२

बीजगणित

सन १८४८

ग. ज्यो

बीजगणित.

याचें मूळ पुस्तक इंग्रेजी भाषेंत आहे त्याचें
भाषांतर
पूर्वी क्यापतन जार्ज जार्विससाहेब यांनीं
महाराष्ट्र भाषेंत केलें
त्या भाषांतराची ही पुनरावृत्ति
पाठशाळा वाडा विश्राम बाग येथील छापखान्यांत
छापिली.

छापणार नारो रामचंद्र ठकार.
सन १८४८ इसवी.
शाके १७७०
मुकाम पुणे

बीजगणिताची अनुक्रमणिका.

बीजगणित.

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी.

१ बीजगणित ह्मणजे विवक्षित संख्यांचे अंकांवांचून अक्षरचिह्नेंकरूनच गणितकरण्याची विद्या. ही गणितकरण्याची सामान्य रीति आहे.

२ या विद्येमध्यें सर्वपदार्थजातींचें संख्यांचे स्थानीं अक्षरें योजितात; त्यासंगातीं जीं कामें करायाचीं आहेत, जसें मिळवणी, वजाबाकी इत्यादिक, तीं सर्व कितीएकस्वल्परूप कार्यप्रकाशकचिन्हें करून होतात.

३ बीजगणिताचे उदाहरणांमध्यें कितीएक पदें व्यक्त, ह्मणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं आहेत, ज्यांस भास्कराचार्याचे बीजगणितांत रूप ह्मटलें आहे; आणि जीं दुसरीं पदें अव्यक्त, ह्मणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं नाहींत, त्यांस त्याच आचार्याचे बीजगणितांत यावत् तावत् इत्यादिक नावें दिलीं आहेत. इंग्रेजी रीतींत व्यक्त संख्या दाखवायास मूळ लिपीचे आरंभीचीं अ ब क इत्यादिक अक्षरें घेतात; आणि अव्यक्तसंख्या दाखवायास मूळ लिपीचे शेवटील क्ष य ज्ञ इत्यादिक अक्षरें घेतात.

४ कामें दाखविणारीं जीं चिन्हें आहेत त्यांस कार्य

काशकचिन्हें ह्मणतात; तीं लिहितों.

\+ हें चिन्ह मिळवणी दाखवितें, याठिकाणीं अधिक असें ह्मणतात, यास धन चिन्ह ह्मणावें.

− हें चिन्ह वजाबाकी दाखवितें, याठिकाणीं उणें असें ह्मणतात, यास ऋणचिन्ह ह्मणावें.

× हें अथवा · हें चिन्ह गुणाकार दाखवितें, याठिकाणीं गुणिलें असें ह्मणतात. ज्या संख्याप्रकाशक अक्षरांचा गुणाकार करायाचा आहे तीं अक्षरें चिन्हावांचूनच जवळ जवळ लिहिलीं असतां त्यांचा परस्पर गुणाकार आहे असें समजावें.

÷ हें चिन्ह भागाकार दाखवितें, या ठिकाणीं भागिलें असें ह्मणतात.

$\sqrt{}$ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखवितें; $\sqrt[3]{}$ हें चिन्ह घनमूळ दाखवितें; $\sqrt[4]{}$ हें चिन्ह चतुर्घातमूळ दाखवितें; याप्रमाणें पुढें ही, आणि $\sqrt[\text{न}]{}$ हें चिन्ह नसंख्याघातमूळ दाखवितें.

: :: : हें चिन्ह राशि अथवा प्रमाण दाखवितें.

= हें चिन्ह बरोबरी दाखवितें, या ठिकाणीं बरोबर असें ह्मणतात, अथवा ह्मणजे असा शब्द बोलतात.

आतां वर सांगितलेले चिन्हांचीं उदाहरणें लिहितों.

अ + ब हें दाखवितें कीं, बचे संख्येस अचीसंख्या

मिळवावी.

$अ - ब$ यांतील चिन्ह दाखवितें कीं, अचे संख्येंतून बची संख्या वजा करावी.

$अ \sim ब$ हें चिन्ह अ आणि ब या दोन संख्यांची वजा बाकी दाखवितें, परंतु या दोन संख्यांत लाहान कोणती आणि मोठी कोणती हें विदित नाहीं.

$अब$ अथवा $अ \times ब$ किंवा $अ \cdot ब$ हें चिन्ह अ आणि ब यादोन संख्यांचा गुणाकार दाखवितें.

$अ \div ब$ अथवा $\frac{अ}{ब}$ हें चिन्ह दाखवितें कीं, अची संख्या बचे संख्येनें भागावी.

$अ : ब :: क : ड$ हें दाखवितें की. जसें अ प्रमाण बला होतें तसें क प्रमाण डला होतें.

$क्ष = अ - ब + क$ हें समीकरण आहे; तें दाखवितें कीं, अ आणि ब यांचे संख्यांची वजा बाकी करून त्यांत कची संख्या मिळवावी, तें क्षचे बरोबर आहे.

$\sqrt{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{२}}$ हें अचें वर्गमूळ दाखवितें.
$\sqrt[३]{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{३}}$ हें अचें घनमूळ दाखवितें. $\sqrt[३]{अ^{२}}$ अथवा $अ^{\frac{२}{३}}$ हें अचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितें. $\sqrt[म]{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{म}}$ हें अचें मसंख्या घातमूळ दाखवितें. $\sqrt[म]{अ^{न}}$ हें दाखवितें कीं, जितकी म संख्या आहे तितकें अ संख्येचें घातमूळ काढावें, आणि त्या मुळाचा न संख्या घा

न करावा. अथवा $\frac{न}{न}$ याचा भागाकार येईल तितकी अची संख्या वर्गादिकें करून वाढवावी, किंवा मूळ काढावें.

$अ^{२}$ हें अचा वर्ग दाखवितें. ह्मणजें $अ \cdot अ$. $अ^{३}$ हें अचा घन दाखवितें ह्मणजे $अ \cdot अ \cdot अ$. $अ^{४}$ हें अचा चतुर्घात दाखवितें. $अ^{न}$ हें नची संख्या आहे तितका अचा घात दाखवितें.

$\overline{अ+ब} \times क$ अथवा $(अ+ब)क$ हें $अ+ब$ या संयुक्त पदाला क यानें गुणिलें असतां जो गुणाकार होतो तो दाखवितें —— याप्रमाणें वरती रेघ किंवा ( ) याप्रमाणें दोन बाजूंस दोन कोंस हें चिन्ह वियुक्त पदें परस्पर संबद्ध यामुळें संयुक्त असें दाखवितें.

$\overline{अ+ब} \div \overline{अ-ब}$ अथवा व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ हें $अ+ब$ भागिला $अ-ब$नें यापासून जो भागाकार तो दाखवितें.

$\sqrt{अब+कड}$ अथवा $(अब+कड)^{\frac{१}{२}}$ हें $अब+कड$ या संयुक्त पदाचें वर्गमूळ दाखवितें, आणि $क\sqrt{अब+कड}$ अथवा $क(अब+कड)^{\frac{१}{२}}$ हें $अब+कड$ या संयुक्तपदाचें वर्गमूळ क या एकपदानें गुणून जो गुणाकार होतो तो दाखवितें.

$\overline{अ+ब-क}^{३}$ अथवा $(अ+ब-क)^{३}$ हें $अ+ब-क$ या संयुक्तपदाचा घन दाखवितें.

३ अ हें अची संख्या ३ यांणी गुणावी असे दाखवितें. आणि ४ (अ+ब) हें अ+ब या संयुक्तपदाचे संख्येस ४ यांणी गुणावें असें दाखवितें, आणि $\frac{३}{४}$ क्ष हें तीन चतुर्थांशांनीं गुणिला क्ष असें दाखवितें.

५ **सरूप** पदें तींच होत ज्यांचीं अक्षरें आणि वर्गादिक एकच आहेत, जसें अ आणि ३अ अथवा २अब आणि ४अब अथवा ३$अ^{२}$बक आणि —५$अ^{२}$बक.

६ **विरूपपदें** तींच होत ज्यांची अक्षरें आणि वर्गादिक हीं भिन्न जाति आहेत, जसें अ आणि ब, अथवा २ अ आणि $अ^{२}$, अथवा ३ $अब^{२}$ आणि ३ अबक.

७ **एकपद** तेंच होय ज्यांत एकच रकम आहे. जसें ३ अ, अथवा ५ $अ^{२}$ब, अथवा ६ $अबक^{२}$.

८ **संयुक्तपदें** तींच होत ज्यांत दोन तीन आदिकरून अनेक रकमा परस्पर संबद्ध आहेत, जसें अ+ब, अथवा २अ— ३क, अथवा अ+ २ब— ३क.

९ आणि जेव्हां संयुक्त पदांत दोनच रकमा आहेत तेव्हां त्यास **द्वियुक्पद** ह्मणतात; जसें अ+ब — जेव्हां त्यांत तीन पदें आहेत तेव्हां त्यास **त्रियुक्पद** ह्मणतात, जसें अ+२ब−३क —— जेव्हां त्यांत चार रकमा आहेत तेव्हां त्यास **चतुर्युक्पद** ह्मणतात, जसें २अ — ३ब + क−४ ड. आणि याप्रमाणेंच **पंचयुक्पद**

इत्यादिक पुढेंही जाणावीं. आणखी ही ज्यांत बहुत रकमा आहेत त्यास बहुयुक्पद ह्मणतात.

१० जेव्हां द्वियुक्पदांत एक रकम ऋण आहे तेव्हां त्यास धनर्णपद ह्मणतात. जसें अ − २ब.

११ धनपद तेंच होय जें मिळवायाचें आहे, ज्यास + हें अधिक जातिप्रकाशक चिन्ह जोडिलें आहे, जसें + अ. जेव्हां कोणतेंही पद कोणतेही चिन्हावांचून असेल तेव्हां तें धन आहे असें समजावें, जसें अ ह्मणजे + अ.

१२. ऋणपद तेंच होय जें वजा करायाचें आहे, जसें − अ अथवा − २अब अथवा − ३अब^{२}.

१३ सरूप चिन्हें तींच होत जीं सर्व (+) धन किंवा सर्व (−) ऋण आहेत.

१४ विरूप चिन्हें तीच होत ज्यांत कितीएक (+) धन आणि कितीएक (−) ऋण अशीं आहेत.

१५ कोणतेही पदाचा वेळाप्रकाशक तोच होय जो अंक त्यापदाचे मागें लिहिला आहे, जसें ३ अब येथें ३ हा अंक वेळाप्रकाशक आहे.

