ. $\frac{१}{४}$.

आकारमापन किंवा

रेखाफल, क्षेत्रफल, व घनफल.

रंग देणें, तविदानें वसविणें, तक्तपोशी करणें, घरावर कौलें घालणें, विहिरी व भिंती बांधणें, गिलावा करणें, इत्यादि प्रकारचें सुतार गांवडी त्रगैरे कारागीर लोकांचें काम मोजून त्याचा

आकार करण्याची पाळी वारंवार येत असून ह्या कामास फारसें गणित लागत नाहीं. लांबीमापाची मोजणी, चौरसमापाची मोजणी, व घनमापाची मोजणी, ह्या तिहींची थोडीशी माहिती असल्यानें कार्य होतें; ह्मणून त्या संबंधानें कांहीं रीति येथें सांगितल्या आहेत.

भूमितीचा (ह्मणजे भूमापनाचा किंवा आकारशास्त्राचा) कर्ता जो युक्लीद त्यानें त्या शास्त्रांत मापाची योजना केलेली नाहीं, ह्यामुळे तें शास्त्र पूर्णपणें व्यवहारोपयोगी झालेलें नाहीं. ही उणीव भरून काढण्याकरितां इंग्लंडांतल्या व अमेरिकेंतल्या विद्वानांनीं नवीन पद्धतीच्या लहान मोठ्या भूमिती रचून त्या तेथील शिक्षणक्रमांत चालू केल्या आहेत, आणि आपल्या शिक्षणक्रमांतून तर हा विषय मुळींच नाहींसा झाला आहे. अंकगणिताचें काम पाहिलें, तर एकंदर गणितविषयक शास्त्रांतील सिद्धांत व्यवहारांत उपयोगास लावावे हें आहे. हें काम लांबी, क्षेत्र, व घन, ह्यांचे एक ठरवून त्यांच्यांतील मोजणीचे संबंध विचारांत घेतल्यावांचून चालत नाहीं. ह्मणून युक्लीदच्या भूमितीच्या पहिल्या पुस्तकांतील एक दोन सिद्धांतांच्या आधारांनें सहाव्या पुस्तकांतील १ ला सिद्धांत व २३ वा सिद्धांत हे नवीन भूमितीप्रमाणें रूपभेद करून एथें प्रथम सांगितले आहेत.

एक हात लांब, व एक हात रुंद, अशा जागेंस एक चौरस हात जागा ह्मणतात, व ह्याप्रमाणें चौरस फूट, चौरस गज, चौरस इंच, चौरस काठी, इत्यादिकांविषयीं समजावें.

एक धोतर १० हात लांब आणि ३ हात रुंद आहे, तर त्यांत एक हात लांब व एक हात रुंद असे चौरस हात ३० आहेत.

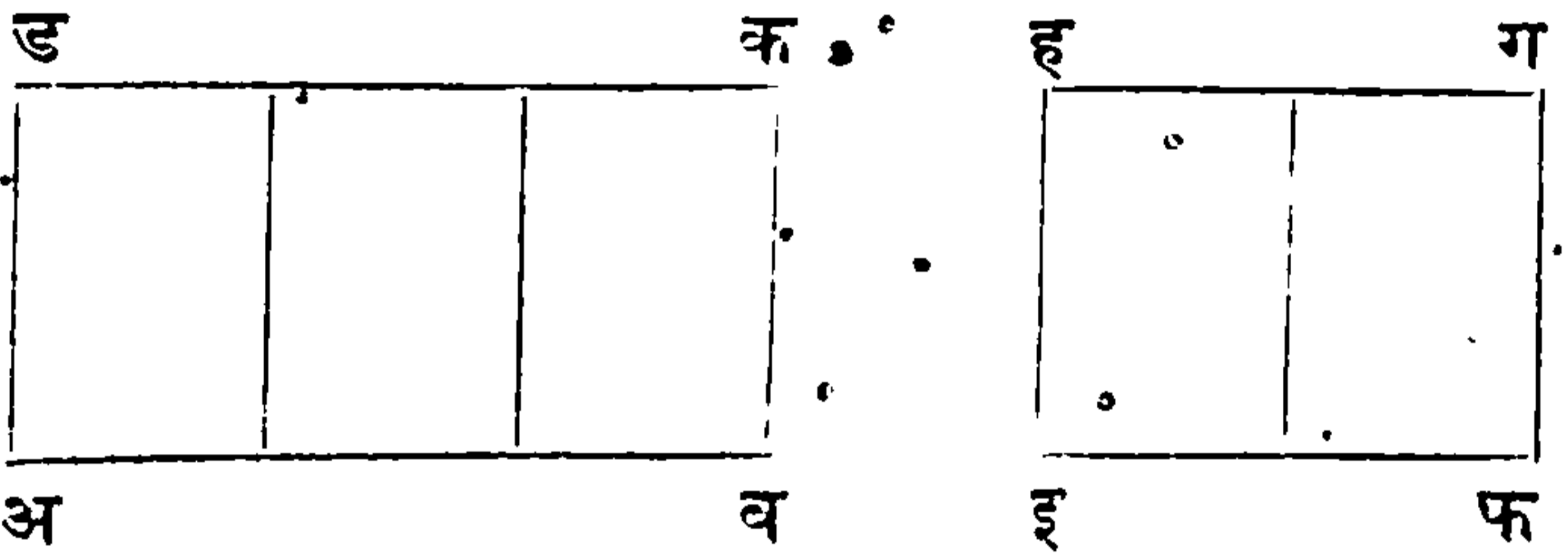
कारण त्यांत दहा दहा चौरस हातांच्या तीन ओळी आहेत.

ह्यावरून असे सिद्ध होतें कीं, काटकीनचौकोनी किंवा समांतरभुज चौकोनी आकृतीचें क्षेत्रफळ काढणें झाल्यास त्याची

लांबी व रुंदी (ह्यणजे लंबरूप उंची) ह्यांचा गुणाकार करून जें येईल तें सांगावें. यु. १।३६ पहा (स. युक्तीद वूक १ लें सिद्धांत ३६ वा पहा). गुणाकार करण्याच्या पूर्वी गुण्य व गुणक हे एका नांवाचे मात्र करावे.

हीच गोष्ट मापांचा उपयोग करणाऱ्या भूमितीच्या पद्धतीने सिद्ध करून दाखविली आहे ती सिद्धता पहावी.

सिद्धांत (नियम) क.— काटकोन चौकोनांच्या उंच्या समान असल्या तर त्यांची क्षेत्रे त्यांच्या पायांच्या संख्यांच्या प्रमाणांत असतात.



प्रकार १ ला.— अ व क ड व इ फ ग ह ह्या काटकोन चौकोनांच्या उंच्या अ ड, इ ह ह्या समान आहेत. ह्यांच्या पायांना साधारण परिमाण किंवा माप असल्यास त्यांच्या एवढाले पायांचे भाग करून तें लंब करा.

एथें एकंदर पोटचौकोनांच्या उंच्या आणि पाये समान असल्यामुळे हे चौकोन सर्वांशीं एकरूप आहेत. यु. १।३६.

$$\therefore \begin{array}{l} \text{अ व क ड} : \text{इ फ ग ह} :: ३ : २ \\ \text{पण} \quad \text{अ व} \quad : \text{इ फ} \quad : : ३ : २ \end{array}$$

ह्या दोन प्रमाणांत फलयुग्मांचीं गुणोत्तरे समान आहेत, यास्तव मूलयुग्मांचीं गुणोत्तरे समान असलीं पाहिजेत (स. प्र. १).

$$\therefore \text{अ व क ड} : \text{इ फ ग ह} :: \text{अ व} : \text{इ फ}$$

हेंच सिद्ध करणें होतें. कारण ३ व २ ह्या विशेष संख्यांच्या जागीं दुसऱ्या कोणत्याही संख्या घेतल्या असल्या तरी असेंच प्रमाण आलें असतें. ह्यणून हें प्रमाण वरील सिद्धांतांत सांगितल्याप्रमाणें सामान्य अर्थीं घेतलें पाहिजे.

प्रकार २ रा.— ह्या काटकोन चौकोनांच्या पायांना साधारण परिमाण नाहीं हाटलें, तरीही वरील गोष्ट सिद्ध होते ती अशी.—

इफगह चौकोन अव
कड चौकोनावर अड
बाजूशीं जुळून ठेवा, आणि
तो अफगड जागीं राहतो
असें समजा. हे चौकोन
पायाशीं प्रमाणांत नसले
तर यांचें प्रमाण असें कल्पा कीं,

	ड	ग म क
अ		फ इ उं व

अवकड : अफगड :: अव : अड

हाणजे अफपेक्षां अड मोठी समजा. आतां अवला मो-
जील असें फडपेक्षां लहान परिमाण घेऊन त्यानें अव मोजा.
हाणजे कोणता तरी एक भाग फड मध्ये पडेल. हा भाग इ-
स्थळीं संपतो असें समजून तेथें इम लंब करा. एथें अव व
अई यांना साधारण परिमाण आहे हाणून पहिल्या प्रकारा-
प्रमाणें,

अवकड : अइमड :: अव : अइ

वरच्या दोन प्रमाणांत अग्रसर समान आहेत, हाणून पहि-
ल्यांतील गुणोत्तराचे बरोवरीनें दुसऱ्यांतील गुणोत्तराचे बरोव-
रीस भागावें, हाणजे त्यांचे उपाग्रसर प्रमाणांत येतात. जसे.—

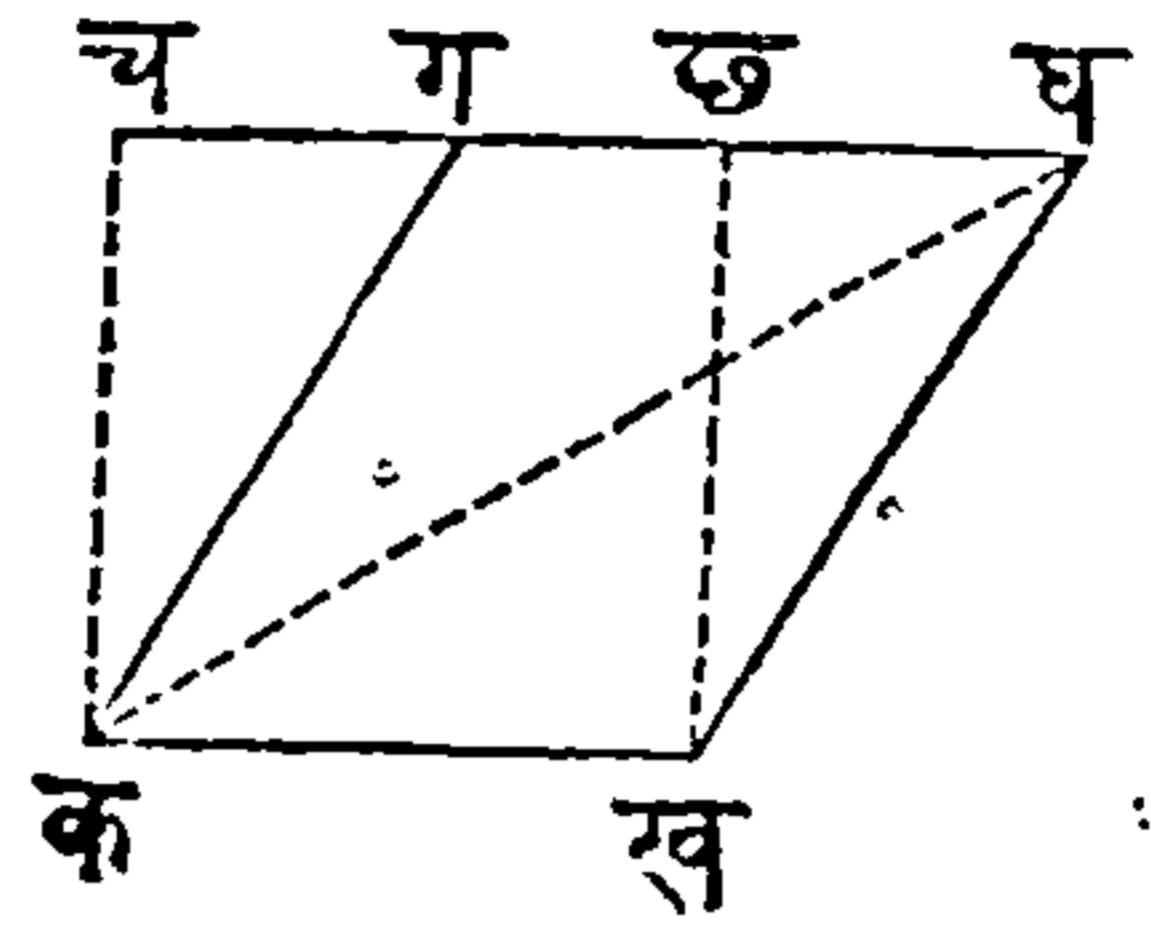
∴ अफगड : अइमड :: अड : अई

एथें अइमडपेक्षां अफगड लहान आहे हाणून अइ-
पेक्षां अड लहान असला पाहिजे. पण तो मोठा आहे हाणून क-
ल्पिलेले प्रमाण खरें नाहीं. अर्थात् तें प्रमाण खरें होण्याला
अफपेक्षां अड हें चौथें पद मोठें कामाचें नाहीं. हें पद
अफपेक्षां लहान कामाचें नाहीं असें वरच्याच रीतीनें सिद्ध
होतें. त्याअर्थी हें पद अफइतकेंच असलें पाहिजे.

∴ अवकड : अफगड :: अव : अफ

हाणजे अवकड : इफगह :: अव : इफ हें सिद्ध.

आतां क ख ग घ ह्या तिर्कस वाजूंच्या समांतरभुज चौका-
नांतून घ छ ख हा काटकोन
त्रिकोण काढून ग च क स्थळीं
जोडला, हाणजे तेवढ्याच उं-
चीचा व पायाचा क ख च छ
हा काटकोन चौकोन (उभ्या
वाजूचा समांतरभुज चौकोन)
वनतो. तसेंच क ख ग घ हा
समांतरभुज चौकोन क घ कर्णरेषेत कापिला, तर क ख व
आणि घ ग क हे त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप (एकमेकांशीं तंतो-
तंत जुळणारे) होतात. ह्या दोन अनुभवांवरून किंवा गु.
१।३६ आणि १।४१ ह्यावरून दिसून येतें कीं तिर्कस समांतर-
भुज चौकोन व त्रिकोण हे एका पायाचे व एकाच उंचीचे
असून त्यांच्या पायावर तेवढ्याच उंचीचा काटकोन चौकोन
केला तर त्याचें क्षेत्र समांतरभुज चौकोनाच्याएवढें होतें, व
त्रिकोणाच्या दुप्पट होतें. हाणजे समांतरभुज चौकोन व त्रि-
कोण ह्यांचे पाये व उंच्या हीं एकेक इंच असलीं, तर ह्या चौ-
कोनाचें क्षेत्रफल १ चौ. इंच होतें, व त्रिकोणाचें क्षेत्रफल ॥
चौ. इंच होतें. ह्यावरून उघड आहे कीं तिर्कस समांतरभुज
चौकोन व त्रिकोण यांच्या उंच्या पूर्ववत् ठेवून ह्यांचे पाये पू-
र्वींच्या २, ३, इ० पट केले, तर ह्यांचीं क्षेत्रफळे पूर्वींच्या २, ३,
इ. पट होतील. ह्यावरून,



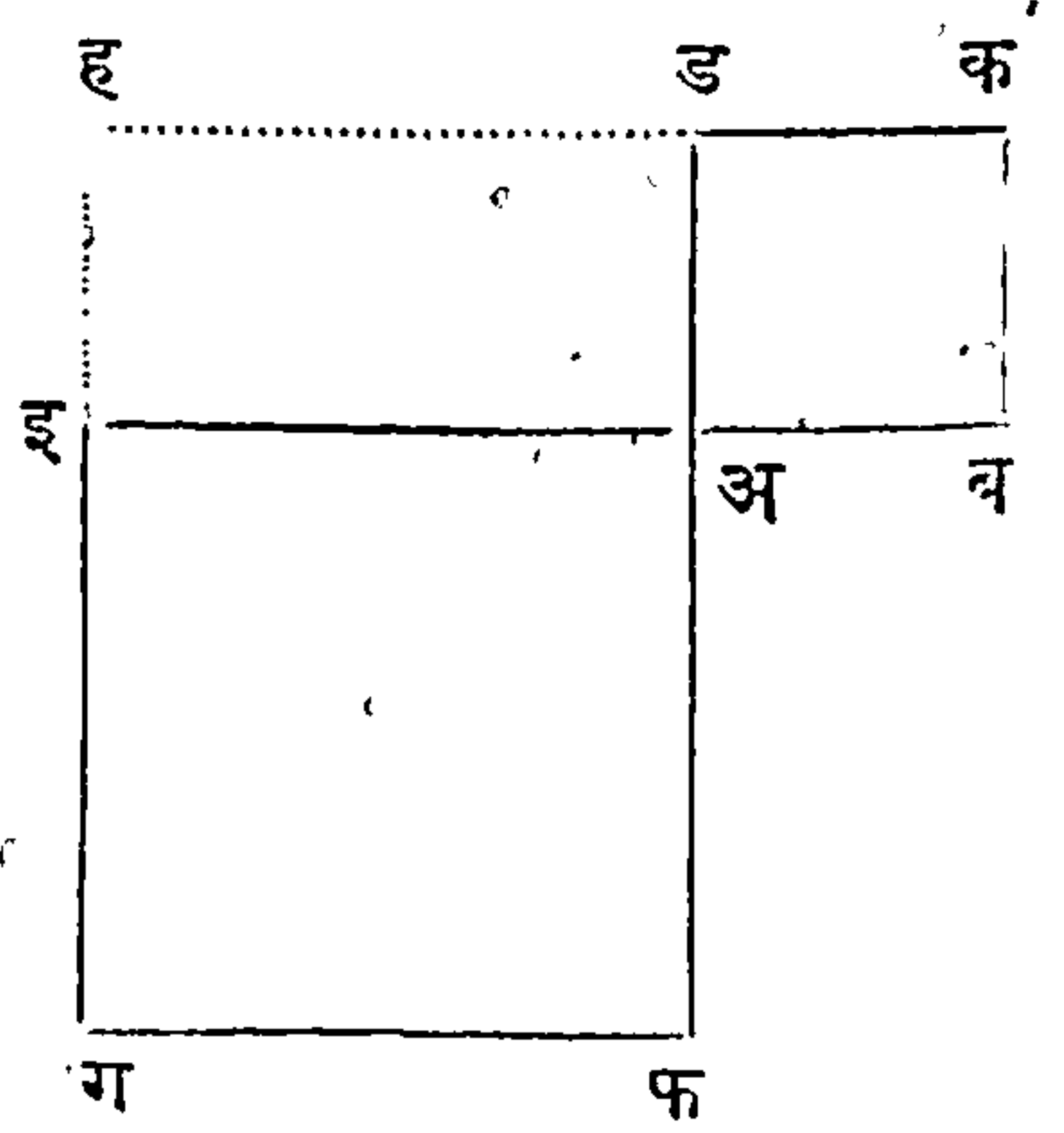
फल १ लें.— उंच्या एक असल्या, तर समांतरभुज चौको-
नांचीं क्षेत्रें, आणि त्रिकोणांचीं क्षेत्रें, हीं त्यांच्या पायांच्या सं-
ख्यांच्या प्रमाणांत असतात.

वर दिलेल्या काटकोन चौकोनापासूनच्या एकंदर विचारांत पा-
याच्या जागीं उंची व उंचीच्या जागीं पाया घेतां येईल. ह्यावरून,

फल २ रें.— पाये एक असले, तर काटकोन चौकोनांचीं
क्षेत्रें, तिर्कस समांतरभुज चौकोनांचीं क्षेत्रें, व त्रिकोणांचीं क्षेत्रें,
हीं त्यांच्या उंचींच्या संख्यांच्या प्रमाणांत असतात.

सिद्धांत ख.— काटकोन चौकोनांचीं क्षेत्रें हीं त्यांचे पाये व उंच्या ह्यांच्या संख्यांच्या गुणाकारांच्या प्रमाणांत असतात.

उदाहरणार्थ, वाजूचे अवकड आणि अफगइ हे काटकोन चौकोन पहा. आणि त्यांचे अ काटकोन समोरासमोरचे कोन होतील असे ते जुळा. आणि कड व गइ ह्या परस्परांस मिळत तोंपावेतो वाढवून तेथें ह लिहा.



आतां अवकड व अइहड ह्यांच्या उंच्या समान आहेत ह्याणून सिद्धांत क प्रमाणें.

$$\text{अवकड} : \text{अइहड} :: \text{अव} : \text{अइ}$$

तसेंच अइगफ आणि अइहड ह्यांच्या उंच्या समान आहेत ह्याणून सि. क प्रमाणें.

$$\text{अइहड} : \text{अइगफ} :: \text{अड} : \text{अफ}$$

गुणोत्तरांच्या पहिल्या बराबरीला दुसऱ्या बराबरीनें गुणून संक्षेप द्यावा ह्याणजे असें येतें कीं.—

$$\text{अवकड} : \text{अइगफ} :: \text{अव} \times \text{अड} : \text{अइ} \times \text{अफ}$$

हेंच सिद्ध करणें होतें.

येथें अव व अड ह्या लांब्या एकं झटल्या, तर अवकड हा चौरस एकं होतो. ह्याणून,

$$१ : \text{अइगफ} :: १ : \text{अफ} \times \text{अइ}$$

आद्यंतपदांचा गुणाकार मध्यपदांच्या गुणाकाराबरोबर असतो, किंवा अग्रसर समान असल्यामुळें उपाग्रसर समान असले पाहिजेत. ह्याणून,

$$\text{अइगफ} = \text{अइ} \times \text{अफ}$$

फल १ लें.— एकमान पाया व एकमान उंची ह्या क्षेत्राला

एक चौरस हाटलें हणजे त्या चौरसाची संख्या काटकोन चौकोनाच्या पायावर त्याच्या संख्येच्या प्रमाणांत राहते. व ह्या रांगांची संख्या उंचीमध्ये तिच्या संख्येच्या प्रमाणांत राहते. हणून पाया व उंची ह्यांच्या संख्यांच्या गुणाकाराइतकीं चौरसें त्या चौकोनांत आढळतात. अर्थात् पाया व उंची ह्यांच्या गुणाकारालाच काटकोन चौकोन हें नांव आहे असें ठरतें.

समांतरभुज चौकोन व त्रिकोण ह्यासंबंधीं दोन अनुभवांवरून कळणारा किंवा युक्लिदच्या भूमितीच्या १ व्या व्रुकाच्या ३६ व्या व ४१ व्या सिद्धांतांवरून कळणारा नियम वर सांगितला आहे. ह्या नियमाप्रमाणें वरील काटकोन चौकोन हे दोन समांतरभुज चौकोनांचे किंवा दोन त्रिकोणांचे पाये व उंच्या दाखविणारे करून घेतले आहेत असें कल्पा. हणजे दिसून येईल कीं.—

फल २ रें.— काटकोन चौकोन व समांतरभुज चौकोन ह्यांचें क्षेत्रफल हें पाया व उंची ह्यांच्या संख्यांच्या गुणाकाराइतकें असतें, आणि त्रिकोणाचें क्षेत्रफल हें पाया व उंची ह्यांच्या संख्यांच्या गुणाकाराच्या निम्मे असतें.

हणजे काटकोन चौकोन हा समांतरभुज चौकोनाचाच पोटभेद आहे हें लक्षांत ठेवून, हे चौकोन व त्रिकोण ह्यांचीं क्षेत्रफळें दाखविण्याला ह्यांच्या आकृतीसारख्या डोक्यांचे क्ष घेतले, आणि पाया व उंची ह्यांच्या संख्या दाखविण्याला पा आणि उ घेतले. तर,

$$\text{समांतरभुज चौ.क्षे.फ. क्ष} = \text{पा. उ} \dots\dots १.$$

$$\text{व त्रिकोणाचें क्षेत्रफल क्ष} = \frac{\text{पा. उ}}{२} \dots\dots २.$$

उदा. एका काटकोन चौकोनी आंगणाची लांबी ३० फूट आहे आणि रुंदी २० फूट आहे; तर त्याचें क्षेत्रफल केवढें होईल?

$$\begin{aligned} \text{पद्धति १ प्र. क्ष} &= \text{पा. उ} = ३० \text{ फू.} \times २० \text{ फू.} \\ &= ६०० \text{ चौ.फू. हें उत्तर.} \end{aligned}$$

उ. २ रें.— एका त्रिकोणाकृतीचा पाया जर ३० फूट आहे,

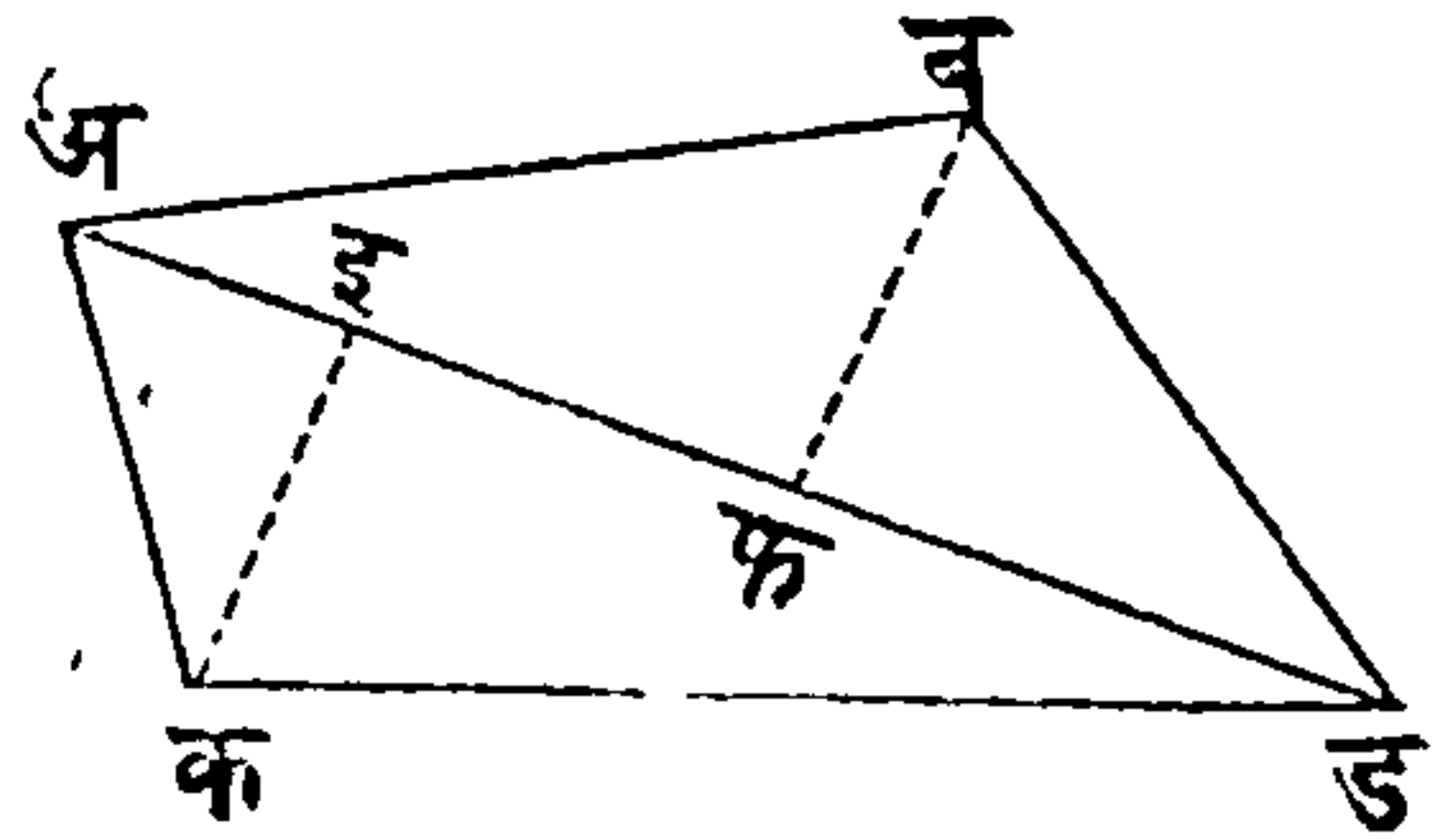
आणि लंबाची २० फूट आहे. तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ के-
वढें येईल ?

$$\text{पद्धति २ प्र. क्ष} = \frac{\text{पा उ}}{२} = \frac{३० \text{ फू.} \times २० \text{ फू.}}{२}$$

$$= ३०० \text{ चौ. फू. हें उत्तर.}$$

विषमभुज चौकोनी क्षेत्र असल्यास त्याच्या एका कर्णाच्या
लांबीस त्या कर्णावर जे समोरच्या दोन कोपऱ्यांतून लंब येतील,
त्यांच्या बेरजेच्या अर्धानें गुणावें. गुणाकार त्याचें क्षेत्रफळ होईल.

उ. बाजूच्या विष-
मभुज चौकोनांत अड
= ३० फू. कड = १२
फू. आणि वफ = १०
फूट असे मापून आले
आहेत, तर

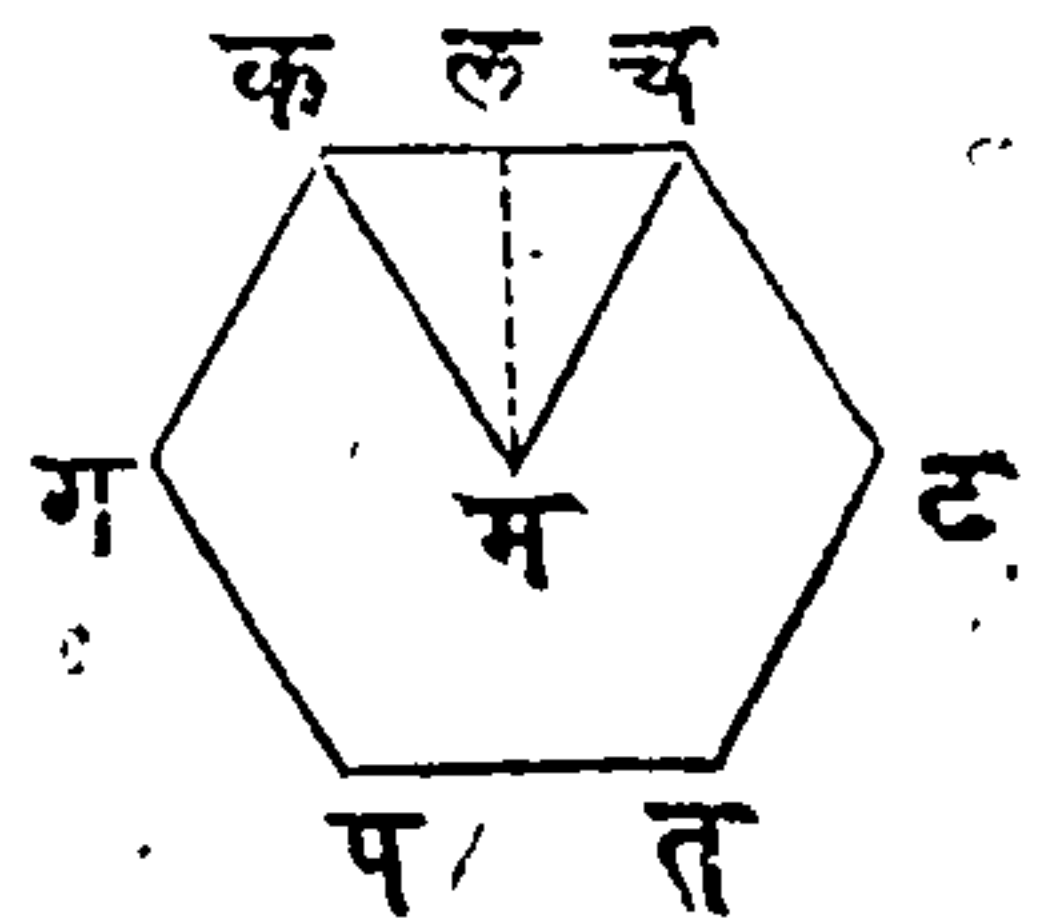


$$\text{अबडक क्षेत्र} = \text{अड} \times \frac{\text{वफ} + \text{कई}}{२}$$

$$= ३० \times \frac{१० + १२}{२} \text{ चौ. फू.}$$

$$= ३३० \text{ चौ. फू. हें उत्तर.}$$

नियमित बहुकोन.— ज्या आकृतीचे सर्व कोन एकसारखे
असून सर्व भुज (बाजू) एकसारखे असतात, तिला नियमित
बहुकोन (किंवा बहुभुज) म्हणतात. उदाहरणार्थ, बाजूचा
षट्कोण (किंवा षड्भुज) पहा. नियमित बहुकोनाच्या म-
ध्यापासून त्याच्या प्रत्येक बाजूचे
लंबरूप अंतर एकसारखें असतें
त्याला मध्यांतर म्हणतात. उ-
दाहरणार्थ, म ल पहा. नि-
यमित बहुकोनाचें क्षेत्रफळ शो-
धण्यासाठी त्याच्या कोणत्याही



क च बाजूची गणती व घ्या, आणि म ल ह्या मध्यांतराची गणती म घ्या. कोणत्याही बहुकोनांत कचम सारखे त्रिकोण त्यांच्या कोनाच्या किंवा बाजूंच्या संख्येइतके (येथें ६) असावयाचे. ती संख्या दाखविण्याला स घ्या, आणि बहुकोनाचें क्षेत्रफल दाखविण्याला क्ष घ्या. आतां पद्धति २ प्रमाणें.

$$\text{क च मचें क्षेत्रफल} = \frac{\text{ब म}}{२}$$

ह्या त्रिकोणक्षेत्राची स पट केल्यानें बहुकोनाचें क्षेत्रफल येईल.

$$\therefore \text{बहुकोनाचें क्षेत्रफल क्ष} = \frac{\text{ब} \cdot \text{म} \cdot \text{स}}{२} \dots ३$$

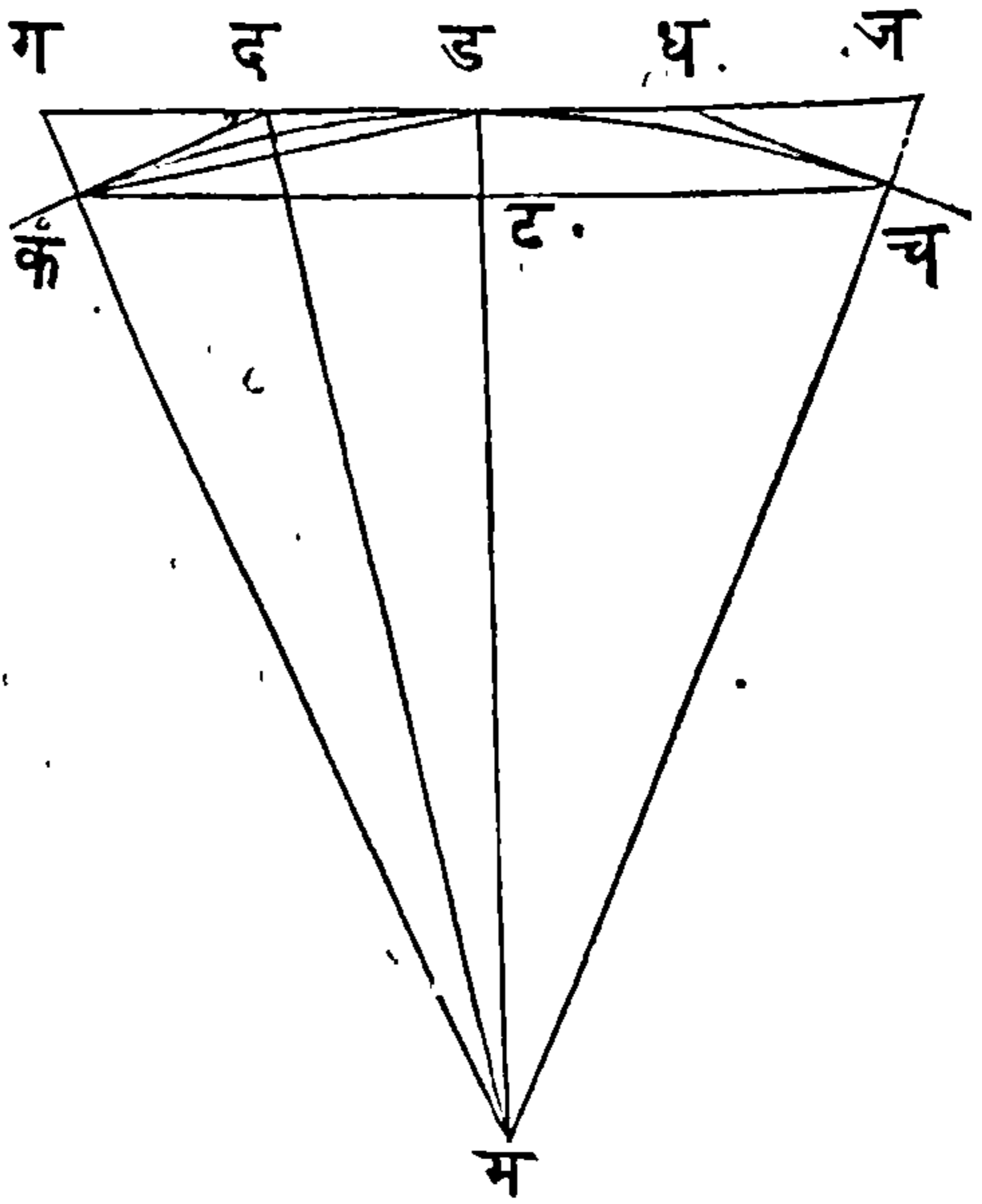
उदाहरण.— नियमित षट्कोणाची प्रत्येक बाजू १४ फूट असून तिचें मध्यांतर १२.१२४ फूट आहे, तर त्याचें क्षेत्रफल केवढें होईल ?

$$\begin{aligned} \text{पद्धति ३ प्र.} \quad \text{क्ष} &= \frac{\text{ब} \cdot \text{म} \cdot \text{स}}{२} = \frac{१४\text{फू.} \times १२.१२४\text{फू.} \times ६}{२} \\ &= ८४.८६८ \text{ चौ. फू.} \times ६ \\ &= ५०९.२०८ \text{ चौ. फू.} \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

व्यासाच्या मापानें जी वर्तुळपरिघाची मोजदात येते तिला परिघमिति, किंवा प्म ह्णतात. ही परिघमिति कशी शोधावी तें जाणण्याची इच्छा प्रत्येकाला असते. भूमितीत मापाचा उपयोग केला तर वर्तुळसंबंधीं बहुकोनांच्या क्षेत्रफळांपासून त्या वर्तुळाचें क्षेत्रफल सांपडतें. तसेंच वर्तुळाच्या क्षेत्रफळापासून त्याचा परिघ त्याच्या व्यासाच्या कितीपट असतो तें गुणोत्तर सांपडतें, ह्णजे, एकमान व्यासाच्या वर्तुळाचा परिघ किती मानें असतो, ती परिघमिति सांपडते. या गोष्टी कशा सांपडतात हें कळण्यासाठीं पुढील सिद्धांताची प्रतिज्ञा व तिचा उपयोग पहावा.

सिद्धांत *ग.- भाग १ ला.- वर्तुळांतल्या नियमित बहु-
कोन क्षेत्राची गणती, आणि तेवढ्याच वाजूंच्या त्या वर्तुळाबाहे-
रच्या नियमित बहुकोन क्षेत्राची गणती, ह्यांच्या गुणाकाराचें जें

* ह्याची सिद्धता पाहिजे असली तर वाजूची आकृति पहा. हांत
दिलेल्या वर्तुळां-
तल्या बहुकोनाची
वाजू क च आहे,
त्या वर्तुळाबाहेरच्या
बहुकोनाची वाजू
ग ज आहे, ह्या
दोन्ही बहुकोनांचा
साधारण मध्य म
आहे, व ह्या वाजू-
वरील कंस क ड
च आहे असें माना.



क ड च कंस
ड स्थळीं दुभागून
क ड ज्या सांधा.
तसेंच क आणि च

ह्या स्थळीं क ड आणि च ध ह्या स्पर्शरेषा काढून म क ग, म द,
म ड, व म च ज सांधा, ह्मणजे ह्या वर्तुळांतल्या दुप्पट वाजूंच्या
बहुकोनाची वाजू क ड होईल, ह्या वर्तुळाबाहेरच्या दुप्पट वाजूंच्या
बहुकोनाची वाजू द ध होईल, आणि द ड हें द धचें अर्ध होईल.
आतां दिलेल्या बहुकोनांच्या वाजूंच्या संख्या स झटल्या तर.

वर्तुळाचे आंतलें नि. वाजूंचें बहुकोनक्षेत्र क्ष=२मकट×स आहे,
" बाहेरचें " " क्षा=२मगड×स "
" आंतलें २ पट वाजूंचें " क्षि=मकड×२स "
व " बाहेरचें " " क्षु=मकडड×२स "

आतां क्ष, क्षा; क्षि, आणि क्षु, हीं क्षेत्रफळें अनुक्रमें म क ट,

वर्गमूळ तें त्या वर्तुळांतल्या दुप्पट वाजूंच्या नियमित बहुकोन-
क्षेत्राची गणती दाखवितें. तसंच

भाग २ रा— वर्तुळांतल्या नियमित बहुकोनक्षेत्राची गणती,

म ग ड, म क ड, आणि म क द ड, ह्या क्षेत्रांच्या २ स पट आहेत,
हणून तीं ह्या क्षेत्रांच्याच प्रमाणांत असलीं पाहिजेत.

एथें क ट ह्या एकाच उंचीचे त्रिकोण म क ट आणि म क ड हे
असून ड क ह्या एकाच उंचीचे त्रिकोण म क ड आणि म ग ड हे
आहेत, दोन त्रिकोणांच्या उंच्या समान असल्यास त्यांचीं क्षेत्रे पा-
यांच्या प्रमाणांत असतात. (सि. क. फल १).

हणून, म क ट : म क ड :: म ट : म ड
तसंच म क ड : म ग ड :: म क : म ग

एथें म क ट आणि म ग ड हे त्रिकोण सरूप (समकोन) आहेत,
हणून (यु. ६।४ प्र.) म ट : म ड :: म क : म ग असला पाहिजे.
ह्याप्रमाणें वरच्या दोन प्रमाणांत फलयुग्मांचीं गुणोत्तरे समान आहेत,
त्या अर्धीं मूळयुग्मांचीं गुणोत्तरे समान असलीं पाहिजेत (स. प्र. १).

हणून, म क ट : म क ड :: म क ड : म ग ड
हणजे, क्ष : क्षि :: क्षि : क्षा
∴ क्षि = $\sqrt{\text{क्ष} \cdot \text{क्षा}}$ हें सिद्ध.

भाग २ रा.— येथें म द ड आणि म द ग हे त्रिकोण एकाच म ड
उंचीचे आहेत, हणून (सि. क. फल १ प्र.) हे त्यांच्या पायांच्या प्र-
माणांत असले पाहिजेत.

∴ म द ड : म द ग :: द ड : द ग

क ड कंसाला क द आणि ड द ह्या स्पर्शरेषा असल्यामुळें त्यांचे
छेदनस्थळांच्या म द रेषेनें ड म ग कोन दुभागला जातो असें (यु.
३।३६ व १।८ वरून) सिद्ध होतें. म द रेषा ड म ग कोन दुभागते
हणून (यु. ६।३ प्रमाणें.)

द ड : द ग :: म ड : म ग

आणि त्या वर्तुळावाहेरच्या तेवढ्याच वाजूंच्या नियमित बहुकोन क्षेत्राची गणती, ह्यांच्या गुणाकाराच्या दुप्पटीला त्या वर्तुळांतल्या नियमित बहुकोनक्षेत्राची गणती, व दुप्पट वाजूंच्या नियमित बहुकोनक्षेत्राची गणती ह्यांच्या वेरजेनें यागिलें, तर तो भागाकार त्या वर्तुळावाहेरच्या दुप्पट वाजूंच्या नियमित बहुकोन क्षेत्राची गणती दाखवितो.

झणजे वर्तुळाच्या आंतल्या व बाहेरच्या नियमित बहुकोनक्षेत्रांच्या गणती अनुक्रमें क्ष आणि क्षा ह्मटल्या, व त्या वर्तुळाच्या आंतल्या व बाहेरच्या दुप्पट वाजूंच्या नियमित बहुकोनक्षेत्रांच्या गणती अनुक्रमें क्षि आणि क्षु ह्मटल्या, तर असें येतें कीं.—

$$\text{क्षि} = \sqrt{\text{क्ष. क्षा} \dots \dots \dots} \quad ४$$

$$\text{व} \quad \text{क्षु} = \frac{२ \text{क्ष. क्षा} \dots \dots \dots}{\text{क्ष} + \text{क्षि}} \quad ५$$

परंतु मडग आणि मटक हे त्रिकोण सरूप आहेत. झणून
(यु.६।४प्र.) मड : मग :: मट : मक

∴ स.प्र.१प्र. मदड : मद्ग :: मट : मक (=मड)

परंतु मकट आणि मकड हे त्रिकोण एकाच कट उंचीने आहेत, झणून (सि.क.फल.१प्र.)

$$\text{मकट} : \text{मकड} :: \text{मट} : \text{मड}$$

$$\text{झणजे} \quad \text{क्ष} : \text{क्षि} :: \text{मट} : \text{मड}$$

$$\therefore \text{स.प्र.१प्र. मदड} : \text{मद्ग} :: \text{क्ष} : \text{क्षि}$$

$$\text{उपाग्रसंयोगानें} \quad \text{मदड} : \text{मदड} + \text{मद्ग} (= \text{मगड}) \\ :: \text{क्ष} : \text{क्ष} + \text{क्षि}$$

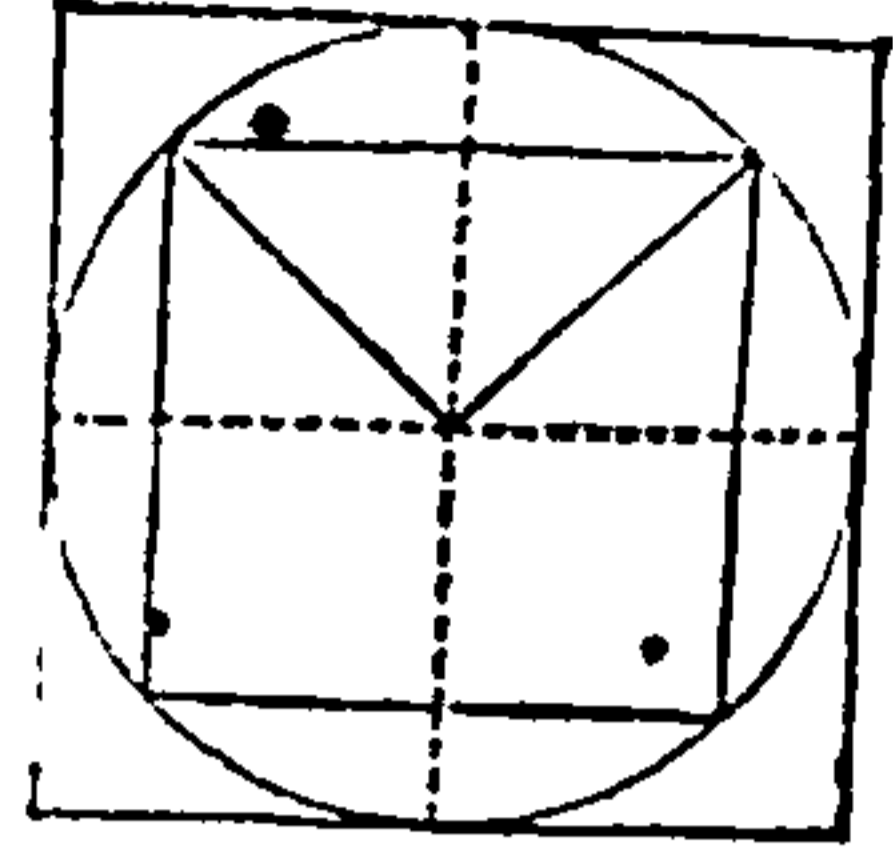
अग्रसरांच्या समान पटी केल्यानें प्रमाण कायम राहतें. (स.प्र.४).

$$\therefore २ \text{मदड} (= \text{मकदड}) : \text{मगड} :: २ \text{क्ष} : \text{क्ष} + \text{क्षि}$$

$$\text{झणजे,} \quad \text{क्षु} : \text{क्षा} :: २ \text{क्ष} : \text{क्ष} + \text{क्षि}$$

$$\therefore \text{क्षु} = \frac{२ \text{क्ष. क्षा}}{\text{क्ष} + \text{क्षि}} \text{ हें सिद्ध.}$$

उदाहरण १. लं.— बाजूचें वर्तुळ एकमान त्रिज्येचें आहे. ह्याच्या आंतल्या व बाहेरच्या चौरसांच्या क्षेत्रांवरून ह्याच्या आंतल्या व बाहेरच्या अष्टकोनांची क्षेत्रे सांगा.



आंतल्या चौरसाचें क्षेत्र त्रिज्येच्या (१ च्या) वर्गाच्या २ पट येतें हणून क्ष = २ आणि बाहेरच्या चौरसाचें क्षेत्र त्रिज्येच्या वर्गाच्या ४ पट येतें हणून क्षा = ४. आतां पद्धति ३ प्रमाणें ह्या वर्तुळांतल्या अष्टकोणाचें क्षेत्र.

$$\text{क्षि} = \sqrt{\text{क्ष} \cdot \text{क्षा}} = \sqrt{२ \times ४} = \sqrt{८} \\ = २.८२८४२७१.$$

तसेंच पद्धति ४ प्रमाणें ह्या वर्तुळा बाहेरच्या अष्टकोणाचें क्षेत्र.

$$\text{क्षु} = \frac{२ \text{क्ष} \cdot \text{क्षा}}{\text{क्ष} + \text{क्षि}} = \frac{१६}{२ + \sqrt{८}} = ३.३१३७०८५.$$

येथें क्ष = २.८२८४२७१ आणि क्षा = ३.३१३७०८५ घेतले असतां वरील २ पद्धतींच्या आधारानें असें येतें कीं.—

वर्तुळांतल्या षोडशकोनाचें क्षेत्र क्षि = ३.०६१४६७४

वर्तुळाबाहेरच्या षोडशकोनाचें क्षेत्र क्षु = ३.१८२५९७९

वर दाखविल्याप्रमाणें ३ व ४ ह्या पद्धतींच्या आधारानें एका क्रमानें आंतल्या व बाहेरच्या बहुकोनांची क्षेत्रफळे काढीत चालावें, हणजे ह्या बहुकोनांच्या बाजूंची संख्या दुपटी दुपटीनें वाढत जाते तसतशीं तीं क्षेत्रफळे एकमेकांशीं मिळतीं येत जातात. तीं अशीं:—

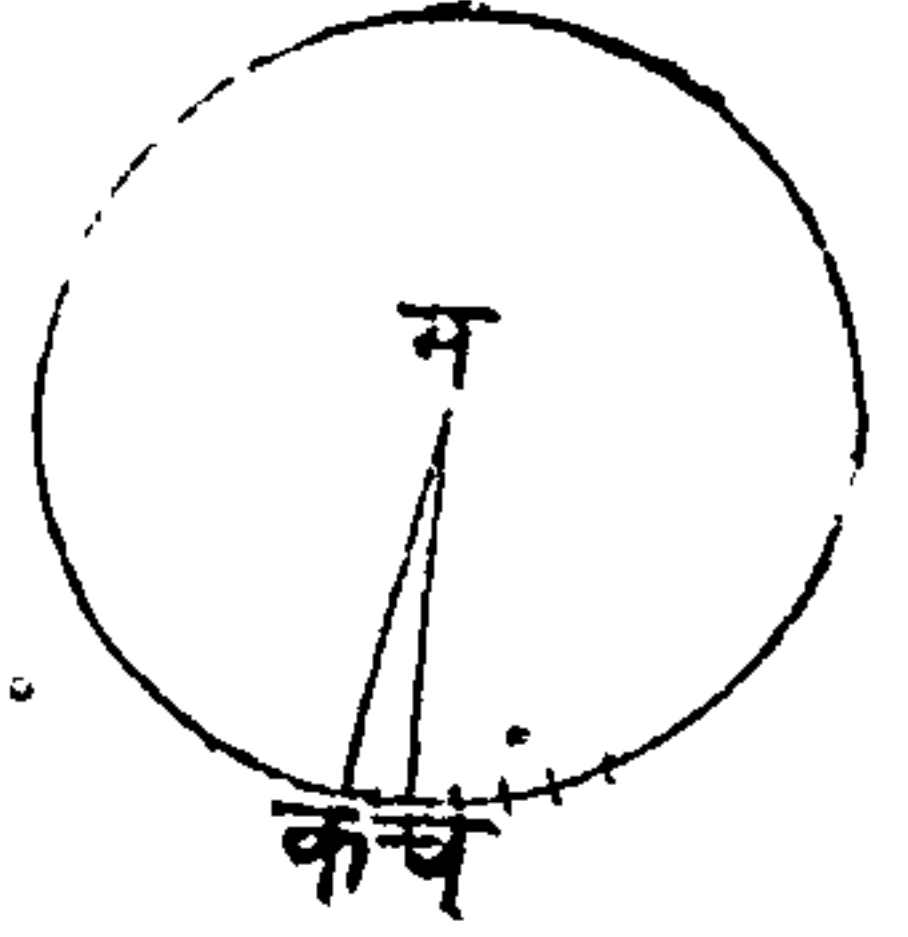
वाजूंची संख्या.	आंतल्या बहुकोनाचें • क्षेत्रफळ.	बाहेरच्या बहुकोनाचें क्षेत्रफळ.
४	२	४
८	२८२८४२७१	३३१३७०८५
१६	३०६१४६७४	३१८२५९७९
३२	३१२१४४५१	३१५१७२४६
६४	३१३६५४८५	३१४४११८४
१२८	३१४०३३११	३१४२२२३६
२५६	३१४१२७७२	३१४१७५०४
५१२	३१४१५१३८	३१४१६३२१
१०२४	३१४१५७२९	३१४१६०२५
२०४८	३१४१५८७७	३१४१५९५१
४०९६	३१४१५९१४	३१४१५९३३
८१९२	३१४१५९२३	३१४१५९२८
१६३८४	३१४१५९२५	३१४१५९२७

वरील कोष्टकांत शेवटच्या बहुकोनांचीं क्षेत्रफळें पाहिलीं तर त्यांत २ कोट्यांशाचा फरक आढळतो. एथें मधल्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ हें आंतील बहुकोनाच्यापेक्षां अधिक व बाहेरील बहुकोनाच्यापेक्षां कमी असाध्याचें. ह्यावरून १ त्रिज्येच्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ हें ३१४१५९२६ चौरस त्रिज्या ठरतें. ही संख्या १ कोट्यांशापेक्षां कमी कसरीनें वर्तुळाचें क्षेत्रफळ दाखवील हें उघड आहे.

उदाहरण २ रें.— वर्तुळाची त्रिज्या १ हाटली तर त्याच्या आंतल्या समभुज त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ इतकें येतें, व त्या वर्तुळाबाहेरच्या समभुज त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $3\sqrt{3}$ इतकें येतें. यावरून वर्तुळाचें क्षेत्रफळ केवढें येईल तें वरील रीतीनें काढा.

वर्तुळ.— वर्तुळाची त्रिज्या, व्यास, व परिघ, ह्यांच्या

सामान्य मापाच्या मिति (मोजदाती) दाखविण्याला त्र, व्य, आणि प, हीं अक्षरें अनुक्रमें घ्या. वर्तुळाचा परिघ त्याच्या व्यासाच्या प्रमाणांत असावयाचा हणून $\frac{प}{व्य}$ हे गुणोत्तर किंवा व्यासाच्या मापानें परिघ-मिति दाखविण्याला प्म घ्या.



ह्या संकेताप्रमाणें $\frac{प}{व्य} = प्म$ आणि व्य = २ त्र हणून

$प = प्म \cdot व्य$ किंवा २ प्म.त्र. ६.

कोणतेही वर्तुळ हे मोहरीसारख्या क्षुल्लक लांबीच्या हजारों बाजूंचा नियमित बहुकोन आहे असें हणतां येतें, हणून वर्तुळपरिघांत बाजूच्या कच सारख्या सरळ रेषारूपी अति सूक्ष्म बाजू स ह्या संख्येइतक्या राहतात असें कल्पा. ह्या प्रत्येक बाजूची मोजदात दाखविण्याला व घ्या. ह्या प्रत्येक बाजूचें मध्यांतर त्र इतकेंच असावयाचें हणून हे मध्यांतर दाखविण्याला त्र घ्या. आणि वर्तुळाचें क्षेत्रफल दाखविण्याला क्ष घ्या. आतां बहुकोनाची पद्धति ४ प्रमाणें क्ष = $\frac{स \cdot त्र \cdot त्र}{२}$ असें येतें. ह्यांत स.ब (ह. क. च बाजूची स पट) ही वर्तुळपरिघाची प ही मोजदात दाखविते हणून स.ब चे जागीं प व १ च्या किंमती ठेवाव्या. हणजे असें येतें कीं वर्तुळाचें क्षेत्रफल,

$$क्ष = \frac{प \cdot त्र}{२} = प्म \cdot त्र = \frac{प्म \cdot व्य}{४} \dots ७$$

१ त्रिज्येच्या किंवा २ व्यासाच्या वर्तुळाचें क्षेत्रफल हे ३.१४१५९२६ चौरस त्रिज्या असतें असें पूर्वीच्या कोष्टकावरून ठरलें आहे. हणून ह्याच किंमती व्य आणि क्ष ह्यांचे जागीं ठेवाव्या हणजे प्मची किंमत येते, ती अशी.—

$$\frac{\text{पम} \cdot \text{व्य}^2}{४} = \text{क्ष}$$

$$\therefore \frac{\text{पम} \times २}{४} = ३.१४१५९२६$$

$$\therefore \text{पम} = ३.१४१५९२६ \dots \dots \dots$$

सामान्य व्यवहारांत पम = ३.१४१६ ही किंमत घेतात. त्रैराशिकांत व्य : प :: ११३ : ३५५ घेतात, व ७ : २२ ही घेतात. ह्यांतील पहिलें दक्षिणगुणोत्तर हें ६ दशांश स्थळांपावेतो व दुसरें २ दशांशस्थळांपावेतो पन्ची किंमत खरी दाखवितें.

उदाहरण १ लें.- एका वर्तुळाची त्रिज्या ३॥ फूट आहे. तर त्याचें क्षेत्रफळ काय? ह्याचा व्यास ७ फूट घेतो. ह्मणून,

$$\begin{aligned} \text{प.७प्र.} \quad \text{क्ष.} &= \frac{\text{पम} \cdot \text{व्य}^2}{४} = ७८५४ \times ७^2 \text{ चौ. फू.} \\ &= ५.४९७८ \times ७ \text{ चौ. फू.} \\ &= ३८.४८४६ \text{ चौ. फू.} \\ &\text{हें उत्तर.} \end{aligned}$$

उदाहरण २ रें.- १०० हात लांब, व २० हात उंच अशा भिंतीस चुना लावावयाचा आहे, व त्याचा दर, एकचौरस हातास पाव आणा याप्रमाणें आहे, तेव्हां सर्व चुन्याचा आकार काय होईल ?

१०० × २० = २००० इतके चौरस हात जागिस चुना घावयाचा आहे, आणि त्याचा दर दरचौरस हातास ८१. आणा प्रमाणें आहे; ह्मणून एकंदर खर्च २००० पाव आणे ह्मणजे ३१॥ रुपये लागेल.

उदाहरण ३ रें.- ६० हात लांब आणि १५ हात रुंद अशा छपरावर कौलें घालावयाचीं आहेत. एक चौरस हात जागेंत २५ कौलें राहतात, आणि कौलांचा दर शेंकडा ८॥ आहे, तेव्हां एकंदर किती रुपयांचीं कौलें लागतील ?

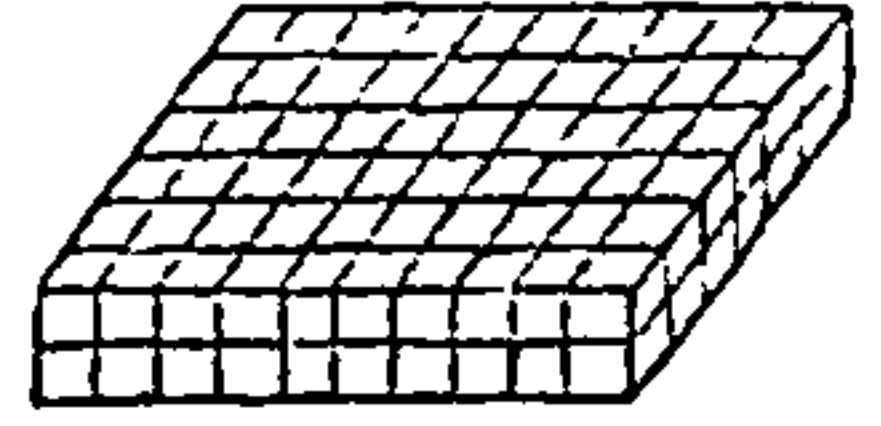
छपर $६० \times १५ = ९००$ इतके चौरस हात आहे, व एक हात जागेंत २५ कौलें राहतात, तेव्हां,

सर्व छपरास $९०० \times २५ = २२५००$ कौलें व एकंदर खर्च $= \frac{२२५०० \times ४०}{१००} = ५६२$ आणे $= ३५४$ रुपये, लागेल.

घनफल.— एक हात लांब, एक हात रुंद, व एक हात उंच असें जें भरीव त्यास एक घनहात ह्मणतात.

एक ओटा १० हात लांब, ६ हात रुंद आणि दोन हात उंच असला तर त्याचें घनफल $१० \times ६ \times २ = १२०$ घनहात होईल.

कारण, खालचे थरांत $१० \times ६ = ६०$ घनहात आहेत, व असे थर दोन आहेत ह्मणून एकंदर १२० घनहात झाले.



ह्मणून भरीव पदार्थाचें घनफल काढणें झाल्यास लांबी, रुंदी व उंची ह्यांचा गुणाकार करावा.

उदाहरण १ लें.— ८० हात लांब, २० हात उंच, आणि १॥ हात रुंद अशी भिंत बांधावयाची आहे, तर, तिचें काम एकंदर किती घनहात होईल; व शेंकडा बारा आणेप्रमाणें त्या कामाचा आकार काय होईल ?

एकंदर काम $= ८० \times २० \times १॥ = २४००$ घनहात आणि आकार $= २४ \times १२ = २८८$ आणे ह्मणजे १८ रुपये हें उत्तर.

उदाहरण २ रें.— एक टांकें ३ हात लांब, २ हात रुंद आणि एक हात ओंड असें आहे, त्यांत १० घागरी पाणी राहते, तर १५ हात लांब, १० हात रुंद आणि १२ हात ओंड असा एक हौद आहे त्यांत किती घागरी पाणी राहील ?

$३ \times २ \times १ = ६$ घनहात जागेंत १० घागरी पाणी राहते, तेव्हां $१५ \times १० \times १२ = १८००$ घनहात जागेंत $\frac{१८०० \times १०}{६} = ३०००$ घागरी पाणी राहील, हें उत्तर.

द्वादशांश गुणाकार.— फूट, इंच व सुतें अशीं बाराव्या बाराव्या दिशानें लहान होत जाणारीं जीं द्वादशांश परिमाणें,

तीं दाखविणाऱ्या अंकसंख्यांच्या गुणाकाराला द्वादशांश गुणाकार ह्मणतात.

द्वादशांशपद्धतीचें संख्यालेखन.— लांबी, लांबी व रुंदी ह्यांचा गुणाकार किंवा क्षेत्रफळ, आणि लांबीरुंदीचा गुणाकार व उंची ह्यांचा गुणाकार किंवा घनफळ, ह्या संख्यांचे एक दाखविण्याला अनुक्रमें लांबी फूट, चौरसफूट, व घनफूट, हे व्यावे; ह्या एकंच्या पुढचीं स्थलपरिमाणें दाखविण्यासाठीं

$$\frac{\text{एकं}}{१२}, \frac{\text{एकं}}{१४४}, \frac{\text{एकं}}{१७२८} \text{ इत्यादि.}$$

द्वादशांश परिमाणें कल्पून तीं द्वादशांश विंदूपुढच्या ।, ।, ।।, ।।। इत्यादि चिन्हांनीं दाखवावीं; ह्मणजे ह्या तिन्ही प्रकारच्या संख्या भांजणीचे आधारे द्वादशांश पद्धतींत मांडल्या जातात. जशा.—

$$१६ \text{ फू. } १० \text{ इं. } १० \text{ सु. } = १६ \cdot १० \text{ } ६ \text{ फू.}$$

$$२१ \text{ चौ.फू. } ९५ \text{ चौ.इं. } ९ \text{ चौ.सु. } = २१ \cdot ७ \text{ } ११ \text{ } ० \text{ } ९ \text{ चौ.फू.}$$

$$१२५ \text{ घ.फू. } ४ \text{ घ.इं. } १५८ \text{ घ.सु. } = १२५ \cdot ० \text{ } ० \text{ } ४ \text{ } १ \text{ } १ \text{ } २ \text{ घ.फू.}$$

द्वादशांशपद्धतीचें संख्यावाचन.— पहिली द्वादशांश संख्या ही १६ पूर्णांक १० पहिले द्वादशांश ६ दुसरे द्वादशांश फूट अशी वाचावी आणि ह्या वाचणीचा अर्थ १६ पूर्णांक १० द्वादशांश व ६ एकशेंचवेचाळिसांश फूट असा समजावा. दुसरी संख्या ही २१ पूर्णांक ७ प.द्वा ११ दु.द्वा व ९ च.द्वा चौ.फू. अशी वाचावी, आणि तिचा अर्थ

$$२१ \text{ चौ.फू. } + \frac{७ \text{ चौ.फू.}}{१२} + \frac{११ \text{ चौ.फू.}}{१४४} + \frac{९ \text{ चौ.फू.}}{२०७३६} \text{ असा समजावा.}$$

वरच्या वाचणीवरून व अर्थावरून हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं, दशांशसंख्येमध्ये दशांश शतांश इ. हीं स्थलपरिमाणें आहेत. तशींच द्वादशांशसंख्येमध्ये द्वादशांश एकशेंचवेचाळिसांश, सत्राशेंअष्टाविसांश इ. हीं स्थलपरिमाणें आहेत. तथापि १० व ११ हे अंक एकेकाच स्थळां मांडतां येण्यासाठीं त्यांचे दल द आणि अ हे वर्ण व्यावे असं आपण ठरविलें नाहीं.

ह्या एकंदर स्थलसंख्या दशकपद्धतींतच मांडणें इष्ट असल्यामुळें पूर्णोक्त हे एकाच स्थळांचे समजावे असें आपण ठरविलें आहे, एवढ्यासाठीच पूर्णोक्त व द्वादशांशादि परिमाणें हीं एथें चिन्हांनीं दाखविलीं आहेत. एथें ।।।। इ. चिन्हेंहीं द्वादशांश, एकशेंचवेचाळिसांश, इ. स्थळपरिमाणें दाखवितात, अथवा १२, १४४, इ. बाराबारापटीनें वाढणाऱ्या छेदांचीं परिमाणें दाखवितात. ह्यावरून,

द्वादशांश गुणाकाराचा नियम.— एकच्या संख्येनें कोणत्याही चिन्हाच्या (छेदाच्या) संख्येला गुणलें तर गुणाकार त्याच चिन्हाची (छेदाची) संख्या येईल, आणि त्याच चिन्हाच्या संख्येला एकपुढील चिन्हाच्या संख्येनें गुणलें तर गुणाकार गुणकचिन्हाइतक्या पुढच्या चिन्हाचा येईल. अथवा गुण्य-गुणकांच्या गुणाकाराचें चिन्ह हें त्यांच्या चिन्हांच्या बेरजेनें दाखविलें जाईल.

सूचना.— चिन्हसंख्यांच्या गुणाकारांतून हातचे घ्यावयाचे ते १२ नीं भागून घ्यावे.

उदा. १ लें.— तक्तपोशीची लांबी ९ फूट, ४ इंच, १० सुतें असून, रुंदी ७ फूट, ८ इंच आहे, तर तिच्या छताला किती चौरसफूट कापड लागेल ?

फूट.

लांबी	९	४	१०
रुंदी	७	८	

चौ.फू. ६५. ९ १० वरील लांबी व ७ फू. रुंदी ह्यांतील क्षेत्रफल

चौ.फू. ६३ २८ " ८ इंच रुंदी "

चौ.फू. ७२. १ ० ८ " एकंदर रुंदी "

चौ.फुटाचा । (३ ला द्वादशांश) = १२ चौ.इं., व चौ.फुटाचा

।।। (३ रां द्वा.किंवा सत्राशेंअष्टाविसांश) = द्वादशांश चौ.इं.

∴ ७२ चौ.फू. व १२ $\frac{२}{३}$ चौ.इं. हें उत्तर.

उदा. २ रें.— घराचें पाखें त्रिकोणाकार असतें. ह्या पाख्याची लांबी (त्रिकोणाचा पाया) फूट २३' ७" आहे, ह्याची रुंदी (त्रिकोणाची लंबरूप उंची) फूट ३१' ९" आहे, तर त्याचें क्षेत्रफळ केवढें होईल ?

येथें उंचीचें अर्ध १५' १०" ७ फूट येतें. ह्याणून,

	फूट.				
लांबी	२३'	७"			
रुंदी	१५'	१०"	७"		
	३५४'	८३"			१२)२३६
	१९०'	८५"	६"		१९०
	१०'	१९"	६"	३"	१२)१६५
					१३९
चौ.फू.	३७५'	६६"	०३"		

९ चौ. फू. = १ चौ. यार्द, चौ.फू. चा । (ह० प. द्वां.) = १२ चौ.इं., चौ.फू. चा ॥ (दु. द्वां.) = १ चौ.इं., व चौ.फू.चा ॥॥ (च. द्वां.) = $\frac{१ \text{ चौ.इं.}}{१४४}$ ह्यावरून ४१ चौ.यार्द, ६ चौ.फू. व $७८\frac{३}{४}$ चौ.इं. हें उत्तर.

उदाहरण ३ रें.— एका समांतरभुज चौकोनाची लांबी (पायाची लांबी) ५ यार्द २ फूट ८ $\frac{३}{४}$ इंच आहे, आणि रुंदी (लंबरूप उंची) ३ यार्द २ फूट ५ इंच आहे, तर ह्याचें क्षेत्रफळ काढा.

	फूट.		
लांबी	१७'	८"	९"
रुंदी	३१५'	५"	
	१९५'	०"	३"
	७'	४"	७"

चौ.फू. २०२' ४१०" ९ = २२ चौ.यार्द, ४ चौ.फू. ५८ $\frac{३}{४}$ चौ.इं. हें उत्तर.

उदाहरण ४ रें.— एका हौदाची लांबी २० फूट ८ इंच,

रुंदी ११ फूट १० इंच, व खोली ८ फूट ५॥ इंच आहे, तर त्याचें घनफल काढा.

	फूट.		
लांबी	२०	८	
रुंदी	११	१०	
	<hr/>		
	२२७	४	
	१७	२८	
	<hr/>		
चौ. फू.	२४४	६	८
खो. फू.	८	५	९
	<hr/>		
घ. फू.	१९५६	५	४ वरील क्षेत्र व ८ फू. खोली ह्यांतील घ.फ.
घ. फू.	१०१	१०	९ ४ " ५ इंच खोली "
घ. फू.	१५	३	५ ० ० " ९ सुतें खोली "
	<hr/>		
ए.घ.फू.	२०७३	७	६ ४ = ७६ घ. यार्द, २१ घ. फू.

१०८४ घ. इ. हें उत्तर.

कारण २७ घ. फू. = १ घ. यार्द, घ.फू. चा I = १४४ घ. इ., घ.फू. चा II = १२ घ. इ., व घ.फू. चा III = १ घ. इ. असतो.

कारागीर लोकांच्या कामाचा आकार करण्याकरिता ह्या पुढील गोष्टी लक्षांत ठेवण्याजोग्या आहेत.

तक्तपोशी, फरसबंदी, भिती वगैरे, ह्यांची मोजणी गजानें किंवा फुटानें करितात. कामाचा दर १०० फुटींवर किंवा गजांवर ठरवितात.

धोंडे किंवा खडी, यांचा दर हल्लीं १०० घनफुटींवर ठरवितात.

माती, रेती वगैरे फण्यांनीं मोजतात. १ फरा = २ घनफूट.

या फण्याला मण अशी संज्ञा आहे.

हौदांतील किंवा टांक्यांतील पाणी हांड्यांनीं किंवा घनफुटींत किंवा ग्यालनांत मोजतात. एका हांड्यांत सरासरी एक घनफूट पाणी राहतें.

धान्याचीं पेंवें, कोठारें, भोत वगैरे ह्यांत धान्य किती राहिल

ह्याचा अजमास फरे, खंडी, किंवा पल्ले ह्यांनी करतात. एक घनहात जागेंत दोन फरे धान्य राहतें, व पुण्याच्या एक खंडी धान्यास ४० घनफूट जागा लागते.

अरेकसाचें काम दोरीनें किंवा गजानें मोजतात. एक गज ह्मणजे २४ तसू लांब आणि ६ तसू रुंद; एक दोरी ह्मणजे ४ गज किंवा १२ फूट लांब आणि ६ तसू किंवा ९ इंच रुंद.

विहिरीची खोली सांगणें झाल्यास अमुक पुरुष खोल आहे असें सांगतात. एक पुरुष ह्मणजे एक वांव किंवा ६ फूट लांब दोरी समजावी.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ता.

१. १० हात लांब, १० हात रुंद व २ हात उंच असा ओटा घालावयाचा आहे, त्यास विटा किती लागतील? प्रत्येक विटा १० अंगुळें लांब, ६ अंगुळें रुंद आणि तीन अंगुळें जाड आहे, व विटांचे प्रत्येक थरावर मातीचा थर २ अंगुळें जाडीचा द्यावयाचा आहे.

२. एक चिरेवंदी वाटोळा बुरुज ६० हात उंच आहे, त्याचे भिंतीची जाडी ३ हातांची आहे व पोक्रळीचा गर्भ १५ हात आहे, आणि त्या सर्व बुरुजास चिरे एकेक घनहाताचे आहेत, तेव्हां सर्व चिरे किती तें सांगा?

३. एक विहीर २० हात खोल आहे, तिचे पोक्रळीचा गर्भ १२ हात आहे, व बांधीव कामाची रुंदी १॥ हात आहे, तेव्हां या विहिरीचे बांधीव कामाचा आकार शंभर घनहातांस १३ रुपयेप्रमाणें किती होईल?