१६ घात ह्मणजे कोणतेंहीपद, जसें अ, त्याचें वर्गादिक, जसें अ^{२}, अ^{३}, अ^{४}, याप्रमाणें पुढेंही.

१७ घातप्रकाशक अथवा घातमूलप्रकाशक तोच अंक होय जो त्यापदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूला

दिक दाखवितो, ह्मणजे २ हा अंक वर्गप्रकाशक, जसें $अ^{२}$; आणि ३ हा अंक घनप्रकाशक, जसें $अ^{३}$; आणि $\frac{१}{२}$ हा वर्गमूळप्रकाशक, जसें $अ^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{अ}$; आणि $\frac{१}{३}$ हा घनमूळप्रकाशक, जसें $अ^{\frac{१}{३}}$ अथवा $\sqrt[३]{अ}$.

१८ अखंडपद तेंच होय ज्यास मूळप्रकाशक (√) नाहीं, जसें अ अथवा ३ अब.

१९ खंडपद अथवा करणी तीच होय ज्याचें मूळ अंशांवाचून केवळ पूर्णांकांतच येत नाहीं, जसें २, ३; ५, इत्यादिक यांचें वर्गमूळ केवळ पूर्णांकांतच येत नाहीं. करणीस मूळप्रकाशक (√) जोडिला राहतो, जसें $\sqrt{२}$, अथवा $\sqrt{अ}$ अथवा $\sqrt[३]{अ}$. किंवा करणी अशीही लिहितात, जसें $२^{\frac{१}{२}}$, $अ^{\frac{१}{३}}$, $अ^{\frac{१}{२}}$.

२० कोणत्याहीपदाचा व्युत्क्रम तोच होय जें पद उलटें लिहिलें, अथवा त्यापदानें भागिलेला, जसें अ अथवा $\frac{अ}{१}$ याचा व्युत्क्रम हा होय $\frac{१}{अ}$, आणि $\frac{अ}{ब}$ याचा व्युत्क्रम हा होय $\frac{ब}{अ}$.

२१ जीं अक्षरें एकेकपदाचे संख्यानिवेदनार्थ कामांत घेतात तीं इच्छेस येईल त्याक्रमानें लिहावीं, जसें अ आणि ब यांचा गुणाकार या प्रमाणें लिहितां येतो. अ ब, अथवा ब अ; आणि अ, ब, क, याचा गुणाकार याप्रमाणें लिहितां येतो, अ ब क, अथवा अ क ब, अ

थवा **ब अ क**, अथवा **ब क अ**, अथवा **क अ ब** किंवा **क ब अ**, यांत कोणताही प्रथम गुणिला ह्मणून चिंता नाहीं, गुणाकार बरोबरच येतो.

२२. याप्रमाणें संयुक्त पदाच्या वेगळाल्या रकमा असतील त्याही इच्छेस येईल तशा क्रमानें लिहाव्या, त्यांची किमत अथवा अर्थ बराबरच आहे. जसें ३**अ** —२**अब**+४**अबक** हे असेही लिहितां येतात, ३**अ**+४**अबक**—२**अब**, अथवा याप्रमाणें, ४**अबक**+३**अ**—२**अब**, किंवा याप्रमाणेंही, —२**अब**+४**अबक**+३**अ** इत्यादि, ह्मणजे हे सर्व ४**अबक** आणि ३**अ** यांचे बेरजेंतून २**अब** वजा करून जी बाकी राहती तिचे बराबर दाखवितात. परंतु बहुत करून धन रकम आरंभीं लिहितात अशी चाल आहे.

या सर्व वरच्या व्याख्या समजावयाकरितां किती एक उदाहरणें लिहितों.

तीं अशीं कीं, वेगळाल्या चिह्नांचे संयुक्तपदांपासून संख्या काढावयाचीं.

मनांत आण कीं, पुढील उदाहरणांत **अ**=६, **ब**=५, **क**=४, **ड**=१, **ई**=०

उदाहरणें.

पहिलें, $अ^{२} + २अब - क^{२}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $३६ + ९० - १६ = ११०$

दुसरें, $२अ^{३} - ३अ^{२}ब + क^{३}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $४३२ - ५४० + ६४ = -४४$

तिसरें, $अ^{२} \times \overline{अ + ब} - २अबक$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $३६ \times ११ - २४० = १५६$

चौथें, $\frac{अ^{३}}{अ + २क} + क^{२}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $\frac{२१६}{१८} + १६ = १२ + १६ = २८$

पांचवें, $\sqrt{२अक + क^{२}}$ अथवा $\overline{२अक + क^{२}}^{\frac{१}{२}}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $\sqrt{६४} = ८$

साहावें, $\sqrt{क} + \frac{२बक}{\sqrt{२अक + क^{२}}}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $२ + \frac{४०}{८} = ७$

सातवें, $\frac{अ^{२} - \sqrt{ब^{२} - अक}}{२अ - \sqrt{ब^{२} + अक}}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $\frac{३६}{१२} = ३ = \frac{३५}{५} = ७$

आठवें, $\sqrt{ब^{२} - अक} + \sqrt{२अक + क^{२}}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१+८=९$

नववें, $\sqrt{ब^{२}-अक+\sqrt{२अक+क^{२}}}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $\sqrt{२५-२४+८}=३$

दाहावें, $अ^{२}ब+क-ड$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, १८३

अकरावें, $९अब-१०ब^{२}+क$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $२७०-२५०+४=२०+४=२४$

बारावें, $\frac{अ^{२}ब}{क}\times ड$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

तेरावें, $\frac{अ+ब}{क}\times\frac{ब}{ड}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१२\frac{३}{४}$

चौदावें, $\frac{अ+ब}{क}-\frac{अ-ब}{ड}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१\frac{३}{४}$

पंधरावें, $\frac{अ^{२}ब}{क}+ई$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

सोळावें, $\frac{अ^{२}ब}{क}\times ई$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, ०

सत्रावें, $\overline{ब-क}\times\overline{ड-ई}$ याची संख्या काय होती?

[illegible]

उत्तर, १

अठरावें, $\overline{अ+ब}-\overline{क-ड}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, ८

एकुणिसावें, $\overline{अ+ब}-क-ड$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, ६

विसावें, $अ^{२}क\times ड^{३}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, १४४

एकविसावें, $अकड - ड$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, २२

बेविसावें, $अ^{२}ई+ब^{२}ई+ड$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, १

तेविसावें, $\frac{ब-ई}{इ-ई}\times\frac{अ+ब}{क-ड}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, १८$\frac{१}{२}$

चोविसावें, $\sqrt{अ^{२}+ब^{२}}-\sqrt{अ^{२}-ब^{२}}$ याची संख्या

काय होती?

उत्तरं. ४·४९३६२४१

पंचविसावें. $३ अ क^{२} + \sqrt[३]{अ^{२} - व^{२}}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, २९२·८९७९४२

सव्विसावें, $४ अ^{२} - २ अ \sqrt{अ^{२} - \frac{२}{३} अ व}$ याची संख्या काय होती?

उत्तर, ७२

मिळवणी

बीजगणितांत **मिळवणी** तीच होय जें वेगळालीं पदें त्यांचे त्यांचे चिह्नांनीं जोडून लिहिणें. जेव्हां सरूप पदेंच असतील तेव्हां तीं एकत्र मिळवून त्यांची एक रकम करावी जसें, $३ अ + २ ब - २ अ$ यांची बेरीज, $अ + २ ब$.

बीजगणितांत मिळवणीचे रीतीचे प्रकार तीन आहेत.

१ वेगळालीं पदें सरूप आणि त्यांचीं चिह्नें ही सरूप आहेत.

२ वेगळालीं पदें सरूप आहेत, परंतु त्यांचीं चिन्हें विरूप आहेत.

३ वेगळालीं पदें विरूप आहेत. त्यांचीं कामें पुढें सांगतों.[*]

प्रथम प्रकार

जेव्हां वेगळालीं पदें सरूप आहेत आणि त्यांचीं चिन्हें हीं सरूप आहेत.

---

[*] जीं पदें मिळवायाचीं आहेत त्यांची जाति लक्ष्यांत आणिली असतां या कामाचा आश्रय आणि त्या प्रकारांचीं कारणें स्वल्पांत समजांत येतील, ह्मणोन प्रथम प्रकारांत दोन पदें आहेत ३अ आणि ५अ. आतां येथें एक रकमेंतील अजी वस्तू निवेदितो तीच वस्तु दुसरे रकमेंतील ही अनिवेदितों. तेव्हां जी वस्तु ३ वेळां तीच वस्तू पुनः ५ वेळां एकूण ८ वेळां, परंतु वस्तू तीच हा निश्चय. जर अ एक रुपया निवेदितो तर ३अ ३ रुपये आणि ५अ ५ रुपये, त्यांची बेरीज ८अ ह्मणजे ८ रुपये जाली. याप्रमाणें –२अब आणि –७अब अथवा कोणती ही वस्तू –२ आणि तीच वस्तू –७ हे दोनी मिळोन तीच वस्तू –९ बेरीज जाली.

आतां दुसरे प्रकारांत पदें मात्र सरूप आणि चिन्हें विरूप. या प्रकाराचें कारण यापासून स्वल्पांत समजांत येईल, कीं मिळवणी ह्मणजे ही आहे जे वगळालीं पदें गणित रीतीनें एकत्र मिळवावीं, जशीं त्यांचीं चिन्हें + धन आणि – ऋण हीं दाखवितात, ह्मणजे मिळवणी आणि वजाबाकी, परंतु

हीं दोन कामें परस्पर विरुद्ध याजकरितां असें आल्यास एकाचा वळाप्रकाराक दुसऱ्याच्यांतून वजा केला पाहिजे, असा कीं त्या पदांची एकच रकम होईल.