४. ८० फूट औरस चौरस एक चौक आहे, त्यांतील प्रत्येक कोंप्याची एक फूट औरस चौरस, व मधील १० फूट लांब आणि ८ फूट रुंद, इतकी जागा सोडून बाकीच्या जागेस फरसवंदी करणें आहे, तर किती चौरस चिरे लागतील तें सांगा.

५. १० फूट रुंदीच्या सडकेवर दोन मैलांपर्यंत खडी ठाकावयाची आहे, आणि १० चौरस फूट जागेंस एक गाडी खडी लागते; तेव्हां एकंदर खडी किती लागेल?

॥ ८ रुंद आहे व ४ था. ५३'९ ७ फूट लांब आणि ११'९ १० फूट रुंद आहे.

१३. पुढच्या चौरसांचीं क्षेत्रफळें द्वादशांश पद्धतीनें काढा. १ ला. २ यार्द १ फूट $३\frac{१}{२}$ इंच पायावरचा; २ रा. १७ फूट ४ इंच $६\frac{३}{४}$ सूत पायाचा; व ३ रा. १२३ फूट $६\frac{७}{८}$ इंच बाजूचा.

१४. पुढील मापांच्या काटकोनी भरींवाचें घनफळ द्वादशांश पद्धतीनें काढा. १ लें. १३ फूट ८ इंच ११ सुतें, १४ फूट ९ इंच, व १५ फूट १ इंच २ सुतें आणि २ रें. १८' ७ ४ फूट, १७'३ ९ फूट, व १९'० ११ फूट.

१५. ज्याची प्रत्येक बाजू पुढील मापाची आहे त्या घनांचीं घनफळें काय येतील ? १ ला. ११'६ ५ फूटांच्या बाजूचा, २ रा. ५ यार्द २ फूट ७ इंच १० सुतें बाजूचा, आणि ३ रा. ३ यार्द १ फूट $७\frac{३}{४}$ इंच बाजूचा.

१६. पुढील त्रिकोणांचीं क्षेत्रफळें काढा. १ ला. पाया १४'६ ७२ फूट व उंची (लंब) ११'९८ फूट व २ रा. पाया ३७'६ ११ फूट आणि उंची १७'८ ३ फूट.

१७. वर्तुळांचे व्यास १७, ५३'६, २४७, आणि १०'९, अनुक्रमें फूट आहेत, तर त्यांचे परिघ सांगा.

१८. वर्तुळांचे परिघ अनुक्रमें १५४, २०८'६ आणि ४०५८ इतकाले फूट आहेत, त्यांचे व्यास काढा.

१९. भूमीच्या परिघाचा $३\frac{१}{६}$ ह्याची लांबी $६९\frac{१}{२}$ मैल भरली तर तिचा व्यास केवढा असेल ?

२०. भूमीचा व्यास ७'९१२ मैल असला, आणि विपुवापासून ध्रुवापावेतो भूपरिघाचा जो १ कोट्यांश त्याला मीटर (२ हातांचा गज) हटला, तर त्या मीटराची लांबी केवढी येईल ?

२१. ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमें ७, ८, व ९, मापें आहेत, त्यांचीं क्षेत्रफळें तींच चौरस मापें किती किती भरतील ?

२२. ज्या वर्तुळांचे व्यास ७५, ८०'५, व ७'१९, फूट आहेत त्यांची क्षेत्रफळे अनुक्रमे कित्ती कित्ती चौरस फूट येतील ?
२३. ज्या वर्तुळाचा व्यास ७ फूट आहे त्याचे क्षेत्रफळ केवढ्या वाचू वरील चौरसाच्या एवढे होईल ?
२४. ज्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ २१ एकर आहे त्याचा व्यास केवढा असेल ?
२५. ज्या वर्तुळाची त्रिज्या २३ फूट आहे, त्याच्या सर्भोवती ५॥ फूट रुंदीचा रस्ता बांधिला तर त्याचे क्षेत्रफळ केवढे होईल ?
२६. एका वर्तुळाकार तलावाचे क्षेत्रफळ कित्ती एकर आहे हें मोजण्यासाठी एक मनुष्य दर तासास $3\frac{1}{2}$ मैल प्रमाणें चालीने त्याच्या पाळीवरून चालली, व तो त्याचा फेरा २॥ तासांत पुरा झाला, तर त्या तलावाचे क्षेत्रफळ केवढे होईल ?
२७. एक घनफूट पाण्याचे वजन १००० औंस भरते तर ४॥ फूट लांब, ३ फूट रुंद, व ४॥ फूट खोल, अशा हौदांतले पाणी कित्ती वजन भरेल ?
२८. लांबी ९ इंच, रुंदी ४ इंच, व जाडी ३ इंच, असल्या विटा १ फूट १० इंच जाड, १०० यार्ड लांब, व ४॥ यार्ड उंच, अशा भितीला कित्ती लागतील ?
२९. संगमरवरी चीप ६ फूट ३ इंच लांब, २ फूट ८ इंच रुंद, व ४ इंच जाड आहे. ही चीप १४ शि. ६ पेन्सांस घनफूट प्रमाणें मिळत असून १ घ. फू. संगमरवराचे वजन १७० पौंड भरते. तर त्या चिपेची किंमत व वजन काय ?
३०. १ घनइंच पाणी २५३.१७ ग्रेन भरते, आणि १ घनइंच वायु ३१००.१७ ग्रेन भरतो, तर १ घनफूट पाण्याच्या वजना बरोबर कित्ती घनइंच वायूचे वजन भरेल ?
३१. एका नळाची तोटी १२ चौ. इंच असून त्यांतून दर २४ तासांत ३०००० घनफूट पाणी वाहते. तर तें पाणी केवढ्या वेगानें चालतें हणजे दर तासास कित्ती मैल चालते ?

प्रश्नसमुदाय. था.

१. एक गृहस्थ कांहीं अंतरापर्यंत चालत जाऊन तेथून घोड्यावर बसून परत आला. त्यास निघालेल्या वेळापासून परत येण्यास ३॥ तास लागले. तो जर पूर्वीपासून घोड्यावर बसून जाऊन परत येता तर त्यास २॥ तासांत परत येतां आलें असतें. ह्यावरून तो पायांनीं चालत जाऊन तसाच परत येता तर त्यास किती वेळ लागता ?

२. अ ह्यानें एक पदार्थ खरेदी करून तो ब ह्यास शेंकडा १० रुपये नफा घेऊन विकला. बनें त्याचप्रमाणें शेंकडा १० रु. नफा घेऊन तो क ह्याला विकला. कनें त्याचप्रमाणें नफ्याचे ५ रु. अधिक घेऊन तो ड ह्याला विकला. तो पदार्थ पूर्वी अनें किती रुपयांस खरेदी केला असावा ?

३. $\frac{१८५४}{१०३६५}$ ह्यास अतिसंक्षेपरूप द्या; १ पौंड १५ शिलिंग ६ पेन्स ह्यांस अपूर्णाकांत गिनीचे रूप द्या; अर्ध्या गिनीचे $\frac{३}{४}$ ह्यांची किंमत काढा; आणि $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$ चे $\frac{२}{३}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{३}{४}$ ह्यांची बेरीज करा.

४. माझ्याजवळ कमीतकमी किती गोठ्या असल्या हणजे त्यांचे मला बरोबर ४, ५, १२ किंवा १८ असे वांटे करितां येतील ?

५. मी आपला ३०० रुपयांचा पदार्थ दुसऱ्यास तीन वर्षेपर्यंत वापरायास दिला; तर त्यानें त्याच्या मोबदला आपला २०० रुपयांचा पदार्थ मला किती दिवस वापरायास द्यावा ?

६. एका शेतांत एके वर्षी १५० खंडी गहू झाले, आणि ते ४८ रुपये खंडीप्रमाणें विकले; दुसऱ्या वर्षी गव्हांचा दर उतरून ३६ रुपयांनीं खंडी झाला, परंतु त्या वर्षी पीक चांगलें आल्यामुळे त्या शेताचें उत्पन्न मागल्या वर्षाइतकेंच झालें तेव्हां त्या वर्षी गहू किती झाले तें सांगा.

७. एक तक्ता ३॥ तसू जाड आणि ६॥ तसू रुंद आहे, त्यांतून ६॥ घ. गज भरेइतका घेणें आहे, तर किती गज लांब घ्यावा ?

८. एका गृहस्थाचे गुजराथ रेलवेमध्ये, प्रत्येक वांटा १०० रुपयांचा, असे ५० वांटे होते, ते त्याने १७० रुपयांच्या दराने विकून त्या पैशाची दर शेंकडा ९३ $\frac{३}{४}$ भावाची व शेंकडा ३ $\frac{३}{४}$ रुपये व्याजाची ठेव घेऊन ठेविली, तेव्हां त्यास दरसाल किती रुपये व्याज येईल तें सांगा.

९. ३ शेर चाहाची किंमत ४ शेर 'काफीच्या' किमतीबरोबर आहे, आणि ६ शेर काफीची किंमत २० शेर साखरेच्या किमतीबरोबर आहे, तेव्हां ९ शेर चाहाबद्दल किती साखर येईल तें सांगा.

१०. एक जमीन ५४ विघे, ४ पांड, १५॥ चौ. काठ्या आहे, दुसरी ३९ विघे, ९३॥ चौ. काठ्या आहे, आणि तिसरी ५४॥ विघे आहे, त्यांतून खडकळ जमीन ११ वि. २ $\frac{३}{४}$ पांड वजा करून बाकीच्या जमिनीचे सारखे ६० भाग करणें आहेत तर एकेका भागांत किती जमीन येईल ? .

११. २८८०९९१३१ ह्यांचें घनमूळ काढा; आणि ७३६७ चौरस हात व ५२ चौरस तसू इतकें ज्या चौरस जमिनीचें क्षेत्रफळ आहे, तिची एक बाजू किती येईल तें सांगा.

१२. गव्हांचा एक दाणा पेरला तर त्यापासून दाहा दाणे उत्पन्न होतात, व एका शेंरांत ७५८० गहूं राहतात, तर गव्हांच्या एका दाण्यापासून दाहा वर्षांत किती खंडी गहूं होतील ?

१३. १७ रु. ६ आ. यांचे $\frac{५}{४}$ ४॥ रु. चे ५२७, आणि १५ अण्यांचे १२५, यांची बेरीज करून तिला रुपयांचें दशांशरूप द्या.

१४. सेंटिग्रेड ह्याणून एका प्रकारचें उष्णतामापक यंत्र आहे, त्यांत पारा ० अंशावर असतो तेव्हां पाणी थिजतें, व १०० अंशावर असतो तेव्हां पाण्यास कढ येतो; तसेंच फारेनहाईट ह्याणून दुसऱ्या एका प्रकारचें उष्णतामापक यंत्र आहे, त्यांत पारा ३२ अंशावर असतो तेव्हां पाणी थिजतें, व २१२ अंशावर असतो तेव्हां पाण्यास कढ येतो; तेव्हां फारेनहाई-

टच्या ६८ अंशांवर पारा असेल तेव्हां सेंटिग्रेडचे किती अंश होतील ?

१५. अडीच रुपयांनी मण ह्या भावानें दूध १५ मण घेतलें, त्यांत पाणी मिसळून तें मिश्र २ रुपयांनी मण विक्याचें आहे, तर पाणी किती मिसळावें तें सांगा.

१६. १०० रुपयांची हुंडी आहे तिची मुदत भरण्यास १५ दिवसांचा अवकाश आहे, परंतु कांहीं कारणानें दीड रुपया शेंकडाप्रमाणें व्याज कापून आज ९९ रुपये घेतले, तेव्हां वाजवी आज जितके रुपये मिळावे त्यांपेक्षां कमी किती आले ?

१७. रुपयाचे $\frac{३}{४}$ ह्यांची पूर्णांकांत किंमत काढा; १३ आणे ८ पै ह्यांस रुपयाचें अपूर्णांकरूप द्या; आणि १ दिवस ६ घटका ह्यांच्या कितव्या अंशाबरोबर १ घटका $\frac{७}{३}$ पळें आहेत तें सांगा.

१८. एका गृहस्थानें १००० रुपये देऊन शेंकडा ३ रुपये व्याजाची ठेव ९० $\frac{५}{८}$ भावानें घेतली, व पुढें त्या ठेवीचा भाव ९१ $\frac{३}{४}$ रुपये झाला, तेव्हां ती विकून दुसरी ठेव ३॥ रुपये शेंकडा व्याजाची ९७ $\frac{३}{४}$ भावानें घेतली, तेव्हां त्याला व्याजाचा फायदा दरसाल किती रुपये झाला तें सांगा.

१९. ८८४७३६ ह्यांचें घनमूल काढा; व ९५९५१ $\frac{१६१}{६२५}$ ह्यांचें चतुर्थांशमूल काढा.

२०. $\frac{\frac{१}{२} - \frac{१}{३}}{\frac{१}{३} - \frac{१}{४}}$ चे $\frac{\frac{१}{४} - \frac{१}{५}}{\frac{१}{५} - \frac{१}{६}}$ चे $\frac{\frac{१}{६} - \frac{१}{७}}{\frac{१}{७} - \frac{१}{८}}$ } ह्यांस भागजाति अपूर्णांकांचें रूप द्या.

२१. अ १० दिवसांत जें काम करतो तेंच काम व १३ दिवसांत करतो, तर तें काम दोघे मिळून करूं लागल्यास किती दिवसांत करतील ?

२२. कोणी दुकानदार ५॥ रुपयांनी एक हजार पेने विकतो तेव्हां त्यास मूल किमतीचे $\frac{३}{४}$ नफा होतो, तेव्हां शेंकडा नफा किती, व जर तो ६ रुपये ०२ आण्यांनी हजार प्रमाणें विकता तर त्यास मूल किमतीवर नफा किती होता, व शेंकडा नफा काय पडला असता ?

२३. $\frac{३८७२}{९२८०७}$; $१७ \frac{५}{१२} + \frac{४}{१५} + १४४ \frac{११}{२३}$; $२ \frac{१३}{३५} - \frac{१७}{२५}$; $\frac{३}{४}$ चे $\frac{६}{७} \times \frac{५}{१५}$ चे $\frac{११}{१८}$ चे $\frac{२१}{२३}$; आणि $६३४७ \div २\frac{३}{४}$; ह्या सर्वांस अतिसंक्षेपरूप द्या.

२४. ०१५९५१६९ ह्यांचें वर्गमूळ काढा.

व १६९३४९९४४३२ ह्यांचें घनमूळ काढा.

२५. अ, व, क, ह्या तिघांनीं मिळून एक कुरण ६० $\frac{३}{४}$ रुपयांस घेतलें; त्यांत अनें ५ ह्यशी ४॥ महिने चारल्या, वनें ८ ह्यशी ५ महिने चारल्या, आणि कनें ९ ह्यशी ६॥ महिने चारल्या, तेव्हां प्रत्येकानें किती पैसा द्यावा तें सांगा.

२६. पंधरा महिन्यांनीं ज्या रोख्याचे ७५ रुपये मिळावयाचे, त्याचे दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें व्याज कापून देऊन आज रुपये घेतले, तर किती येतील ?

२७. $\frac{१+३\frac{४}{५}}{३-२\frac{३}{५}}$ ह्यांस $१ + \frac{४}{९-\frac{२}{१-\frac{३}{५}}}$ ह्यांनीं भागून भागा-

कार दशांशरूपांत आणा.

२८. १३४२१७७२८ आणि ८०६७७५६८१६१ ह्यांचीं घनमूळें काढा.

२९. ६० रुपये २ आंगे ६ पै हे चौघांस $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$ ह्या प्रमाणांत वांटून द्या.

३०. १०३७ ह्या संख्येचे असे दोन भाग करा कीं त्यांचें गुणोत्तर, ७६२५ आणि ५३७५ ह्या दोन संख्यांची बेरीज आणि वजावळी ह्यांच्या गुणोत्तराबरोबर होईल.

३१. एका हौदास पाणी येण्याचे दोन व पाणी जाण्याचा एक असे तीन नळ होते, त्यांत पाणी येणारे नळांपैकीं एकानें तो हौद ४० मिनिटांत भरतो, व दुसऱ्यानें ५० मिनिटांत भरतो, आणि पाणी जाण्याच्या नळानें २५ मिनिटांत रिकामा होतो. आतां हे तिन्ही नळ एकदम सोडले तर तो हौद भरावयास किती वेळ लागेल ?

३२. अशी एक संख्या आहे कीं जी $\frac{३}{४}$ चे $\frac{४}{५}$ चा $१\frac{१}{२}$

ह्यांनीं भागिली असतां भागाकार १ येतो, तर त्या संख्येचा वर्ग काय होईल ?

३३. एका गृहस्थानें एका व्यापाऱ्यापासून १२५ रुपयांच्या ७५ शेळ्या विकत घेतल्या, परंतु ती रकम त्यास एका वर्षाअंती द्यावयाची असा ठराव केला. नंतर लागल्याच त्या शेळ्या त्याणें दुसऱ्यास दर शेळीस २१ रुपये याप्रमाणें विकल्या; तेव्हां या व्यापारांत पहिल्या खरेदी करणारानें किती नफा मिळविला ? हिंशेन करितांना व्याज दर शेंकडा दर साल ५ रुपये धरावें.

३४. ८२४४'६४ आणि ८२४'४३६३६९ ह्यांचीं वर्गमुळें काढा.

३५. १५ हात लांब आणि ४ हात रुंद असा चर ६ मनुष्यें दररोज १२ तास काम करून ३ दिवसांत खणतात, तर २० हात लांब आणि ८ हात रुंद असा चर ८ मनुष्यें दररोज ८ तासप्रमाणें काम करून किती दिवसांत खणतील ?

३६. वजनी १३ मण ७॥ शेर ह्यांस दशांशांत खंडीचें रूप द्या; १ आणा $५\frac{३}{४}$ पै ह्यांचे $\frac{३}{४}$ ह्यांस अपूर्णाकांत रुपयांचें रूप द्या; आणि १००१ ह्यांस ३९०६२५ ह्यांनीं, १००१ ह्यांस ०००३९०६२५ ह्यांनीं, व १०'०१ ह्यांस ३९०'६२५ ह्यांनीं असें भागा.

३७. ३॥ रुपये किमतीचें एक पुस्तक विकावयाचें आहे, तें विकण्याबद्दल कमिशन शेंकडा ६ रुपयेप्रमाणें द्यावें लागतें, व त्यावर नफा शेंकडा २४ रुपयेप्रमाणें मिळावा अशी इच्छा आहे, तर त्याची किंमत काय ठेवावी ?

३८. सूर्य ३६५ दिवस ५ अवर ४८ मिनिटें इतक्या वेळांत ३६० अंश चालतो, तर तो एका दिवसांत किती कळी चालेल ?

३९. १० पुरुष १३ बायका आणि २५ मुलें ह्यांस १५

१५ अंश = ६० कळी. आणि १ कळी = ६० विकळी.

रुपये वांटून द्या, ते असे कीं पुरुषास वायकोच्या दुप्पट व सुलास वायकोच्या निम्मे येतील.

४०. एक असा अपूर्णक आहे कीं त्यास $9\frac{1}{2}$ च्या घनानें गुणून गुणाकार $9\frac{1}{2}$ च्या वर्गमुळानें भागला तर भागाकार $\frac{3}{4}$ येतो, तेव्हां तो अपूर्णक कोणता तो सांगा.

४१. २४ हात ४ तसू रुंद, आणि ९६ हात ६ तसू लांब अशा जमिनींत मका पेरला आहे, व तो दरचौरस हातास ८-॥ आणा ह्या भावानें विकणें आहे, तर त्याची किंमत काय होईल ?

४२. ३० चे $\frac{1}{2}$ चा $\frac{1}{3}$ चे $\frac{1}{4}$ इतकीं मेंढरें २१० चे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{1}{2}$ चे $\frac{1}{4}$ इतक्या रुपयांस विकलीं, तेव्हां प्रत्येक मेंढरास काय पडलें तें सांगा.

४३. एका गृहस्थाचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याची जिदगी विकली तिचे २१००० रुपये आले, ते त्याच्या चार सावकारांस त्यांच्या कर्जाच्या प्रमाणानें वांटून देणें आहेत, ते असें कीं, कच्या कर्जास : खचें कर्ज : : २ : ३; खचे कर्जास : गचें कर्ज : : ४ : ५; आणि गचे कर्जास : घचें कर्ज : : ६ : ७; तेव्हां प्रत्येकाचे हिश्यास काय येईल तें सांगा.

४४. एक घनहात पाण्याचें वजन १०६ शेर भरलें; तर एक हात खोल, १६ हात ७ तसू लांब, आणि ८ हात ४ तसू रुंद, इतक्या पाण्याचें वजन किती होईल ?

४५. एका खाणीचें उत्पन्न दरसाल ३२९६ रुपये १३ आणे $5\frac{1}{2}$ पै आहे. त्या खाणींत एकाचे १४ हिस्से आहेत, त्यांजबदल १०२५ रुपये १२ आणे $7\frac{1}{2}$ पै मिळाले, तेव्हां त्या खाणींत एकंदर किती हिस्से आहेत तें सांगा.

४६. २० रुपयांनीं तोळा प्रमाणें शुद्ध सोन्यांत ८ आण्यांनीं तोळा ह्या दराचें हीण घालून ७॥ तोळे वजनाचा एक दागिना केला, त्यांत शुद्ध सोने चोविसांस : अठरा ह्या प्रमाणानें आहे, व बाकीचें हीण आहे, व तो दागिना करावयास मजुरी १०० तोळ्यांस २५ रुपयेप्रमाणें दिली, तेव्हां त्या दागिन्याची एकंदर किंमत काय होईल ती सांगा.

४७. १३७६४१; ०६४; आणि $७\frac{२}{६}$; ह्यांची वर्गमूळे काढा.

४८. एक लांकूड १२३ हात ९ तसू लांब, २ हात ४ तसू रुंद, आणि २ हात जाड असें आहे, त्याची दर घनफुटास ॥२॥ प्रमाणें किंमत काय होईल?

४९. वर्तुळपादांचे, हिंदु लोक ९० अंश मानतात, व फ्रेंच लोक १०० अंश मानतात; तेव्हां हिंदूंचे ३६४५ अंश व फ्रेंचांचे तेवढेच अंश ह्यांच्या बेरजेबरोबर फ्रेंचांचे किती अंश होतील, व हिंदूंचे किती अंश होतील तें सांगा.

५०. जर एक मनुष्य एका तासांत $३०२\frac{१}{२}$ चौरस गज जमिनीवरील गवत कापतो, तर $२\frac{९}{१०}$ दिवे जमिनीवरील गवत कापावयास तीन मनुष्यांस किती तास लागतील ?

५१. कोणी गृहस्थानें ८ महिन्यांनीं रुपये देण्याचा करार करून १५६ रुपयांस एक घोडा घेतला, परंतु मालकास रुपयांची निकड लागल्यामुळें दरसाल दरशेंकडा १४॥ रुपये-प्रमाणें व्याज कापून घेऊन बाकीचे रुपये त्यास दिले आणि लागलाच तो घोडा १८० रुपयांस विकून टाकला, तेव्हां त्यास दरशेंकडा व एकंदर किती नफा झाला तें सांगा.

५२. कं १२ दिवसांत जें काम करतो, त्याच्या तिप्पट काम ख ८ दिवसांत करतो, आणि खच्या पांचपट काम ग १२ दिवसांत करतो, तर तेंच काम तिघे मिळून किती दिवसांत करतील ?

५३. कोणी व्यापाऱ्यानें आपल्या मालावर शेंकडा २० रुपयेप्रमाणें नफा ठेवून त्यांतील कांहीं माल २६ रुपयांस विकला, तेव्हां त्यांत मुद्दल किती व नफा किती ?

५४. चार आणि पांच यांच्यांमध्ये अवरकांटा व मिनिटकांटा ह्यांत २० मिनिटांचें अंतर आहे; तेव्हां किती वाजले असावे ? मिनिटकांट्याच्या एकदां अवरकांटा पुढें व एकदां मार्गे अशीं यांचीं दोन उत्तरे येतात तीं कोणतीं ?

५५. एक चौरस गज जमिनींत पावणेचार पायली धान्य

पिकतें, तर २४ हात लांब व १४ हात रुंद अशा जमिनींत धान्य किती पिकेल ? ह्या जमिनीपैकीं कडेची चौफेर दोन दोन हात जमीन बांधाकडे गेली आहे.

५६. २३२ खंडी ह्यांची पूर्णोकांत किंमत काढा; $३\frac{१}{२}$ पै ह्या $\frac{५}{९}$ रुपयांचे कितल्या अंशाबरोबर आहेत तें सांगा; व ४०१७१ कोश ह्यांची पूर्णोकांत किंमत काढा.

५७. एका गृहस्थास ५ पुत्र होते, त्यांस त्यानें आपल्या अंतकाळीं ३७५० रुपये रोख, व १५१ रुपयांची एकेक अशा दोन हुंडीचिठ्या, एक दोन महिन्यांच्या मुदतीची, व एक तीन महिन्यांच्या मुदतीची, असें ठेवून तो मृत्यु पावला. त्यानें आपल्या मृत्युपत्रांत असें लिहून ठेविलें होतें कीं, माझ्या जिंदगीचा $\frac{१}{४}$ वडील मुलानें घेऊन बाकीची इतरांनीं सारखी वांटून घ्यावी; तेव्हां त्या मुलांनीं त्या हुंड्यांचें व्याज दरमाहा दर्शकडा सहा आणेप्रमाणें घरून जिंदगीची वांटणी केली; तेव्हां प्रत्येकास काय आलें तें सांगा.

५८. कोणीएकानें कलकत्यांतील एका कारखान्यांत ७९७८ रुपये देऊन शेंकडा $३\frac{१}{३}$ रुपये व्याजाचे हिस्से शेंकडा ७७ भावानें घेतले, तेव्हां त्यास वर्षास व्याज किती मिळेल ? व ते हिस्से जर शेंकडा ७७ $\frac{७}{८}$ भावानें विकले, तर त्यास मुदलावर एकंदर नफा किती होईल तें सांगा.

५९. ०३ यांस ००९ यांणीं भागां; आणि $\sqrt{०००१}$ यांची किंमत पांच दशांश स्थळांपर्यंत बरोबर काढा.

६०. एका अंशांत $६९\frac{१}{१०}$ मैल असतात, तेव्हां त्यांची किती योजनें होतील ?

६१. एका खोलीचा घेर ३६ गज आहे; आणि उंची ५ गज ४ तसू आहे, तर तिच्या भिंती रंगविण्याबद्दल दर चौ-रस यार्डास १ शिलिंग $१\frac{१}{३}$ पेन्स प्रमाणें किती रुपये पडतील ?

६२. $\sqrt{\frac{३}{३}}$ आणि $\sqrt[३]{\frac{३}{३}}$ ह्यांची वजाबाकी करा.

६३. १०००० रुपये देऊन शेंकडा ३ रुपये व्याजाची ठेव शेंकडा ९२ भावानें घेतली व तितकाच पैसा देऊन दु-

सरी एक ठेव शेंकडा ४ रुपये व्याजाची ११० रुपये भावानें घेतली, तर दोन्ही ठेवींच्या व्याजाचे उत्पन्नांत अंतर किती तें सांगा.

६४. औरस चौरस ३ तसूंचा, व $\frac{1}{4}$ तसू जाडीचा एक सोन्याचा पत्रा ठोकून ठोकून एक चौरस गज होईपर्यंत वाढविला, तर त्याची जाडी किती राहिल ?

६५. २३७७ रुपये ४ आणे ९ पैचा ५७ खंडी खजूर अरबस्थानांतून मुंबईस आणला, त्याला जकात मुंबई बंदरांत शेंकडा $१०\frac{2}{3}$ रुपयेप्रमाणें दिली, तेव्हां दर खंडीस किती जकात पडली तें सांगा.

६६. रुपयाची तीन शेर या भावाची साखर आमच्याजवळ २ खं. ३ म. आहे. ती देऊन त्या मोवदला रुपयाचा ७॥ शेर या भावाचा गूळ आह्वास घेणें आहे, तर तो किती मिळेल ?

६७. कोणी एक मनुष्य दररोज कर्नाटक प्रांतांतील १० कोस १२॥ तासांत चालतो, व तिकडील कोस पुणें प्रांताचे कोसांशीं ३ : २ ह्या प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तो मनुष्य १३ दिवसांत पुणें प्रांताचे किती कोस चालेल तें सांगा.

६८. एका देवळाचा सभामंडप ३५ हात लांब आणि १५ हात रुंद आहे, त्याच्या छताच्या भोंवतालीं वेल पाऊणहात रुंदीचा वसविला त्यास १९४ रुपये पडले, तेव्हां दर चौरस गज वेलास काय पडलें तें सांगा.

६९. कोणा एका इनामदारास एके वर्षी त्याच्या गांवचें उत्पन्न १९८७ रुपये झालें, त्यापैकीं गांवखर्चाबद्दल त्या पैशाचा $\frac{2}{3}$ व दुसऱ्या किरकोळ खर्चाबद्दल १०५ रुपये १२ आणे काढून बाकीच्या पैशाची त्यानें एक जमीन घेतली, ती इतकी होती की तिच्या उत्पन्नानें ३० वर्षांत मुद्दल पैसा फिटेल; तेव्हां तिचें सालीना उत्पन्न किती तें सांगा.

७०. $\frac{1}{3}$ आण्याचे $\frac{1}{9}$ हे $\frac{1}{3}$ रुपयाचे काय आहेत ?

७१. १४७० रुपये देऊन दरसाल दरशेंकडा २॥ रुपये

व्याजाची ठेव शेंकडा ७५ भावानें घेतली तर वर्षास व्याज किती येईल ?

७२. शेंकडा ४९'८५६ इतका आक्सिजन, ४३'२६५ इतका क्यार्वॉन आणि बाकी हैद्रोजन मिळून १०० साखर बनते, तर एक मण साखरेंत प्रत्येक द्रव्य किती किती आहे ?

७३. लंदन शहर ज्या अक्षवृत्तावर आहे त्या अक्षवृत्ताचा घेर १५१२० मैल आहे; तेव्हां लंदन शहराचे दोन्ही बाजूंच्या एक अंशाच्या रेखावृत्तांमध्ये अंतर किती, व तेथून सूर्य आपल्या दृश्यमान गतीने एका मिनिटांत किती मैल चालतो असें दिसेल ?

७४. ४०३३३ रुपये ३ आणे ३३ पै चौघांस वांटून द्या; ते असे की त्यांचे वांटे १, २, ३, ४, ह्या प्रमाणांत येतील.

७५. ४ महिन्यांनी २५२ रुपये ६ पै घ्यावयाच्या, त्याचें व्याज कापून देऊन आज २४७ रु. १ आ. ८ पै घेतल्या, तेव्हां व्याजाचा दर काय तो सांगा.

७६. ५३'३६१ व ३२ $\frac{१}{२}$ ह्यांचीं वर्गमूळें आणि १७७१५६१ ह्यांचें घनमूळ काढा.

७७. ५४० रुपये देऊन शेंकडा ९३। रुपयेप्रमाणें नोटी घेतल्या तर किती रुपयांच्या नोटी येतील ? नोटी घेण्याबद्दल दलाली शेंकडा २ आणे पडते.

७८. एका कुरणांतील गवत ७ बैल किंवा ५ हशी ८७ दिवसांत खाऊन टाकतात, तर तें गवत २ हशी व ३ बैल मिळून किती दिवसांत खातील ?

७९. ३६ रुपये ८ आणे ६ पै हे २१ पुरुष २१ बायका आणि २१ मुलें ह्यांस वांटून द्या, असे की मुलाच्या दुप्पट बायकोस व बायको आणि मूल ह्यांचे बेरजेबरोबर पुरुषास; तेव्हां प्रत्येक पुरुष, प्रत्येक बायको आणि प्रत्येक मूल ह्यांस काय येईल तें सांगा.

८०. क्रीणी मनुष्याने आपल्याजवळच्या साकरेपैकी $\frac{१}{८}$ चे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{७}{१६}$ साकर दर शेरास ४ आणे ६ पै प्रमाणें विकली, व

त्या विकलेल्या साकरेचें वजन ३ मण आणि १३ शेरांचे $\frac{3}{4}$ चा $\frac{1}{2}$ इतकें होतें; तेव्हां सर्व साकरेची किंमत काय ती सांगा.

८१. एका गाडीच्या चाकाचा व्यास एक गज आहे, तेव्हां एका मैलांत त्या चाकाचे किती फेरे होतील? वर्तुळाचा व्यास आणि परिघ ह्यांचें गुणोत्तर १ : ३.१४१५९ ह्यांच्या गुणोत्तरावर आहे.

८२. एका हौदास पाणी येण्याचे दोन ध फणी जाण्याचा एक असे तीन नळ होते, त्यांत पाणी येण्याच्या नळांपैकीं एकानें तो हौद ४ घटकांत भरतो, व दुसऱ्यानें ५ घटकांत भरतो, आणि पाणी जाण्याच्या नळांनें २ $\frac{1}{2}$ घटकांत रिकामा होतो. आतां त्यांतील पहिला नळ सोडून २ घटका झाल्यावर दुसरा नळ सोडला, य त्यास एकघटिका झाल्यावर पाणी जाण्याचा नळ सोडला; तेव्हां तो हौद भरवण्यास किती वेळ लागेल? व प्रत्येक नळांतून पाणी किती येईल तें सांगा. ३६१ घागरीचा हौद आहे.

८३. २७२२५ रुपयांची ठेव दरसाल दरशेंकडा $2\frac{1}{2}$ रु. व्याजाची शेंकडा ७५ रुपये ह्या भावानें घेतली तर घेणारास काय भावानें व्याज पडेल?

८४. $\frac{95}{96} \frac{98}{97} + \frac{93}{98} \frac{99}{92}$ ह्यांस अतिसंक्षेप रूप द्या; व रुपयाचे $\frac{3}{4}$, पार्वल्याचे $\frac{3}{96}$ आणि ३ आणे ६ पै ह्यांचे $\frac{3}{90}$ ह्यांची वेरीज करा.

८५. मला एकजणाचे ७ शि. देणें आहेत; परंतु माझ्या जवळचें सर्व नाणें अर्धे गिनीचें आहे, आणि त्याच्या जवळचें सर्व नाणें फ्रौनचें आहे; तर देणें फेडून टाकण्यास नाण्यांचा मोबदला कसा करावा.

८६. पुढील अपूर्णाकांस अतिसंक्षेपरूप द्या.

$$\frac{\frac{2}{3} + 311 \text{ चे } \frac{5}{6}}{\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{4}} \times \frac{98 \frac{2}{5}}{960 \frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{0.0625} \times (0.11 + \frac{9}{98})}{311}$$

$$96 = -0.11 \text{ चा } \frac{1}{4}$$

८७. एका खोलीच्या भिंतीस आंनून वेलवुटीचे कागद चि-
कटवावयाचे आहेत, त्या खोलीचा घेर ३० फूट ७ इंच आहे
आणि उंची १० फूट ६ इंच आहे, आणि कागदाची रुंदी १०
इंच आहे, तेव्हां कागद किती लांब घ्यावा तें सांगा.

८८. एक मण कोळशास १३ आणे $७\frac{1}{8}$ पै प्रमाणें ३६.५२
मण कोळशाची किंमत काय होईल ? व १३ रुपये ११ आणे
९ पै ह्यांचे $\frac{3}{4}$ चा $\frac{1}{6}$ आणि १० आण्यांचे $\frac{9}{16} \times \frac{3}{5}$ ह्यांत
अंतर किती तें सांगा.

८९. दरसाल दरशेंकडा ३ रुपये व्याजाचे दराच्या ठेवीचा
भाव शेंकडा ८५८८ आहे, तेव्हां ३॥ रुपये व्याजाचे दराच्या
ठेवीचा भाव काय असला हणजे दोन्ही ठेवींत नफा सारखाच
होईल, व एकास ५०००० रुपये देऊन ठेव घ्यावयाची आहे
तर त्यास वर्षास व्याज काय मिळेल तें सांगा.

९०. कोणी मनुष्यानें आगला वाग दरसाल ९२० रुपये-
प्रमाणें मत्तयानें दिला, आणि मत्तयावद्दल दोन वर्षांचा पैसा
दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजाप्रमाणें व्याज कापून देऊन
आज घेतेवेळेस त्यानें त्या कुळास वागेंतील घराचे दागदुगी-
वद्दल त्या सर्व पैशाचा $\frac{1}{8}$ व कोठाराचे दागदुगीवद्दल $\frac{1}{4}$ आणि
किरकोळ खर्चावद्दल २१८८ ह्याप्रमाणें देऊन बाँकी पैसा घेतला;
तेव्हां त्यास काय मिळालें तें सांगा.

९१. १९ फूट $१०\frac{1}{8}$ इंच लांब, १६ फूट, $१\frac{3}{8}$ इंच रुंद
आणि १० फूट ३ इंच उंच, अशी एक खोली आहे तिच्या
भिंतीस सफेती देणें आहे, तर सफेतीवद्दल दरचौरस यार्डास
 $९\frac{1}{2}$ पेन्सप्रमाणें खर्च किती लागेल तो सांगा.

९२. १६१८ $\frac{1}{2}$ मैल हे अंशांत मांडा; एक अंशाबरोबर
 $६९\frac{1}{9}$ मैल आहेत.

९३. आमच्या जवळचें घड्याळ आज बरोबर लाविलें तर
उद्यां ३॥ मिनिटें पुढें जातें; तर आज दुपारीं बारा वाजतां
त्याचे कांटे कसे ठेवावे हणजे रात्रीचे १० वाजतां तें घड्याळ
खरी वेळ दाखवील ?

९४. पुण्याहून आगीची गाडी मुंबईस जाण्याकरितां सकाळीं ६॥ वाजतां निघाली, ती दरतासास २० मैलप्रमाणें चालत असे. पुण्याहून दुसरी गाडी सकाळीं ८॥ वाजतां निघाली, आणि तिणें पहिले गाडीस मुंबईचे अलीकडे ६० मैलांवर गांठलें; तेव्हां दुसरी गाडी किती वेगानें चालली होती? मुंबईपासून पुण्यापर्यंत गाडीचे रस्त्यानें अंतर १८० मैल आहे.

९५. एका गृहस्थास ४४१० रुपयांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें मिळत होतें, पुढें त्यानें त्या रुपयांचें रेलवे कंपनीतील हिस्से शेंकडा दरसाल ३॥ रुपये व्याजाचे शेंकडा ७० रु० भावानें घेतले; ह्यांचें पांच वर्षे व्याज घेतल्यावर त्या हिश्यांचा भाव शेंकडा ७५ रुपये झाला, तेव्हां त्यानें ते हिस्से विकून टाकले; तेव्हां ह्या सर्व खटपटींत त्यास पूर्वीपेक्षां नफा किती झाला तें सांगा.

९६. पांच महिन्यांनीं ३२५ रुपये १४ आणे मिळावयाचे, त्यांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा पांच रुपयेप्रमाणें कमी करून आज काय मिळेल?

९७. ५३१४४१ आणि ११९५५०६६९१२१ ह्यांचीं वर्गमूळें काढा; व ०००००३२८५०९ आणि २७०५४००३६००८ ह्यांचीं घनमूळें काढा.

९८. प्रत्येक शेत २५ हात लांब आणि १८ हात रुंद अशीं काटकोन चौकोनाकृति ७ शेतें २ मनुष्यें $३\frac{१}{४}$ दिवसांत नांगरतात, तर १२॥ काळ्या लांब आणि ९ काळ्या रुंद अशीं काटकोन चौकोनाकृति १३ शेतें ३७ मनुष्यें किती दिवसांत नांगरतील?

९९. काहीं एक काम ३ पुरुष अथवा ५ बायका अथवा ८ मुलें $२\frac{१}{२}$ दिवस इतक्या वेळांत करतात, तर तेंच काम २ पुरुष, ३ बायका आणि ४ मुलें मिळून किती वेळांत करतील?

१००. पुण्याहून ३१० मैल लांब एक गांव आहे. तेथें जाण्याकरतां आगीची गाडी दिवसास वारंवार ३ तास ५१ मिनिटें झाल्यावर निघाली, ती पहिल्यानें दरतासांत २७ मैल

प्रमाणें १२१ मैल गेली, पुढें दरतासांत ९॥ मैल प्रमाणें १२१ मैल गेली, आणि शेवटीं दरतासांत ८ मैल प्रमाणें ६८ मैल गेली, तेव्हां ती तेथें केव्हां जाऊन पोहोंचली ?

१०१. ८६४ हात ३ तसू लांब, आणि ६२ हात ६ तसू रुंद अशी एक जागा आहे, ती किती चौरस गज भरेल तें सांगा.

१०२. कोणी एक गृहस्थ वाटेनें जात असतां त्यास अ आणि व हे दोघे भिकारी भेटले; तेव्हां त्यांस कांहीं द्यावें असा विचार करून खिशांत हात घालून पाहतो तो एका मोहरेचे (ह० १५ रुपयांचे) $\frac{७७}{५४}$ चे $१०\frac{५}{६} \div ७\frac{१}{२}$ चे $३\frac{७}{९} \div ४\frac{२}{६}$ आहेत असें त्यास आढळलें; तेव्हां त्यानें त्याचे $\frac{३}{४}$ चा $\frac{१}{६}$ अस दिला, बाकी राहिले त्याचे $\frac{३}{४}$ बस दिले; तेव्हां प्रत्येकास काय मिळालें तें सांगा.

१०३. कोणी गृहस्थानें एकास दरसाल दरशेंकडा ४॥ रुपये व्याजानें कांहीं पैसा दिला, पुढें त्यानें तीन वर्षांनीं व्याज व मुद्दलसुद्धां ११४७॥ परत केले, तेव्हां त्यास आरंभीं किती रुपये दिले होते तें सांगा.

१०४. अ आणि व ह्या दोघांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्यांत अनें पहिल्यानें २००० रुपये दिले, व पुढें आठ महिन्यांनीं १००० रुपये दिले; वनें आरंभीं १००० रुपये दिले; पुढें चार महिन्यांनीं ३०७० रुपये दिले; आणि पुढें ६ महिन्यांनीं १३०० रुपये माघारे घेतले; वर्षांअंतीं हिशेब पाहतात तो त्या व्यापारांत त्यांस १६३५ रुपये नफा झाला; तो त्यांनीं कसा वांटून घ्यावा तें सांगा.

१०५. सहा वर्षांचे शेवटीं चक्रवाढ व्याजानें आह्वास २६२५ रुपये मिळावे, अशी आमची इच्छा आहे तर दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजाचे भावानें आह्मी सावकाराचे पेढीवर आज किती रकम ठेवावी ?

१०६. कोणी गृहस्थानें १०० रुपये दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें व्याजीं लावले, आणि पुढें प्रत्येक वीस वर्षांच्या शेवटीं व्याज व मुद्दल एकत्र करून ते पुनः पहिल्याच दरानें

९४. पुण्याहून आगीची गाडी मुंबईस जाण्याकरितां सकाळीं ६॥ वाजतां निघाली, ती दरतासास २० मैलप्रमाणे चालत असे. पुण्याहून दुसरी गाडी सकाळीं ८॥ वाजतां निघाली, आणि तिणें पहिले गाडीस मुंबईचे अलीकडे ६० मैलांवर गांठलें; तेव्हां दुसरी गाडी किती वेगानें चालली होती? मुंबईपासून पुण्यापर्यंत गाडीचे रस्त्यानें अंतर १८० मैल आहे.

९५. एका गृहस्थास ४४१० रुपयांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें मिळत होतें, पुढें त्यानें त्या रुपयांचें रेलवे कंपनीतील हिस्से शेंकडा दरसाल ३॥ रुपये व्याजाचे शेंकडा ७० रु० भावानें घेतले; ह्यांचें पांच वर्षे व्याज घेतल्यावर त्या हिश्यांचा भाव शेंकडा ७५ रुपये झाला, तेव्हां त्यानें ते हिस्से विकून टाकले; तेव्हां ह्या सर्व खटपटींत त्यास पूर्वीपेक्षां नफा किती झाला तें सांगा.

९६. पांच महिन्यांनीं ३२५ रुपये १४ आणे मिळावयाचे, त्यांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा पांच रुपयेप्रमाणें कमी करून आज काय मिळेल?

९७. ५३१४४१ आणि ११९५५००६६९१२१ ह्यांचीं वर्गमूळें काढा; व ०००००३२८५०९ आणि २७०५४००३६००८ ह्यांचीं घनमूळें काढा.

९८. प्रत्येक शेत २५ हात लांब आणि १८ हात रुंद अशीं काटकोन चौकोनाकृति ७ शेते २ मनुष्ये ३ $\frac{१}{४}$ दिवसांत नांगरतात, तर १२॥ काळ्या लांब आणि ९ काळ्या रुंद अशीं काटकोन चौकोनाकृति १३ शेते ३७ मनुष्ये किती दिवसांत नांगरतील?

९९. कांहीं एक काम ३ पुरुष अथवा ५ बायका अथवा ८ मुलें २ $\frac{१}{२}$ दिवस इतक्या वेळांत करतात, तर तेंच काम २ पुरुष, ३ बायका आणि ४ मुलें मिळून किती वेळांत करतील?

१००. पुण्याहून ३१० मैल लांब एक गांव आहे. तेथें जाण्याकरतां आगीची गाडी दिवसास बारांवर ३ तास ५१ मिन्युटे झाल्यावर निघाली, ती पहिल्यानें दरतासांत २७ मैल

प्रमाणं १२१ मैल गेली, पुढें दरतासांत ९॥ मैल प्रमाणं १२१ मैल गेली, आणि शेवटीं दरतासांत ८ मैल प्रमाणं ६८ मैल गेली, तेव्हां ती तेथें केव्हां जाऊन पोहोंचली ?

१०१. ८६४ हात ३ तसू लांब, आणि ६२ हात ६ तसू रुंद अशी एक जागा आहे, ती किती चौरस गज भरेल तें सांगा.

१०२. कोणी एक गृहस्थ वाटेनें जात असतां त्यास अ आणि व हे दोघे भिकारी भेटले; तेव्हां त्यांस कांहीं द्यावें असा विचार करून खिशांत हात घालून पाहतो तों एका मोहरेचे (ह० १५ रुपयांचे) $\frac{७७}{३४०}$ चे $१०\frac{५}{६} \div ७\frac{१}{२}$ चे $३\frac{९}{११} \div ४\frac{२}{६}$ आहेत असें त्यास आढळलें; तेव्हां त्यानें त्याचे $\frac{३}{४}$ चा $\frac{१}{६}$ अस दिला, बाकी राहिले त्याचे $\frac{३}{४}$ बस दिले; तेव्हां प्रत्येकास काय मिळालें तें सांगा.

१०३. कोणी गृहस्थानें एकास दरसाल दरशेंकडा ४॥ रुपये व्याजानें कांहीं पैसा दिला, पुढें त्यानें तीन वर्षांनीं व्याज व मुद्दलसुद्धां ११४७॥= परत केले, तेव्हां त्यास आरंभीं किती रुपये दिले होते तें सांगा.

१०४. अ आणि व ह्या दोघांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्यांत अनें पहिल्यानें २००० रुपये दिले, व पुढें आठ महिन्यांनीं १००० रुपये दिले; वनें आरंभीं १००० रुपये दिले; पुढें चार महिन्यांनीं ३०७० रुपये दिले; आणि पुढें ६ महिन्यांनीं १३०० रुपये माघारे घेतले; वर्षांअंतीं हिशेब पाहतात तों त्या व्यापारांत त्यांस १६३५ रुपये नफा झाला; तो त्यांनीं कसा वांटून घ्यावा तें सांगा.

१०५. सहा वर्षांचे शेवटीं चक्रवाढ व्याजानें आह्लास २६२५ रुपये मिळावे, अशी आमची इच्छा आहे तर दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजाचे भावानें आह्ला सावकाराचे पेढीवर आज किती रकम ठेवावी ?

१०६. कोणी गृहस्थानें १०० रुपये दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें व्याजीं लावले, आणि पुढें प्रत्येक वीस वर्षांच्या शेवटीं व्याज व मुद्दल एकत्र करून ते पुनः पहिल्याच दरानें

व्यार्जी लावी, तेव्हां ह्याप्रमाणें १०००० रुपये भांडवल हो-
ण्यास किती वर्षे लागतील ?

१०७. कोणी दुकानदारानें ५० शेर तेल ७ रुपये ८
आणे ह्यांस घेतलें, तें ज्या बुधल्यांत होतें त्यास भोंक असल्या-
मुळें १० शेर तेल गळालें, तेव्हां बाकी राहिलेल्या तेलावर शं-
कडा ५ रुपये नफा व्हावा असें दुकानदाराचे मनांत आहे,
तेव्हां तें त्यानें कसें शेर विकारें तें सांगा.

१०८. भरीव गोळ्याचे व्यासाचे घनास जर ०.५२३६
यांणी गुणिलें तर त्या गोळ्याचें घनफळ येतें. आर्ही एक घन
इंच माती घेऊन तिच्या अर्ध इंच व्यासाच्या जितक्या गोळ्या
होतील तितक्या केल्या, तर त्या किती होतील ? आणि शिलक
माती किती राहिल ?

१०९. एका चौरस जमिनीचें क्षेत्रफळ १८ चौरस हात
आणि ७ चौरस तसू आहे, तेव्हां तिची एक बाजू किती तें
सांगा.

११०. अ आणि ब ह्या उभयतांनीं सर्कतीनें व्यापार आ-
रंभिला त्यांत बपेक्षां २५ रुपये १२ आणे अचे जास्त होते;
पुढें हिशेब करून पैसा वांटून घेतला, तेव्हां अचे वांटणीस ६०
रुपये आणि बचे वांटणीस २८ रुपये आले तेव्हां आरंभीं प्रत्ये-
कानें किती किती दिले तें सांगा.

१११. $9\frac{5}{6}$ आणि 99550669929 ह्यांचीं वर्ग-
मूळें काढा, व 953925 ह्यांचें घनमूळ काढा.

११२. १४४ रुपये १२ पुरुष आणि १८ ब्रायका यांस
वांटून द्या. इतकेंच कीं दरपुरुषास दरबाईच्या १॥ पट रुपये
असावे.

११३. एका मनुष्यानें दोन जातींचा चाहा, एक दरपों-
डास ३ शिलिंग व दुसरा दरपोंडास ४ शिलिंग ह्या दराचा
४ : ७ ह्याप्रमाणें खरेदी केला, आणि तो एकत्र करून दरपों-
डास ३ शिलिंग ९ पेन्सप्रमाणें विकला, तेव्हां त्या मनुष्यास
शंकडा नफा किती झाला तें सांगा.

११४. दरसाल दरशेंकडा ४^१ रुपये व्याजानें पांच वर्षांत १५० रुपयांचे सरळ व्याजांत, व चक्रवाढ व्याजांत, अंतर किती पडेल तें सांगा.

११५. १५४० रुपये अ, व, क, आणि ड या चौघांस वांटून द्या; असे कीं, ते अला वचे दिढीनें मिळावे; बला क-पेक्षां त्याच्याच $\frac{१}{३}$ नें जास्त मिळावे; आणि कला डच्या सव्वा-ईनें मिळावे.

११६. ७७० रुपये अ, व, क, ह्या तीन असामीस वांटून द्यावयाचे, ते असे कीं, अला जर ४ तर बला ३, आणि अला जर ६ तर कला ७, तेव्हां प्रत्येकाच्या वांट्यास काय येईल तें सांगा.

११७. एके वेळेस अनें वपासून वेगळाल्या दोन रकमा, व्याजाच्या वेगळाल्या भावानें कर्जी घेतल्या. एक रकम २६०० रुपयांची दरसाल दरशेंकडा ३॥ रुपये व्याजाची होती. दुसरी रकम ३५८० रुपयांची दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजाची होती. पुढें दोन्ही रकमा मिळून व्याज मुद्दल सुद्धां एकंदर ६४०९ रुपये रास झाली, तेव्हां तितकी देऊन कर्जमुक्त झाला. तेव्हां त्याच्याजवळ त्या रकमा कर्जानें किती दिवस होत्या ?

११८. कोणी धनगरानें १४ मेंढरें ३९ पौंड ६ शिलिंग ५^१/_२ पेन्स. ह्यांस घेतलीं, आणि त्यांतील ६ मेंढरें प्रत्येक मेंढरास १ पौंड १६ शिलिंग ह्याप्रमाणें विकलीं, परंतु त्याच्या मनांत ह्या सर्व व्यापारांत शेंकडा ४ पौंड नफा व्हावा असें आहे, तेव्हां बाकीचीं मेंढरें काय किमतीस विकारीं तें सांगा.

११९. कांहीं एक जिन्नस आहे तो ५ रुपयांस विकला असतां शेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें तोटा होतो, तेव्हां तो ६। रुपयांस विकला असतां नफा किती होईल व त्याची मूळ किंमत काय तें सांगा.

१२०. कोणी एकानें २००० रुपये दरसाल दरशेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें व्याजी लावले, आणि त्या व्याजापैकीं दरसाल ७५ रुपये खर्चास ठेवून बाकीचे तो मुदलांत मिळवी, ह्याप्रमाणें ५ वर्षें चाललें, तेव्हां त्याजपाशीं मुद्दल किती झालें तें सांगा.

१२१. एका प्रांताची खानेसुमारी कांहीं वर्षांपूर्वी ७११११७ होती, पुढें कांहीं वर्षे गेल्यानंतर पुनः खानेसुमारी केली तेव्हां ७३२६६६ भरली, तेव्हां शेंकडा किती मनुष्ये वाढलीं तें सांगा.

१२२. दररोज ६ तास प्रमाणें काम करून १२ मनुष्ये १५ दिवसांत कांहीं एक काम संपवितात, तर तेंच काम दररोज १२ $\frac{१}{२}$ तासप्रमाणें काम करून ८५ $\frac{१}{२}$ दिवसांत संपविण्यास किती मनुष्ये लागतील ?

१२३. अजवळ आरंभीं २ पौंड १३ शिलिंग होते, व त्यास वनें आणखी १ पौंड ११ शिलिंग ६ पे. ह्यांचे ६ $\frac{१}{२}$ ÷ १ $\frac{१}{२}$ दिले, तेव्हां त्याजपार्शीं पैसा बऱ्या त्रेचाळीसपट झाला, ह्यावरून वजवळ आरंभीं किती पौंड होते तें सांगा.

१२४. १५२३९९०२५ ह्यांचें वर्गमूळ व ०००४०५२२४ ह्यांचें घनमूळ काढा.

१२५. १३ $\frac{३}{४}$ फूट लांब आणि ६ फूट रुंद असा काटकोन चौकोनाकृति एक हौद आहे, त्यांत २९४ $\frac{१}{४}$ घनफूट पाणी राहतें तेव्हां त्या हौदाची खोली किती तें सांगा, व एक घनइंच पाण्याचें वजन २५२.५ ग्रेन भरतें, ह्यावरून तें सर्व पाणी किती भरेल तें सांगा.

१२६. एका पौंडाची रास पांच वर्षांत सरळ व्याजानें एक गिनी करावयाची आहे, तर दरसाल दरशेंकडा व्याजाचा दर काय ठेवावा ?

१२७. जेव्हां गाडीचा रोज भाड्याचा दर १४ शिलिंग ८ पेन्स आहे, तेव्हां कोणी मनुष्य १६ पौंड घेऊन १२ पिंपें १८ मैल लांब नेतो, तर जेव्हां गाडीचा रोज भाड्याचा दर १६ शिलिंग ६ पेन्सपर्यंत वाढेल तेव्हां तीच पिंपें ७२ पौंड घेऊन किती लांब नेईल ?

१२८. १८४०४१ ह्या संख्येचें वर्गमूळ, आणि ४४४१९४९४७ ह्या संख्येचें घनमूळ काढा.

१२९. कोणी कारखानदारानें ५० पुरुष आणि ३५ मुलें इतकीं माणसें कामावर लावलीं, त्यांत पुरुषानें दररोज १२ तास

व मुलानें दररोज ८ तास काम करावें असा ठराव होता, व त्याबद्दल दरतासास पुरुषास ६ पेन्स व मुलास २ पेन्स मिळत असत, व ह्याप्रमाणें दरआठवड्यांत ते $५\frac{१}{२}$ दिवस काम करीत, तेव्हां वर्षाचे मजुरीचा आकार किती तें सांगा.

१३०. एकानें २७ मेंढरें ३० पौंडांस खरेदी करून त्यांपैकी १२ विकलीं, त्यांत त्यास दरशेंकडा ३ पौंड तोटा झाला आणि त्याचे मनांत एकंदर सर्व खरेदीवर शेंकडा $२\frac{१}{२}$ पौंड नफा मिळवावा असें आहे, तेव्हां बाकीचीं मेंढरें काय दरानें विकारीं तें सांगा.

१३१. तीन टन जिन्नस २६ पौंड १५ शिलिंग ५ पेन्स ह्यांस घेतला, आणि त्यावर शेंकडा २० पौंड प्रमाणें नफा मिळवावयाचा आहे, तर दरहेंड्रेडवेट जिन्नसास काय व्यावें तें सांगा.

१३२. $३\frac{१}{२}$ गिनी ६ असापांस वांटून त्या असे कीं ते विभाग १, २, ३, ४, ५, ६, ह्या संख्यांच्या प्रमाणांत येतील.

१३३. ०००१३४६८९ आणि $४१\frac{१८४}{२२५}$ ह्यांचीं वर्गमूळें व १८६०९६२५ ह्यांचें घनमूळ काढा.

१३४. एका बागेत कांहीं झाडें आहेत त्यांत शिताफळाचीं $\frac{१}{२}$, पेरूचीं $\frac{१}{६}$, रामफळाचीं $\frac{१}{४}$, व इतर प्रकारचीं ५० ह्याप्रमाणें आहेत, तेव्हां सर्व झाडें किती तें सांगा.

१३५. कोणी एकानें दरसाल दरशेंकडा $३\frac{१}{२}$ रुपये व्याजानें कांहीं पैसा कर्ज काढून तो दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें व्याजीं लावला, त्याबद्दल व्याज त्या सावकारास त्याला वर्षाच्या अखेरीस द्यावें लागे, परंतु कुळांकडून व्याज तो सहा सहा महिन्यांनीं घेत असे, आणि ह्याप्रमाणें तो वर्षास २०० रुपये मिळवी, तेव्हां त्यानें कर्ज किती काढलें होतें तें सांगा.

१३६. कोणी दुकानदार १ पौंड चहा ५ शिलिंग ४ पेन्स ह्यांस विकी, तेव्हां त्यास त्याच्या मूळ किमतीचा $\frac{१}{४}$ नफा मिळत असे, पुढें तो दर वाढवून एक पौंडास ६ शिलिंगप्रमाणें विकूं लागला, तेव्हां त्यास शेंकडा नफा किती तो सांगा.

१३७. एक शेर साकरेस ५ आणे ४ पै आणि १ शेर गुळास २ आणे $१\frac{३}{४}$ पै असा भाव आहे, तेव्हां कोणी मनुष्य आपल्याजवळचा कांहीं शेर गूळ देऊन २८ शेर साकर घ्यावयास इच्छितो. व त्या अदलावदलांत शेंकडा १५ रुपयेप्रमाणें नफा व्हावा असा त्याचा हेतु आहे, तेव्हां त्यानें किती शेर गूळ द्यावा तें सांगा.

१३८. $\frac{७२९}{१२१७}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्या; ०.२५६ ह्यांस दशांशरूप द्या, $२\frac{३}{४}$, $३\frac{७}{१०}$, $\frac{१}{२}$, $१\frac{१}{८}$ ह्यांची बेरीज करा; आणि $१\frac{३}{४}$ चे $२\frac{३}{४}$ ह्यांस $\frac{७२९}{१२१७}$ चे $१\frac{३}{४}$ ह्यांनीं भागा.

१३९. मराठी चालीचे १५.५ कोस इंग्रजी ३८.७५ मैलांबरोबर आहेत; तर, $३२६\frac{१}{७}$ इंग्रजी मैलांबरोबर मराठी कोस किती होतील तें सांगा.

१४०. एक रस्ता ९३७ हात ६ तसू लांब आणि ६ हात ८ तसू रुंद आहे त्यास फरसबंदी करावयाची आहे, तीस दर चौरस गजास १ रुपया २ आणे पडतात, तेव्हां एकंदर खर्च किती लागेल ?

१४१. एका चुन्याच्या मक्तेवाल्यानें मुंबईस शेंकडा ४५ रुपये प्रमाणें कळीचा चुना २२५ फरे विकत घेतला. तो चुना भिजविला तेव्हां दरफन्यास ३ घनफूट चुना तयार झाला. परंतु त्यांत $\frac{१}{४}$ गाळ असे, तो गाळ काढून, टाकून निवळ चुना मुंबईहून १८ मैलांवर नेऊन पांचविण्यास त्याला दरमैलास १०० घनफूट चुना नेण्यास गाडीखर्च ४ आणे येत असे. मक्तेदारास सर्व खर्च भागून पूर्वीच्या खरेदीवर जर ९० रुपये नफा मिळवावयाचा आहे तर त्यानें तो चुना त्या ठिकाणी कोणत्या दरानें विकावा ?

१४२. एका रुपयाचे $\frac{७२९}{१२१७}$ चे $२\frac{१}{४}$ चे $३\frac{५}{८}$, एका आण्याचे $३\frac{५}{८}$ चे $९\frac{३}{८}$, आणि एका पैचे $४\frac{१}{८}$ चे $८\frac{१}{८}$ ह्यांची बेरीज करा; आणि तीस $३\frac{१}{४}$ पैचे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{११}{३०२}$ ह्यांनीं भागा.

१४३. २०५४ आणि ४२०३३६१ ह्यांचीं वर्गमूळें, व १५४३८२४९ आणि ६२९४२२७९३ ह्यांचीं घनमूळें काढा.

१४४. एक पौंड सोन्याची किंमत एक पौंड रुप्याच्या किंमतीच्या चौपट आहे, व सारख्या आकृतीचे सोने व रुपे घेतले तर त्यांची वजनं १९ : १० ह्या प्रमाणांत असतात, तेव्हां एक रुप्याची कांब १७५० पौंड किंमतीच्या सोन्याचे कांबीएवढी आहे, तिची किंमत किती होईल ?

१४५. चांगली चांदी एक रुपयास १० मासे $२\frac{१}{३}$ गुंजा येते, तर ९० तोळे $३\frac{१}{३}$ मासे वजनाचा चांदीचा एक तांब्या आहे त्याची किंमत काय होईल ?

१४६. $\frac{२४६०३७५}{४०९६}$ ह्यांच्या घनमूळास ५००२५ ह्यांच्या चतुर्घातमूळानें भागा. ७

१४७. पुण्याहून मुंबईस दोन आगीच्या गाड्या, एक मनुष्यांची व एक सामानाची, अशा एकदम जाऊन पोहोचव्या अशा वेतानें पाठवावयाच्या आहेत, त्यांत मनुष्यांची गाडी एक अकरांत २४ मैल जाते, व ओझ्याची ५० मिनिटांत १५ मैल जाते; तेव्हां मनुष्यांची गाडी वारांवर दोन वाजतां निघाली तर सामानाची गाडी केव्हां निघाली ह्मणजे त्या दोन्ही मार्गांत न भेटतां तेंथें एकदम पोहोचतील ? पुणें आणि मुंबई ह्यांच्यामध्ये अंतर १२० मैल आहे.

१४८. ४ महिन्यांनीं ५२८ रुपये ८ आणे द्यावयाचे आहेत; ते दरसाल दरशेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें व्याज कापून आज देणें झाल्यास किती द्यावे ?

१४९. ७३०० स्वारांच्या चार टोळ्या आहेत त्या अशा कीं पहिल्या टोळीचा $\frac{१}{२}$, दुसरीचे $\frac{२}{३}$, तिसरीचे $\frac{३}{४}$, आणि चौथीचे $\frac{४}{५}$, ह्या सर्वांत स्वार सारखे आहेत; तेव्हां प्रत्येक टोळींत स्वार किती तें सांगा ?

१५०. ६३ फूट लांब आणि ४५ फूट रुंद अशा चौकास फरसबंदी करावयाची आहे, त्यांत त्या चौकाच्या कडेच्या ५ फूट ३ इंच रुंद जागेच्या फरसबंदीचा दर एक चौरस यार्डास १ रु. ८ आणेप्रमाणें आहे, व बाकीच्या फरसबंदीचा दर

एक चौरस यार्डास १ रु. ६ आणेप्रमाणें आहे, तेव्हां सर्व फ-
रसवंदीस खर्च किती लागेल ?

सोडविलेले प्रश्न.

पुढील सोडविलेले प्रश्नांचा समावेश या अंकगणितांत केला आहे यांचें कारण:— कोणत्याही प्रश्नांत संख्या, परिमाण, व राशि, ह्यांपैकी जें शोधणें असेल त्याशीं (ह्मणजे त्यांच्या वाचक शब्दाशीं किंवा अक्षराशीं) प्रश्नांत दिलेल्या प्रतिज्ञांच्या अनुरोधानें दिलेल्या अंकांची मिळवणी, वजावकी, गुणाकार, भागाकार वगैरे करून इच्छिलेलें उत्तर आणणें हा अंकगणिताचाच एक भाग आहे.

व्रीजगणित ज्यांस येत नाही त्यांनीं अशा जातीचे प्रश्न सोडविण्याच्या रीतींची माहिती अवश्य करून घ्यावी; ह्मणजे नानाप्रकारचे चमत्कारिक प्रश्नांचा खुलासा करण्याची शक्ति त्यांचे आंगांत सहज येईल, आणि त्यांस फार आनंद वाटेल.

मद्रासेस 'पाछापाचें हैस्कूल' यांतील अ. मास्तर राजश्री श्रीनिवास अप्पा यांणीं सन १८७७ यः सालीं अंकगणितांतील सोडविलेले प्रश्न या नांवाचें एक पुस्तक छापिलें आहे, त्यांतून शिकणारांकरितां हीं कित्येक उदाहरणें निवडून घेतलीं आहेत.

१. प्रश्न. एका श्रीमंत गृहस्थानें मरणकाळीं आपले पुत्रास आपले इष्टेटीचे $\frac{१}{२}$ आणि कन्येस बाकी राहिलेली इष्टेट अशीं वांटून दिलीं. मुलाला मुलीपेक्षां २१,००० रुपये जास्त मिळाले, तेव्हां त्या गृहस्थाची सर्व इष्टेट किती होती ?

खुलासा. $\frac{१}{२}$ मुलाचे वांटणीचे; तेव्हां $\frac{१}{२}$ मुलीच्या वाटणीस आले. मुलाला मुलीपेक्षां $\frac{६}{२०}$ अधिक मिळाले, आणि हे २१००० रुपये आहेत ह्मणून

$$\text{इष्टेटीचे } \frac{६}{२०} = २१००० \text{ रु.}$$

$$\text{ह्मणजे } \frac{\text{इष्टेट} \times ६}{२०} = २१००० \text{ रु.}$$

भाजक सोडविल्याने (हणजे स. प्र. ४ प्रमाणे, एकीकडचा भाजक दुसरीकडे गुणक केल्याने).

$$\text{इष्टेष्ट} \times ६ = २१००० \text{ रु} \times २०$$

गुणक सोडविल्याने (हणजे स. प्र. ५ प्रमाणे, एकीकडचा गुणक दुसरीकडे भाजक केल्याने).

$$\text{इष्टेष्ट} = \frac{२१००० \text{ रु.} \times २०}{६}$$

$$= ७०००० \text{ रु. हें उत्तर.}$$

टीप— गुणक भाजक सोडविण्याचे नियम वरती कंसांत दिले आहेत, ते तेथील प्रत्यक्षप्रमाणांचे आधारांने कसे सिद्ध होतात ते विद्यार्थ्यांनी गुरुपासून समजूने घ्यावे. गुणक भाजक मोटाले असले, अनेक असले, किंवा मोघम असले, हणजे तेथे ह्या नियमांची गरज लागते हणून ते येथे दिले आहेत. वस्तुतः पाहतां सोप्या उदाहरणांत ह्या नियमांचे उपयोग सहज गतीने आपण करित असतो इतके हे नियम वहिवाटीतले आहेत. हणून सहज कळण्यासारख्या स्थळीं ह्या नियमांचा उल्लेख कोणी करित नाही; वरील प्रकारच्या स्थळीं मात्र करितात.

२ प्रश्न. एका गृहस्थांला पूर्वी आपल्या उत्पन्नावर दर पौंडास ४ पेन्सप्रमाणे इनकमटाक्स द्यावा लागत असे. पुढे त्याचे उत्पन्न २४० पौंड जास्त झाले, आणि इनकमटाक्सही एका पौंडास ७ पेन्स याप्रमाणे जास्त झाला. पूर्वीपेक्षां त्याला आतां इनकमटाक्सबद्दल ६० पौंड अधिक द्यावे लागतात, तर त्याचे पूर्वीचे आणि हल्लीचे उत्पन्न काय काय असावे ?

खुलासा. पूर्वीपेक्षां आतांचे उत्पन्न २४० पौंड जास्त आहे; सबब त्याबद्दल त्याला २४०×७ पेन्स = १६८० पेन्स = ७ पौंड इतका इनकमटाक्स जास्त द्यावा लागतो.

परंतु पूर्वीपेक्षां हल्लीं इनकमटाक्सबद्दल ६० पौंड जास्त द्यावे लागतात; ह्यांत वर आलेले ७ पौंड वजा दिले हणजे बाकी ५३ पौंड राहतात, हे पूर्वीच्या उत्पन्नावर इनकमटाक्स जास्त झाल्याने द्यावे लागतात, हे स्पष्ट आहे.

पूर्वीपेक्षां इनकमटाक्स दर पौंडास ३ पेन्स जास्त बसला आहे; ५३ पौंड = १२७२० पेन्स हाणून १२७२० पे. \div ३ पे. = ४२४० पौंड हे पूर्वीचे उत्पन्न झाले; आणि ४२४० पौंड + २४० पौंड = ४४८० पौंड हे मार्गील उत्पन्न झाले.

४२४० हे एक उत्तर.

४४८० हे दुसरे उत्तर.

३ प्रश्न. एका गृहस्थानें दुसऱ्यापासून त्याचे मालमत्तेचे $\frac{५}{६}$ विकत घेतले, पुढें त्या मालमत्तेची शेंकडा २० रु. किंमत वाढली तेव्हां त्याने आपले वांट्याचे $\frac{२}{३}$ हे १६० रुपयांस दुसऱ्या गृहस्थास विकले, तेव्हां सर्व मालमत्तेची पूर्वीची किंमत काय ?

खुलासा. मालमत्तेची किंमत शेंकडा २० वाढली तेव्हां त्यास १०० रु. चे १२० रुपये येतील; त्याने आपल्या वांट्याचे $\frac{२}{३}$ हे १६० रुपयांस विकले. ह्यावरून त्यानें सर्व वांटा विकला असता, तर त्याचे त्याला १६० + ४० = २४० रुपये आले असते.

१२० रुपयांची पूर्वीची किंमत १०० आहे हाणून २४० रुपयांची पूर्वीची किंमत २०० रुपये होईल. २०० रुपये ही मालमत्तेच्या $\frac{५}{६}$ ची पूर्वीची किंमत आहे, तेव्हां $\frac{६}{५}$ ची किंमत २४० रु. ही सर्व मालमत्तेची पूर्वीची किंमत आहे हे उत्तर.

४ प्रश्न. एका गृहस्थाजवळ कांहीं पैसा होता. तो तो दर वर्षास सवाईनें वाढवित असे ह्याप्रमाणें चार वर्षे लोटल्यावर पाहतो तो त्यास असें समजलें कीं, ही जमविलेली रकम जर त्यानें शेंकडा ५ रु. प्रमाणें व्याजानें ठेविली तर त्यास एक वर्षाचे व्याजाचे ३७५ रुपये येतील. तर त्याच्या जवळ पहिला पैसा किती असावा ?

खुलासा. दरसाल दरशेंकडा ५ रु. प्रमाणें त्यास व्याजाचे ३७५ रु. येतील इतका पैसा त्याच्याजवळ ४ थे वर्षाचे शेवटीं जमला, हाणजे $३७५ \times १०० \div ५ = ७५००$ रु. इतका जमला.

हा पैसा मुदलाची ४ वेळ सवाई होऊन वाढलेला आहे हाणून मुदलाचे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ = ७५०० रु. गुणक सोडविल्यानें.

मुदल = ७५०० रु. $\times \frac{२५६}{६२५} = ३०७२$ रु. हे उत्तर.

५ प्रश्न. मीं कांहीं एक किंमत देऊन ९० घोडे विकत घेतले. नंतर त्यांतील $\frac{1}{3}$ घोडे विकले, त्यांत मला ६०० रुपयांचा तोटा झाला; पुढें मीं बाकी राहिलेले सर्व घोडे ८८५० रुपयांस विकून टाकिले. या व्यापारांत मला मूळ खरेदीचे रकमेवर शेंकडा २५ रु. नफा झाला. तर माझी मूळची खरेदी किती रुपयांची होती ?

बुलासा. ६० घोडे ८८५० रुपयांस विकल्यानें, ३० घोडे विकले तेव्हां ६०० रु. तोटा झाला होता तो भरला जाऊन ह्या ६० घोड्यांची मूळ किंमत मिळाली, आणि ९० घोड्यांच्या खरेदीवर १०० डा २५ प्रमाणें नफा मिळाला; हणजे २२॥० घोड्यांची मूळ किंमत फाजील मिळाली. हणून

६०० रु. + ६०घो.मू.किं. + २२॥घो.मू.किं. = ८८५० रु.
स्थलांतरानें (हणजे, स. प्र. २ रें, व ३ रें, याअन्वये एकीकडील संख्या चिन्ह बदलून दुसरीकडे नेल्यानें)

८२॥० घो.मू.किं. = ८८५० रु. - ६०० रु. = ८२५० रु.
गुणक सोडविल्यानें.

$$१ \text{ घो. मू. किं.} = \frac{८२५० \text{ रु.}}{८२॥} = १०० \text{ रु.}$$

∴ ९० घो. मू. किं. = ९००० रु. हें उत्तर.

टीप—वरतीं स्थलांतराचा नियम कंसांत दिला आहे त्याची सिद्धता तेथल्या प्रत्येक प्रत्यक्षप्रमाणाच्या आधारेनें विद्यार्थ्यांनीं गुरुपासून समजून घ्यावी. अनेक संख्यांचें स्थलांतर करणें असलें, हणजे तेथें वरील प्रत्यक्षप्रमाणापेक्षां याच नियमाचा उपयोग करणें सोईचें होतें, हणून हा नियम येथें दिला आहे. बाकी वरील प्रकारच्या सोप्या उदाहरणांत या नियमाचा उपयोग सहज गतीनें आपण करित असतो इतका हा नियम नित्यशः वापरणुकींत येणारा आहे.