हीचरीतिसमजायाकरितांदुसरीं उदाहरणें

३ अ
९ अ
५ अ
१२ अ
अ.
२ अ

३२ अ

−३ बक्ष
−५ बक्ष
−४ बक्ष
−२ बक्ष
−७ बक्ष
− बक्ष

−२२बक्ष

बक्षय
२बक्षय
५बक्षय
बक्षय
३बक्षय
६बक्षय

१८बक्षय

३ ज्ञ
२ ज्ञ
४ ज्ञ
ज्ञ
५ ज्ञ

१५ ज्ञ

३क्षे+५क्षय
क्षे+ क्षय
२क्षे+४क्षय
५क्षे+२क्षय
४क्षे+३क्षय

१५क्षे+१५क्षय

२अक्ष-४य
४अक्ष- य
अक्ष-३य
५अक्ष-५य
७अक्ष-२य

१९अक्ष-१५य

५ क्षय
१४ क्षय
२२ क्षय
१७ क्षय
१२ क्षय
१२ क्षय

−१२ ये
−७ ये
−२ ये
−४ ये
− ये
−३ ये

४अ-४ब
५अ-५ब
६अ- ब
३अ-२ब
२अ-७ब
८अ- ब

३०−१३क्षे−३क्षय
२३−१०क्षे−४क्षय
१४−१४क्षे−७क्षय
१०−१६क्षे−५क्षय
१६−२०क्षे− क्षय

५क्षय-३क्ष+४अब
८क्षय-४क्ष+३अब
३क्षय-५क्ष+५अब
क्षय-२क्ष+ अब
४क्षय- क्ष+७अब

रीति.

सर्व वेळा प्रकाशक मिळवून त्यांची बेरीज लिहावी, नंतर त्या सरूप पदांचें अक्षर पुढें लिहावें, आणि प्रकाशकचिह्न + धन किंवा − ऋण असेल तें आदी जोडावें.

जसें ३अ आणि ५अ या दोहोंची बेरीज ८अ होती.

−२अब आणि −७अब यांची बेरीज −९अब होती.

५अ + ७ब आणि ७अ + ३ब यांची बेरीज १२अ + १०ब होती.

आंतां तिसरे प्रकारांत जेव्हां सर्वपदें विरूप आहेत तेव्हां स्पष्ट दिसतें कीं अशीं पदें एकत्र रकमेंत कदापि येणार नाहींत ह्मणोन त्यांची बेरीज वेगळाल्या रकमा त्यांचे त्यांचे चिह्नांनीं जोडिल्यावांचून दुसऱ्या रीतीनें कदापि होणार नाहीं. जसें, जर अ एक रुपया निवेदितो आणि ब एक पैसा तर अ आणि ब यांची बेरीज २अ किंवा २ब होणार नाहीं. ह्मणजे २ रुपये किंवा २ पैसे नाहींत, परंतु अ + ब हें आहे, किं एक रुपया अधिक, एक पैसा.

या रीतींत मिळवणी हा शब्द चांगले प्रकारें लागत नाहीं. एथें जितकें काम करायाचें आहे तितका पूर्ण अर्थ या शब्दापासून मिळत नाहीं. तें काम हें आहे, कीं वेगळालीं पदें एकत्र मिळतील तर मिळवावीं, न मिळतील तर त्यांची त्यांची चिह्नें जोडून अनुक्रमें लिहावीं. जेव्हां वेगळाल्या पदांत किती एक + धन आणि किती एक − ऋण आहेत. तर त्यांत सरूप पदें असतील तीं पूर्व रीतीनें एकत्र करितां येतील.

बीजगणितांत मिळवणी पाहाणें कोठें अनेक रकमांची एक रकम करणें, कोठें वजाबाकी करणें, असें परम आश्चर्य दिसतें, परंतु मिळवणी शब्दाचा अर्थ एकीकरण किंवा बाकी असा येथें मनांत आणिल्यावर किमपि आश्चर्य नाहीं असें दिसेल.

दुसरा प्रकार.

जेव्हां वेगळालीं पदें सरूप आहेत परंतु त्यांचीं चिह्नें विरूप आहेत.

रीति

धन वेळाप्रकाशकांची बेरीज घ्यावी आणि ऋण वेळाप्रकाशकांची बेरीज घ्यावी, नंतर या दोन बेरजांत जी अधिक असेल त्यांतून उणी बेरीज वजा करून बाकी राहील तिचे पाठीमागें अधिक बेरजेचें प्रकाशकचिह्न जें असेल तें लिहावें, आणि त्याचे पुढें या बाकी सरूप पदाचें अक्षर चिह्न लिहावें.

जसें +५अ आणि -३अ यांचीं बेरीज +२अ जाली.

॥ -५अ आणि +३अ यांची बेरीज -२अ जाली.

हीच रीति समजावयाकरितां दुसरीं उदाहरणें.

− ५ अ	+ ३ अक्षे	+ ८ क्षे − ३ य
+ ४ अ	+ ४ अक्षे	− ५ क्षे + ४ य
+ ६ अ	− ८ अक्षे	− १६ क्षे + ५ य
− ३ अ	− ६ अक्षे	+ ३ क्षे − ७ य
+ अ	+ ५ अक्षे	+ २ क्षे − २ य
+ ३ अ	− २ अक्षे	− ८ क्षे − ३ य

$-३ अ^{२}$	$+३ ब^{२} य^{२}$	$+५ अव +४$
$-५ अ^{२}$	$+९ ब^{२} य^{२}$	$-४ अव +१२$
$-१० अ^{२}$	$-१० ब^{२} य^{२}$	$+७ अव -१४$
$+१० अ^{२}$	$-१९ ब^{२} य^{२}$	$+ अव +३$
$+१४ अ^{२}$	$-२ ब^{२} य^{२}$	$-५ अव -१०$

$-३ अक्ष^{२}$	$+१० \sqrt{अक्ष}$	$+३ य +४ अक्ष^{२}$
$+ अक्ष^{२}$	$-३ \sqrt{अक्ष}$	$- य -५ अक्ष^{२}$
$+५ अक्ष^{२}$	$+४ \sqrt{अक्ष}$	$+४ य +२ अक्ष^{२}$
$+६ अक्ष^{२}$	$-१२ \sqrt{अक्ष}$	$-२ य +६ अक्ष^{२}$

तिसरा प्रकार.

जेव्हां वेगळालीं पदें विरूप आहेत तेव्हां.

रीति.

पूर्वी सांगीतल्या दोन प्रकारां प्रमाणें सरूप पदें एकत्र मिळवून लिहावीं आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांचे त्यांचे प्रकाशक चिन्हां सहवर्तमान एकापुढें एक जोडून लिहावीं.

उदाहरणें

$३ क्षय$	$-६ क्षय -१२ क्ष^{२}$	$४ अक्ष -१३ +३ क्ष^{\frac{१}{२}}$
$२ अक्ष$	$-४ क्ष^{२} +३ क्षय$	$५ क्ष^{२} +३ अक्ष +९ क्ष^{२}$
$-५ क्षय$	$+४ क्ष^{२} +२ क्षय$	$७ क्षय -४ क्ष^{२} +९०$
$६ अक्ष$	$-३ क्षय +४ क्ष^{२}$	$\sqrt{क्ष} +४० -६ क्ष^{२}$
$-२ क्षय +८ अक्ष$	$-४ क्षय -८ क्ष^{२}$	$७ अक्ष +८ क्ष^{२} +७ क्षय$

९ क्षैयै	१४ अक्ष−२ क्षे	९−१०√अक्ष−५ य
−७ क्षेय	५ अक्ष+३ क्षय	२ क्ष+७√क्षय+५ य
+३ अक्षय	८ ये−४ अक्ष	५ य+३√अक्ष−८ य
+४ क्षेय	३ क्षे+२६	१०−४ √अक्ष+४य

४ क्षेय	४√क्ष−३य	३ अं+९+क्षे−४
−६ क्षये	२√क्षय+१८क्ष	२ अ−८+२अे−३क्ष
+३ येक्ष	३ क्ष+२य	४ क्षे−२अं+१८−७
−७ क्षेय	−९−३ क्षय	−१२−अ−३क्षे−२य

आणखीउदाहरणें.

प्रथम. अ+ब आणि २ अ−५.ब यांची बेरीज काय होईल?

दुसरें, ५ अ−८ क्ष आणि ३ अ−४ क्ष यांची बेरीज काय होईल?

तिसरें, ६ क्ष−५ ब+अ+८ आणि−५ अ−४ क्ष +४ ब−३ यांची बेरीज काय होईल?

चौथें, अ+२ ब−२क−१० आणि ३ ब−४ अ+५क +१० आणि ५ ब−क यांची बेरीज काय होईल?

पांचवें, अ+ब आणि अ−ब यांची बेरीज काय होईल?

साहावें. ३ अ+ब− १०आणि क−ड−अ आणि −४ क+२ अ−३ ब−७ यांची बेरीज काय होईल?

सातवें, ३ $अ^{२}$+ $ब^{२}$− क आणि २ अब−३ $अ^{२}$+ बक− ब यांची बेरीज काय होईल?

आठवें, $अ^{२}$+ $ब^{२}$क− $ब^{२}$ आणि $अब^{२}$−अबक +$ब^{२}$ यांची बेरीज काय होईल?

नववें.१, अ−८ ब+१० क्ष−६, ड−७ क+ ५०आणि २ क्ष−३ अ−५ क+४ ब+६, ड −१० यांची बेरीज काय होईल?

वजाबाकी.

जर कोणत्याही पदापासून कांहींही वजा करायाचें आहे तर तें पद वर एके ओळींत लिहावें, नंतर जें पद वजा करायाचें आहे तें तसेंच त्याचे खालीं लिहावें. असें कीं, सरूप अक्षरें एकाखालीं एक अशीं येतील.

नंतर खालचे ओळींतील चिन्हें+धन आणि−ऋण,

ण असतील तीं बदल करून लिहावीं, अथवा बदल केलीं असें मनांत आणावें. नंतर मिळवणीचे रीतीनें तीं सर्व पदें एकत्र करावीं.*

उदाहरणें.

$७अ^{२}-३ब$ यांतून	$९क्ष^{२}-४य+८$	$८क्षय-३+६क्ष-य$
$२अ^{२}-८ब$ हे वजा	$६क्ष^{२}+५य-४$	$४क्षय-७-६क्ष-४य$
$५अ^{२}+५ब$ बाकी	$३क्ष^{२}-९य+१२$	$४क्षय+४+१२क्ष+३य$
$५क्षय-६$	$४य^{२}-३य-४$	$-२०-६क्ष-५क्षय$
$-२क्षय+६$	$२य^{२}+२य+४$	$३क्षय-९क्ष+८-२अय$
$७क्षय-१२$	$२य^{२}-५य-८$	$-२८+३क्ष-८क्षय+२अय$
$८क्ष^{२}य+६$	$५\sqrt{क्षय}+२क्ष\sqrt{क्षय}$	$७क्ष^{२}+२\sqrt{क्ष}-१८+३ब$
$-२क्ष^{२}य+२$	$७\sqrt{क्षय}+३-२क्षय$	$९क्ष^{२}-१२+५ब+क्ष^{२}$

---

*: या रीतीस आश्रय हाच आहे कीं मिळवणी आणि वजाबाकी यांची जाति आणि कामें परस्पर विरुद्ध आहेत, हें त्यांचीं चिन्हें दाखवितात. + आणि − कोणतीं ही ऋण पदें दुसरे धन पदांशीं मिळवितां असें कार्य होतें. कीं धनपदांतून या ऋणपदांबराबर धनपद वजा केलें, आतां वजाबाकी मिळवणीशीं विरुद्ध आहे याजकरितां धनपद कोणत्याही दुसऱ्या धनपदांतून वजा करणें हें त्याचें बरोबर आहे, कीं ऋणपद धनपदास मिळविलें, या रीतीनें एक ऋणपद मिळविणें हें याचें बरोबर आहे, कीं एक धनपद मिळविलें. याप्रमाणें कोणत्याही पदांचीं चिन्हें बदल करितां ह्मणजे + धन ठिकाणीं − ऋण आणि − ऋण ठिकाणीं + धन. याप्रमाणें करितां त्या पदांची जाति ही बदल होती, ह्मणजे पूर्वीं वजाबाकीचें रूप होतें तें मिळवणीचें रूप जालें.

५ क्षय − ३०	७ क्ष^{२} − २ (अ + ब)	३ क्षय^{२} + २० अ^{२} √(क्षय + १०)
७ क्षय − ५०	२ क्ष^{२} − ४ (अ + ब)	४ क्षय^{२} + १२ अ √(क्षय + १०)

आणखी उदाहरणें.

प्रथम. अ + २ यांतून अ − ब हे वजा कर.

दुसरें, ४ अ + ४ ब यांतून ब + अ हे वजा कर.

तिसरें, ४ अ − ४ ब यांतून ३ अ + ५ ब हे वजा कर.

चौथें, ८ अ − १२ क्ष यांतून ४ अ − ३ क्ष हे वजा कर.

पांचवें. ३ क्ष − ४ अ − २ ब + ५ यांतून ८ − ५ ब + अ + ६ क्ष हे वजा कर.

साहावें, २ अ + ब + क − ड − १० यांतून क + २ अ − ड हे वजा कर.

सातावें, ३ अ + ब + क − ड − १० यांतून ब − १० + ३ अ हे वजा कर,

आठवें, २ अब + ब − ४ क + बक − ब यांतून ३ अ^{२} − क + ब^{२} हे वजा कर,

नववें, अ^{३} + ब^{३}क + अब^{३} − अबक यांतून ब^{३} + अब^{२} − अबक हे वजा कर.

दाहावें, १२ क्ष + ६ अ − ४ ब + ४० यांतून ४ ब − ३ अ + ४ क्ष + ६ ड हे वजा कर.

अकरावें, २क्ष-[illegible]अ+४ब+६क-५० यातून ९अ+क्ष+५ब-६क-४० हें वजा कर.

बारावें, ६अ-४ब-१२क+१२क्ष यांतून २क्ष-८अ+४ब-५क हें वजा कर.

गुणाकार.

गुणाकारांत **गुण्य** आणि **गुणक** यांचीं पदें **एकाकी** अथवा **संयुक्त**, याजवरून त्यांचे अनेक प्रकार आहेत.

प्रथमप्रकार.

जेव्हां **गुण्य** आणि **गुणक** हीं दोनही पदें **एकाकी** आहेत.

रीति.

गुण्य आणि **गुणक** यांचे वेळाप्रकाशांक परस्पर गुणून लिहावे, नंतर दोन रकमांचीं जीं अक्षरें आहेत तीं सर्व जोडून त्या गुणाकारापुढें लिहावीं, ह्मणजे हें सर्व मिळून गुणाकार जाला.

गुण्य आणि **गुणक** यांचीं चिन्हें सरूप असल्यास गुणाकार (+) धन होतो. आणि तीं विरूप अ

सल्यास गुणाकार (−) ऋण होतो.*

उदाहरणें.

१० अ	−३अ	७अ	−६क्ष	हे गुण्य.
२ ब	+२ ब	−४क	−४अ	हे गुणक.
२० अब.	−६ अब	−२८अक	२४अक्ष	हा गुणाकार.

---

* या रीतीचा खरेपणा या पुढील लिहिल्यावरून समजांत येतो.

१ जेव्हां + अ हा + क संगातीं गुणायाचा आहे, यांतील अर्थ हा कीं, + क यामध्यें जितकी संख्या आहे तितक्यावेळां + अ घेतला पाहिजे. आतां ज्या रकमा धन आहेत त्यांची बेरीज धन होती. यांतून निघतें कीं + अ × + क यांचा गुणाकार + अक होतो.

२ जेव्हां दोन आदिकरून पदें परस्पर गुणायाचीं आहेत तर कोणते ही तऱ्हेनें तीं पदें लिहिलीं तरी गुणाकार बरोबर येईल. ह्मणजे अ × क आणि क × अ हे दोनही एकच आहेत. याजकरितां जेव्हां − अ हा + क याणें गुणायाचा, अथवा + क हा − अ याणें गुणायाचा आहे, यांत अर्थ हा आहे कीं, जितकी संख्या + क या मध्यें आहे तितक्या वेळां − अ घेतला पाहिजे. आतां ज्या रकमा ऋण आहेत त्यांची बेरीज ऋण होते यांतून निघतें कीं − अ × + क अथवा + क × − अ हे दोनही गुणाकार − अक होतात.

३ जेव्हां − अ आणि − क हे परस्पर गुणायाचे आहेत, एथें जी संख्या − क यामध्यें आहे तितक्यावेळां − अ वजा केला पाहिजे, परंतु ऋण वजा करणें हें पूर्वीं सांगितलें. वजाबाकीवरील टीपीप्रमाणें धनाचे मिळवणी बरोबर आहे. क × अ अथवा + अक.

असें नसेल अ − अ = ० याजकरितां (अ − अ) × − क हें ही = ० कारण कोणतेही पदानें ० शून्य गुणिल्यास गुणाकार ० शून्य होईल. आतां गुणाकारांत प्रथम रकम अ × − क = − अ क हें दुसरे प्रकारा प्रमाणें सिद्ध आहे, याजकरितां गुणाकाराची दुसरी रकम − अ × − क = निश्चय + अ क असा कीं दोन रकमांची बेरीज ० शून्या बरोबर होईल, याप्रमाणें − अ क + अ क = ० शून्य. यांतून निघतें कीं − अ × − क = + अ क आहे.

$४अक$	$९अक्ष$	$-२क्षय$	$-४क्षय$
$-३अब$	$४क्ष$	$३क्षय^{२}$	$-क्षय$
$-१२अ^{२}बक$	$३६अक्ष^{२}$	$-६क्ष^{२}य^{३}$	$४क्ष^{२}य^{२}$
$-३अक्ष$	$-अक्ष$	$३क्षय$	$-५क्षयज्ञ$
$४क्ष$	$-६क$	-४	$-५अक्ष$

दुसराप्रकार.

जेव्हां **गुण्य** आणि **गुणक** यांत एक संयुक्तपद आहे.

रीति.

संयुक्तपदाची एक एक रकम वेगळाली एक पदानें पूर्वरीतीप्रमाणें गुणावी, गुणाकार येईल तो एकापुढें एक त्याचे त्याचे चिह्नांने युक्त करून अनुक्रमानें लिहावा. ह्मणजे सर्व मिळून गुणाकार जाला.

उदाहरणें.

$५अ-३क$	$३अक-४ब$	$२अ^{२}-३क+५$
$२अ$	$३अ$	$बक$
$१०अ^{२}-६अक$	$९अ^{२}क-१२अब$	$२अ^{२}बक-२बक^{२}+५बक$
$१२क्ष-२अक$	$२५क-७ब$	$४क्ष-ब+३अब$
$४अ$	$-२अ$	$२अब$
$३क^{२}+क्ष$	$१०क्ष^{२}-३य^{२}$	$३अ^{२}-२क्ष^{२}-६ब$
$४क्षय$	$-४क्ष^{२}$	$२अक्ष^{२}$

तिसरा प्रकार.

जेव्हां गुण्य आणि गुणक हीं दोनही संयुक्तपदेंच आहेत.

रीति.

गुण्याच्या सर्व वेगळाल्या रकमा गुणकाचे सर्व वेगळाल्या रकमांनीं अनुक्रमें गुणाव्या, अशाकीं गुण्याची एक एक रकम सर्व गुणकानें गुणिली जाईल. गुणाकार येईल तो एकाखालीं एक अथवा एकापुढें एक अनुक्रमे लिहावा. नंतर त्यांत जीं सरूपपदें असतील तीं सर्व एकत्र करावीं, ह्मणजे सर्व मिळून गुणाकार जाला.

उदाहरणें.

$अ+ब$	$३क्ष+२य$	$२क्ष^{२}+क्षय-२य^{२}$
$अ+ब$	$४क्ष-५य$	$३क्ष-३य$
$अ^{२}+अब$	$१२क्ष^{२}+८क्षय$	$६क्ष^{३}+३क्ष^{२}य-६क्षय^{२}$
$+अब+ब^{२}$	$-१५क्षय-१०य^{२}$	$-६क्ष^{२}य-३क्षय^{२}+६य^{३}$
$अ^{२}+२अब+ब^{२}$	$१२क्ष^{२}-७क्षय-१०य^{२}$	$६क्ष^{३}-३क्ष^{२}य-९क्षय^{२}+६य^{३}$

$अ+ब$	$क्ष+य$	$अ^{२}+अब+ब^{२}$
$अ+ब$	$क्ष+य$	$अ-ब$
$अ^{२}+अब$	$क्ष^{२}+क्षय$	$अ^{३}+अ^{२}ब+अब^{२}$
$-अब-ब^{२}$	$+क्षय+य^{२}$	$-अ^{२}ब-अब^{२}-ब^{३}$
$अ^{२}$ ※ $-ब^{२}$	$क्ष^{२}+२क्षय+य^{२}$	$अ^{३}$ ※ ※ $-ब^{३}$

जेव्हां संयुक्तपदांस परस्पर गुणितात तेव्हां गुणायाचा आरंभ डावेकडून करावा ह्मणजे अंकगणित गुणाकाराचे उलटा, आणि गुणाकार लिहिते समयीं पूर्व ओळीचे एकस्थान सोडून दुसरे ओळीचा आरंभ करावा, याप्रमाणें प्रति ओळीस एक एक स्थान सोडून. असें पुढें ही. ह्मणजे सरूप रकमा एकाखालीं एक येऊन मिळवणीसमयीं श्रम पडणार नाहीं.