६ प्रश्न. एका मनुष्यानें एक बैल २१ रुपयांस विकत घेतला. परंतु तो फिरून विकून टाकावा, अशी त्याला इच्छा झाली; आणि मनांत हें कीं तो ज्या किमतीस विकावयाचा तींत शेंकडा १२॥ रु. जरी कमी केले तरी मूळ खरेदीवर आप-

णास शेंकडा १२॥ रु. नफा मिळावा, तर त्यानें तो बैल किती किमतीस विकवा ?

खुलासा. मूळ खरेदीवर त्यास शेंकडा १२॥ मिळवावयाचे हणजे २१ रुपयांवद्दल त्यास $२१ \times \frac{१३२॥}{१००} = २३\frac{५}{८}$ रुपये मिळाले पाहिजेत;

आणि विकरी जरी शेंकडा १२॥ रु. कमी झाली; हणजे १०० चे ठिकाणीं ८७॥ रु. जरी मिळाले तरी झालतील; हणून $८७॥ : १०० :: २३\frac{५}{८} : २३\frac{५}{८} \times \frac{१००}{८७॥} = २७$ रु.

उत्तर त्याणें तो बैल २७ रुपयांस विकवा.

७ प्रश्न. एका गंध्याच्या दुकानीं दोन प्रकारचें गुलाबी अत्तर होतें; एक २॥ रु. तोळा भावाचें आणि दुसरें १॥ रु. तोळा भावाचें. तीं अत्तरें त्यानें मिश्र करून २ रु. तोळा याप्रमाणें विकलीं तर दर तोळ्यास प्रत्येकीं नफा तोटा काय काय होईल ? आणि अशा प्रकारचा तोटा होऊं नये अशी जर त्याची इच्छा असेल तर त्यानें त्यांचें मिश्रण कोणत्या प्रमाणानें करावें ?

खुलासा. पहिले प्रकारचे अत्तरांत त्यास दर तोळ्यास ॥ रु. रुपया तोटा होईल आणि दुसरे प्रकारचे अत्तरांत त्यास दर तोळ्यास ॥ रु. नफा होईल; हणून त्यानें पहिले प्रकारचें अत्तर एक तोळा घेऊन त्यांत दुसऱ्या प्रकारचें अत्तर तीन तोळे मिळवावें तेव्हां नफ्यातोळ्याचा बरोबरी होईल.

८ प्रश्न. एका गवळ्यानें ७२ शेर दूध विकत दिलें, तें ११ भाग दूध आणि १ भाग पाणी असें मिश्रण होतें. त्यांत आणखी किती पाणी घातलें हणजे ९ भाग दूध आणि १ भाग पाणी असें मिश्रण होईल ?

खुलासा. उदाहरणाप्रमाणें पाहतां.

	१२ भाग	=	७२ शेर मिश्रण.
तर	१ भाग	=	६ शेर पाणी.
आणि	११ भाग	=	६६ शेर दूध.

आतां दूध तितकेंच ठेवून त्यांत आणखी पाणी मिश्रित करून मिश्रणांत ९ भाग दुधास १ भाग पाणी झालें पाहिजे. हणून

भाग. भाग. शेर. शेर.

९ : १ : १ ६६ : ७ $\frac{१}{३}$

• यावरून ६६ शेर दुधांत ७ $\frac{१}{३}$ शेर पाणी घातलें पाहिजे. या ७ $\frac{१}{३}$ शेर पाण्यांत पूर्वीचें ६ शेर पाणी आहेच; हणून त्यांत आणखी १ $\frac{१}{३}$ शेर पाणी घातलें हणजे इच्छिले प्रमाणाचें मिश्रण होईल.

९ प्रश्न. दर शेळीस ३ रुपये याप्रमाणें एका बाजारांत एका धनगरानें कांहीं शेळ्या विकत घेतल्या, आणि वरील शेळ्यांचे $\frac{२}{३}$ इतक्या शेळ्या दर शेळीस ५ रुपये या भावानें दुसऱ्या बाजारांत विकत घेतल्या; नंतर एकंदर शेळ्या त्यानें ४८ रु. उद्दण प्रमाणें विकल्या त्यांत त्याला मुद्दल खरेदीवर ४० रु. नफा झाला. तेव्हां प्रत्येक जातीच्या शेळ्या त्यानें किती किती विकत घेतल्या होत्या ?

खुलासा. त्यानें सर्व शेळ्यांची सरसकट विकरी दर शेळीस ४ रु. याप्रमाणें केली.

परंतु पहिले व्यापारांत त्यानें तीन रुपयांना एक शेळी याप्रमाणें खरेदी केली होती, तेव्हां त्यास दरशेळीस एक रुपया नफा झाला; हणजे पहिले व्यापारांत त्याला शेळ्यांइतके रु. नफा झाला.

दुसऱ्या व्यापारांत दरशेळीची खरेदी ५ रु. प्र. आहे; तेव्हां या विकरींत दरशेळीस एक रु. तोटा झाला आहे. पहिले शेळ्यांच्या $\frac{२}{३}$ इतक्या दुसऱ्या शेळ्या होत्या हणून पहिले शेळ्यांचे विकरीपासून त्यास जितके रुपये नफा झाला त्याचे $\frac{२}{३}$ दुसऱ्या शेळ्यांचे विकरीपासून तोटा झाला.

हणून धनगरास काय जो खरा नफा झाला तो पहिल्या शेळ्यांच्या $\frac{१}{३}$ च्या विकरींत झाला. बाकीच्या विकरींत नफ्या-तोट्याची रमारमी झाली.

परंतु वरील उदाहरणांत त्याचा नफा ४० रुपये झाला हणून सांगितलें आहे; हणून पहिले खरेदीचा $\frac{१}{३}$ हणजे ४० शेळ्या असें झटलें पाहिजे हणून:—

१ ली खरेदी ४० शेळ्या $\times ३ = १२०$ शेळ्यांची होती, आणि २ री खरेदी १२० शेळ्यांचे $\frac{२}{३} = ८०$ शेळ्यांची होती हीं उत्तरें.

१० प्रश्न. सोने व रुपें मिळून गठडी एकाजवळ वजनांत ९ पौंड होती. तिची एकंदर किंमत ३१८ पौं. १३ शि. ६ पे. होती. ह्या गठडींत सोन्याइतकें रुपें आणि रुप्याइतकें सोने अशीं जर तीं उलट प्रमाणानें वजनांत असतीं तर तिची एकंदर किंमत १२९ पौं. १० शि. ६ पे. होती. १ औंस सोने व २ औंस रुपें मिळून किंमत ४ पौं. ८ शिं. १॥ पेन्स झाली असती, तर एक औंस सोने व एक औंस रुपें यांची वेगळाली किंमत काय काय असती ?

खुलासा. पहिली गठडी व दुसरी गठडी ह्या एकत्र केल्या तर ९ पौंड सोने व ९ पौंड रुपें अशीं होतील व त्यांची किंमत ३१८ पौं. १३ शि. ६ पे. + १२९ पौं. १० शि. ६ पे. = ४४८ पौंड ४ शि. होईल.

∴ ९ पौं. सो. + ९ पौं. रु. = ४४८ पौंड. ४ शि.
 व १ पौं. सो. + १ पौं. रु. = ४९ पौं. १६ शि.
 १२ नीं भागून. १ औं. सो. + १ औं. रु. = ४ पौं. ३ शि.
 उदाहरणाप्रमाणें. १ औं. सो. + २ औं. रु. = ४ पौं. ८ शि. १॥ पे.
 वजावाकीनें. १ औंस रु. = ५ शि. १॥ पे.

ही किंमत वरच्या कोणत्याही बरोबरींत ठेवावी हाणजे येतें कीं.

१ औंस सोने = ३ पौं. १७ शि. १० पे. हें उत्तर.

११ प्रश्न. एक काम अ मनुष्य एकटा २५ दिवसांत संपवितो, तितकेंच काम करण्यास दुसऱ्या व मनुष्यास १५ दिवस लागतात. आतां त्या कामावर अ मनुष्य १२ दिवस खपला, नंतर दुसरा व मनुष्य ५ दिवस खपला, आणि मग तिसऱ्या एका क मनुष्यानें तें काम ४ दिवसांत संपविलें, तर एकट्या कनें सर्व काम पहिल्यापासून शेवटपर्यंत किती दिवसांत संपविलें असतें ?

खुलासा. सर्व काम $२७ \times १५ = ४०५$ धरिलें तर,

अचें रोजचें काम = १५ येतात.

बचें रोजचें काम = २७ येतात.

अचें १२ दि. काम = १२ × १५ = १८० येतात.

बचें ५ दिवस काम = ५ × २७ = १३५ येतात.

व दोघां मिळून काम = ३१५ येतात.

सर्व काम = ४०५ धरिलें आहे.

∴ कचें ४ दिवसांचें काम = ९० येतात.

व कचें रोजचें काम = २२॥ येतात.

∴ सर्व एकट्या कने करण्यास = $\frac{405}{22\frac{1}{2}}$ = १८ दि. लागतील हें उत्तर.

१२ प्रश्न. कचे रोजचे कामाचे अर्धाइतकें अचें काम होत असे, ह्या दोघां मिळून कांहीं एक काम १० दिवसांत पुरें केलें; परंतु अ जाऊन त्याच्याबद्दल जर ब काम करावयास आला असता, तर ते दोघे मिळून तेंच काम ५ दिवसांत पुरें करिते. ह्यावरून अ आणि ब हे त्या कामावर ५ दिवस असते, आणि राहिलेलें काम एकट्या कला संपवावें लागतें, तर त्यास किती दिवस लागते ? तसेंच अ, ब, आणि क यांच्या दररोज काम करण्याच्या शक्ति कशा कशा होत्या ?

खुलासा. सर्व काम $३ \times १० \times ५ = १५०$ धरिलें,

तर अ+क ह्या दोघांचें रोजचें काम = $\frac{150}{9\frac{1}{2}} = १५$ येतात.

परंतु क, हा अचे दुप्पट काम करितो यामुलें अ आणि क या दोघां मिळून अचे तिप्पट काम होतें; हणून,

अचें रोजचें काम = $\frac{15}{3} = ५$ येतात.

आणि कचें रोजचें काम = १० येतात.

आतां ब आणि क हे दोघे तेंच काम ५ दिवसांत संपवितात, हणून,

ब+क यांचें रोजचें काम = $\frac{150}{5} = ३०$ येतात.

परंतु कचें रोजचें काम १० आहे हणून, बचें रोजचें काम २० येतें. तसेंच अ, ब, क यांचीं रोजचीं कामें ५, २०, १० हणजे १, ४, २ या प्रमाणानें येतात.

अ+ब मिलून दररोज $५+२०=२५$ काम करितात.

∴ अ+ब हे पांच दिवसांत $५ \times २५ = १२५$ काम करतात.

सर्व काम = १५०

शिल्लक काम = २५

तें एकव्या कला संपवावयास $\frac{२५}{१} = २॥$ दिवस लागतील.
हैं उत्तर.

१३ प्रश्न. एका ठिकाणाहून दोन गृहस्थ स्त्रिकां वेळीं वा-
हेर पडून विरुद्ध दिशांनीं चालते झाले, हणून त्यांच्यामध्ये २
तासांनीं ४० मैलांचें अंतर पडलें; ते जर एकाच दिशेनें एकाच
रस्त्यानें चालले असते, तर त्यांच्यांत १॥ तासांत ९ मैल अंतर
पडलें असतें. तेव्हां प्रत्येकाची दर तासांत किती किती चाल
होती तें सांगा.

खुलासा. विरुद्ध दिशांनीं गेले तेव्हां दोघांत २ तासांनीं
४० मैल अंतर पडलें, तर एक तासांत २० मैल अंतर पडेल.

एकाच दिशेनें चालले असते तर १॥ तासांत ९ मैल अंतर
पडतें, तेव्हां १ तासांत ६ मैल अंतर पडलें असतें.

अ जलद चालणारा आहे असें मानिलें, तर तो एक ता-
सांत बरेपक्षां ६ मैल अधिक जातो असें होतें; हणून,

ते विरुद्ध दिशांस जातात तेव्हां अ हा बऱ्या इतकें दुसऱ्या
दिशेस चालून शिवाय एका तासांत ६ मैल पुढें जातो, आणि
दोघांत २० मैलांचें अंतर पडतें; हणून,

$२०-६=१४$ ही बऱ्याची दुप्पट चाल झाली; हणून ब हा
एका तासांत ७ मैल चालला; आणि अ हा त्यापेक्षां ६ मैल
अधिक हणजे एका तासांत १३ मैल चालला हैं उत्तर.

१४ प्रश्न. दुपारचे १२ पासून १ यांच्यामध्ये अवरकांटा,
व मिनिटकांटा ह्यांत २५ मिनिटांचें अंतर केव्हां असेल ? आणि
या तासांत ही गोष्ट कितीदां होईल ?

खुलासा. घड्याळाचे चक्रांत अवरांचे १२ भाग असतात
व मिनिटांचे ६० भाग असतात; यावरून व मिनिटकांटा अव-
रकांच्याच्या पुढें असेल तेव्हां ह्या दोहोंत २५ मिनिटांचें अंतर

पडावयाचें आणि मार्गें असेल तेव्हां ह्या दोहोंत २५ मिनिटांचें अंतर पडावयाचें. परंतु चक्रांत ६० भाग असतात ह्मणून २५ मिनिटें मार्गें असणें आणि ३५ मिनिटें पुढें असणें याचा अर्थ एकच आहे, ह्मणून या प्रश्नांत दोन उत्तरें आलीं; ह्मणजे अवरकांच्याच्या पुढें मिनिटकांटा एकदां २५ मिनिटें केव्हां असेल आणि एकदां ३५ मिनिटें केव्हां असेल ?

१२ वाजतांभा हे दोन्ही कांटे १२ वर असतात ह्मणजे चक्राच्या आरंभीं शून्य भार्गी असतात. तेथून अवरकांटा १ भाग पुढें जातो त्रितक्यांत मिनिटकांटा १२ भाग पुढें जातो; ह्मणजे मिनिटकांटा अवरकांच्याच्या पुढें ११ भाग जाण्यास १२ मिनिटें लागतात, व १ भाग जाण्यास $\frac{१२}{९९}$ मिनिटें लागतात.

ह्यावरून मिनिटकांटा अवरकांच्याच्या पुढें २५ भाग जाण्यास $२५ \times \frac{१२}{९९}$ मि. = $२७ \frac{३}{९९}$ मिनिटें लागतील, आणि ३५ भाग जाण्यास $३५ \times \frac{१२}{९९}$ मि. = $३८ \frac{२}{९९}$ मिनिटें लागतील.

ह्मणून १२ वाजून गेल्यावर $२७ \frac{३}{९९}$ मिनिटांनीं एकदां अवरकांटा व मिनिटकांटा यांच्यामध्ये २५ मिनिटांचें अंतर असेल; आणि १२ नंतर $३८ \frac{२}{९९}$ मिनिटांनीं फिरून त्या कांच्यामध्ये २५ मिनिटांचें अंतर पडेल अशीं दोन उत्तरें आलीं.

१५ प्रश्न. एका गृहस्थानें ८५० सुवासिनि-ब्राह्मणांची समाराधना केली, त्यांत प्रत्येक ब्राह्मणास १८ आणि प्रत्येक सुवासिनीस १० ह्याप्रमाणें दक्षिणा दिली. एकंदर दक्षिणा २५६१० रु. झाली. तेव्हां या समाराधनेंत पुरुष किती होते आणि स्त्रिया किती होत्या ?

खुलासा. २५६१० रु. = २०५० चवल्या आहेत. आतां यजमानानें जर दर ब्राह्मणास एकच चवली, आणि दर वाईस एकच चवली दिली असती, व ब्राह्मणांची संख्या तिप्पट आणि वायकांची दुप्पट अशी बोलाविली असती तर दक्षिणेची रकम तितकीच राहून जेवणार मंडळी चवल्यांइतकी ह्मणजे २०५० झाली असती, तसेंच पुरुष व वायका प्रत्येकीं दुप्पट दुप्पट

बोलाविलीं असतीं, तर जेवणार मंडळी दुप्पट, हाणजे
 $२ \times ८५० = १७००$, झाली असती, हाणून,

$$३ \text{ ब्रा. सं.} + २ \text{ सु. सं.} = २०५० \text{ मनुष्ये.}$$

$$२ \text{ ब्रा. सं.} + २ \text{ सु. सं.} = १७०० \text{ मनुष्ये.}$$

$$\text{वजावाकीने. } १ \text{ ब्रा. सं.} = ३५० \text{ म.}$$

$$१ \text{ सु. सं.} = ८५० \text{ म.} - ३५० \text{ ब्रा. सं.} = ५००$$

उत्तर ३५० ब्राह्मण आणि ५०० सुवासिनी बोलाविल्या होत्या.

१६ प्रश्न. २४०० रुपये अ, व आणि क या तिघांत वांटून देण्याचे आहेत. ते असे कीं; कला, अ आणि व ह्यांच्या वेरजेइतके रुपये मिळावे; आणि अला, व आणि क ह्यांच्या वेरजेच्या अर्धाइतके मिळावे, तर एकेकाचे वांटणीस किती किती रुपये येतील ?

खुलासा. उदाहरणाप्रमाणें पाहतां.

$$\text{अचे रु.} + \text{वचे रु.} = \text{कचे रु.}$$

प्रत्येकींत कचे रु. मिळविले तर,

$$\text{अचे रु.} + \text{वचे रु.} + \text{कचे रु.} = २ \text{ कचे रु.}$$

$$\text{तसेंच. वचे रु.} + \text{कचे रु.} = २ \text{ अचे रु.}$$

प्रत्येकींत अचे रुपये मिळविले तर,

$$\text{अचे रु.} + \text{वचे रु.} + \text{कचे रु.} = ३ \text{ अचे रु.}$$

यावरून असे स्पष्ट होतें कीं,

$$२ \text{ कचे रु.} = ३ \text{ अचे रु. आहेत.}$$

२ आणि ३ यांचा साधारण गुणाकार ६ आहे, तर एकंदर रकमेंत अ आणि व यांचे मिळून ६ भाग धरिले तर कच्या वांटणीस ६ भाग येऊन एकंदर १२ भाग होतील. त्यांत अच्या वांटणीस ४ भाग, वच्या वांटणीस २ भाग, आणि कच्या वांटणीस ६ भाग, असे एकंदर १२ भाग येतील, परंतु एकंदर रकम २४०० रुपये आहे, हाणून एका भागाच्या वांटणीस $\frac{२४००}{१२}$ रु. = २०० रु. आले; हाणून,

अचे वांटणीचे ४ भाग = ४×२०० रु. = ८०० रु.
 वचे — — २ भाग = २×२०० रु. = ४०० रु.
 कचे — — ६ भाग = ६×२०० रु. = १२०० रु.

एकंदर २४०० रु.

हैं उत्तर.

१७ प्रश्न. एका गृहस्थानें आपली ५८५०० रुपयांची मालमत्ता आपली बायको, तीन मुलगे, आणि चार मुली, यांस वांटून दिली; ती अशी. २ मुलगांचे वांटणीस ३ मुलींच्या वांटणीइतके रुपये आले; आणि त्यांच्या बायकोच्या वांटणीस एक मुलगा आणि एक मुलगी यांच्या वांटणीच्या वेरजेच्या अर्धाइतके रुपये आले; तर प्रत्येकांच्या वांटणीस काय आलें ?

खुलासा. ३ आणि २ यांचा साधारण गुणाकार ६ आहे, हाणून दर एक मुलाची वांटणी ६ भाग समजा.

२ मुलगे हाणजे १२ भाग, हे तीन मुलींच्या भागांबरोबर आहेत; हाणून प्रत्येक मुलीच्या वांटणीस ४ भाग येतील.

एक मुलगा आणि एक मुलगी हाणजे $६+४=१०$ भाग, यांच्या अर्धाबरोबर त्यांच्या बायकोच्या वांटणीस ५ भाग येतील.

हाणून एक बायको हाणजे ५ भाग, तीन मुलगे हाणजे ३×६ भा. = १८ भाग, आणि चार मुली हाणजे ४×४ भा. = १६ भाग असे एकंदर ५ भा. + १८ भा. + १६ भा. = ३९ भाग इतकी सर्व मालमत्ता झाली. परंतु सर्व मालमत्ता ५८५०० रुपयांची आहे. हाणून,

$$३९ \text{ भाग} = ५८५०० \text{ रु.}$$

$$१ \text{ भाग} = \frac{५८५०० \text{ रु.}}{३९} = १५०० \text{ रु.}$$

∴ उत्तरें. { वायकोच्या वांटणीचे ५ भाग = ५×१५०० रु. = ७५००
 प्रत्येक मुलाचे वां०चे ६ भाग = ६×१५०० रु. = ९०००
 प्रत्येक मुलीचे वां०चे ४ भाग = ४×१५०० रु. = ६०००

१८ प्रश्न. एका देवळांत कांहीं श्रीमंत आणि कांहीं गरीब असे लोकांची १०० मंडळी जमली होती. त्या ठिकाणी असा ठराव झाला कीं सर्व श्रीमंत लोकांनीं मिळून इतका पैसा

काढावा कीं, प्रत्येक गरीब मनुष्यास ४-१ मिळेल. याप्रमाणें श्रीमंत लोकांनीं पैसा जमा करून गरीब लोकांस दिला तेव्हां प्रत्येक श्रीमंतास सात आणे आणि एक पै इतकें द्यावें लागलें;

- तेव्हां त्या जमावांत श्रीमंत किती होते आणि गरीब किती होते ?

खुलासा. १। आणा = १५ पै; ७ आ. ५ पै. = ८५ पै.

१५ आणि ८५ यांचा ल. सा. भाज्य = २५५ आहे. आतां एके ठिकाणीं २५५ रुपयांचा धर्म झाला असें मानिलें तर तेथें,

$$\frac{२५५}{८५} = ३ \text{ इतके श्रीमंत पाहिजेत.}$$

$$\frac{२५५}{१५} = १७ \text{ इतके गरीब पाहिजेत.}$$

आणि २० ही एकंदर मंडळी पाहिजे.

सारांश एकंदर २० मंडळींत ३ श्रीमंत आणि १७ गरीब पाहिजेत; तर,

१०० मंडळींत त्यांचे पांचपट हाणजे १५ श्रीमंत आणि ८५ गरीब इतके असले पाहिजेत हें स्पष्ट आहे.

१९ प्रश्न. ८२ त्राय औंस वजनाचें सोने दिलें तर त्या मोवदला ९६ टन लोखंड विकत मिळतें. लोखंडापेक्षां सोने किंमतीनें किती पट अधिक आहे ?

खुलासा. एका त्राय पौंडांत ५७६० त्राय ग्रेन आहेत.

एका अवा. पौंडांत ७००० त्राय ग्रेन

$$\therefore \text{एक अवा. पौंड} = \frac{७००० \text{ त्रा. ग्रे.}}{५७६० \text{ त्रा. ग्रे.}} = \frac{१७५}{१४४} \text{ त्रा. पौं.}$$

$$\text{व एक टन} = २२४० \text{ अवा. पौं.}$$

$$\therefore ९६ \text{ टन लोखंड} = ९६ \times २२४० \text{ अवा. पौं. लोखंड.}$$

$$= ९६ \times २२४० \times \frac{१७५}{१४४} \text{ त्रा. पौं. लोखंड}$$

$$\text{व } ८२ \text{ त्रा. औं. सोने} = \frac{८२}{१२} \text{ त्रा. पौं. सोने} = \frac{४१}{६} \text{ त्रा. पौं. सोने.}$$

$$\text{आतां. } \frac{४१}{६} \text{ त्रा. पौं. सोने} = \frac{१७५ \times २२४० \times ९६}{१४४} \text{ त्रा. पौं. लोखंड.}$$

हणन समानता प्र. ४ व ५ प्रमाणें.

$$१ \text{ त्रा. पौं. सोने} = \frac{१७५ \times २२४० \times ९६ \times ६}{१४४ \times ४१} \text{ त्रा. पौं. लो.}$$

$$= \frac{१७५ \times २२४० \times ४}{४१} \text{ त्रा. पौं. लोखंड.}$$

$$= ३८२४३.९ \text{ त्रा. पौं. लोखंड.}$$

हणजे सरासरीनें सोनें लोखंडापेक्षां ३८२४३.९ पटीनें महाग आहे.

२० प्रश्न. एका मनुष्यानें एका कामावर ५९ मजूर लोक लाविले होते. पैकीं पुरुष दररोज १२ तास काम करीत, बायका ९ तास काम करीत, आणि मुलें ८ तास काम करीत. या कामावद्दल त्यांस त्यांनीं १२ तास काम केलें तर दर पुरुषास दर वाईच्या १॥ नें मिळे, आणि दर वाईस दर मुलांपेक्षां त्याच्या $\frac{१}{३}$ नें अधिक मिळे. ह्या कामावर एकंदरीनें दररोजची जी मजुरी बायांस मिळे ती सर्व मुलांच्या दररोजचे मजुरीच्या रकमेच्या दुप्पट असे, आणि सर्व बायांनीं दररोज ५ आणे मिळविले तर सर्व पुरुषां दररोज १२ आणे मिळवीत. ह्यावरून त्या कामावर प्रत्येक जातीचे किती किती मजूर होते ?

खुलासा. एका मुलास दररोजेची भर मजुरी जर ८३ मिळाली, तर त्याच्या तृतीयांशानें अधिक. हणजे १० दर वाईची दररोजची भर मजुरी होईल, आणि पुरुषाची त्याच्या दिढीनें हणजे १० होईल; परंतु पुरुष दररोज १२ तास काम करी; वाई ९ तास काम करी, आणि मुलगा ८ तास काम करी; हणून दर पुरुषानें दररोज ६ आ. मिळविले तर दर वाई दररोज $\frac{१०}{३} \times ४ = ३$ आ. मिळवी, व मुलगा $\frac{१०}{३} \times ३ = २$ आ. मिळवी.

आतां सर्व बाया मिळून सर्व मुलांच्या मजुरीच्या दुप्पट मिळवीत आणि सर्व बाया ५ आणे तर सर्व पुरुष १२ आणे मिळवीत. ह्यावरून पुरुष, बाया आणि मुलें ह्यांच्या रोजच्या मिळकती १२ आणे, ५ आणे, व २॥ आणे ह्या प्रमाणांत असत.

ह्या तिघांचे दर ६ आणे ३ आणे व २ आणे ह्याप्रमाणें असत, ह्यावरून ह्यांच्या संख्यां २, $\frac{५}{३}$ व १० ह्या प्रमाणांत असत.

ह्या तिहीं मिळून ५९ मनुष्ये कामावर होतीं ह्यावरून त्यांत,

२४ पुरुष होते.

२० बायका होत्या.

१५ मुलें होतीं.

एकंदर ५९ मजूर होते.

२१ प्रश्न. एक काम ८५० यार्ड लांब २४ दिवसांत पुरें करण्याचें आहे. त्या कामावर १८ मनुष्यें ११ दिवस खपलीं आणि त्यांनीं ३३० यार्ड काम मात्र पुरें केलें. बाकी राहिलेलें काम मुदतींत संपण्यास कामावर अधिक किती मनुष्यें लावावीं लागतील ?

खुलासा. अकरा दिवसांत ३३० यार्ड काम १८ मनुष्यांनी केलें आणि बाकी काम ५२० यार्ड आहे, व मुदतीचे दिवस १३ आहेत, हणून

व्यस्त. ११ दि. : १३ दि. }
सम. ३३० यार्ड : ५२० यार्ड } :: १८ मं : २४ मनुष्यें.

पैकीं १८ पूर्वीचीं आहेत हणून, २४ ह्यांतून १८ वजा जातां ६ राहतात हीं नवीं माणसें लावावीं हें उत्तर.

२२ प्रश्न. एक ससा आपल्या ८० उड्या कुऱ्याच्या पुढें आहे. त्याच्या मार्गे जो कुत्रा लागला आहे त्याच्या दोन उड्या जितक्या वेळांत होतात, तितक्या वेळांत सशाच्या तीन होतात; परंतु ससा जितकी जागा दोन उड्यांत घेतो, तितकी कुत्रा एका उडींत घेतो, तर सशाच्या कितव्या उडीला त्यास कुत्रा गांठील तें सांगा.

खुलासा. सशाच्या दोन उड्यांइतकी कुऱ्याची एक उडी लांब आहे, तस्मात् सशाच्या तीन उड्यांच्या वेळात कुत्रा दोन उड्या मारितो. हणजे सशाच्या चार उड्यांइतकी जागा घेतो, हणजे सशाच्या तीन उड्यांत कुत्रा त्यास त्याच्या एका उडीइतकें आटोपतो असें ह्मटलें पाहिजे. अर्थात् ससा आपल्या ८० उड्या कुऱ्याच्या पुढें आहे, तितकें अंतर नाहींसें करण्यास सशाला $८० \times ३ = २४०$ उड्यां माराव्या लागतील, हणजे सशाचे २४० वे उडीस त्याला कुत्रा येऊन गांठील हें उत्तर.

२३ प्रश्न. एका हौदांत ४७८'४ ग्यालन पाणी राहतें. तो २॥ फूट खोल आहे, आणि त्याची लांबी रुंदी सारखी आहे; तेव्हां लांबी रुंदीचें माप काय असावें ?

त्याचप्रमाणें त्या हौदाची लांबी ६ फूट असली व रुंदी खो-

लीच्या दुप्पट असली तर ती रुंदी किती फूट असेल ? एक ग्यालन पाण्याचें माप २७७'२७४ घ. इ. आहे.

खुलासा. हौदाचें माप ४७८'४ ग्या. आहे.

$$\begin{aligned} \therefore \text{लांबी} \times \text{रुंदी} \times ३० \text{ इ.} &= ४७८'४ \text{ ग्या.} \\ &= ४७८'४ \times २७७'२७४ \text{ घ. इ.} \end{aligned}$$

परंतु लांबी व रुंदी या सारख्या आहेत ह्मणून,

$$(\text{लांबी})^2 \times ३० \text{ इ.} = १३२६४७'८८१६ \text{ घ. इ.}$$

$$(\text{लांबी})^2 = \frac{१३२६४७'८८१६ \text{ घ. इ.}}{३० \text{ इ.}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{लांबी} &= \sqrt{४४२१'५९६१ \text{ चौ. इ.}} \\ &= ६६'४९ \text{ इ.} \\ &= ५ \text{ फू. } ६'५ \text{ इ. हें एक उत्तर.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{दुसरें } ७२ \text{ इ.} \times \text{रुंदी} \times \text{खोली} &= ४७८'४ \text{ ग्या.} \\ &= ४७८'४ \times २७७'२७४ \text{ घ. इ.} \end{aligned}$$

परंतु खोली रुंदीच्या अर्धानें आहे; ह्मणून,

$$\begin{aligned} ७२ \times \text{रुंदी} \times \frac{\text{रुंदी}}{२} &= १३२६४७'८८१६ \text{ घ. इ.} \\ \text{रुंदी}^2 &= \frac{१३२६४७'८८१६ \text{ घ. इ.}}{३६ \text{ इ.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{रुंदी} &= \sqrt{३६८४'६६३३ \text{ चौ. इ.}} \\ &= ६०'७०१ \text{ इ.} \\ &= ५ \text{ फू. } ०'७०१ \text{ इ. हें दुसरें उत्तर.} \end{aligned}$$

२४ प्रश्न. एका कंत्राक्टरानें ३ मैल लांबीची सडक ४ महिन्यांत पुरी करून देण्याचा मक्ता घेतला; आणि त्या कामावर त्यानें १३६ माणसें लांबिलीं. एका महिन्याच्या शेवटीं पाहतो तों, फक्त अर्धा मैल सडकेचें काम झालेलें दृष्टीस पडलें. तेव्हां मक्तेदारानें एक महिन्याची आणखी मुदत मागितली, ती त्यास मिळाली तर तितक्या मुदतींत सडकेचें काम संपविण्यास मक्तेदाराला आणखी किती मनुष्ये कामावर ठेवावीं लागतील ?

खुलासा. अर्धा मैल सडक बांधण्यास १३६ मनुष्यांना

एक महिना लागला, तर शिलक २॥ मैल सडक वांधण्यास तितकेच मनुष्यांना आणखी ५ महिने लागतील हे स्पष्ट आहे.

परंतु ती सडक आणखी चार महिन्यांनी पुरी करावयाची आहे; तेव्हां,

५ महिन्यांनी पुरी होण्यास १३६ मनुष्ये लागतात तर तेवढीच सडक चार महिन्यांनी पुरी होण्यास किती मनुष्ये लागतील, ह्मणजे $\frac{136 \times 4}{5} = 109$ मनुष्ये लागतील.

पूर्वीचीं १३६ मनुष्ये कामावर आहेत ह्मणून $109 - 136 = 27$ मनुष्ये अधिक ठेवावीं लागतील, हे उत्तर.

२६ प्रश्न. एक खोली १४ फूट लांब आणि १० फूट रुंद अशी आहे. तिच्या जमिनीवर भर ११ इंचांची घालावयाची आहे, परंतु ती, एक १० फूट खोलीची वाटोळी विहीर खणून त्यांतून माती काढून तिची घालावयाची आहे; तर पुढील माहिती सांगा.

(१) भर किती घनफूट लागेल ?

(२) विहिरीची रुंदी ह्मणजे व्यास किती ?

(३) विहिरीचा घेर किती होईल ?

(४) त्या विहिरी सभोवतालीं चौरस कुंपण घातलें तर त्याची एकंदर लांबी किती होईल ?

खुलासा. खोलीच्या जमिनीत लांबी रुंदी आणि खोली यांच्या गुणाकाराहतकी भर घालावी लागेल ह्मणून,

$14 \text{ फू.} \times 10 \text{ फू.} \times \frac{11}{12} \text{ फू.} = 128 \frac{1}{3} \text{ घ. फू.}$ इतकी भर झाली हे पहिले उत्तर.

विहिरीचे पोकळीचे घनफूट वरील भरीइतके असले पाहिजेत, वर्तुळपोकळीचे घनफळ $= 0.7854 \times (\text{व्यास})^2 \times \text{खोली}$, हे आहे.

यांत पोकळीचे घनफळ $128 \frac{1}{3} \text{ घ. फू.}$ आहे आणि खोली १० फूट असली पाहिजे; ह्मणून,

$128 \frac{1}{3} \text{ घ. फू.} = 0.7854 \times (\text{व्यास})^2 \times 10 \text{ फू.}$

$$१२८ \frac{१}{३} \text{ चौ. फू.} = ७.८५४ \times (\text{व्यास})^२$$

$$\therefore \text{व्यास} = \sqrt{\frac{१२८ \frac{१}{३} \text{ चौ. फू.}}{७.८५४}} = ४ \text{ फूट सुमारे हैं दुसरे उत्तर.}$$

$$\text{घेर} = \text{व्या.} \times ३.१४ = ४ \text{ फू.} \times ३.१४ = १२.५६ \text{ फू. हैं ति. उ०.}$$

$$\begin{aligned} \text{चौरस कुंपणांचा घेर} &= \text{विहिरीच्या व्यासाची चौपट} \\ &= ४ \times ४ \text{ फूट} = १६ \text{ फूट हैं चवथें उत्तर.} \end{aligned}$$

२६ प्रश्न. एका गांवांत राहणारे लोकांची संख्या दुसऱ्या गांवांत राहणारे लोकांच्या संख्येच्या दसपट आहे. पुढें माहामारीचे वाख्यानें पहिल्या गांवांतील लोकसंख्या $\frac{१}{५}$ कमी झाली आणि दुसरे गांवांतील १५० कमी झाली. तरी त्या गांवांतील लोकांची संख्या पूर्वीप्रमाणेंच एकाची दुसऱ्याचे दसपट राहिली, तेव्हां वाख्याच्या अगोदर प्रत्येक गावांत लोकांची संख्या किती होती?

खुलासा. वाख्याच्या पूर्वी आणि नंतर गांवांतील लोकांच्या संख्यांचें प्रमाण जितकेंचें तितकेंच आहे; हाणून त्यांतील मर्ति-केंही त्याच प्रमाणानें झालीं पाहिजेत. दुसऱ्या गांवांत वाख्यानें १५० लोक गेले तर पहिले गांवांत त्यांचे दसपट ह्म० १५०० लोक गेले पाहिजेत; आणि हे लोकसंख्येच्या $\frac{१}{५}$ वरोवर आहेत, हाणून १ ले गांवांत वाख्याच्या पूर्वी $१५०० \times ५ = ७५००$ लोक असावेत, आणि दुसऱ्या गांवांत $\frac{७५००}{५} = १५००$ लोक असले पाहिजेत.

२७ प्रश्न. एका कापडवाल्यानें कापडाचे दोन गट्टे विकत घेतले. त्या दोन गट्ट्यांपैकीं जो लहान होता त्यांत जितके यार्ड कापड होतें, त्यांच्या दुप्पट पेन्स एका यार्डास पडत अशा जातीचें कापड होतें. मोठा गट्टा होता त्यांत जितके यार्ड कापड होतें तितकेच पेन्स एका यार्डास पडत अशा जातीचें कापड होतें. मोठ्या गट्ट्यांत जितके यार्ड कापड होतें त्याच्या पाऊणपट धाकट्या गट्ट्यांत होतें. तथापि कापडवाल्यास धाकटे गट्ट्यांबद्दल ३१ पौंड २ पेन्स, मोठ्या गट्ट्यापेक्षां जास्त द्यावे लागले, तेव्हां प्रत्येक गट्ट्यांत किती किती यार्ड कापड होतें ?