बहुतकरून संयुक्त पदांचा गुणाकार असा लिहितात कीं, संयुक्तपदें सांखळींत लिहून मध्यें गुणाकाराचें चिह्नमात्र लिहितात.

जसें (अ+ब)×(अ−ब)×३ अ ब. अथवा या प्रमाणें. अ+ब· अ−ब· ३ अ ब.

उदाहरणें.

पहिलें, १० अ क यांस २ अ यांनीं गुण.

गुणाकार, $२०अ^{२}क$

दुसरें, $३अ^{२} - २ब$ यांस ३ ब यांनीं गुण.

गुणाकार, $९अ^{२}ब - ६ब^{२}$

तिसरें, ३ अ + २ ब यांस ३ अ − २ ब यांनीं गुण.

गुणाकार, $९अ^{२} - ४ब^{२}$

च्वथें, $क्ष^{३} - क्षय^{२} + य^{३}$ यांस क्ष + य यांनीं गुण

गुणाकार, $क्ष^{३}+य^{३}$

पांचवें, $अ^{३}+अ^{२}ब+अब^{२}+ब^{३}$ यांस, $अ-ब$ यांनीं गुण.

गुणाकार. $अ^{४}-ब^{४}$

साहावें, $अ^{२}+अब+ब^{२}$ यांस $अ^{२}-अब+ब^{२}$ यांनीं गुण.

सातवें, $क्ष^{२}-२क्षय+५$ यांस $क्ष^{२}+२क्षय-६$ यांनीं गुण.

आठवें, $३अ^{२}-२अक्ष+५क्ष^{२}$ यांस $३अ^{२}-४अक्ष-७क्ष^{२}$ यांनीं गुण.

नववें, $३क्ष^{२}+२क्षय+१य^{२}$ यांस $२क्ष^{२}-१क्षय-३य^{२}$ यांनीं गुण.

दाहावें, $अ^{२}+अब+ब^{२}$ यांस $अ-२ब$ यांनीं गुण.

भागाकार.

बीजगणितांत भागाकार अंकगणिताप्रमाणेंच गुणाकाराचे उलटा आहे, आणि अंकगणिताप्रमाणेंच डावेकडून उजवेकडे भागीत जावें. भाज्य निःशेष भागिला जाईल तर वर सांगितल्या रीतीनें भागून भागाकार लिहावा. तसें न होईल तर व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें वर भाज्य लिहून खालीं भाजक लिहावा. त्यांत ही होईल तर संक्षेप करावा आणि लिहावा. त्याचे प्रकार आहेत ते सांगतो.

प्रथमप्रकार.

जेव्हां **भाज्य** आणि **भाजक** हे दोनही **एकाकी** आहेत.

अंकगणिताप्रमाणें भाजक भाज्याचे मागें अथवा व्यवहारीअपूर्णांकरीतीनें भाज्याचे खालीं अशा तऱ्हेनें दोनही रकमा लिहाव्या, नंतर भाज्यभाजकांचा होईल तेवढा संक्षेप करावा. त्याची रीति ही आहे कीं, या दोन रकमांत जीं साधारण अक्षरें असतील तीं दोनही रकमांतून रद करावी, नंतर भाजक वेळाप्रकाशकानें भाज्य वेळाप्रकाशक भागावा. अथवा व्यवहारीअपूर्णांकरीतीनें त्या

दोहोंच्या दृढ भाजकानें भागून संक्षेप करावा.

भाज्य आणि भाजक यांचीं चिन्हें सरूप असल्यास भागाकार (+) धन होतो आणि तीं विरूप असल्यास भागाकार (−) ऋण होतो.*

उदाहरणें.

प्रथम, ६ अब यांस ३ अ यांनीं भाग.

आतां ६ अब ÷ ३ अ. अथवा ३ अ) ६ अब (अथवा

$\frac{\text{६अब}}{\text{३अ}} = \text{२ब}$

---

* ह्मणून पाहा भाजक आणि भागाकार हे परस्पर गुणिले असतां भाज्य सिद्ध होतो याजकरितां.

१ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (+) धन आहेत तेव्हां भागाकार निश्चित (+) धन होईल. कारण, धन भाजक धन भागाकारानें गुणिला असतां गुणाकार भाज्य धन होतो.

२ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (−) ऋण आहेत तेव्हांही भागाकार (+) धन होईल. कारण, ऋण भाजक × ऋण भागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (+) धन होतो.

३ जेव्हां भाज्य आणि भाजक यांत एक धन आणि एक ऋण असें आहे तेव्हां भागाकार निश्चित (−) ऋण होईल. कारण, धन भाजक × ऋण भाजकानें तर गुणाकार भाज्य (−) ऋण होतो. अथवा ऋण भाजक × धन भागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (−) ऋण होतो.

यांतून दिसतें कीं भाज्य भाजकांचीं सरूप चिन्हें भागाकारास (+) धन करितात आणि त्या भाज्य भाजकांचीं विरूप चिन्हें भागाकारास (−) ऋण करितात ही सामान्य रीति होय.

दुसरें, $\text{क}\div\text{क}=\frac{\text{क}}{\text{क}}=१$ आणि $\text{अबक्ष}\div\text{बक्षय}=\frac{\text{अबक्ष}}{\text{बक्षय}}=\frac{\text{अ}}{\text{य}}$

तिसरें, $१६\text{क्ष}^{२}$ यांस ८क्ष यांनीं भाग.

भागाकार, २क्ष

चवथें, $१२\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{२}$ यांस $-३\text{अ}^{२}\text{क्ष}$ यांनीं भाग.

भागाकार, -४क्ष

पांचवें, $-१५\text{अय}^{२}$ यांस ३अय यांनी भाग.

भागाकार, -५य

साहावें, $-१८\text{अक्ष}^{२}\text{य}$ यांस -८अक्षज्ञ यांनीं भाग.

भागाकार, $\frac{९\text{क्षय}}{४\text{ज्ञ}}$

दुसराप्रकार.

जेव्हां भाज्य संयुक्तपद आहे आणि भाजक एकाकी आहे.

रीति

भाज्यांतील सर्व रकमा पूर्वरीती प्रमाणें भाजकानें वेगळाल्या भागाव्या.

उदाहरणें.

पहिलें, $(\text{अब}+\text{ब}^{२})\div२\text{ब}$, अथवा $\frac{\text{अब}+\text{ब}^{२}}{२\text{ब}}=\frac{\text{अ}+\text{ब}}{२}=\frac{१}{२}\text{अ}+\frac{१}{२}\text{ब}$.

दुसरें, $(१० \text{अब} + १५ \text{अक्ष}) \div ५ \text{अ}$, अथवा

$$\frac{१० \text{अब} + १५ \text{अक्ष}}{५ \text{अ}} = २ \text{ब} + ३ \text{क्ष}$$

तिसरें, $(३० \text{अज्ञ} - ४८ \text{ज्ञ}) \div \text{ज्ञ}$, अथवा

$$\frac{३० \text{अज्ञ} - ४८ \text{ज्ञ}}{\text{ज्ञ}}$$

भागाकार, $३० \text{अ} - ४८$

चवथें, $६ \text{अब} - ८ \text{अक्ष} + \text{अ}$ यांस २अ यांनीं भाग.

पांचवें, $३ \text{क्ष}^२ - १५ + ६ \text{क्ष} + ६ \text{अ}$ यांस ३क्ष यांनीं भाग.

साहावें, $६ \text{अबक} + १२ \text{अबक्ष} - ९ \text{अ}^२\text{ब}$ यांस ३अब यांनीं भाग.

सातवें. $१० \text{अ}^२\text{क्ष} - १५ \text{क्ष}^२ - २५ \text{क्ष}$ यांस ५क्ष यांनीं भाग.

आठवें, $१५ \text{अ}^२\text{बक} - १५ \text{अकक्ष}^२ + ५ \text{अड}^२$ यांस -५अक यांनीं भाग.

नववें, $१५ \text{अ} + ३ \text{अय} - १० \text{य}^२$ यांस २१अ यां

नीं भाग.

दाहावें, −२० ड^{३}ब^{३}+६०अब^{३} यांस −६अब यांनीं भाग.

तिसराप्रकार.

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही संयुक्तपदेंच आहेत.

रीति.

१ अंकगणितरीतीनें भाज्य भाजक लिहावे, ह्मणजे प्रथम भाजक लिहावा, नंतर भाज्य लिहावा. आतां या दोहोंचे मध्यें एक वांकडी रेघ करावी. आणि दोहोंत अक्षर चिह्नें असतील तीं मोठे घाता पासून उतरतीं लिहावीं.

२ भाज्याचे पहिलेंपद भाजकाचे पहिले पदानें प्रथम प्रकारा प्रमाणें भागावें, आणि भागाकार येईल तो भागाकार स्थळीं लिहावा.

३ या भागाकारानें सर्व भाजक पदें गुणून तो गु

णाकार भाज्यांतून वजा करावा.

४ नंतर बाकीवर वरचे भाज्यांतून पद खालीं घेऊन पुनः पूर्व प्रमाणें भागावें. याप्रमाणें भाज्याचे प्रतिपदीं करावें; असें शेवटपर्यंत करावें; जसें अंकगणितांत करितात.

टीप. जर भाजक भाज्यांतून बरोबर जात नाहीं तर तें पदव्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें लिहावें; जशी अंकगणितांत बाकी लिहितात.

उदाहरणें.

$अ-क)\ अ^3-४अ^2क+४अक^2-क^3(\ अ^2-३अक+क^2$

$$\underline{अ^3-अ^2क}$$
$$※-३अ^2क+४अक^2$$
$$\underline{-३अ^2क+३अक^2}$$
$$※\ +\ अक^2-क^3$$
$$+\ अक^2-क^3$$
$$※\ \ ※$$

$अ-ब)\ अ^2-२अब+ब^2(\ अ-ब$ भागाकार.

$$\underline{अ^2-अब}$$
$$-अब+ब^2$$
$$\underline{-अब+ब^2}$$
$$※\ \ ※$$

अ−२) अ^{३}−६अ^{२}+१२अ−८(अ^{२}−४अ+

भागाकार. अ^{३}−२अ^{२}

※−४अ^{२}+१२अ

−४अ^{२}+८अ

※+४अ−८

+४अ−८

※ ※

अ+ज्ञ) अ^{३}+ज्ञ^{३}(अ^{२}−अज्ञ+ज्ञ^{२} भागाकार.

अ^{३}+अ^{२}ज्ञ

※−अ^{२}ज्ञ+ज्ञ^{३}

−अ^{२}ज्ञ−अज्ञ^{२}

※ +अज्ञ^{२}+ज्ञ^{३}

+अज्ञ^{२}+ज्ञ^{३}

※ ※

अ+२क्ष) अ^{२}+४अक्ष+४क्ष^{२}(अ+२क्ष भागाकार.

अ^{२}+२अक्ष

※+२अक्ष+४क्ष^{२}

+२अक्ष+४क्ष^{२}

※ ※

$$अ+क्ष)\ अ^{४}-३क्ष^{४}\ (अ^{३}-अ^{२}क्ष+अक्ष^{२}-क्ष^{३}-\frac{२क्ष^{४}}{अ+क्ष}$$

भागाकार. $\underline{अ^{४}+अ^{३}क्ष}$

※ $-अ^{३}क्ष-३क्ष^{४}$

$\underline{-अ^{३}क्ष-अ^{२}क्ष^{२}}$

※ $+अ^{२}क्ष^{२}-३क्ष^{४}$

$\underline{+अ^{२}क्ष^{२}+अक्ष^{३}}$

※ $-अक्ष^{३}-३क्ष^{४}$

$\underline{-अक्ष^{३}-क्ष^{४}}$

※ $-२क्ष^{४}$

दुसरीं उदाहरणें.

पहिलें, $अ^{२}+४अक्ष+४क्ष^{२}$ यांस $अ+२क्ष$ यांनीं भाग.

उत्तर, $अ+२क्ष$

दुसरें, $अ^{३}+३अ^{२}ज्ञ+३अज्ञ^{२}-ज्ञ^{३}$ यांस $अ-ज्ञ$ यांनीं भाग.

उत्तर, $अ^{२}-२अज्ञ+ज्ञ^{२}$

तिसरें, १ यास $१+अ$ यांनीं भाग.

उत्तर, $१-अ+अ^{२}-अ^{३}$ इत्यादिअनंत.

चवथें, $१२क्ष^{४}-१९२$ यांस $३क्ष-६$ यांनीं भाग.

उत्तर, $४क्ष^{३}+८क्ष^{२}+१६क्ष+३२$

पांचवें, $अ^5 - 5अ^4ब + 10अ^3ब^2 - 10अ^2ब^3 + 5अब^4 - ब^5$ यांस $अ^2 - 2अब + ब^2$ यांनीं भाग.

उत्तर, $अ^3 - 3अ^2ब + 3अब^2 - ब^3$

साहावें, $48झ^3 - 96अझ^2 - 64अ^2झ + 150अ^3$ यांस $2झ - 3अ$ यांनीं भाग.

सातवें, $ब^6 - 2ब^4क्ष^2 + 2ब^2क्ष^4 - क्ष^6$ यांस $ब^3 - 3ब^2क्ष + 3बक्ष^2 - क्ष^3$ यांनीं भाग.

आठवें, $अ^5 - क्ष^5$ यांस $अ - क्ष$ यांनीं भाग.

नववें, $अ^3 + 5अ^2क्ष + 5अक्ष^2 + क्ष^3$ यांस $अ + क्ष$ यांनीं भाग.

दाहावें, $अ^4 + 4अ^2ब^2 - 32ब^4$ यांस $अ + 2ब$ यांनीं भाग.

अकरावें, $24अ^5 - ब^5$ यांस $3अ - 2ब$ यांनीं भाग.

अपूर्णबीजगणित.

अपूर्णबीजगणितांत नामें आणि रीति अपूर्णांकगणिताप्रमाणेंच आहेत, हें पुढें सांगतों या प्रकारावरून कळेल.

पहिलाप्रकार.

भागानुबंध पूर्णबीजास विषमअपूर्णबीजाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.

पूर्णबीज अपूर्णबीजाचे छेदांनीं गुणून त्या गुणाकारांत अंश मिळवून अथवा मिळवणीचे चिन्हांनीं जोडून वर लिहावे आणि खालीं छेद लिहावे ह्मणजे विषम अपूर्ण बीजाचें रूप जालें.

उदाहरणें.

पहिलें, $३\frac{४}{५}$ आणि $\text{अ} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ या दोहोंस विषम अपूर्णबीजाचें रूपदे.

$३\frac{४}{५} = \frac{३\times५+४}{५} = \frac{१५+४}{५} = \frac{१९}{५}$, हें उत्तर.

$\text{अ} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{अ}\times\text{क्ष}-\text{ब}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{अक्ष}-\text{ब}}{\text{क्ष}}$ हें उत्तर.

दुसरें, $अ+\frac{अ^{२}}{ब}$ आणि $अ-\frac{ब^{२}-अ^{२}}{अ}$ या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

$अ+\frac{अ^{२}}{ब}=\frac{अ\times ब+अ^{२}}{ब}=\frac{अब+अ^{२}}{ब}$ हें उत्तर.

$अ-\frac{ब^{२}-अ^{२}}{अ}=\frac{अ^{२}-ब^{२}+अ^{२}}{अ}=\frac{२अ^{२}-ब^{२}}{अ}$ हें उत्तर.

तिसरें, $५\frac{३}{७}$ यांस विषम अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर, $\frac{३८}{७}$

चवथें, $१-\frac{३अ}{क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दें.

उत्तर, $\frac{क्ष-३अ}{क्ष}$

पांचवें, $२अ-\frac{३अक्ष+अ^{२}}{४क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{५अक्ष+अ^{२}}{४क्ष}$

साहावें, $१२+\frac{४क्ष-१८}{५क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{६४क्ष-१८}{५क्ष}$

सातवें, $क्ष+\frac{१-३अ-क}{क}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{कक्ष+१-३अ-क}{क}$

आठवें, $४+२क्ष-\frac{२क्ष^{२}+३अ}{५अ}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{२३अ+१०अक्ष-२क्ष^{२}}{५अ}$

दुसराप्रकार.

विषमअपूर्णबीजास पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप द्यावयाचा.

रीति.

पूर्णबीज निघावयाकरितां अंशांस छेदांनीं भागावें आणि कांहीं बाकी राहिली तरती भागाकाराचे बाजूस लिहून तिचे खालीं छेद लिहावे.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{\text{१६}}{\text{३}}$ आणि $\frac{\text{अब}+\text{अ}^{\text{२}}}{\text{ब}}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

$\frac{\text{१६}}{\text{३}}=\text{१६}\div\text{३}=\text{५}\frac{\text{१}}{\text{३}}$ हेंउत्तर.

$\frac{\text{अब}+\text{अ}^{\text{२}}}{\text{ब}}=\overline{\text{अब}+\text{अ}^{\text{२}}}\div\text{ब}=\text{अ}+\frac{\text{अ}^{\text{२}}}{\text{ब}}$ हेंउत्तर.

दुसरें, $\frac{\text{२अक}-\text{३अ}^{\text{२}}}{\text{क}}$ आणि $\frac{\text{३अक्ष}+\text{४क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}+\text{क्ष}}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

$\frac{\text{२अक}-\text{३अ}^{\text{२}}}{\text{क}}=\text{२}\,\overline{\text{अक}-\text{३अ}^{\text{२}}}\div\text{क}=\text{२अ}-\frac{\text{३अ}^{\text{२}}}{\text{क}}$ हें उत्तर.

$\frac{\text{३अक्ष}+\text{४क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}+\text{क्ष}}=\text{३अक्ष}+\text{४क्ष}\div\text{अ}+\text{क्ष}=\text{२क्ष}+\frac{\text{क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}+\text{क्ष}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{३३}{५}$ आणि $\frac{२अक्ष-३क्ष^२}{अ}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

उत्तर, $६\frac{३}{५}$ आणि $२क्ष-\frac{३क्ष^२}{अ}$

चवथें, $\frac{४अ^२क्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ^२+२ब^२}{अ-ब}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

उत्तर, $२अक्ष$ आणि $२अ+२ब+\frac{४ब^२}{अ-ब}$

पांचवें, $\frac{३क्ष^२-२य^२}{क्ष+य}$ आणि $\frac{२क्ष^२-२य^२}{क्ष-य}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

साहावें, $\frac{१०अ^२-४अ+५}{५अ}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

सातवें, $\frac{१५अ^३+५अ^२}{३अ^३+२अ^२-२अ-४}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

तिसरा प्रकार.

अपूर्णबीजास समछेद करायाचा.

रीति.

प्रतिपदाचे अंश आणि त्याचे छेदांवांचून सर्वपदांचे छेद हे नवे अंश होण्याकरितां परस्पर गुणावे, आणि समछेद होण्याकरितां सर्वछेद परस्पर गुणावे.

जेव्हां सर्वछेद कोणत्याहि एका अंकानें अथवा बीजानें भागिले जातात तेव्हां ते भागून संक्षेप करावा, नंतर पूर्वप्रमाणें करावें; आणि या प्रकर्णी अपूर्णांकगणितांत ज्या रीति सांगितल्या आहेत त्या सर्व मनांत धरून करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{ज्ञ}$ यांस समछेद रूप दे.

आंता $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{ज्ञ} = \frac{अज्ञ}{क्षज्ञ}$ आणि $\frac{बक्ष}{क्षज्ञ}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{क्ष}, \frac{क्ष}{ब}$ आणि $\frac{ब}{क}$ यांस समछेद रूप दे.

आतां $\frac{अ}{क्ष}, \frac{क्ष}{ब}$ आणि $\frac{ब}{क} = \frac{अबक}{क्षबक}, \frac{क्ष^२क}{क्षबक}$ आणि $\frac{ब^२क्ष}{क्षबक}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ}{क्ष}$ आणि $\frac{३ब}{२क}$ यांस समछेद रूप दे.

उत्तर, $\frac{४अक}{२कक्ष}$ आणि $\frac{३बक्ष}{२कक्ष}$

रीति.

मोठें पद लाहान पदानें भागावें, बाकी राहील तो भाजक कल्पून त्यानें पूर्व भाजकास भागावें. याप्रमाणें बाकी ० पूज्य होईतों पर्यंत करावें. शेवटील भाजक हद्द भाजक होय.