खुलासा. मोठे गट्यांत जितके यार्ड कापड होतें तितकी किंमत एक यार्ड कापडाची आहे, हणून सर्व कापडाची किंमत त्यांतील यार्डांचे वर्गाइतके पेन्स झाली.

धाकट्या गट्यांत जितके यार्ड कापड होतें तितक्याचे दुप्पट पेन्स एक यार्ड कापडाची किंमत; हणून त्यांतील सर्व कापडाची किंमत यार्डांचे वर्गाचे दुपटीइतके पेन्स झाली.

परंतु मोठे गट्यांत जितके यार्ड कापड आहे त्याच्या पाऊणपट धाकट्या गट्यांत कापड आहे; हणून मोठे गट्यांत जितके यार्ड कापड आहे; त्याच्या पाऊणपटीचे वर्गाचे दुपटीइतके पेन्स धाकटे गट्याची किंमत झाली.

धाकटा गट्या आणि थोरला गट्या यांच्या किंमतींत ३१ पौंड २ पेन्स, हणजे ७४४२ पेन्स इतका फरक आहे.

आतां, मोठ्या गट्यांत, जर ४ यार्ड कापड आणि धाकटे गट्यांत त्याच्या पाऊणपट हणजे ३ यार्ड कापड आहे असें घेतलें, तर ४ चा वर्ग १६ इतके पेन्स मोठ्या गट्यांतील कापडाची किंमत झाली, आणि ३ चा वर्ग ९ आणि ९ दुर्गे १८ पेन्स इतकी किंमत धाकटे गट्याची झाली. १६ आणि १८ यांत दोन पेनींचा फरक आला.

किंमतींत २ पेनी फरक पडण्यास मोठ्या गट्यांतील ४ यार्डांचा वर्ग करावा लागतो, तर किंमतींत ७४४२ पेन्स इतका फरक पडण्यास मोठ्या गट्यांत जितके यार्ड असतील त्या सर्वांचा वर्ग करावा लागेल; हणून,

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{मोठ्या गट्यांतील} \\ \text{सर्व यार्डांचा वर्ग} \end{array} \right\} &= \frac{४^२ \times ७४४२}{२} \\ &= ४^२ \times ३७२१ \\ &= ४^२ \times ६१^२ \end{aligned}$$

हणून वर्गमूळ काढिलें हणजे

मोठ्या गट्यांतील कापड = ४ × ६१ = २४४ यार्ड झालें;
आणि धाकटे ग. कापड = २४४ × ०.॥१॥ = १८३ यार्ड झालें, हे उ.

२८ प्रश्न. एका मनुष्यानें ६००० रुपयांना ४०० जनावरें

विक्रत घेतलीं. त्यांत कांहीं बैल व कांहीं शेळ्या होत्या. प्रत्येक बैलाला ५० रुपये, आणि प्रत्येक शेळीला १० रुपये, असे पडले; तर त्याणें प्रत्येक जातीचीं जनावरें किती किती विक्रत घेतलीं तें सांगा.

खुलासा. जर सर्वच बैल विक्रत घेतले असते, तर ६००० रुपयांत $\frac{६०००}{५०} = १२०$ बैल विक्रत आले असते; परंतु एक बैल कमी करून त्या ठिकाणीं ५ शेळ्या घातल्या असत्या, तर एकंदर किंमत तितकीच राहून एकंदर जनावरांची संख्या मात्र ४ नीं वाढली असती.

परंतु आपल्यास १२० बैलांचीं ४०० जनावरें करावयाचीं आहेत आणि एकंदर किंमत तितकी राखण्याची आहे; हाणजे $४०० - १२० = २८०$ जनावरें वाढविणें आहे.

परंतु एक बैल कमी करून ५ शेळ्या घेतल्या हाणजे एकंदरीत ४ जनावरें वाढतात, तर २८० जनावरें वाढविण्यास $\frac{२८०}{४} = ७०$ बैल कमी केले पाहिजेत, आणि त्या मोबदला $७० \times ५ = ३५०$ शेळ्या घातल्या पाहिजेत.

अर्थात् १२० बैलांतून ७० बैल कमी केले हाणजे ५० बैल राहतात, आणि त्यांबद्दल ३५० शेळ्या आल्या हाणजे $३५० + ५० = ४००$ एकंदर जनावरें होतात; हाणून,

उत्तर ५० बैल व ३५० शेळ्या इतकीं जनावरें विक्रत घेतलीं.

२९ प्रश्न. ६०० पुरुष आणि २३१० पोरें ६५ दिवसांत जितकें काम करितात तितकेंच काम ५२० पुरुष व ११७० पोरें यांच्या हातून १०७ दिवसांत होत आहे, तर असें दाखवा कीं, एका वेळांत दोन पुरुषांइतकें काम तीन पोरें करूं शकतात.

खुलासा. दिलेले पुरुष व पोरें यांचें काम ६५ दिवसांत ६५ पट होईल व १०७ दिवसांत १०७ पट होईल हाणून,

$$६५ \times ६०० \text{ पु.} + ६५ \times २३१० \text{ पो.} = १०७ \times ५२० \text{ पु.} + १०७ \times ११७० \text{ पो.}$$

हाणजे. $३९००० \text{ पु.} + १५०१५० \text{ पो.} = ५५६४० \text{ पु.} + १२५१९० \text{ पो.}$

स्थ. $१५०१५० \text{ पो.} - १२५१९० \text{ पो.} = ५५६४० \text{ पु.} - ३९००० \text{ पु.}$

∴ $२४९६० \text{ पो.} = १६६४० \text{ पु.}$

८३२० नीं भां. $३ \text{ पो.} = २ \text{ पु.}$ हें उत्तर.

अथवा ६५ आणि १०७ यांचा साधारण गुणाकार ६९५५ आहे; व आपण एकंदर काम तितकें आहे असें मानिलें तर,

६०० पुरुष + २३१० पोरें हीं १ दि. त $\frac{६९५५}{६५} = १०७$ काम करतील.

५२० पु. + ११७० पोरें हीं १ दि. त $\frac{६९५५}{१०७} = ६५$ काम करतील.

वरील रकमेस १३ नीं गुणिलें आणि खालचे रकमेस १५ नीं गुणिलें तर,

७८०० पु. + ३००३० पोरें १ दिवसांत १०७ × १३ = १३९१ का. करतील.

७८०० पुरुष + १७५५० पो. १ दिवसांत ६५ × १५ = ९७५ काम करतील.

वरील रकमेंत खालची रकम वजा केली ह्मणजे १२४८० पोरें १ दि. ४१६ काम करतील. ह्मणून,

१२४८ पोरें १ दि. ४१६ काम करतील ह्मणून ११७० पोरें १ दिवसांत ३९० काम करतील; परंतु ५२० पु. + ११७० पोरें १ दि. ६५ काम करतात, ह्मणून त्यांतील ११७० पोरांचें काम वजा दिलें ह्मणजे—

५२० पुरुष एका दिवसांत २६ काम करितात असें झालें. ह्मणून १ काम करण्यास २० पुरुष लागतात असें दिसतें.

परंतु एका दिवसांत ११७० पोरें ३९ काम करितात ह्मणून एक काम करावयास पोरें ३० लागतात असेंही दिसतें.

सारांश २० पुरुषांचें काम ३० पोरें करितात ह्मणजे २ पुरुषांचें काम ३ पोरें करितात हें उत्तर झालें.

३० प्रश्न. एका मनुष्यानें कांहीं शेळ्या व कांहीं मेंढ्या अशा ३७० रुपयांस विकत घेतल्या. आतां त्यानें जितक्या शेळ्या तितक्याच मेंढ्या, आणि जितक्या मेंढ्या तितक्याच शेळ्या, अशा विकत घेतल्या असल्या, तर त्याला ३५० रुपये पडले असते. दर शेळीची किंमत २॥ रु. होती, आणि दर

मेंढीची ३॥ रुपये होती; तेव्हां त्यानें शेळ्या व मेंढ्या किती किती खरेदी केल्या ?

खुलासा. पहिल्या खरेदीत जितकी एकंदर जनावरांची संख्या तितकीच दुसऱ्या खरेदीतील जनावरांची संख्या आहे, फक्त एका खरेदीत जितक्या शेळ्या तितक्या मेंढ्या दुसऱ्या खरेदीत आहेत, आणि पहिल्या खरेदीत जितक्या मेंढ्या तितक्या शेळ्या दुसरे खरेदीत आहेत.

हणून दोन्ही खरेद्या मिळून जितक्या शेळ्यांची तितक्या मेंढ्यांची खरेदी झाली, आणि दोन्ही खरेद्यांची एकंदर रकम $३५० + ३७० = ७२०$ रुपये झाली.

परंतु एक शेळी व एक मेंढी मिळून किंमत $२॥ + ३॥ = ६$ रुपये होती; हणून ७२० रुपयांत प्रत्येक तऱ्हेचीं १२० जनावरें विकत घेतलीं गेलीं; परंतु दोन्ही खरेद्यांत जनावरांची संख्या सारखीच आहे, हणून प्रत्येक खरेदी १२० जनावरांची झाली असें ह्मटलें पाहिजे.

आतां पहिले खरेदीत जितक्या मेंढ्या तितक्याच शेळ्या असल्या ह्मणजे ६० मेंढ्या व ६० शेळ्या असल्या; तर मेंढ्यांचे $६० \times ३॥ = २१०$ रु. आणि शेळ्यांचे $६० \times २॥ = १५०$ रु. मिळून एकंदर $२१० + १५० = ३६०$ रुपयांची खरेदी झाली असती; परंतु वास्तविक खरेदी ३७० रुपयांची झाली आहे, आणि मेंढीची किंमत शेळीपेक्षां जास्त आहे, हणून या खरेदीत शेळ्यांपेक्षां मेंढ्या अधिक घेतल्या आहेत हें उघड आहे.

आतां एक शेळी काढून तिच्या ठिकाणीं एक मेंढी घेतली, तर जनावरांची संख्या तितकीच राहून $३॥ - २॥ = १$ रुपया एकंदरीत किंमत वाढेल. पहिली खरेदी ३६० रुपयांपेक्षां १० नीं अधिक आहे, हणून त्या खरेदीत १० शेळ्या जाऊन त्या ठिकाणीं १० मेंढ्या आल्यां असाव्या असें दिसतें.

हणून पहिले खरेदीत $६० - १० = ५०$ शेळ्या घेतल्या गेल्या आणि $६० + १० = ७०$ इतक्या मेंढ्या विकत घेतल्या असल्या पाहिजेत.

३१ प्रश्न. एक हौद १२०० ग्यालन पाणी मावेइतका होता. त्यांत अ, व आणि क या तीन तोट्या एकसारख्या चालू असल्या हणजे तो २४ मिनिटांत सर्व भरून जाई; परंतु अ ही तोटी जर एकटी सोडिली तर तिला क एकटे तोटीपेक्षां हौद भरण्यास ३० मिनिटे जास्ती लागत; व अ आणि व ह्या दोन तोट्या जर एकदम सोडिल्या तर त्यांच्यामधून एका मिनिटांत जितकें पाणी येई त्यापेक्षां १० ग्यालन क ह्या एकटे तोटींतून कमी येई; तेव्हां प्रत्येक तोटीनें तो हौद किती किती मिनिटांनीं भरला असता ?

खुलासा. अ, व, क या तीन तोट्यांनीं २४ मिनिटांत १२०० ग्यालन पाणी येतें, तेव्हां एके मिनिटांत तिहीं मिळून ५० ग्यालन पाणी येतें हें स्पष्ट आहे.

परंतु अ आणि व ह्या तोट्यांतून दर मिनिटांत जितकें पाणी येतें त्यापेक्षां क तोटींतून १० ग्यालन कमी येतें, हणून अ आणि व ह्या तोट्यांतून दर मिनिटांत ३० ग्यालन आणि क तोटींतून २० ग्यालन असें एकंदर एका मिनिटांत तिहींतून ५० ग्यालन पाणी येतें असें हाटलें पाहिजे.

कनें दर मिनिटास जर २० ग्यालन पाणी येत आहे तर तो हौद भरण्यास $\frac{1200}{20} = 60$ मिनिटे लागतील, हें एक उत्तर.

क तोटीला हौद भरण्यास जितका वेळ लागतो, त्यापेक्षां अ एकटे तोटीला ३० मि. अधिक लागतात; परंतु क तोटीला हौद भरण्यास ६० मिनिटे लागतात, हणून अ तोटीला तितका हौद भरण्यास ९० मिनिटे लागतील, हें दुसरें उत्तर.

अनें १२०० ग्यालनांचा हौद ९० मिनिटांत भरतो तेव्हां त्यांतून एका मिनिटांत $\frac{1200}{90} = 13\frac{1}{3}$ इतके ग्यालन पाणी येतें असें हाटलें पाहिजे.

अ तोटीनें एका मिनिटांत $13\frac{1}{3}$ ग्या. पाणी येतें आणि अ व व ह्या दोन तोट्या मिळून दर मिनिटास ३० ग्या. पाणी येतें ∴ व तोटीनें दर मिनिटास $30 - 13\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}$ ग्या. आलें

पाहिजे; हाणून तिने १२०० ग्या. चा हौद, $१२०० \div १६\frac{२}{३} = ७२$ मिनिटे इतक्या वेळानं भरेल, हें ३ रें उत्तर.

३२ प्रश्न. अ हा आपला माल बला ११५ पौंड, १९ शि. २ पे. इतक्याला विकतो, आणि त्यास दरशेंकडा १० पौंड नफां होतो; ब हा तोच माल दुसऱ्यास विकतो, आणि त्याला शेंकडा १० पौंड तोटा होतो; तेव्हां अची खरेदी किती पौंडांची आणि बची विकरी किती पौंडांची ?

खुलासा. ११० पौंडांला जर १०० पौंड मूळ खरेदी, तर ११५ पौं. १९ शि. २ पेन्स यांना मूळ खरेदी काय असावी ? उत्तर १०५-८-४ अची मूळची खरेदी.

१०० पौंडांला जर ९० विकरी तर ११५ पौं. १९ शि. २ पे. यांस विकरी किती असावी ? उत्तर—

१०४-७-३ इतकी बच्या विकरीची रकम.

३३ प्रश्न. एका गृहस्थाला तीन मुली होत्या; एक सात वर्षांची, दुसरी नऊ वर्षांची आणि तिसरी अकरा वर्षांची. प्रत्येक मुलीस १३ वे वर्षी ३००० रु. मिळावे अशा तजविजी सार्टी कांहीं रुपये व्यांकेंत दरसाल दरशेंकडा ५ रु. व्याजाप्रमाणें ठेविले. व्याज चक्रवाढ. तर व्यांकेंत रकम किती ठेविली ती सांगा.

खुलासा. ७ वर्षांचे मुलीस ६ वर्षांनी रुपये मिळावयाचे, ९ वर्षांचे मुलीस ४ वर्षांनी रुपये मिळावयाचे, आणि ११ वर्षांचे मुलीस २ वर्षांनी मिळावयाचे.

$$\therefore (१००५)^२ = १०१०२५$$

$$(१००५)^४ = १०२१३५२६२५$$

$$(१००५)^६ = १०३३७९१२६९७६२५$$

हाणून,

$$\frac{३००००}{१.१०२५} = २७२१.१ \text{ रु. हे अकरा वर्षांचे मुलीबद्दल.}$$

$$\frac{३००००}{१.२१३५} = २४७२.२ \text{ रु. हे नऊ वर्षांचे मुलीबद्दल.}$$

$$\frac{३००००}{१.३३७९} = २२४२.३ \text{ रु. हे सात वर्षांचे मुलीबद्दल.}$$

७४३५.६ रु. एकंदर व्यांकेंत ठेविले पाहिजेत.

३४ प्रश्न. एका गृहस्थाजवळ दोन घोडे आणि एक उत्तम

प्रकारचें ५०० रुपये किंमतीचें जीन असे तीन पदार्थ होते. हें जीन जर एका घोड्यावर घातलें तर त्यासुद्धां त्याची किंमत दुसऱ्या घोड्याच्या दुप्पट होई, आणि तें जीन जर दुसऱ्या घोड्यावर घातलें तर त्यासुद्धां त्याची किंमत पहिल्या घोड्याच्या तिप्पट होई; तेव्हां त्या घोड्यांची वेगळाली किंमती कार्य असावी?

खुलासा. जिनांची किंमत ५०० रु. आहे, तेव्हां पहिले घोड्यावर जीन घातलें तर—

$$१ \text{ ले घो. किं.} + ५०० \text{ रु.} = २ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.}$$

प्रत्येक बाजूस १००० मिळविले तर,

$$१ \text{ ले घो. किं.} + १५०० \text{ रु.} = २ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.} \\ + १००० \text{ रु.}$$

दुसरे घोड्यावर जीन घातलें तर—

$$२ \text{ रे घो. किं.} + ५०० \text{ रु.} = ३ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.}$$

दोन्ही बाजूस २ नीं गुणिलें तर—

$$२ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.} + १००० \text{ रु.} = ६ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.}$$

$$\text{परंतु } २ \text{ पट } २ \text{ रे घो. किं.} + १००० \text{ रु.} = १ \text{ ले घो. किं.} \\ + १५०० \text{ रु.}$$

$$\therefore ६ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.} = १ \text{ ले घो. किं.} + १५०० \text{ रु.}$$

दोन्ही बाजूस १ ले घो. किं. वजा दिली तर—

$$५ \text{ पट } १ \text{ ले घो. किं.} = १५०० \text{ रु.}$$

हणून १ ले घो. किं. = ३०० रु. हें एक उत्तर.

आणि ३०० + ५०० = ८०० = २ पट २ रे घो. किं.

हणून २ रे घो. किं. = ४०० रु. हें दुसरें उत्तर.

३५ प्रश्न. दोन संख्या अशा आहेत की त्यांची बेरीज ३० होते; आणि एकीचा $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{६}$ हे एकंदरीनें दुसरीचे $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{६}$ यांचे बेरजेबरोबर आहेत. तर त्या दोन संख्या कोणत्या?

खुलासा. $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{६} = \frac{३६ + १२ + ६}{३६} = \frac{५४}{३६} = १$ यावरून असें दिसतें की, एका संख्येचे $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{६}$ यांची बेरीज त्या संख्येइतकीच आहे.

$$\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{६} = \frac{२+३+१}{६} = \frac{६}{६} = १ \parallel \text{ यावरून असें दिसतें}$$

कीं, दुसरे संख्येचे $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{3}{8}$ यांची वेरीज घेतली तर त्या संख्येच्या दिढीनं येते, परंतु ही वेरीज पहिले वेरजेइतकी आहे. हणून दुसरी संख्या पहिले संख्येपेक्षां दिढीनं लहान असली पाहिजे.

हणजे पहिली संख्या जर तीन तर दुसरी संख्या दोन असं असलें पाहिजे. या दोहोंची वेरीज ५ होते; आणि आमचे प्रश्नांत ती वेरीज ३० आली पाहिजे हणजे ६ पट अधिक आली पाहिजे. हणून इच्छिल्या संख्या $३ \times ६ = १८$ आणि $२ \times ६ = १२$ ह्या झाल्या.

३६ प्रश्न. एका गांवांत दर वर्षी ४५ असामींत एक असामी मरण पावतो, आणि गांवाबाहेरच्या प्रदेशांत दर वर्षीस ५० त एक असामी मरण पावतो. गांवांत लोकवस्ती १८६७५ आहे आणि बाहेरील प्रदेशांत ७९२५० इतकी आहे. तर गांवांतले व बाहेरचे मिळून एकंदरीनं मरणारांची संख्या १०००० व्हावयास किती वर्षे लागतील ?

खुलासा. गांवांत लोकसंख्या १८६७५ आहे, आणि वर्षीस ४५ पैकीं एक मरतो, हणून $\frac{१८६७५}{४५} = ४१५$ ही एका वर्षीत मरणारांची संख्या झाली.

त्याचप्रमाणें गांवाबाहेरची एका वर्षीत मरणारांची संख्या $\frac{७९२५०}{५०} = १५८५$ झाली.

एकंदरीनं गांवांतले व बाहेरचे एका वर्षीत मरणारांची संख्या $१५८५ + ४१५ = २०००$ झाली.

हणून मरणारांची एकंदर संख्या १०००० व्हावयास ५ वर्षे पाहिजेत हें उत्तर.

३७ प्रश्न. दोन झाडांवर कांहीं पोपट बसले होते. एका झाडावरचे पोपट दुसऱ्या झाडावरच्या पोपटांस असं हणाले कीं, जर तुमच्यांतले ७ पोपट आमच्यांत आले तर आम्ही तुमच्या तिप्पट होऊं. त्यांस दुसऱ्या पोपटांनीं असं सांगितलें कीं, जर तुमच्यामधील ७ पोपट आमच्यांत येतील तर तुम्ही आम्ही संख्येनं सारखे होऊं. तर प्रत्येक झाडावर किती किती पोपट होते तें सांगा.

खुलासा. प्रश्नांतील दुसरे प्रतिज्ञेप्रमाणें पहिले झाडावरचे सात पोपट गेले हणजे दुसरे झाडावर ७ पोपट वाढणार. दोन्ही झाडांवर आतां बाहेरचे सात सात पोपट आणून घातले तर पहिले झाडावर तूट पडलेली भरून येऊन दुसरे झाडावर मात्र १४ पोपट अधिक होतील, हणून,

$$प. झा. पो. = दु. झा. पो. + १४$$

$$आणि \quad दु. झा. पो. = प. झा. पो. - १४$$

या बरोबरींत दोर्हीकडे सात सात पोपट कमी केले तर,

$$दु. झा. पो. - ७ = प. झा. पो. - २१$$

परंतु, प्रश्नांतील पहिले प्रतिज्ञेप्रमाणें दुसऱ्यांतले ७ पोपट पहिल्यांत आले हणजे पहिल्यादर, दुसऱ्यांतील शिलक राहतात त्यांचे तिप्पट होतात.

हणजे,

$$प. झा. पो. + ७ = ३ (दु. झा. पो. - ७)$$

$$परंतु \quad दु. झा. पो. - ७ = प. झा. पो. - २१$$

$$\therefore \quad प. झा. पो. + ७ = ३ (प. झा. पो. - २१)$$

$$= ३ (प. झा. पो.) - ६३$$

$$\therefore \quad प. झा. पो. = ३ (प. झा. पो.) - ७०$$

$$\therefore \quad प. झा. पो. + ७० = ३ (प. झा. पो.)$$

आतां, पहिले झाडावरचे पोपटांत ७० मिळविल्यानें जर तिप्पट पोपट होत आहेत, तर ७० हे पोपटांचे दुपटीबरोबर असले पाहिजेत; हणजे पहिले झाडावरचे पोपट ३५ असले पाहिजेत, हें एक उत्तर.

पहिल्या झाडापेक्षां दुसऱ्या झाडावर १४ पोपट कमी आहेत, हणून $३५ - १४ = २१$ हे दुसऱ्या झाडावरचे पोपट हें दुसऱें उत्तर.

३८ प्रश्न. सावन दिवस २४ तासांचा असतो, नाक्षत्र दिवस २३ ता. ५६ मि. ४०९ से. इतका असतो. आतां एका नाक्षत्र दिवसाचे जर २४ तास कल्पिले, तर नाक्षत्रकालांत सावन दिवसाचें मान कसें दाखवाल ?

खुलासा. २३ तास ५६ मि. ४०९ से. यांस २४ तास, तर २४ तासांस काय ?

$$\text{उत्तर} = \frac{२४ \text{ ता.} \times २४ \text{ ता.}}{२३ \text{ ता.} \times ५६ \text{ मि.} \times ४०९ \text{ से.}} = २४ \text{ ता.} \times ३ \text{ मि.}$$

५६ $\frac{४०९ \times २४}{६९६४०९}$ से. हें उत्तर.

३९ प्रश्न. संत्री लोकांची एक टोळी एका ठिकाणाहून दुसऱ्या ठिकाणी जावयास निघाली. त्यांच्याजवळ अन्नसामग्री त्यांस मजलभर पुरे इतकी होती. परंतु वाटेंत त्यांच्यावर छापा पडून त्यांतले १५० लोक मारले गेले; आणि त्यांच्याजवळ जी शिलक अन्नसामग्री होती तिचा $\frac{१}{३}$ लुटला गेला. आतां पाहतात तों त्यांस असें समजलें कीं, पूर्वी दर मनुष्यास जितकें खावयास मिळत असे तितकेंच जर दिलें तर त्यांच्याजवळ पूर्व ठिकाणी परत येऊन पोंचण्यापुरतें मात्र अन्न शिलक राहिलें होतें, आणि त्यांनीं जर तसाच पुढें कुच केला असता, तर नेमिले ठिकाणी येऊन पोंचण्यास त्यांना दर माणशीं पूर्वी जितकें अन्न मिळत असे त्याच्या पाऊणपट घावें लागलें असतें. तर पहिले ठिकाणांतून किती लोकांची टोळी बाहेर पडली तें सांगा.

खुलासा. छापा पडल्यावर जें अन्न राहिलें तें परत येण्याला पूर्वीचेच दरानें पुरलें असतें, आणि त्यांनीं पुढें कुच केला असता तर प्रत्येक मनुष्यास पाऊणपट अन्नावर निर्वाह करावा लागता; ह्यावरून पुढचा रस्ता जर चार दिवसांचा असला, तर मागला रस्ता तीन दिवसांचा होता, व एकंदर मजल ७ दिवसांची होती, असें झटलें पाहिजे.

सात मजलांपुरती त्यांच्याजवळ अन्नसामग्री होती हाणून छापा पडला त्या वेळेस त्यांच्याजवळ $\frac{४}{९}$ अन्नसामग्री राहिली; तिचा $\frac{१}{३}$ लुटला गेला तेव्हां त्यांच्याजवळ $\frac{४}{९}$ चे $\frac{२}{३} = \frac{८}{२७}$ सामग्री राहिली.

ही सामग्री राहिलेले लोकांस परत येण्यास तीन दिवसांपुरती होती, हाणजे राहिलेले लोकांस $\frac{८}{२७} \div ३ = \frac{८}{८१}$ इतकी सामग्री रोज खर्च होई असें झालें; परंतु छापा पडण्यापूर्वी दररोज $\frac{१}{९}$

सामग्रीचा खर्च होई हणजे $\frac{2}{3}$ होई. तेव्हां सहज लक्षांत येईल कीं $\frac{2}{3}$ बदल $\frac{1}{3}$ खर्च होऊं लागला हणजे $\frac{1}{3}$ खर्च कमी झाला असें हाटलें पाहिजे. परंतु हा कमी खर्च माणसें कमी झाल्यामुळें होऊं लागला; माणसें १५० कमी झालीं. तेव्हां पूर्वीच्या टोळींतील माणसांचे $\frac{3}{4}$ शायरोवर १५०० मनुष्ये आहेत असें दिसतें. हणून $१५० \times ९ = १३५०$ हीं पूर्वीचीं सर्व टोळींतील माणसें असलीं पाहिजेत.

४० प्रश्न. एक पुस्तक अशा रीतीनें छापलें गेलें आहे कीं, प्रत्येक पत्रांत विवक्षित ओळी आणि प्रत्येक ओळींत विवक्षित अक्षरे अशीं आहेत. आतां प्रत्येक पत्रांत जर तीन तीन ओळी अधिक असत्या, आणि प्रत्येक ओळींत चार चार अक्षरे अधिक असतीं, तर प्रत्येक पत्रांत २२४ अक्षरे वाढलीं असतीं; आणि प्रत्येक पत्रांत दोन दोन ओळी कमी असत्या, आणि प्रत्येक ओळींत तीन तीन अक्षरे कमी असतीं, तर प्रत्येक पत्रांत पूर्वीपेक्षां १४५ अक्षरे कमी झालीं असतीं. तर प्रत्येक पत्रांत ओळी किती होत्या, आणि प्रत्येक ओळींत अक्षरे किती होती, तीं सांगा.

खुलासा. पहिल्यानें प्रत्येक ओळींत चार चार अक्षरे वाढलीं असतीं तर एका पत्रांत जितकी ओळींची संख्या तिच्या चौपटीइतकीं अक्षरे वाढलीं असतीं; आणि ओळी तीन वाढल्या हणून एका ओळींत जितकीं अक्षरे, त्यांचे तिप्पट आणखी अक्षरे वाढलीं असतीं; आणि शिवाय १२ अक्षरे वाढलीं असतीं हणून प्रतिज्ञेप्रमाणें,

$$४ \text{ पट ओळींची संख्या} + ३ \text{ पट एका ओळींतील अक्षरे} \\ = २२४ - १२ = २१२,$$

त्याचप्रमाणें ओळी व अक्षरे कमी झालीं असतीं तर,

$$३ \text{ पट ओळींची संख्या} + २ \text{ पट एका ओळींतील अक्षरे} \\ = १४५ + ६ = १५१;$$

पहिले समीकरणाला दोहोनीं गुणिलें आणि दुसऱ्यास तिहींनीं गुणिलें तर,

$$८ \text{ ओ. सं.} + ६ \text{ एका ओ. अ.} = ४२४$$

$$९ \text{ ओ. सं. } + ६ \text{ एका ओ. अ. } = ४५३$$

वजावाकी करून एका पत्रांतील ओळींची संख्या २९ येते
हे एक उत्तर;

आणि ४ पट ओ. + ३ पट एका ओळींतील अक्षरें
= २२४ - १२ = २१२ आहेत,

हणजे ४ × २९ + ३ पट एका ओळींतील अक्षरें = २१२ आहेत,

हणून ३ पट एका ओळींतील अक्षरें = २१२ - ११६ = ९६ आहेत;

हणून एका ओळींतील अक्षरें = $\frac{९६}{३} = ३२$ हे, दुसरें उत्तर.

अभ्यासाकरिता दिलेल्या उदाहरणांची उत्तरें.



अ.- (१) $\frac{\text{भागाकाराच्या जातीचे भाज्य. } ४ \quad \text{६६.} \quad १५}{\text{त्यांचे भाजक.} \quad १६; \quad ८; \quad १२;}$

अशक्य संबंध $\frac{५}{४६}$. (२) $\frac{१२}{१७}; \frac{१००१}{१०००};$ (३) $\frac{३}{५}; \frac{१}{४}; \frac{२}{३};$
 $\frac{२३}{३}; \frac{२५}{४६}; \frac{५३०}{१०००००}.$ (४) १४ चतुर्थांश एकडे; ३०

दशांश एकं; २ चतुर्थांश अष्टे; ४ पष्ठांश नव्वे; ८ द्वितीयांश

हात; ९ द्वादशांश मण. (५) १ च्या $\frac{३}{४}$ चे १४; एकच्या

$\frac{३}{१०}$ चे ३०; ८ च्या $\frac{३}{४}$ चे २; ९ च्या $\frac{३}{६}$ चे ४; १ हाताच्या

$\frac{१}{२}$ चे ८; मणाच्या $\frac{१}{१२}$ चे ९; ह्या तीन अवयवांच्या मांडणीत

पहिले एक आहेत, च्या पुढची संख्यापरिमाणें आहेत, व चे

पुढच्या संख्या आहेत. (६) $\frac{३}{४}$ चे १४; $\frac{१}{१०}$ चे ३०;

$\frac{\text{अष्टा}}{४}$ चे २; $\frac{\text{नव्या}}{६}$ चे ४; $\frac{\text{हात}}{२}$ चे ८; $\frac{\text{मण}}{१२}$ चे ९; नांवे.-

पाव; दशांश, दोनें, दिठें, वीत, व पायली. (७) १ चे $\frac{१४}{४}$;

एकचे $\frac{३०}{१०}$; ८ चे $\frac{३}{४}$; ९ चे $\frac{४}{६}$; हाताचे $\frac{६}{२}$; मणाचे $\frac{१२}{१२}$;

एकचे गुणक १४ इ. अंश आहेत; एक व गुणक ह्यांचें भाजक

४ इ. छेद आहेत; किंमती.-३॥, ३, ४, ६, ४ हात,

९ पायली (किंवा ॥॥॥ मण). (८) १४ चा चतुर्थांश;

३० चा दशांश; २ अष्ट्यांचा चतुर्थांश; ४ नवांचा पष्ठांश;

८ हातांचा द्वितीयांश; ९ मणांचा द्वादशांश; ह्या दोन

अवयवांच्या मांडणीत चा मागच्या संख्या ते अंश (हणजे राशि)

आहेत; आणि चा पुढील अंशांचे दर्शक जे ४, १०, इ. अंक

ते त्यांचें छेद आहेत. किंमती सदरप्रमाणेंच आहेत. (११)

$\frac{६}{१०००} + \frac{४}{१००००}; \frac{८}{१०} + \frac{१००}{१०००} + \frac{४}{१००००} + \frac{१०००}{१०००००};$

$\frac{२}{४} + \frac{२}{१६} + \frac{३}{६४}; ५ + \frac{१}{४} + \frac{२}{१६} + \frac{३}{६४} + \frac{२}{१२८};$ (१२)

४ तोळे ८ मासे; ५ पेन्स ३ फार्दिंग; ६ मण ४ पायली; १ वीत

२ मुष्टि; १५ पळें; ५ महिने; ५ सौरमास (हणजे

तारीख २१ मार्च पासून चालू होणारे मधु, माधव, इ. मराठी

ऋतूंचे महिने किंवा ज्यानुआरी, फेब्रुआरी, इ. इंग्रजी महिने)

क.- (१) $\frac{४०}{५}$; $\frac{१३५}{५}$; $\frac{२१६}{२७}$; $\frac{७२३}{२७}$. (२) $\frac{३७४}{११}$;
 $\frac{१४८५}{११}$; $\frac{५७८}{१७}$; $\frac{२२९५}{१७}$. (३) $\frac{९०}{१५}$; $\frac{१३५}{१५}$; $\frac{१८०}{१५}$;
 $\frac{२००}{१५}$. (४) $\frac{८५०}{३४}$; $\frac{११५६}{३४}$; $\frac{५७८}{३४}$; $\frac{३७७४}{३४}$.

ख.- (१) $\frac{२४}{७}$. (२) $\frac{९२}{९}$. (३) $\frac{२४३५}{३१}$. (४) $\frac{२३६}{१७}$.
 (५) $\frac{४२७}{१३}$. (६) $\frac{६०२३}{३०}$. (७) $\frac{८६३}{१२}$. (८) $\frac{२३३६}{१५}$.
 (९) $\frac{२३१५}{१८}$. (१०) $\frac{१३८४}{३७}$. (११) $\frac{६०२७}{३०}$. (१२)
 $\frac{३१४७}{२५}$. (१३) $\frac{८२२९}{१६}$. (१४) $\frac{२१३१}{२१}$. (१५) $\frac{४१}{४}$.
 (१६) $\frac{२०}{२}$. (१७) $\frac{३३}{४}$. (१८) $\frac{८१}{१६}$. (१९) $\frac{५७}{८}$.
 (२०) $\frac{५१३}{६४}$. (२१) $\frac{५७९}{६४}$.

ग.- (१) $\frac{४१}{२}$. (२) $\frac{७२}{११}$. (३) $\frac{२४१}{१३}$. (४) $\frac{२६२३}{८७}$.
 (५) $\frac{१६३५}{७७}$. (६) $\frac{३३१}{२५}$. (७) १०। (८) १५.
 (९) ५५. (१०) $\frac{१४३१}{२३}$. (११) $\frac{४०२३}{२५}$.
 (१२) $\frac{४१५२}{७५}$. (१३) १६. (१४) ४०. (१५) $\frac{३५७}{१०२}$.
 (१६) $\frac{३५५३}{११७}$. (१७) २१. (१८) ५५.
 (१९) २॥। (२०) २। (२१) ८।

घ.- (१) $\frac{३३५}{४}$; $\frac{३३५}{३}$; $\frac{३३५}{२}$; $\frac{८७५}{३६}$; व $\frac{७}{३६}$; $\frac{५}{३६}$; $\frac{२५}{३६}$; $\frac{३५}{३६}$.
 (२) $\frac{८७५}{१४४}$; $\frac{१२५}{१८}$; $\frac{१२५}{१६}$; $\frac{१२५}{९}$; व $\frac{२५}{१४४}$; $\frac{१२५}{११५२}$; $\frac{१२५}{१७२८}$; $\frac{५}{१४४}$.
 (३) $\frac{६४०}{६२३}$; $\frac{३२०}{२३१}$; $\frac{१२८०}{६२३}$; $\frac{१६००}{६२३}$; $\frac{३२०}{९२}$; व $\frac{१६०}{२०७२}$; $\frac{३२०}{६२३७}$.
 (४) $\frac{३२०}{४८५१}$; $\frac{४०}{६२३}$; $\frac{३२०}{६२३७}$; $\frac{३२}{६२३}$; $\frac{३२०}{७६२३}$; व $\frac{३२०}{२३१}$; $\frac{१२८०}{६२३}$.

ङ.- (१) $\frac{६०}{८४}$; $\frac{७७}{८४}$; $\frac{७८}{८४}$. (२) $\frac{१७५}{३२५}$; $\frac{२०८}{३२५}$; $\frac{२४५}{३२५}$.
 (३) $\frac{७५६}{२१८}$; $\frac{७५६}{१०५०}$; $\frac{७५६}{११५२}$; $\frac{७५६}{२८०}$. (४) $\frac{१६}{१३५}$; $\frac{२५}{२१५}$;
 $\frac{३००}{२४०}$. (५) $\frac{३१८}{१८}$; $\frac{४५८}{१८}$; $\frac{२२४}{१८}$. (६) $\frac{१००५}{२४०}$; $\frac{५७४०}{२४०}$;
 $\frac{१२०५}{२४०}$; $\frac{२२६८}{२४०}$. (७) $\frac{५२}{३}$; १२; $\frac{८६}{११}$; $\frac{३७५}{११}$; १६१;
 $\frac{७०५}{११}$. (८) $\frac{५}{४२}$; $\frac{१५}{१३३}$; $\frac{९}{१२०}$; $\frac{१३}{२००}$; $\frac{५५}{८४}$; $\frac{११}{१७}$.