टीप. भाजकपदां मध्यें जीं अक्षरें आणि अंक साधारण असतील तीं परस्पर भागून रद्द करावीं, नंतर हद्द भाजक काढावा.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अब+ब^{२}}{अक^{२}+बक^{२}}$ यांचा हद्द भाजक काढ.

$$अब+ब^{२})\ अक^{२}+बक^{२}$$

$$\text{अथवा}\quad अ+ब)\ अक^{२}+बक^{२}\ (क^{२}$$

$$\underline{\qquad अक^{२}+बक^{२}}$$

$$※\quad ※$$

एथें $अ+ब$ हा हद्द भाजक आहें, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ^{३}-अब^{२}}{अ^{२}+२अब+ब^{२}}$ यांचा हद्द भाजक काढ.

$$अ^{२}+२अब+ब^{२})\ अ^{३}-अब^{२}\ (अ$$

$$\underline{\qquad अ^{३}+२अ^{२}ब+अब^{२}}$$

$$※-२अ^{२}ब-२अब^{२})\ अ^{२}+२अब+ब^{२}$$

चवथें, $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{३अ+२ब}{२क}$ यांस समछेद रूप दे.

उत्तर, $\frac{४अक}{२बक}$ आणि $\frac{३अब+२ब^{२}}{२बक}$

पांचवें, $\frac{५अ}{३क्ष}$ $\frac{३ब}{२क}$ आणि ४ड यांस समछेद रूप दे.

उत्तर, $\frac{१०अक}{६कक्ष}$ $\frac{९बक्ष}{६कक्ष}$ आणि $\frac{२४कडक्ष}{६कक्ष}$

साहावें, $\frac{५}{६}$ $\frac{३अ}{४}$ आणि $२ब+\frac{३अ}{ब}$ यांस समछेद रूप दे.

उत्तर, $\frac{२०ब}{२४ब}$ $\frac{१८अब}{२४ब}$ आणि $\frac{४८ब^{२}+७२अ}{२४ब}$

सातवें. $\frac{२}{३}$ $\frac{३अ^{२}}{४}$ आणि $\frac{अ^{२}+ब^{२}}{अ+ब}$ यांस समछेद रूप दे.

आठवें, $\frac{३ब}{४अ^{२}}$ $\frac{२क}{३अ}$ आणि $\frac{ड}{२अ}$ यांस समछेद रूप दे.

चौथा प्रकार.

अपूर्ण बीजाचे पदाचा दृढ भाजक काढायाचा

रीति.

पूर्व प्रकाराप्रमाणें पदांचा दृढभाजक काढून त्यानें सर्व पदें भागावीं, भागाकार येईल तो संक्षेप जाला.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अब+ब^{२}}{अक^{२}+बक^{२}}$ यांचा संक्षेप कर.

$$अब+ब^{२})\,अक^{२}+बक^{२}$$

अथवा.

$$\begin{array}{l} अ+ब)\,अक^{२}+बक^{२}(क^{२} \\ \qquad\quad\; अक^{२}+बक^{२} \\ \hline \qquad\qquad \text{※} \qquad \text{※} \end{array}$$

एथें अ+ब हा दृढभाजक आहे, याजकरितां

$अ+ब\,)\,\frac{अब+ब^{२}}{अक^{२}+बक^{२}}=\frac{ब}{क^{२}}$ हा संक्षेप जाला, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{क^{३}-ब^{२}क}{क^{२}+२बक+ब^{२}}$ याचा संक्षेप कर.

$$\begin{array}{l} क^{२}+२बक+ब^{२})\,क^{३}-ब^{२}क(क \\ \qquad\qquad\qquad\quad क^{३}+२बक^{२}+ब^{२}क \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad \text{※}-२बक^{२}-२ब^{२}क \end{array}$$

$$\begin{array}{l} क+ब)\,क^{२}+२बक+ब(क+ब \\ \qquad\qquad क^{२}+बक \\ \hline \qquad\qquad \text{※}-बक+ब^{२} \end{array}$$

अथवा $अ+ब)\ अ^{२}+२अब+ब^{२}\ (अ+ब$

$$\underline{अ^{२}+अब}$$

$$*\quad अब+ब^{२}$$

$$\underline{अब+ब^{२}}$$

$$*\quad *$$

एथें $अ+ब$ हा दृढ भाजक आहे, हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{अ^{२}-४}{अब+२ब}$ यांचा दृढ भाजक काढ.

उत्तर, $अ-२$

चवथें, $\frac{अ^{४}-अ^{२}ब^{२}}{अ^{२}-ब^{२}}$ यांचा दृढ भाजक काढ.

उत्तर, $अ^{२}-ब^{२}$

पांचवें, $\frac{अ^{३}क्ष+२अ^{२}क्ष^{२}+२अक्ष^{३}+क्ष^{४}}{५अ^{४}+१०अ^{३}क्ष+५अ^{२}क्ष^{२}}$ यांचा दृढ भाजक काढ.

पांचवा प्रकार.

अपूर्ण बीजाचा संक्षेप करावयाचा.

ब क+ब

⁂

थें क+ब हा दृढभाजक आहे. याजकरितां

क+ब) $\frac{क^3-ब^2क}{क^2+२बक+ब^2}$ (= $\frac{क^2-बक}{क+ब}$ हा संक्षेप जाला

तिसरें, $\frac{क^3-ब^3}{क^3-ब^2क}$ याचा संक्षेप कर.

उत्तर, $\frac{क^2+बक+ब^2}{क^2+बक}$

चवथें, $\frac{अ^4-ब^4}{अ^2-ब^2}$ याचा संक्षेप कर.

उत्तर, $अ^2+ब^2$

पांचवें, $\frac{अ^2-ब^2}{अ^3-३अ^2ब+३अब^2-ब^3}$ याचा संक्षेप कर.

साहावें, $\frac{३अ^4+६अ^3क+३अ^2क^2}{अ^3क+३अ^2क^2+३अक^3+क^4}$ याचा संक्षेप कर.

सातवें, $\frac{अ^2-अब}{अ^2+२अब+ब^2}$ याचा संक्षेप कर.

साहावा प्रकार.

अपूर्णबीजाची मिळवणी करावयाची.

रीति.

अपूर्णबीजपदांचे छेद सम असल्यास सर्व अंशांची बेरीज घ्यावी, आणि त्या बेरजेखालीं समछेद लिहावे ह्मणजे मिळवणी जाली.

ते छेद सम नसल्यास समछेद करून नंतर वर सांगितल्या प्रमाणें करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{३}$ आणि $\frac{अ}{४}$ यांची मिळवणी काय होती?

एथें $\frac{अ}{३}+\frac{अ}{४}=\frac{४अ}{१२}+\frac{३अ}{१२}=\frac{७अ}{१२}$ ही बेरीज. हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{ब}$ $\frac{ब}{क}$ आणि $\frac{क}{ड}$ यांची मिळवणी काय होती?

एथें $\frac{अ}{ब}+\frac{ब}{क}+\frac{क}{ड}=\frac{अकड}{बकड}+\frac{ब^{२}ड}{बकड}+\frac{बक^{२}}{बकड}=\frac{अकड+ब^{२}ड+बक^{२}}{बकड}$ ही बेरीज जाली. हें उत्तर.

तिसरें,[⁂] $अ-\frac{३क्ष^{२}}{ब}$ आणि $ब+\frac{२अक्ष}{क}$ यांची मिळवणी काय होती?

[⁂] भागानुबंध पूर्णबीजाची मिळवणी करिते समयीं ही रीति सर्वांहून उत्तम आहे कीं, अपूर्णबीजाचेमात्र अवयव समछेद करून मिळवणी करावी, नंतर पूर्णबीजाची मिळवणी करून त्या अपूर्णबीजाचे बेरिजेस जोडून लिहावी.

एथें $अ - \frac{३क्ष^{२}}{ब} + ब + \frac{२अक्ष}{क} = अ - \frac{३कक्ष^{२}}{बक} + ब + \frac{२अबक्ष}{बक} = अ + ब + \frac{२अबक्ष - ३कक्ष^{२}}{बक}$ ही बेरीज. हें उत्तर.

चवथें, $\frac{४क्ष}{३अ}$ आणि $\frac{२क्ष}{५ब}$ यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $\frac{२०बक्ष + ६अक्ष}{१५अब}$

पांचवें, $\frac{अ}{३}$ $\frac{अ}{४}$ आणि $\frac{अ}{५}$ यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $\frac{४७अ}{६०}$

साहावें, $\frac{२अ-३}{४}$ आणि $\frac{५अ}{८}$ यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $\frac{९अ-६}{८}$

सातवें, $२अ + \frac{अ+३}{५}$ आणि $४अ + \frac{२अ-५}{४}$ यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $६अ + \frac{१४अ-१३}{२०}$

आठवें, $६अ$ आणि $\frac{३अ}{४ब}$ आणि $\frac{अ+ब}{२ब}$ यांची मिळवणी काय होती?

नववें, $\frac{३अ}{४}$ $\frac{६अ}{५}$ आणि $\frac{३अ+२}{७}$ यांची मिळवणी काय होती?

दाहावें, $\text{२अ} \quad \frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ आणि $\text{३} + \frac{\text{अ}}{\text{६}}$ यांची मिळवणी काय होती?

अकरावें, $\text{८अ} + \frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ आणि $\text{२अ} - \frac{\text{५अ}}{\text{२}}$ यांची मिळवणी काय होती?

सातवा प्रकार.

एका अपूर्ण बीजपदास दुसऱ्यांतून वजा करायाचा.

रीति.

अपूर्णबीज समछेद नसल्यास मिळवणी प्रमाणें त्यास समछेद करावे. नंतर अंशाची वजाबाकी करून त्या बाकी खालीं समछेद लिहावे. ह्मणजे वजाबाकी जाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ आणि $\frac{\text{४अ}}{\text{७}}$ यांची वजाबाकी कर.
एथें $\frac{\text{३अ}}{\text{४}} - \frac{\text{४अ}}{\text{७}} = \frac{\text{२१अ}}{\text{२८}} - \frac{\text{१६अ}}{\text{२८}} = \frac{\text{५अ}}{\text{२८}}$ बाकी. हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{\text{२अ}-\text{ब}}{\text{४क}}$ आणि $\frac{\text{३अ}-\text{४ब}}{\text{३ब}}$ यांची वजाबाकी कर

एथें $\frac{\text{२अ}-\text{ब}}{\text{४क}} - \frac{\text{३अ}-\text{४ब}}{\text{३ब}} = \frac{\text{६अब}-\text{३ब}^{\text{२}}}{\text{१२बक}} - \frac{\text{१२अक}-\text{१६बक}}{\text{१२बक}}$
$= \frac{\text{६अब}-\text{३ब}^{\text{२}}-\text{१२अक}+\text{१६बक}}{\text{१२बक}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{\text{१०अ}}{\text{९}}$ आणि $\frac{\text{३अ}}{\text{७}}$ यांची वजाबाकी कर.