च.- (१) $\frac{२}{२०}$; $\frac{९०}{२००}$; $\frac{८३}{२००}$; $\frac{४}{१००}$. (२) $\frac{५}{५०}$; $\frac{३३}{३३०}$; $\frac{२३}{२३०}$; $\frac{३}{३०}$.
 (३) $\frac{१३}{१४}$; $\frac{२२}{४३}$; $\frac{२१}{२१}$; $\frac{३}{४}$. (४) $\frac{११}{१६}$; $\frac{२}{३२}$; $\frac{६०}{७०}$; $\frac{२२६५}{४०५२}$.
 (५) $\frac{१३}{१३}$; $\frac{२०}{२१}$; $\frac{२३३}{२३३}$; $\frac{७७}{८१}$. (६) $\frac{३३}{७०}$; $\frac{५}{१३}$; $\frac{१३३}{२३३}$. (७) $\frac{४६९}{१४४४}$;
 $\frac{५३}{६६७}$. (८) $\frac{२८३३}{३४३३}$; $\frac{१०}{१०}$; $\frac{२४३३}{५२३३}$. (९) $\frac{२५}{२३३}$; $\frac{१३}{४५६}$; $\frac{२३}{७५५}$.

छ.- (१) $\frac{१२}{३३}$; $\frac{३६}{७६}$; $\frac{१४}{५५}$. (२) $\frac{७}{१२}$; $\frac{३}{४}$; $\frac{१८६}{२६६}$. (३) $\frac{१}{८}$;
 $\frac{१९७३}{२३}$. (४) $\frac{११}{११}$; $\frac{३१}{३१}$; $\frac{१६३}{२३}$. (५) $\frac{४३५}{३६}$; $\frac{३३}{३३}$.
 (६) $\frac{३}{२}$; $\frac{३३}{६४}$. (७) $\frac{४}{२}$; $\frac{६७३}{२}$. (८) $\frac{१५}{५५}$; $\frac{७}{४४}$.
 (९) $\frac{१७०५}{८}$; $\frac{२८०९३}{१६०}$. (१०) $\frac{३५१२}{२०४८}$.
 (११) $\frac{११२॥-॥}{१२८}$ पै.

ज.- (१) $\frac{१०५३४०१२६६०}{२१०}$; $\frac{१९२५३३२०३८४८४२०}{२३३०}$.
 (२) $\frac{१६१८२०२१}{२४}$; $\frac{१६८०२७१०४}{१४४}$.
 (३) $\frac{२४२८३०३१}{३३}$; $\frac{६०४५३६३३}{७२}$.
 (४) $\frac{६३८८१०२७६७५}{१४४}$.
 (५) $\frac{१६२१०८१४४२४१६}{२४३}$.
 (६) $\frac{१७२०३७८५२५६१२६०६७५}{१२६०}$.
 (७) $\frac{४४०७६५९००५०४२४०१०५०}{१०८०}$.
 (८) $\frac{५४०६३०२१६३३०२६०३४५}{९००}$.
 (९) $\frac{५४००६९३०२२४०१८२०३२१३}{७५६०}$.
 (१०) $\frac{१६८१६४०३४८४०८४३५}{४८}$.
 (११) $\frac{१५६२४३४०१५६२५४१३३}{४८}$.
 (१२) $\frac{२६०४२४२४५९००६४५५७६}{१२०}$.

(१३) $\frac{१५+८}{१२+८}$, $\frac{१५}{१२}$. (१४) $\frac{९}{२५}$, $\frac{८+३}{१७+२५}$, $\frac{८}{१७}$; $\frac{१३}{१४}$;
 $\frac{१३+१५}{१४+१६}$, $\frac{१५}{३६}$; $\frac{५}{८}$, $\frac{५+६+७+९}{६+७+८+९}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{९}{१०}$. (१५) $\frac{५}{१३}$;
 $\frac{९}{२०}$; $\frac{१२}{१८}$, $\frac{२९}{२७}$; $\frac{१०३१}{१४३}$, $\frac{७}{३१}$. (१६) $\frac{७३}{८४}$; $\frac{२८९}{७२०}$.
 (१७) $\frac{१४५}{४२८}$. (१८) $\frac{४२०}{१८२०}$; $\frac{४२०}{५०४}$; $\frac{४२०}{४८०}$; $\frac{४२०}{६६५}$; $\frac{४२०}{४६०}$.

झ.- (१) $\frac{२६}{७}$. (२) $\frac{२१}{८}$; $\frac{२३३}{३६}$. (३) $\frac{२४३}{१८०}$; $\frac{२१३}{३६}$.

- (४) $2\frac{43}{984}$; $1\frac{93}{20}$. (५) $3\frac{4523}{36024}$; $1\frac{3}{32}$. (६) $10\frac{36}{22}$;
 $1\frac{33}{32}$. (७) $3\frac{45}{92}$; $1\frac{33}{84}$. (८) $3\frac{633}{9020}$; $5\frac{334}{820}$.
 (९) $1\frac{94}{24}$; $6\frac{62}{90}$. (१०) $6\frac{306}{620}$; $1\frac{33}{800}$.
 (११) $1\frac{633}{20}$; $1\frac{64}{92}$. (१२) $3\frac{4333}{9840}$. (१३)
 $44||\equiv||-||$ इ०. (१४) $17||\equiv||$. (१५) $12-$. (१६)
 $1\frac{33}{6}$; $2\frac{3}{2}$. (१७) $1\frac{33}{4}$; $2\frac{33}{2}$. (१८) 4 ; $1\frac{633}{2}$.
 (१९) $1\frac{3}{2}$. (२०) $1\frac{33}{2}$. (२१) $4\frac{6}{2}$. (२२) सर्व.

- ब.- (१) $\frac{33}{6}$; $\frac{33}{9}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{3}{2}$. (२) $2\frac{3}{2}$; $1\frac{3}{2}$; $2\frac{3}{6}$;
 $10\frac{33}{2}$. (३) $\frac{49}{90}$; $5\frac{33}{2}$; $4\frac{6}{2}$; $2\frac{33}{4}$. (४) $2\frac{33}{6}$;
 $3\frac{33}{2}$; $2\frac{33}{2}$. (५) $3\frac{33}{6}$; $1\frac{33}{90}$; $4\frac{33}{20}$;
 $9\frac{6}{90}$. (६) $3\frac{33}{4}$; $1\frac{46}{6}$. (७) $3\frac{33}{6}$; $1\frac{33}{4}$; $5\frac{33}{6}$;
 $1\frac{633}{2}$; $1\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{4}$; $2\frac{33}{4}$. (८) $3\frac{33}{2}$.
 (९) $4\frac{33}{2}$. (१०) $2\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{4}$; $\frac{9}{2}$. (११) $2\frac{33}{6}$.
 (१२) $1\frac{33}{2}$. (१३) $4\frac{9}{96}$. (१४) $\frac{9}{3}$; $\frac{9}{6}$; $1\frac{33}{6}$.
 (१५) $10\frac{33}{6}$; $1\frac{33}{2}$. (१६) $6\frac{33}{6}$. (१७) $9\frac{33}{6}$.
 (१८) $9\frac{33}{2}$. (१९) $2\frac{9}{3}$. (२०) $3\frac{33}{6}$; $3\frac{33}{4}$.
 (२१) $1\frac{33}{2}$. (२२) $1\frac{2332263}{2332263}$.

- घ.- (१) $\frac{46}{6}$; 1 ; $\frac{9}{2}$. (२) $6\frac{4}{6}$; 3 ; $40\frac{33}{2}$.
 (३) $4\frac{9}{2}$; $6\frac{3}{2}$. (४) $\frac{9}{2}$; $6\frac{33}{4}$. (५) $1\frac{33}{2}$;
 $1\frac{633}{2}$. (६) $10||$; $1\frac{6}{6}$; $1||\equiv||$; $1||\equiv||$. (७) $10||$;
 $2\frac{6}{6}$; $6\frac{33}{2}$. (८) $30\frac{43}{9}$. (९) 2 . (१०) 2 .
 (११) $2\frac{33}{2}$; $3\frac{33}{6}$; $1\frac{33}{2}$. (१२) $2\frac{33}{9}$; $1\frac{633}{9}$.
 (१३) $3\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{2}$; $1\frac{33}{2}$.
 (१४) $2\frac{6}{6}$. (१५) $3\frac{33}{2}$. (१६) $1\frac{33}{2}$. (१७) $10\frac{33}{2}$.

- ङ.- (१) 3 ; 4 ; 4 ; 6 . (२) 1 ; 4 ; $2\frac{6}{6}$.
 (३) $\frac{9}{2}$; $1\frac{33}{2}$. (४) $\frac{4}{6}$; $6\frac{33}{4}$. (५) $3\frac{33}{2}$; $4\frac{33}{6}$. (६) $1\frac{33}{2}$;
 $4\frac{33}{2}$; $2\frac{33}{2}$. (७) $4\frac{33}{2}$; 2 ; $1\frac{33}{2}$; 2 . (८) $10\frac{33}{2}$.

२३; ३८ $\frac{२}{११}$. (९) $\frac{३४}{७}$; १६; $\frac{१३९}{२४५}$. (१०) १.
 (११) $\frac{८१}{१००}$. (१२) $\frac{१}{५}$; $\frac{२}{१७}$. (१३) $\frac{६६}{२२५}$; $\frac{३८४}{५२५}$.
 (१४) $\frac{३}{११}$. (१५) $\frac{१२६३}{२८०}$. (१६) $\frac{१००}{२८७}$. (१७) $\frac{१६१३}{१७६०}$.
 (१८) $\frac{२२५}{१८}$. (१९) $\frac{१७१}{५७४}$.

उ.- (१) $\frac{३}{५}$; $\frac{३१}{२}$; $\frac{५१}{७०}$; $\frac{३३३}{५६२}$; $\frac{८}{६७}$; $\frac{४५}{२५४}$; $\frac{४२०}{८४३}$; $\frac{१४३}{१७७}$.
 (२) १; १; $\frac{२६}{२२}$; $\frac{२३}{२२}$. (३) ३; $\frac{४८}{१५५}$; $\frac{४६}{२५९}$; $\frac{३}{११}$.
 (४) ७; $\frac{५११}{१२}$; $\frac{१२३५२१}{६४७०४}$; $\frac{४२५}{४४८}$. (५) $\frac{९३३}{१२२०}$; $\frac{११२५}{५११७}$.
 $\frac{२५}{१७८}$. (६) $\frac{२८}{३५}$; $\frac{३}{४३}$; $\frac{२५५}{२६४}$; $\frac{७}{२२}$. (७) १; १.
 (८) $\frac{३९}{१३}$. (९) $\frac{३}{२}$; $\frac{७३३}{३५}$. (१०) $\frac{८६७}{१२८०}$; $\frac{१३}{४}$.
 $\frac{३७}{२७५}$. (११) १; १. (१२) $\frac{१४}{८१}$; $\frac{३४}{८१}$. (१३) $\frac{१३}{४}$.
 $\frac{२३६}{११५}$; $\frac{४१}{६}$. (१४) $\frac{३७२७}{१६३६}$; $\frac{४१२०९२३}{२५२८८५}$; $\frac{१४३२}{६४}$.
 (१५) $\frac{६२३}{३०}$; २. (१६) १; $\frac{३}{४}$. (१७) ५; १८.
 (१८) ६६. (१९) $\frac{१४४२}{१२३}$. (२०) $\frac{७५}{१७}$. (२१) $\frac{३}{२}$.
 (२२) १. (२३) $\frac{२२६}{२५२}$. (२४) २.

उ.- (१) ४ खं. ४ म. (२) ७ गुं. $\frac{२२}{३}$ आ. (३) २५ घ.
 १८॥ प. (४) २ रुं. ११ आ. ४ रुं पै. (५) १७ शि.
 ६ पे. (६) १७ शि. ७॥ पे. बेरीज. १३ शि. १०॥ पे.
 बजा. (७) ६ फ. ९ पो. २ या. (८) १२ आ. ५ पै.
 (९) $\frac{८७५०३४}{३७}$. (१०) १९ अ. १९ मि. (११) ४ खं.
 $\frac{२}{५}$ म. (१२) १५ हं.वे. १३ पौं. १२ औं.; २ रुड. २१
 पो. २४ यार्द. ६ फूट. १०८ इंच.; ५ फर्लांग. ३२ पो. १
 यार्द. १ फूट. ६ इं.; ४ फर्लांग. २२ पो. २ फूट. (१३) १६
 तांस. १९ मि. १२ से.; ३७ पर्च. २४ यार्द. ६ फूट.
 १०८ इंच; ३ क्वार्टर.; ३ एल. १ क्वा. २ नेल. $\frac{३}{५}$ इंच.
 (१४) १०९ दि. १३ ता. २० मि.; ३ हं.वे. १ क्वा. ६ पौं.
 ३ दि. ११ ता. १६ मि. (१५) १ ग्यालन.; २० चौ.
 यार्द. ५ चौ.फू. ९० चौ. इं. (१६) ८ पौं. ५ शि. ६ पे.;

४ पाँ. ० शि. $८\frac{१}{४}$ पे. $\frac{३}{४}$ फा. (१७) २ का. १७ पाँ १ औं.
 $३\frac{३}{४}$ द्रा.; १२ हं.वे. २ का. १४ पाँ. १० औं $१०\frac{२}{३}$ द्रा.
 (१८) २ मैल. ६ फर्लांग. २२ पो. ३ इंच.; १०० एकर.
 ३ रूड. १७ चौ.पो. (१९) ४ दिवस. २३ तास. ३१ मि.
३१ $\frac{३}{४}$ सेकंद.

ण.- (१) $\frac{३५}{३८}$. (२) $\frac{६}{११}$. (३) $\frac{३}{१६०}$. (४) वजा
 जात नहीं $\frac{१२७}{५६०}$ इतक्यांनी अधिक आहे. (५) $\frac{५३}{१२८}$ पाँ.त्रा.;
 $\frac{४५२}{१४००}$ पाँ. अंवा. (६) $१५\frac{२९}{३२}$ हं.वे.; $\frac{५००}{६४०}$ टन. (७) $\frac{४७}{६४}$ का.
 (८) $\frac{२८७}{२८८}$ हं.वे. (९) $\frac{८९९}{१२२०}$ मैल. (१०) $\frac{३}{११}$. (११) $\frac{१}{३}$.
 (१२) $\frac{२८८०}{१७}$. (१३) $\frac{३३}{७}$.

त.- (१) १४७० हांडे. (२) ३८ मो. (३) $१२\frac{४}{७}$ फरे.
 (४) ११ ट. ४ का. १ बु. ३॥ ग्या. (५) $२४\frac{१३५५}{१५८४}$ पट.
 (६) $\frac{८५१}{१७००} = \frac{१}{३}$ सुमारे. (७) $१\frac{५}{१६}$ खं.

थ.- (१) ६ तास.; ३ दि. १२ तास. (२) ४ शि.
 ३ पे.; १३ पाँ. १४ शि. ६ पे. (३) ४५ यार्द; $३३\frac{३}{४}$ फूट.
 (४) १ पाँ. ० औं. ३ पे. वे. १६ ग्रेन. (५) २१ पाँ.
 ६ औं. ८ द्राम.; ६ हं. वे. २ का. २४ पाँ. १४ औं. $३\frac{५}{८}$ द्रा.
 (६) $२६\frac{१}{१५}$; $७\frac{३}{१२}$. (७) १५ पाँ. (८) ६ एकर. १
 रूड. २० पर्च. (९) १७॥ चांद्रमास.

द.- (१) ३'७; ५'४३; ८५०२'४७६५००३९०२;
 १२५'८०५०००४०६; ४००'०५००६. (२) २८'२५८७;
 ५०'४००६; ००००७०९; ०००८००६१०; ००४६०८.
 (३) ८४'०३; ४०००४'७१५; २८०'४; ७०'०४;
 ९'००८. (४) ४७'८५१४; ६'०४८००५२. (५)
 (६). (७) ८००'३०५६; ८००३०'५६; ८०.०३०५६०'
 (८) ०'१७२८; ०१७'२८; ००५२३६००' (९)
 ७'३५६; ०७३५६; ०३७१६५; ०००३७१६५. (१०)

$00050324; 09; 0000009. (17) 4 + \frac{3}{9} +$
 $\frac{9}{900} + \frac{9}{9000} = \frac{8309}{9000} = \frac{39}{2}; \frac{2}{90} + \frac{9}{900} + \frac{9}{9000}$
 $+ \frac{9}{90000} = \frac{2329}{90000} = \frac{93}{96}; \frac{3}{90} + \frac{9}{900} + \frac{9}{9000} +$
 $\frac{9}{90000} + \frac{9}{900000} = \frac{30809}{900000} = \frac{303}{2000}; 23 + \frac{9}{90} +$
 $\frac{9}{900} + \frac{9}{9000} + \frac{9}{90000} + \frac{9}{900000} = \frac{230409}{900000} =$
 $\frac{62003}{3924}.$ (12) $\frac{9}{90000} + \frac{9}{900000} + \frac{9}{9000000} +$
 $\frac{9}{90000000} = \frac{609}{90000000} = \frac{99}{16000000} + \frac{9}{90} + \frac{9}{900} +$
 $\frac{9}{9000} + \frac{9}{90000} + \frac{9}{900000} + \frac{9}{9000000} + \frac{9}{90000000}$
 $= \frac{5009609}{90000000} = \frac{96039}{32000}; \frac{2}{90} + \frac{2}{900} + \frac{2}{9000} +$
 $\frac{2}{90000} + \frac{2}{900000} + \frac{2}{9000000} = \frac{22246}{9000000} = \frac{3476}{9624}$
 (13) $93\frac{27}{800}; 9\frac{99}{3200}; 23\frac{99}{9600}.$ (14) $69\frac{9024}{96000};$
 $92\frac{969}{2080}.$ (15) 0; 99.0; 0.23; 9.096.
 (16) 09; 029; 0999; 00000006. (17)
 230037. (18) 9.99999. (19) 93.003004.
 (20) 90.990909. (21) $\frac{30}{90000}; \frac{9}{90000}; \frac{3}{8};$
 $\frac{3}{2}.$ (22) $\frac{3}{800}; 9\frac{9}{900}; \frac{3}{96}; 3\frac{9}{80}.$ (23) $\frac{99}{96000};$
 $\frac{3}{3200}; 23\frac{69}{96000}.$ (24) $9\frac{33}{64}; \frac{3}{9200}; 4\frac{9}{320}.$

ध.- (1) 38.62956. (2) 682.8398. (3) 3450993.698293.
 (4) 2892.2622923. (5) 99.0002; 3.8890. (6) 29.9334;
 3809.00093. (7) 99.00002; 9.0093. (8) 00000093;
 23.0968834. (9) 9; 2.7886. (10) 0.3293; 38234.
 (11) 96.6799888. (12) 94.634463. (13) 6.979246.
 (14) 0.38343. (15) 3.9896 हैं मान 11ले तर 9दश-
 सहस्रांशाच्या निमेहून जास्त कसर सुटेल, व 3.9896 हैं मान
 घेतले तर 9दशसहस्रांशाच्या निमेपेक्षां कमी कसर घेतली
 जाईल, म्हणून 3.9896 हैं मान घेण्यांत चूक कमी होईल.

न.- (1) 723.6; 986.8469. (2) 00000009; 78.949.
 (3) 0.7104; 0000602. (4) 0093094; 9.4. (5) 4.39849.
 (6) 8.096. (7) 0009238329. (8) 00088808.

(९) ०१७७७७५; ००१. (१०) १२६६८०६; २३६८६७६;
००१. (११) ०६७२; ९५६७०९.

प.- (१) ६२५; ०००६२५. (२) ६२५००००; ००००६२५.
(३) ४९००००; ६३ (४) १८५; ३०. (५) ४०००; ८७८९०६२५.
(६) २४; १२००. (७) ०००१५६२५; ७११६८५८०. (८) ०१२२६९९६०.
१५६८६२७. ६०. (९) ३३८८२७८ ६०. ०००३८३१७७५७. ६०.
(१०) २९०; ०१४९७४ ६०. (११) १०; १००१; १५४५;
११००००. (१२) २१३२; २५०००००; ००९९९०००९९९०...
(१३) ३००. (१४) ००२१३...; ००६५००८... (१५) ६०३६०...;
९१३३६... (१६) ३०६८५; २०५०. (१७) १४७; २२९६.
(१८) १५८४५६८६; ०००१९... (१९) ९; ८५१; ३२६४.
(२०) २८१२५ (२१) ९६१६८३२३२१. (२२) ६४००.

फ.- (१) ०४; ०५२; ५२५; १६. (२) ८४८; ११०१३६;
१५६२५; ५१८७५. (३) ७२०३१२५; १३२८१२५; ०००१५६२५;
११००१६९६, (४) ००१९५३१२५; १०००९७६५६२५;
००९२८५७१४. ००१३६७१८७५. (५) १७०५; ००२१६; ३२.
(६) १४; ५७२; १३४५; ००१२३६. (७) २९२८५७१४; ५०४५;
००१३२; २३१५६. (८) ०००८९; ५७६१९०४; १७१२९३१;
०१२३४५. (९) ००३६४८; ०१००३३७८; ०४०८६४; ०२०५०२;
(१०) ०५८८२३५२९४११७६४७; ०४३४७८२६०८६९५६५२१७३९१३;
०३४४८२७५८६२०६८९६५५१७२४१३७२३१; ०३२२५८०६४५१६१२९. (११)
६; ४; १४८ ०९८७६५४३२; ०१२३४५६७९. (१२) १४५;
१४७७२; ००२७६३; (१३) ०५४; ०४९५; २४३९०२; ०९२२५.
(१४) १४२८५७; ०७६९२३ ००३३६७; ००२४५७.

ब.- (१) $\frac{१}{३}$; $\frac{५}{९}$; $\frac{६}{११}$; $\frac{२७}{३७}$. (२) $\frac{४}{१६५}$; $\frac{८}{१८५}$;
 $\frac{३२३३}{३३३००}$; $\frac{१०७}{२४७५}$. (३) $\frac{२३}{१५५}$; $\frac{१३३}{३०००}$; $\frac{८}{१५५}$; $\frac{८९}{१२८००}$;
(४) $४\frac{५९}{११३०}$; $\frac{१६९९}{२२२०}$; $\frac{१९}{१५५}$; $\frac{४१}{४४०}$; (५) $\frac{१०१}{१११०}$.
 $\frac{१११}{२०२}$; $\frac{१३}{७०}$. (६) $\frac{२९}{१४}$; $\frac{५१७}{८८}$; $\frac{१११९}{६६०}$.

भ.- (१) ४७४११४५५२८६. (२) १६८७०२; ९११४५६. (३)

०२४; ००३२७११६५ (४) ०८५७१४२; ०००५८. (५) ९९२८;
 २२९७. (६) ३१७९९; ३५२०८५६४. (७) ३६; ००५२.
 (८) ४९; ११४५.

म.— (१) ३९०६; २६७९०. (२) ६४३३१९; २२४६. (३)
 २७००२९५; १५४५६४५. (४) १३०८००३६. (५) १४२७६५६८७
 (६) २३५१०१; (७) ३१४४. (८) १००७११; (९) १३६२.
 (१०) ६६. (११) १९; ०; ०; १८. (१२) ००६; ००१.
 (१३) १९७२; ३६७८; १८१९. (१४) ००३; ०००; ३२७.
 (१५) २३८२; ००३३; ६४०२. (१६) ००१; १३०; ६२९७.
 (१७) १३०; ००; ४५६. (१८) ११०३७; ११५९६; १३४४७.
 (१९) ११५८६६; ११४४३२५८. (२०) १२३१२; २९०५०२४.
 (२१) ७२३८८८८८८; ७०३१८; २१४८५८१८३. (२२) ३०८३;
 ६०७. (२३) ०००२९३८. (२४) १ला महत्तम व २रा

लघुतम. (२५) ११२०११२००००९. (२६) ३८८७७५५...
 (२७) $\frac{3}{9} \frac{3}{0} \frac{3}{6}$, ३१४१५९२६, आणि $३ + \frac{१}{७ + \frac{१}{९}}$. (२८)
 ३६; ८५; १११५; ००९४. (२९) (१) २४९९९९... (२)
 १६६६६६... (३) ०००९७०६१. (४) १७१८२८१... (५) २०२७३२...
 (६) ३१४१५९२...

य.— (१) ५ शि. ७।। पे. (२) ५ पौं. ० शि. ३।।। पे.
 (३) १४७ आ. ०दि. २अं. ०मि. ५४ $\frac{६}{९}$ सेकंद.
 (४) ४९।। चौ. फू. (५) १ रू. ३९ पौं. २८ चौ.यार्ड
 २ $\frac{३}{४}$ चौ.फु. $\frac{१२५}{५५०}$ चौ.इं. (६) ००४२५७०७ टन.
 (७) ००४५७१९०४७इं. (८) ००५६२५ को. (९)
 ००४४९९६८७५. (१०) ००४७२. (११) ४०७४.
 (१२) १२. चांद्रमास. बाकी. १०८८२९३ दि.

र.— (१) २०२५. (२) ७३८५७१४२८. (३)
 ५६०८७इं. (४) २६९६२५. (५) १०१५४८७५.
 (६) ७७५७१४.

ल.- (१) ६ पे. (२) १५॥ कोस. (३) ३०६ दि.
 (४) ६ पे. (५) ६. (६) १॥. (७) ६८॥ रु.
 (८) २ पौं. २ शि. (९) २५. (१०) ३०१ पौंद.
 (११) २८८ ग्रे. (१२) ५४॥ = (१३) $\frac{३५५}{९}$. (१४)
 ७८३३ रु. ५ आ. ४ पै. (१५) ५०४० पौंद. (१६) २३६
 पौं. ८ शि. ६ पे. (१७) २८६ $\frac{२}{३}$ मैल. (१८) पहिल्या.
 (१९) ३ $\frac{३}{४}$ तास. (२०) १९ $\frac{१}{६}$ दि. (२१) २ $\frac{२}{३}$ दि.
 (२२) २ $\frac{२}{३}$ मि. (२३) १० दि. (२४) ४ तास. (२५)
 १८ दि. (२६) $\frac{२५}{३६}$. (२७) ४ अवर २१ $\frac{५}{९}$ मिनितांनी
 ६ अवर ३३ $\frac{५}{९}$ मि.; व ९ अवर ४९ $\frac{१}{९}$ मि. (२८) ४ अवर
 ५ $\frac{५}{९}$ मि. व ३८ $\frac{२}{९}$ मि. ७ अवर २१ $\frac{५}{९}$ मि. व ५४ $\frac{६}{९}$ मि;
 ११ अवर १० $\frac{१}{९}$ मि. व ४३ $\frac{७}{९}$ मि. (२९) १ अवर ३८ $\frac{२}{९}$
 मि; ४ अवर ५४ $\frac{६}{९}$ मि; ८ अवर १० $\frac{१}{९}$ मि. (३०) १८००
 पौंद. (३१) ५ शि. ६ पे. (३२) ६ पौं. १२ शि. (३३)
 २६० $\frac{३}{४}$ रु. (३४) ९० मैल. (३५) ६७ पौं. ६ शि. ८ पे.
 (३६) २ $\frac{२८}{३}$ पौंद. (३७) ७ महिने. (३८) ४८०.
 (३९) २३० $\frac{२}{३}$ रु. (४०) ११२६८. (४१) २०.
 (४२) ७५. (४३) ६ आठवडे. (४४) २ दिवस.

व.- (१) २० (२) ७. (३) २०४. (४) २५०.
 (५) १६६४०. (६) ४५०.

श.- (१) १ $\frac{१}{२}$; २ $\frac{२}{३}$; २ $\frac{२}{३}$; ६. (२) २ $\frac{२}{३}$; ३ $\frac{३}{४}$; ३ $\frac{३}{४}$; ६ $\frac{३}{४}$.
 (३) ३ $\frac{३}{४}$; ४ $\frac{४}{५}$; ४ $\frac{४}{५}$; ७ $\frac{१}{२}$. (४) ४ $\frac{४}{५}$; ५ $\frac{५}{६}$; ५ $\frac{५}{६}$; ८ $\frac{२}{३}$.
 (५) १ $\frac{१}{६}$; २ $\frac{२}{३}$; २ $\frac{२}{३}$; १७ $\frac{१}{२}$. (६) २ $\frac{१}{२}$; ६ $\frac{२}{३}$; ६ $\frac{२}{३}$; १०.
 (७) १ $\frac{५}{६}$; २ $\frac{४}{६}$; २ $\frac{४}{६}$; ३१ $\frac{१}{२}$. (८) ५; ५; ५; ९ $\frac{४}{५}$.

ष.- (१) १५ : १२ :: १० आवे : ८ आवे. : (२)
 १७ तो : ६ तो :: ३४ : १२. (३) ५ : १० :: ९ : १८.

(४) ४ : ४८ :: १ पायली : १ मण. (५) २० : ३०
 : : ॥० : ॥३० (६) ३ : ५ : : २१ : ३५.
 (७) क्ष : य : : य : ज्ञ. (८) क : ग : : ख : ख.

स.- (१) ३ : ५; ९ : ४९; ७ : ८; २ : ३; २०९ :
 ५१०; १२ : ६; ४ : ३; १६ : १८; २७ : २१. (२) २ : ५;
 ९ : ५०; १०० : ४८३. (३) ७ : ९; ८ : १५; ४५ : १५३.
 (४) नार्ही. (५) नार्ही, ४ थें पद ४५५ घ्यावें. (६)
 ६; ०१; २६९३३. (७) ९३ : ८१. (८) क :
 ख : ग : घ = १६ : २४ : ३० : ३५. (९) ३२३ : ३२४.
 (१०) ७२ शेर. (११) ११. (१२) ९ : ८.

ह.- (१) १० रु.; २॥४ खं.; ७२ रु. (२) २९ $\frac{१९}{३७३}$ वि.;
 ५५ रु. (३) ११० या.; १२३ वा. (४) २४॥ ॥३ $\frac{४२३}{४८९}$;
 २२॥६५ $\frac{२२६७}{१६८०५}$. (५) १॥२॥६ $\frac{१०७}{२१५}$; २०६६२ $\frac{२५३३३}{११३४४३}$.
 (६) ५८६ $\frac{३}{३}$; ५॥॥ १ $\frac{५३}{७३}$ पै. (७) ५६ $\frac{४९}{७३}$ को; १ अ.
 १३ मि. ४६ $\frac{३}{३}$ से. (८) ७३ ए. १३ गुं. १॥॥ $\frac{३७}{३०८}$ आ;
 ॥॥२ $\frac{२६६}{३३३}$. (९) ९॥॥॥ $\frac{२१}{९०}$; ४ पाँ. १५ शि. ६ $\frac{१९}{४०}$ पे.
 (१०) ८॥॥ $\frac{११}{२०}$ पै; ११ पाँ. ९ शि. ४ $\frac{१}{२०}$ पे. (११)
 १५० मनु; १० महिने. (१२) १ वर्ष; १७१ मनुष्यें.
 (१३) ४ आठवडे; ॥॥॥ $\frac{३}{३}$ पै. (१४) ६२२ वि.
 ४ पां. ८ $\frac{६}{६}$ का; ३॥॥ पावशेर. (१५) १०९॥-१ $\frac{५}{३६}$ पै;
 १०७८॥ $\frac{६}{७७}$ पै. (१६) ८॥॥ $\frac{३०७१}{३१५९}$ ३३९८॥२.
 (१७) २१८॥॥ $\frac{५३३}{६०९}$; १३ म. २३ $\frac{२३}{७९}$ शेर. (१८)
 ६३८११ $\frac{१०९६७}{११३०३}$; १३१४॥ $\frac{७८७}{२४०४४}$. (१९) १२१८ $\frac{९३१०}{४९३२९}$;
 ४४३ शेर. (२०) ९५४५४५४॥॥ $\frac{१}{९९}$; ७९ पाँ. १ शि.
 ७ $\frac{१}{२}$ पे. (२१) ७१३४३८ $\frac{३}{३}$; १४ पाँ. ८ शि. ११ $\frac{७}{२५}$ पे.
 (२२) २३॥॥ $\frac{४२३}{२३}$ पै; ०५२ मि. ६ शि. ७ $\frac{१३}{२५}$ पे. (२३)
 १६२०९६ फू; ९८॥॥ $\frac{४७}{७३}$ पै. (२४) १४॥॥-१ $\frac{१६०}{३४७}$;

- $9111 = 1\frac{3}{7}$ पै. (२५) $51 - 11\frac{2}{3}$ पै; $1 - 6\frac{9}{2}\frac{3}{7}$ पै. (२६) १८ शि.
 $2\frac{4}{8}$ पै. १७४॥ - ॥ $2\frac{8}{9}$. (२७) १०४५॥ - ११; १४०.
 (२८) $68\frac{3}{4}\frac{9}{9}$ दि.; ७७२२ चिरे. (२९) $9\frac{1}{2}\frac{6}{9}$.
 (३०) ३२ फू. १ इंच., १५२ फू. ४॥ इंच. (३१) २१ तास.
 (३२) १२८० मनुष्यें. (३३) ६८ दि. १३ ता. ४२ मि.
 $5\frac{9}{6}$ से. (३४) २८६ मै. १ फ. $9\frac{3}{3}$ पो. (३५)
 ७९५ रुपये. (३६) दर शेरों $6 - 11\frac{2}{3}\frac{3}{9}$. (३७)
 $2२८ - 11\frac{9}{2}\frac{9}{9}$ पै. (३८) $1 = 1\frac{9}{9}\frac{9}{9}$ पै. प्रत्येक रुपयास
 ४५७८१ एकंदर तोटा. (३९) रु. १०१८५८८. (४०)
 $१३६८८ =$. (४१) ५४७५६५ (४२) पौं. १०६. ११. ६.
 (४३) $७४\frac{9}{9}\frac{9}{9}$ दि. (४४) ५३८९ . (४५) पौं. ४. ४. ०.
 (४६) १ पौं. १५॥ औंस. (४७) २५७ पौं. १० शि.
 (४८) १४०० पौं.; $३\frac{3}{9}$ पे. (४९) १० ता. ४० मि.
 $३६\frac{9}{9}$ से. (५०) पौं. १. ११. $१०\frac{9}{9}$. (५१)
 पौं. ३. ७. १०. (५२) १ ता. १० मि. $१३\frac{४}{9}$ से.
 (५३) २४००. (५४) १ शि. १० पे. (५५) दि.
 ता. ३ दुपारानंतरचे ३ वाजतांना. (५६) २ शि. ८॥ पे;
 पौं. ६१. १८. $०\frac{9}{9}\frac{३९}{३०}$. (५७) २८८. (५८)
 पौं. १. १५. ९. (५९) ९ मि. (६०) पौं. १९६३५४१.
 १३. ४. (६१) २८. (६२) $२५\frac{३}{३}$. (६३) २ हं.वे.
 ३ का. २० पौं. $५\frac{४९}{9}$ औं. (६४) २७ इंच. (६५)
 पौं. १०. ५. $१\frac{३}{9}\frac{५}{३}$. (६६) ६ मि. ५२॥ सें. (६७)
 गुरुवार दुपारानंतर ८ वाजतां. (६८) १७ का. ३॥ पेक.
 (३६५ दिवसांत). (६९) १५. (७०) $१३\frac{9}{9}\frac{9}{9}$ मि.;
 $१३\frac{२९}{9}$ मि. (७१) १०४ दि. (७२) ११ दिवस;
 $१२\frac{६}{9}$ दिवस. (७३) २७५६२५. (७४) ११ मैल.
 (७५) ३ ता. २५ मि. मध्यान्हानंतर. (७६) २ तां. ३२
 मि. $१९\frac{३}{9}$ सेकंद.

- ळ.- (१) १ व. ४ म. (२) ३२. (३) ३६०.
 (४) ४०. (५) २०. (६) १२५. (७) $३२\frac{३७}{१२८०}$.
 (८) २४४८. (९) $९९\frac{३}{८}$ दि. (१०) ११४ पौं. ६ शि.
 (११) $४५\frac{५५}{२१}$. (१२) $१११\frac{८९}{६}$. (१३) ६४० रुपये.
 (१४) १०. (१५) ११। रु. (१६) ३६. (१७) $२६\frac{४}{९}$.
 (१८) ३६ दि. १० अ. (१९) १७।।।३. (२०) $२८\frac{३}{४}$.
 (२१) $१०४\frac{७३}{१२०}$ दिवस. (२२) ३५१० पौं.

- क्ष.- (१) २१३, ३५६, ४९७, ५२५, ३१५, २२५.
 (२) $२०४८ = ८\frac{३४}{९}$; $२८९।। = १।।१\frac{३}{९}$ पै; $३०६८ = ८१\frac{५}{३३}$ पै.
 (३) $४६६।। = १।।२$, ३५०, २८०, २३३।-११, २००.
 (४) ४.१७ तोळे. (५) खं २।।२।।६ $\frac{१८}{३७}$ टां. आणि म.
 $८५।। ९।।।११\frac{१९}{३७}$ टां. (६) $१०।।\frac{११}{८०}$ मासे रुपें. (७)
 $१९७८।।२\frac{५}{७}$ पै; $१३७।।। = ८\frac{१२}{७७}$ पै. (८) $७९\frac{१}{३}$ कसाचें.
 (९) १४०; २८०; ४२०; ५६०. (१०) $७६।। = १।।\frac{६}{७}$ पै;
 $७०।। - ११\frac{१६}{७}$ पै; $५२।।। = ८\frac{१२}{७७}$ पै. (११) ७६, ९।।, १४।।.
 (१२) $६८।।।\frac{४८}{९}$ पै; $४७।। = १।।२\frac{३३}{९}$ पै; (१३) ३।। शेर.
 (१४) $१०३८ = १२८।। = १।।$; $४२।। = १।।$. (१५) ८८९, १११.
 (१६) ३३३।-११, ६६६।। = १।।२. २०००. (१७) ८५.
 (१८) १००; $२\frac{३२}{४६}$. (१९) $१।। = १।।२\frac{१}{३}$; $३।। = ८१\frac{३३}{३३}$,
 $१।।।।२\frac{१३}{३३}$. (२०) १००; ३००. (२१) पौं. १२१,
 ५, ६; पौं. १७९, ११, ०; पौं. २९२, १२, ०.

(२२) ही जिनगी १ असून हिच्या भागांची बेरीज १ पेक्षा
 अधिक येते या दृष्टीने ही इच्छा असंभाव्य आहे. दिलेल्या
 प्रमाणांत भाग होतात. हणून उत्तरं पौं १८३, १५ शि.; पौं.
 १२२, १० शि.; पौं. ९१, १७, ६; पौं. ७३, १० शि.
 (२३) ४, २, १. (२४) क ५ शि.; ख ६ शि. ८ पे.;
 ग ८ शि. ४ पे.; क ५ शि. ४ पे.; ख ६ शि. ८ पे.; ग

८. शि. (२५) ति. ते. $१६\frac{५}{८}$ शेर, क. ते. $२५\frac{१}{४}$ शेर.
 (२६) पौं. ३५००, पौं. ४९००, पौं. ७०००, पौं. ८४००.
 (२७) अनुक्रमें रु. ३७५, २७०, व. १०५. (२८) पौं.
 २०७. ५. $६\frac{३४}{७३}$ पौं. २२९. ३. $११\frac{५३}{८३}$. (२९)
 कौ. १००, शि. १७५, व पे. २५०. (३०) पौं. ८.
 १९. ६; पौं. १३. ९. ६. (३१) रु. ११२॥ (३२)
 २ हं.वे. १ का. २१ पौं.; २० हं.वे. ३ का. १६ पौं.
 (३३) $\frac{४१४}{१७७३}$, $\frac{३६}{१४३}$, $\frac{६२}{२८६}$. (३४) ४ ग्या. १ का.
 $\frac{१४}{१३}$ पिं.; ६ ग्या. ३ का. $०\frac{१३}{१३}$ पिं. ८ ग्या. $\frac{१५}{१३}$ पिं.;
 १३ ग्या. १ का. $\frac{१२३}{२६}$ पिं. (३५) ३ शि. ८ पे.; १
 शि. ७ पे.; ५ पे. (३६) ३०९४४०, ३१३३०८,
 ३७७१३०. (३७) ५६, ५०, ३२, १६, ४६.

का.— (१) शंकडा ४४ मुलें; ७२ पौं. ९ शि. ३ पे;
 व १८ शि. $१\frac{३}{८}$ पे. $\frac{१३}{२०}$ फा. (२) ७५८४४५६४३
 (३) ३४८७७. (४) ३३७ पौं. १९ शि. $४\frac{३४}{४५}$ पे.
 (५) २०० पौं. (६) १२॥; $२८\frac{४}{६}$; $४९\frac{१}{३}$; $२६\frac{३७}{३३}$;
 $१८\frac{१३}{१३}$. (७) $२\frac{३}{३}$; $१९\frac{३}{८}$; $११\frac{३८७}{५८३} = ११.६६३८...$
 (८) ७१.३५८ ..., १०.५५६, १६.९८० ...,
 ४५.३ ..., ६५.१ ... (९) ३४.९४७ ...,
 ४९.३९३८ ..., २६.६४३ ..., १५.५१३१६ ...
 (१०) १२.०१८ ..., ६.२७६ ... (११)
 ५२.३१२ ..., ९१.१५८ ... (१२) ५.३४९. (१३)
 ९.३१६७ ... (१४) ४४१५० रु. (१५) $४\frac{३}{८}$. (१६)
 २०८ पौं. (१७) ३७६ पौं. (१८) ३६० पौं. (१९)
 ८.१०० पौं.; १६८ पौं. १५ शि. (२०) ३२०० पौं. (२१)
 १४४०० पौं. (२२) ११४८ पौं. (२३) शंकडा $७\frac{३}{४}$;

११५ पौं. १५ शि. ५ पे. (२४) ७२ ग्या. (२५)
१०६ ट. १८ हं. वे. २ का. १५ $\frac{३}{३}$ पौं.

खां.— (१) १७२॥१. (२) ८० रु. ४ रें. (३)
४४२॥११२ $\frac{६९५}{७७३}$. (४) २७३८॥॥ २ $\frac{३}{३}$ पै. (५)
४४॥॥॥. (६) ६२३॥॥॥ १ $\frac{२६}{७७}$. (७) पौं. ६. ११.
६॥. (८) पौं. १. १८. ७ $\frac{३}{४}$. $\frac{१}{२०}$. (९) पौं. ३५०. १४.
१० $\frac{१}{२}$, $\frac{३०}{३०}$; (१०) पौं. ६. ४. ३॥. $\frac{३}{३}$. (११) पौं. ५१. १.
० $\frac{३}{४}$. $\frac{३}{३}$. (१२) पौं. २३१४. १८ $\frac{८}{४}$. $\frac{१३}{३}$ नि. न. रा.;
पौं. ७६६६६. १२. ३ $\frac{३}{४}$. $\frac{१}{२}$. देईल. (१३) पौं. ३.
१७. ४ $\frac{१}{४}$. $\frac{१}{२}$. (१४) पौं. २९७. ५. ० $\frac{१}{२}$. (१५) ४॥ शे.
(१६) १२५ पौं. (१७) पौं. ४८६. ३. १० $\frac{३}{२}$. $\frac{१७५८}{३८७७}$.
(१८) नुस्ता वर्ताळा पौं. १७२. १४. ९ $\frac{३}{४}$. $\frac{७४३३}{१२६१}$; सर्व
खर्च पौं. १९८. ६. ७ $\frac{०}{४}$ $\frac{११८०}{१२६१}$.

गा.— (१) ६॥—॥२॥ रें. (२) १२५ $\frac{५}{५}$ (३) १५॥॥.
(४) ९॥॥॥ $\frac{१३}{३}$ पै. (५) ८४८॥—॥ $\frac{१५}{७}$ पै. (६) ८३८॥.
(७) ८३॥॥॥ $\frac{१३}{३}$; (८) ४॥॥॥ $\frac{२३}{३}$ पै. (९) ४॥॥॥ $\frac{१३}{७}$ पै.
(१०) १४॥॥॥॥ $\frac{२}{२}$ श्रैं तोटा. (११) ६३॥॥॥ $\frac{२३}{३}$ पै.
(१२) १५॥॥॥॥४॥ रें. (१३) २७ पौं. (१४) १०॥ टक्के.
(१५) १८ $\frac{२}{११}$. (१६) पौं. १. १६. ६. (१७) ३ शि.
३। पे. (१८) पौं. १२. ६. ० $\frac{१}{४}$ $\frac{१}{२}$. (१९) पौं. ६. १५.
 $\frac{११}{२}$ $\frac{१८}{३७}$; $\frac{७}{७}$ (२०) ६. (२१) ११ शि. ८ पे. (२२)
 $\frac{३७}{२०८}$. (२३) २५; २०. (२४) १६. (२५) १०
शे. (२६) ३५ पौं. (२७) १७ शि. ७ $\frac{१}{२}$ पे. (२८) २
शि. ४ $\frac{१}{२}$ पे. (२९) १ शि. ३ पे. (३०) १२ पौं. (३१)
३ : १३. (३२) ११ : २. (३३) ५५ : ५३.

घा.— (१) १२५. (२) ३६॥—॥ $\frac{१३}{३}$. (३) ४५ पौं.
(४) १२७१८॥॥ $\frac{२३}{३}$ पै. (५) ८८७८— (६) २८५७

पौं. १० शि. (७) ७४४॥॥॥ १ $\frac{१}{२}$ पै. (८) ९८॥
 २ $\frac{१}{२}$ पै. (९) ३७ पौं. १७ शि. ३ $\frac{१}{२}$ पै. (१०) २०॥
 रु. (११) ५४३८-८३ $\frac{५७}{३}$ पै. (१२) ७६१२-८११ $\frac{२५}{३}$.
 (१३) १२३४- $\frac{२७}{३}$ पै. (१४) ४७०॥॥॥२२४.
 (१५) १२७॥॥॥ २४. (१६) पौंद २३ ७ १ $\frac{१}{२}$. (१७)
 ३३२४॥-॥ १ $\frac{४}{३}$. (१८) पौंद १३५६ १० ६ $\frac{३}{४}$ $\frac{१७३}{३}$.
 (१९) २२८८२ $\frac{८१}{३}$. (२०) ७३३॥-॥ ५ $\frac{१७}{३}$ (२१)
 पौं. ३६ १६ ७ $\frac{१}{२}$ $\frac{१३}{२}$. (२२) पौंद ४ १२ ६ $\frac{०}{४}$ $\frac{१३}{३}$.
 (२३) पौं. ६५ १ ६ $\frac{३}{४}$. (२४) रुपये ८१५८=८१ $\frac{२०७}{४}$.
 (२५) पौंद ७३ १५ १ $\frac{१}{४}$ $\frac{४२०}{४६०}$. (२६) पौं. ३४१५
 $\frac{२}{३}$. (२७) पौंद ३२ १५ ११ $\frac{३}{४}$ $\frac{३८५}{३१२}$. (२८) रु.
 १५६॥-॥ १ $\frac{४३३}{४३६}$. (२९) पौं. ३० ९ २ $\frac{०}{४}$. (३०) रु.
 ३९८=८१०६ . . . (३१) पौं. ७ १० ४ $\frac{१}{२}$ $\frac{८}{१०}$ (३२)
 पौंद ८१ ३ ६ $\frac{१}{३}$. (३३) पौंद ७ १५ ३ $\frac{३}{२}$ ५९ . . .
 (३४) पौं. २ १९ ८ $\frac{१}{२}$. (३५) पौं. ११४ १० ६ $\frac{३}{२}$.

डा.- (१) ५॥=८१ $\frac{३५}{४३}$. (२) ४२१॥॥२ $\frac{६७}{९}$. (३) ३ म.
 २६ $\frac{१४८}{२४७}$ दि. (४) ५॥॥॥. (५) २४ व. २ म.
 २७ $\frac{१०७१६३}{१२८२३१}$ दि. (६) १०५०. (७) २८॥॥२ $\frac{८६३}{४१२७}$.
 (८) १०४४१॥ $\frac{६}{७}$ पै. (९) ८॥॥=॥१ $\frac{१७॥}{२२०॥}$. (१०)
 ३ व. १० म. ४ $\frac{१६८५१}{१७५४॥}$ दि. (११) ५०१-. (१२)
 २०००१६५५ वर्ष. (१३) पौं. ६४९, ४, ६. (१४)
 रु. २२११॥॥२२६ $\frac{२२६}{३४१}$. (१५) ५९१५॥-॥१ $\frac{१२८}{१६३}$. (१६)
 ४६८ पौं. १६ शि. (१७) रु. ३९२८८१४८२ $\frac{२}{३}$.
 (१८) रु. ४९०३१-११. (१९) १२१६३८=॥ $\frac{६१}{१२}$.
 (२०) ६७८१॥॥२ $\frac{८}{३०७}$. (२१) ८४८९८८८८८ $\frac{१०४}{१०९}$.
 (२२) पौं. ३३९, १३, ८ $\frac{३}{४}$ $\frac{४९}{१४५}$. (२३) ५६९॥॥=.
 (२४) ४. (२५) रु. ३८४, (२६) ३ $\frac{१}{३}$. (२७) ३॥॥.

- (१०) ५ पाँ. १ शि. ८१ पे. (११) १-॥१०२. (१२) ५८२८३.८. (१३) ४॥॥=८१०.५ पै. (१४) ८५०० म.
 (१५) ५३० पाँ. (१६) पाँ. २४, १७, ११^०/_४ १^०/_४.
 (१७) रु.५९१४॥॥≡॥२^{१६८४}/_{११४४}. (१८) ११२३ पाँ. ४ शि.
 (१९) पाँ. १०४४. ११. १०^३/_४ ७^३/_४. (२०) पाँ. १२०. ०. ३.
 (२१) पाँ. १५२. १७. ४. (२२) पाँ. ४९. ११. १^०/_४ ७^०/_४.
 (२३) पाँ. ४६. ४. ०^१/_२ २^{१४}/_{१५५२}. (२४) पाँ. ६. २. ७^०/_४
^{३१४८}/_{९८०३}. (२५) पाँ. ६२. ५. ५^०/_४ १^{१५३}/_{१८६०७}. (२६)
 १९ शि. ९^१/_२ १^५/_{१०१}. (२७) ४ दरशोकडा. (२८) ८ महिने.
 (२९) ८१३ पाँ. ९ शि. (३०) दरशोकडा ५. (३१) खचा
 पाँ. ३३. ६. ८. ह्यानीं. (३२) ६ शि. ०^१/_४ ५^०/_४. (३३)
 ६ दरशोकडा. (३४) पाँ. १०६. ६. ०^१/_२ १^{१४}/_{२३}. (३५)
 ३॥ वपें. (३६) पाँ. ७१. ११. ९. (३७) पाँ. १६.
 १९. ३^१/_४ ७^५/_४. (३८) ०. (३९) ८^३/_३. (४०) ८० : ८३;
 ३२ पाँ. (४१) पाँ ४५. १६. ८; पाँ. १३. १. १०^३/_४ ७^३/_४.
 (४२) पाँ. ३२. ५. ०^३/_२ २^६/_{२७}. (४३) पाँ. ९७३. २. ६.
 (४४) ६^१/_४ दरशोकडा; ५७४ पाँ. १३ शि. (४५) पाँ. २२.
 ३. ४; पाँ. २०८. १६. ८. (४६) १८^३/_{२७}. (४७) ●
 पाँ. ६०७. १६. ०^०/_४ ३^{३४४}/_{३५८७}. (४८) पाँ. १०१८. ७.
 ४^३/_२ ३^{४८२}/_{३०६२७}. (४९) पाँ. ७०१. ८. ८^३/_४ (५०)
 पाँ. २११. १०. २^०/_४; ४६६ म. (५१) पाँ. ३३. १२.
 २^१/_२ ६२/_{७३}. (५२) पाँ. १८. ३. २^१/_४ ४^{१७}/_{५३१}. (५३) पाँ.
 ५४७. २. २^०/_४ ७^०/_३; ७ शि. ९^३/_४ ७^३/_३. (५४) पाँ. १. १६.
 ११^१/_२ २^{१२}/_{१८२५}; २^१/_२ पे २^{१२}/_{१८२५}. (५५) पाँ. १५८, ११.
 १^०/_४ ७^०/_३; पाँ. १५५. ७. ३. (५६) पाँ. १९१. १४. १^०/_४
 (५७) पाँ. २१०४. ५. ७. (५८) पाँ. १२२९. १. ३^१/_४.
 (५९) पाँ. २९६. १३. ४^१/_४. (६०) पाँ. ५२४. १०. ११^३/_४.
 (६१) पाँ. १००३. ७. ५.

- जा.- (१) ८२८=;४८= . (२) १ रु. (३)
 १२१८८१ $\frac{७३}{१२}$ पै. (४) १००॥-११ पै. (५)
 ८९॥॥॥॥२.८. (६) ५३१८=॥२ $\frac{३}{३}$. (७) ७७१॥=;
 १०॥= तोटा. (८) दुसऱ्या ठेवींत नफा. (९) १४६६॥=॥२
 ठेव, ४४ व्या. (१०) ५४५॥ $\frac{३}{३}$ पै तोटा. २२२॥॥१
 $\frac{७}{११}$ पै व्याज. (११) २५ तोटा. (१२) १३४६४॥ $\frac{६}{६}$ पै.
 (१३) २१२॥-११. (१४) ७१५. (१५) ३९॥॥॥१ $\frac{२५०}{११५७}$.
 (१६) पौं. २४२०, १, $\frac{३}{४}$ $\frac{२७३}{३८८}$. (१७) रु. ५०७५.
 (१८) पौं. ९४५८. ४. ७. (१९) रु. ८०६५॥=८२ $\frac{४}{१७}$.
 (२०) पौं. २९८०. १७. $\frac{३}{४}$ $\frac{३४}{२५}$. (२१)
 रु. ३८६३१॥ $\frac{४५}{७३}$. (२२) पौं. ३. ५. $\frac{३}{२}$ $\frac{३६}{४५}$.
 (२३) पौं. ४. १३. $\frac{३}{४}$ $\frac{३०३}{२४३}$. (२४) पौं. ५. १. $\frac{४३}{७३}$.
 (२५) पौं. ५८. १६. $\frac{५३}{२}$ $\frac{३०}{१७}$. (२६) १६०.
 (२७) पौं. ६४८. १४. $\frac{९३}{४}$ $\frac{९}{७}$. (२८) पौं. ९०३. १७.
 $\frac{८३}{४}$ $\frac{३६३}{३६७}$. (२९) ५८०५ पौं. (३०) पौं. १३६८२.
 ७. $\frac{७३}{४}$ $\frac{३}{२}$. (३१) पौं. २३. १७. $\frac{१३}{४}$. (३२) पौं. ४५.
 १०. $\frac{८३}{२}$ $\frac{२}{७}$. (३३) पौं. १५५. १४. $\frac{६३}{४}$. (३४)
 पौं. २२६९. १८. $\frac{३३}{४}$ $\frac{१७}{२}$. (३५) २०००. (३६)
 ९२ $\frac{१}{६}$ किंवा पौं. ९२. ०. $\frac{९०}{४}$ $\frac{१२}{३}$. (३७) द. शें. ३॥.
 (३८) व्यांकेच्या ठेवींत ८ शि. $\frac{४१}{४}$ नफा. (३९)
 पौं. ५३९१. ७. $\frac{१०३}{२}$. (४०) ५३००. (४१)
 पौं. २७२९. ०. $\frac{१३}{४}$ $\frac{४३}{१३१}$; पौं. ५. १३. $\frac{३३}{२}$ $\frac{८६}{१३१}$.
 (४२) पौं. ९. ५. $\frac{११३}{२}$ $\frac{४}{३}$. (४३) पौं. ५. १९. $\frac{५३}{४}$ $\frac{१३३}{२५३}$.
 (४४) पौं. ४०. १. $\frac{०१}{४}$ $\frac{१७}{७}$. (४५) पौं. ३. ५. $\frac{६३}{४}$.
 (४६) पौं. २४४. ६. ८. (४७) पौं. ७३२०.
 (४८) ९१ $\frac{३}{४}$. (४९) ११७॥. (५०) पौं. ९०६०.
 (५१) पौं. १३८५४. १७. ६.

झा.- (१) ३०२५; १७'३०५६; ४६'६५६.

'००००००००२'०५१११४९. (२) $\frac{४}{६}$; $४\frac{३७}{२७}$; $\frac{८१}{२५६}$;

$२२\frac{१५३३}{९६८०१}$. (३) ७||-; .।.; १|||≡।. ४४||। पै.

(४) ४; '०४; '०००४; '०००००८. (५) ६९९३४५२८;

६९९३४'५२८; ६९'९३४५२८; '०६९९३४५२८.

जा.- (१) १९६८३; ६'२५; $६\frac{३०३}{१२}$; ४०.९६;

१३७३'७४१८२४. (२) ५; २||; १. (३) '०००००'०१०२४;

१; ५'२३८; (४) १०८'२२८९०३७५; ३२'७६८; ८.

(५) १००००; $\frac{१}{२१६}$.

टा.- (१) ४५; ४'१५९९२; ०'०२७. (२) १'७३२०५०८;

२'२३६०६८०; ३'४४९४८९७; ३'४६४१०१६; ५. (३)

०'४२८५७१; ०'६६०२; ४'१६८३३. (४) ९'८६९६५; ३'५१७८१;

०'८४७७९. (५) २९; ३५'८७५; ७८; ७०'०४२८. (६)

०'६३२४५; ०'९८२६०७३; १ $\frac{१}{२}$; ३'९७४९. (७) २'५२९८; ०'८;

०'२५२९८; २५'२९८. (८) ३'५४९६; ८'०१२४९. ४'२७४३४;

६'४. (९) ०'९५४५१; ४८'६६९८; ०'३९०२४३६; ०'७९०९३६.

(१०) ४२०७; ८३५'७५४; ८४'५. (११) १०४२७०'२; ७५३८.

(१२) २१३; ०'०८; ३०९६. (१३) २७'३; ५८'०६; $\frac{१}{१०}$.

(१४) ०'०१६; ०'०७६९; ३'१४. (१५) ३०'००००

ठा.- (१) ८२'९८५२; ११'७६. (२) ११'००२७; १४'७'५; २७'६.

(३) १'५; ५'३१९३; २'५०२२. (४) '९४१; ४'६४; १००.

(५) २०; '५; '१.

डा.- (१) ३२; १०'५; ६२८. (२) ३१९; ४२८३'७७; १'७२. (३)

१'०९; १६'१; ५१'४. (४) १'०७७; १'४४२; १३०'०११. ०'८६३१.

(५) १३'७५; ६२८१. (६) ५'३'७२; ३७'२७. (७) '९; ३'१५.

(८) '७६; '९०. (९) ०'८७९; ०'४०२८; २'५९; २'६३६. (१०) १४'७२.

ढा.- (१) ११६६४ सुपाच्या; ११६'६४ शौर. (२) २००'॥.

(३) १५६. (४) ११२'॥. (५) १०८०.

णा.- (१) २१. (२) ५'९१०.

(३) १८४४६७४४०७३७०९५५१६१५. (४) ५'२४१२

आणि ६८६७५४४३६ मृ. म. पदें. (५) २१५४४३५.

- ता- (१) ९२१६ विद्या. (२) १०१८२ $\frac{६}{७}$ चिरे.
 (३) १६५॥ $\frac{३६}{७}$ पै. (४) ६३१६ चौ. फू. चिरे.
 (५) १०५६० गाड्या. (६) १०० रु. (७) ६९ $\frac{३}{४}$ दि.
 (८) १०१२॥ मंडी. (९) २ फू. १ इंच. (१०) ८८॥ $\frac{१३}{४}$ रु.
 (११) (१) ७ यार्द २ फूट, ११ $\frac{३}{४}$ इंच. (२) ७ चौ.यार्द
 ८ चौ.फूट, ११ $\frac{३}{४}$ चौ.इंच. (३) ३ घ.यार्द २ घ.फूट
 ९३ $\frac{३}{४}$ घ.इंच. (४) ४७ यार्द २ फूट ६ $\frac{३}{४}$ इंच. (५)
 २१ चौ.यार्द ८ चौ.फूट १ $\frac{६५}{२८}$ चौ.इंच. (६) ६५ घ.यार्द
 ८ घ.फू. १२८ $\frac{३}{४}$ घ.इंच. (१२) ३३ चौ.यार्द ३ चौ.फू.
 २८ चौ.इंच.; ३३ चौ.या. ६ चौ.फू. १३ चौ.इंच.; ६२ चौ.या.
 ३ चौ.फू. ३८ चौ.इंच.; ७० चौ.या. ५ चौ.फू. १२५ $\frac{३}{४}$
 चौ.इंच. (१३) ५ चौ.या. ८ चौ.फू. ८२ $\frac{३}{४}$ चौ.इंच.; ३३
 चौ.या. ५ चौ.फू. १० $\frac{३}{४}$ चौ.इंच.; १६९ चौ.या. ६ चौ.फू.
 ३८ $\frac{३}{४}$ चौ.इंच. (१४) ११३ घ.यार्द ९ घ.फू. ६२० $\frac{३}{४}$
 घ.इंच.; १३२ घ.या. ४ घ.फू. १४९ $\frac{३}{४}$ घ.इंच. (१५) ५६
 घ.या. २२ घ.फू. ११९ $\frac{३}{४}$ घ.इंच.; २०३ घ.यार्द १९
 घ.फू. १६७ $\frac{३}{४}$ घ.इंच.; ४४ घ.यार्द १६ घ.फू. २९८ $\frac{३}{४}$
 घ.इंच. (१६) ८७८८५ चौ.फू.; ३३२ ३ ९ ६.४ ६
 चौ.फूट. (१७) ५३४०७०३ फूट; १६८३८९२२४ फूट;
 ७७१९७२७३ फूट; व ३४२४३३३१ फूट. (१८)
 ४९०१९ फूट; ६६३९९ फूट; व १२९१७०२ फू. (१९)
 ७९१२०३३ मैल. (२०) ३ फूट ३३७२३ इंच.
 (२१) १५३९३७९१ चौ.मापें.; २०१०६१७६ चौ.मापें;
 २५४४६७९ चौ.मा. (२२) ४४१७८६०९३७५ चौ.फू.;
 ५०८९; ५७२१४९३७५ चौ.फू.; ४०६०१९८७६९ चौ.फू.
 (२३) ६२०३ फूट. (२४) १२४१२ यार्द. (२५)

- ८८९८५८२ चौ.फू. (२६) ३८९९३ एकर. (२७)
 ५७३७५ औंस. (२८) ११८८००. (२९) ४ पौं. ८ शि.
 ६॥॥ पे. किंमत व ८ हं.वेट. १ क्रा. २० पौंद वजन. (३०)
 १४१११४१ घ.इं.वायु. (३१) २८४०९ मैल दरतासास.
 था.— (१) ५ तास. (२) $४१\frac{३३}{२१}$. (३) $\frac{२०६}{३३५५}$; $१\frac{२३}{६२}$
 १-शि. $१\frac{१}{३}$ पे. $३\frac{५}{८}$. (४) १८० गाड्या. (५) ४॥ वषं.
 (६) २००. (७) १६४ ग. $१३\frac{५}{७}$ त. (८) ३१८६ ॥
 $१\frac{१}{१}$. (९) $\frac{६९}{१०}$ मण. (१०) २ वि. ५ प्रां. $३\frac{९}{८}$ का.
 (११) ६६०४; ८५ हा. ९९६ त. (१२) कै. खं.
 १५२६॥३॥३॥ $\frac{६०१}{७७८}$ शे. (१३) १३३४९. (१४) २० अंश.
 (१५) ८३॥ मण. (१६) $१\frac{२३}{४१३}$ पै. (१७) ८ ॥ $\frac{२}{३}$ पै;
 $\frac{४५}{४८}$; $\frac{१३३}{१७६}$. (१८) ३६ ॥ $१\frac{२५}{२२}$. (१९) ९६, $१७\frac{३}{५}$.
 (२०) $\frac{४}{१}$. (२१) $५\frac{१५}{२३}$ दि. (२२) ३७॥, २॥॥, ६८॥॥.
 (२३) $\frac{३३२}{७६७}$; १६२ $\frac{२३}{१४०}$; १ $\frac{१२३}{१७५}$; $\frac{१३}{६२}$; २३०८.
 (२४) १२६३; २५६८. (२५) ११॥, २०, २९॥.
 (२६) ७०॥— $१\frac{१६}{१७}$. (२७) ६. (२८) ५१२, ४३२१.
 (२९) २३॥, १५॥, ११॥॥, ९॥. (३०) ८८४, १५३.
 (३१) ३ ता. २० मि. (३२) $\frac{१६}{२५}$. (३३) $४९\frac{५३}{८४}$ रु.
 (३४) ९०८; २८७१३. (३५) ९. (३६) ६५९३७५;
 $\frac{४३}{१३२०}$; ००२५६२५६; २५६२५६०; ०२५६२५६.
 (३७) ४॥॥. (३८) ५९ क. $\frac{१४७०८}{४३८२६}$ वि. (३९)
 पु. ६॥— $२\frac{५}{१}$; स्त्री. ४॥॥ $\frac{३६}{१}$; मुं. ४६॥॥ $२\frac{१६}{२१}$. (४०) $\frac{४}{२७}$.
 (४१) २२०६॥. (४२) १॥॥॥. (४३) ३२००; ४८००.
 ६०००; ७०००. (४४) खंडी १८॥१८८ $\frac{३१}{१६}$. (४५)
 $४४\frac{३८७७६४}{३२३९०३}$. (४६) ११५॥. (४७) ३७१; २५२९८; २७६.
 (४८) १०५३॥॥ $\frac{३२३२}{३६००}$ पै. (४९) ७६९५; ६९२५५.
 (५०) $१०\frac{१२२२०}{२५४०३}$. (५१) २६॥॥ $१\frac{५}{३३}$. ३७॥॥३२५ पै.
 (५२) $\frac{२४}{४१}$. (५३) २१॥॥२; ४॥११. (५४) ४ अ.;

- ४ अ. ४३ $\frac{७}{३}$ मि. (५५) खंडी ॥॥॥१॥. (५६) ४४॥१॥ $\frac{३८}{२३}$
 शेर. $\frac{७७}{२२०}$; ४ को. ३४ दं. ० हा. ९ त. १ अं. $\frac{१३}{३}$ य.
 (५७) १०१२॥॥ $\frac{३४२५३}{३२६०३७}$; ७५९८ \equiv ॥१ $\frac{१९९८३}{३२६०२७}$.
 (५८) ३४५१-॥॥ $\frac{५०}{७७}$ व्या. ९०॥ \equiv ॥ $\frac{६}{७}$ पै. नफा. (५९)
 ३३; ०३१६२. (६०) ६९१ यो. (६१) १२५८॥ $\frac{३}{३}$.
 (६२) ०५७१ इ. (६३) ३७॥॥ $\frac{१२३}{२३३}$ पै. (६४) $\frac{१}{३}$.
 (६५) ४१॥॥ $\frac{२६५७}{३७००}$; (६६) ५ खं. ७॥ म. (६७) १८७ $\frac{३}{३}$.
 (६८) १०॥ \equiv ॥ २. (६९) ४०॥ \equiv ॥ $\frac{१}{१३}$. (७०) $\frac{७}{३३}$.
 (७१) ४९ रु. (७२) आक्स. १९९४२४ शेर; क्या-
 र्बान. १७३०६० शेर; हैद्रो. २७५१६ शेर. (७३) ४२ मै;
 १०॥ (७४) ४०३३-०१ $\frac{२३}{४०}$ पै. ८०६६ \equiv ॥ $\frac{३}{२०}$ पै;
 १२०९९॥ \equiv ॥ $\frac{१२३}{४०}$; १६१३३॥ $\frac{३}{३०}$ पै. (७५)
 ५॥ \equiv ॥ $\frac{५९७२}{११८६९}$; (७६) ७३०४८ इ. $\frac{५३}{३}$; १२१. (७७)
 ५७८- $\frac{१२}{८३}$ पै. (७८) १०५ दि. (७९) पु. ॥॥॥२; लि.
 ॥- $\frac{१}{३}$; सु. ॥॥ $\frac{२}{३}$. (८०) ९९९॥- $\frac{२३४}{४२}$; (८१)
 ५०९२९. (८२) १॥ घटिका. ४०६ $\frac{३}{२}$ घा. १८०॥.
 (८३) ९०७॥ (८४) $\frac{७१९}{५७१२}$; \equiv ॥ $\frac{३}{३}$ पै. (८५) १४
 अर्धा गिनी द्याव्या, २८ क्रौन ध्यावे. (८६) १९ $\frac{५९७}{२४५७}$.
 (८७) ३८५ फूट. ४ $\frac{१}{३}$ इ. (८८) ३०॥ \equiv ॥ $\frac{३३३}{२००}$;
 ॥॥ $\frac{३}{७}$. (८९) ९९१-; १७६२८-॥ $\frac{२२६}{२२७}$. (९०)
 ६९१ \equiv $\frac{७६३}{२३३}$ पै. (९१) ३ पौं. ४ शिं. ११ पे. (९२) २३ $\frac{२९२}{६९१}$.
 (९३) १ मि. २७॥ से. माणें टेवावा. (९४) दर तासास
 ३० मैल. (९५) ३१५. (९६) ३१९८ \equiv ॥ $\frac{५}{४६}$. (९७)
 ७२९; ३४५; ७६१; ०६६; ३००२. (९८) २ $\frac{५९०३}{७९०४}$.
 (९९) $\frac{१}{३}$. (१००) दुसरे दिवसास दोन प्रहरांनंतर
 ५ अ. ३४ मि. $\frac{५५५}{७७७}$ से. (१०१) १३५०३ $\frac{२३}{३३}$ चौ. ग.
 (१०२) अला. ८॥ $\frac{३}{३}$ पै. बला. ८-॥ $\frac{१}{६}$ पै. (१०३)

१०११८-॥२ $\frac{१५५}{२२७}$. (१०४) ७३८॥-॥१ $\frac{१३११}{१५४२}$; ८९६८=२
 $\frac{२३६}{१५४२}$ पै. (१०५) १९६९ थो.क. (१०६) सु. वर्ष
 १३१२५. (१०७) ८ \equiv १ जू. (१०८) १५ गोल्या. शिलक
 $\frac{७३}{४०००}$. (१०९) ४हा.२९८०८त. (११०) ४८॥॥; २२॥॥.
 (१११) १ $\frac{२}{१३}$; ३४५७६१; १२५. (११२) ६ पु. ४ वा.
 (११३) ३ पाँ. २ शि. ६ पे. (११४) ३॥=॥१०३९
 इ. पै. (११५) अला ६०० रु. बला ४००; कला ३००;
 लला २४०. रु. (११६) २६४; १९८; ३०८. (११७) वर्षाचे
 $\frac{२२९}{२७०}$ अंश. (११८) ३ पाँ. १५ शि. २ $\frac{१}{२}$ पे. (११९) ५॥ $\frac{२१०}{१००}$;
 १८॥॥ शेंकडा नफा. (१२०) २०२७८-१ $\frac{५२३३७}{१२५}$ पै.
 (१२१) ३०३. (१२२) १ मनुष्य. (१२३) ८ पाँ. १८ शि.
 ६ पे. $\frac{६}{४३}$. (१२४) १२३४५; ०७४. (१२५) २२२८९
 पाँ. ५ आँ. २ द्रा.; ३ $\frac{२३४}{३३३}$. फू. उंच. (१२६) १ पाँ.
 (१२७) ७२ मै. (१२८) ४२९; ७६३. (१२९) ४९५७
 पाँ. ६ शि. ८ पे. (१३०) १ पाँ. ३ शि. ९ $\frac{१}{१५}$ पे. (१३१) १०
 शि. ८ $\frac{१}{२}$ पे. (१३२) ३ $\frac{१}{२}$ शि.; ७ शि.; १० $\frac{१}{२}$ शि.; १४ शि.:
 १७ $\frac{१}{२}$ शि.; २१ शि. (१३३) ०३६७; ६ $\frac{१}{२}$; २६५. (१३४)
 ६००. (१३५) १२८००. (१३६) २६ पाँ. ११ शि. ३ पे.
 (१३७) ८१॥१ $\frac{१५७}{१३७३}$. (१३८) $\frac{२७}{७१}$; ००३९०६२५;
 $\frac{८७३}{२०००}$; $\frac{५२०}{१३०२}$. (१३९) १३० को. ११४२ दं. ३ $\frac{३}{४}$ हा.
 (१४०) १७५७॥- (१४१) दर १०० घ फुटीस ३४ $\frac{६}{७}$ रु.
 (१४२) २८००७॥१ $\frac{१२४}{१२५}$. (१४३) १४३; ६४८३;
 २४९; ८५७. (१४४) २३ पाँ. ५ शि. ३ $\frac{३}{४}$ पे. (१४५)
 १०५॥१ $\frac{१५७}{२४७}$. (१४६) ५६६२. (१४७) दिवसाचे
 १२ अ. २० मि. (१४८) ५२१॥१ $\frac{१६}{१२}$. (१४९)
 २४००; १८००; १६००; १५००. (१५०) ४४७॥-॥

गोर (१) चिन्ह घालले

शुद्धिपत्र. १६ स्थिती जर तो कु
तली केली आहे.

अण्याचे आवश्यक शोध दाखविणारें.

	अशुद्ध.	शुद्ध.
	नंतर इष्टसंख्येनें	नंतर त्याच इष्टसंख्येनें
	मोजदान	मोजदात
	अपूर्णाकाच्या	अपूर्णाकांच्या
	१३१'७४६८६८१४०८६६	१३१'७४६८६८१४०८६६ १
	१'१४२८५७१	१'१४२८५७१ १
	१ मिनिट	११० मिनिट
	३५	३५ १
	मनुष्याचा	मनुष्यांचा
	घरपटी	घरपट्टी
	३५	३५
	३५	३५ १
	पुरीं	पुरे
	चीन	जीन १
	दराचा	दरांचा
	दराचे	दरांचे
	१०० रुपयांनीं	१०० ह्या मुदलानें
९	मुदत किंवा कालमान	मुदती किंवा कालमानें
१०	व्याज व्य,	व्याज = व्य
७	२	१
१४	२२	३४
	२५	३५
१५	३९	३३
	५०	३०
५	४८ चा	९४ चा
६	३ लिहिले	४ लिहिले
	उ. ४.	उ. ४