चवथें, ६अ आणि $\frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ यांची वजाबाकी कर.

पांचवें, $\frac{\text{५अ}}{\text{४}}$ आणि $\frac{\text{२अ}}{\text{३}}$ यांची वजाबाकी कर.

साहावें, $\frac{\text{३अ}+\text{क}}{\text{ब}}$ यांतून $\frac{\text{२ब}}{\text{क}}$ हे वजा कर.

सातवें, $\frac{\text{४अ}+\text{८}}{\text{५}}$ यांतून $\frac{\text{२अ}+\text{६}}{\text{९}}$ हे वजा कर.

आठवें, ४अ $+\frac{\text{२अ}}{\text{क}}$ यांतून २अ $-\frac{\text{अ}-\text{३ब}}{\text{क}}$ हे वजा कर.

आठवा प्रकार.

अपूर्ण बीजपदें परस्पर गुणायाचा.

रीति.

गुणाकाराचे अंशांकरितां सर्व अंश परस्पर गुणावे, आणि छेदांकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे.[*]

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{८}$ आणि $\frac{२अ}{५}$ हे परस्पर गूण.

आतां $\frac{अ \times २अ}{८ \times ५} = \frac{२अ^{२}}{४०} = \frac{अ^{२}}{२०}$ हा गुणाकार, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{३}$ $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{६अ}{७}$ हे परस्पर गूण.

आतां $\frac{अ \times ३अ \times ६अ}{३ \times ४ \times ७} = \frac{१८अ^{३}}{८४} = \frac{३अ^{३}}{१४}$ हा गुणाकार.

तिसरें, $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{अ + ब}{२अ + क}$ हें परस्पर गूण.

आतां $\frac{२अ \times (अ + ब)}{ब \times (२अ + क)} = \frac{२अ^{२} + २अब}{२अब + बक}$ गुणाकार, हें उत्तर.

चवथें, $\frac{४अ}{३}$ आणि $\frac{६अ}{५क}$ हे परस्पर गूण.

पांचवें, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४ब^{२}}{३अ}$ हे परस्पर गूण.

---

[*] १ जेव्हां एक अपूर्णबीजपदाचे अंश आणि दुसऱ्या अपूर्णबीजपदाचे छेद यांचा दृढ भाजक मिळेल तेव्हां त्याणें संक्षेप करावा.

२. जेव्हां अपूर्णबीजा संगातीं पूर्णबीज गुणायाचें आहे, तेव्हां गुणाकार याप्रमाणें होतो. पूर्णबीजानें अंश गुणावे, अथवा छेद भागावे; आणि जर पूर्णबीज आणि छेद एकच सरूप आहेत, तर अंशसिद्धच गुणाकार आहे.

साहावें, $\frac{३अ}{ब}$ आणि $\frac{८अक}{ब}$ आणि $\frac{४अब}{३क}$ हे परस्पर गूण.

सातवें, $३अ + \frac{अब}{२क}$ आणि $\frac{३अ^{२}}{ब}$ हे परस्पर गूण.

आठवें, $\frac{२अ^{२} - २ब^{२}}{३बक}$ आणि $\frac{४अ^{२} + २ब^{२}}{अ+ब}$ हे परस्पर गूण.

नववें, $३अ$ आणि $\frac{२अ+१}{अ}$ आणि $\frac{२अ-१}{२अ+ब}$ हे परस्पर गूण.

दाहावें, $अ + \frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष^{२}}{४अ^{२}}$ यांस $क्ष - \frac{अ}{२क्ष} + \frac{अ^{२}}{४क्ष^{२}}$ यांनीं गूण.

नववा प्रकार.

एक अपूर्णबीज पदास दुसऱ्यानें भागायाचा.

रीति

एकाचें अंश दुसऱ्याचें अंशांनीं भागावें, आणि छे

दे छेदांनी भागावे, जर निःशेष भागिले जातील, तसें न होईल तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदल करून गुणाकाररीतीनें भाज्य भाजक गुणावें.[*]

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{४}$ यांस $\frac{३अ}{८}$ यांनीं भाग.

एथें $\frac{अ}{४} \div \frac{३अ}{८} = \frac{अ}{४} \times \frac{८}{३अ} = \frac{८अ}{१२अ} = \frac{२}{३}$ भागाकार, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३अ}{२ब}$ यांस $\frac{५क}{४ड}$ यांनीं भाग.

एथें $\frac{३अ}{२ब} \div \frac{५क}{४ड} = \frac{३अ}{२ब} \times \frac{४ड}{५क} = \frac{१२अड}{१०बक}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब}$ यांस $\frac{३अ+२ब}{४अ+ब}$ यांनीं भाग.

एथें $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब} \times \frac{४अ+ब}{३अ+२ब} = \frac{८अ^२+६अब+ब^२}{९अ^२-४ब^२}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

चवथें, $\frac{३अ^२}{अ^३+ब^३}$, यांस $\frac{अ}{अ+ब}$ यांनीं भाग.

एथें $\frac{३अ^२}{अ^३+ब^३} \times \frac{अ+ब}{अ} = \frac{३अ^२ \times (अ+ब)}{(अ^३+ब^३) \times अ} = \frac{३अ}{अ^२-अब+ब^२}$ भागाकार, हे उत्तर.

---

[*] १ जर अपूर्णबीज भाज्य समछेद आहे तर भागाकाराचे अंशाकरितां त्याचे अंश घ्यावे, आणि भागाकाराचे छेदाकरितां भाजकाचे अंश घ्यावे.

२ जेव्हां अपूर्णबीज कोणतेही पदानें भागावयाचें आहे, तेव्हां त्या पदानें अंश भागिले, अथवा छेद गुणिले, या दोहोंकडूनही गुणाकार बरोबरच होतो.

३ जेव्हां दोनही अंशांचा अथवा दोनही छेदांचा दृढ भाजक मिळतो, तेव्हां त्याणें संक्षेप करून, नंतर पूर्व प्रकारें भागावें.

पांचवें, $\frac{३क्ष}{४}$ यांस $\frac{११}{१२}$ यांनीं भाग.

साहावें, $\frac{६क्ष^{२}}{५}$ यांस ३क्ष यांनीं भाग.

सातवें, $\frac{३क्ष+१}{८}$ यांस $\frac{५क्ष}{३}$ यांनीं भाग.

आठवें, $\frac{४क्ष}{२क्ष-१}$ यांस $\frac{क्ष}{३}$ यांनीं भाग.

नववें, $\frac{४क्ष}{५}$ यांस $\frac{३अ}{५ब}$ यांनीं भाग.

दाहावें, $\frac{२अ-ब}{४कड}$ यांस $\frac{५अक}{६ड}$ यांनीं भाग.

अकरावें, $\frac{५अ^{२}-५ब^{२}}{२अ^{२}-४अब+२ब^{२}}$ यांस $\frac{६अ^{२}+५अब}{४अ-४ब}$ यांनीं भाग.

बीज वर्ग घनादि.

बीज वर्ग घनादि म्हणजे सांगितलें मूळबीज फिरून फिरून त्याच मूळ बीजानें गुणून वाढविलें बी

जं. जसें, कोणत्याही सांगितल्या पदाचा वर्ग काय होतो तो शोधायाचा. तसाच घन चतुर्घात इत्यादिक याची रीति पुढें सांगतों.

* सांगितल्या मुळास अथवा पदास त्यानेंच प्रकाशक संख्येंत एक कमी वेळा पर्यंत पुनःपुनः गुणावें, शेवटील गुणाकार इच्छिले वर्ग घनादिक होईल. अथवा सांगितल्या मुळांत किंवा पदांत अक्षर चिन्हेंच असलीं तर यारीतीनें करावें, त्या अक्षर चिन्हाचा मूळप्रकाशक इच्छिले वर्ग घनादिप्रकाशकानें गुणून जो गुणाकार येईल तें इच्छिलें वर्ग घनादिक होईल, आणि वेळाप्रकाश कहीं एक मूळच होय, यास्तव त्याचेंही वर्गादिप्रकाशकाप्रमाणें वर्गादिक करावे.

---

* एक अथवा अनेक पदें आहेत त्यांचे गुणाकाराचें वर्गादिक त्या पदाचे वेगळाले त्या त्या वर्गादिकाचे गुणाकारा बरोबर आहे जसा या तीन पदांचे गुणाकाराचा वर्ग. $\overline{३\times५\times७}^{२} = ११०२५$ आणि $३^{२}\times५^{२}\times७^{२} = ९\times२५\times४९ = ११०२५$,

आणि अपूर्ण बीजाचें कोणतेंही वर्गादिक त्या अपूर्ण बीजाचे अंशांचे वर्गादिक छेदांचे तसेंच वर्गादिकानें भागिलें याचे बरोबर आहे.

जसा या अपूर्ण बीजाचा घन $\left(\frac{२अ}{अ}\right)^{३} = २^{३} = ८$

आणि $\frac{२^{३}अ^{३}}{अ^{३}} = २^{३} = ८$

आणि एकच पदाचें वर्गादि अथवा वर्गमूळादि परस्पर गुणायाचें आहे तर त्या गुण्य गुणकाचे वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज घेऊन त्या पदावर प्रकाशकस्थळीं लिहावी जसें, $अ^{३}\times अ^{२} = अ^{३+२} = अ^{५}$. $अ^{\frac{१}{२}}\times अ^{\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}} = अ^{\frac{५}{६}}$

तसेंच एकच पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूलादिक परस्पर भागायाचे आहे तर त्या भाज्य भाजकांचे वर्गादिप्रकाशकांची वजाबाकी करून त्या पदावर प्रकाशकस्थळीं लिहावी. जसें, $अ^{५}\div अ^{३} = अ^{५-३} = अ^{२}$ $अ^{\frac{१}{२}}\div अ^{\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{२}-\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{६}}$

$+४अ^२$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय.

$-८अ^३$ = हा त्या मुळाचा घन होय.

$+१६अ^४$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.

$-३२अ^५$ = हा त्या मुळाचा पंचघात.

इत्यादि

$+९अ^२ब^२$ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

$-२७अ^३ब^३$ = हा त्या मुळाचा घन होय.

$+८१अ^४ब^४$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.

$-२४३अ^५ब^५$ = हा त्या मुळाचा पंचघात.

इत्यादि

$-\frac{२अक्ष}{३ब}$ = हें एक मूळ आहे.

$+\frac{४अ^२क्ष^२}{९ब^२}$ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

$-\frac{८अ^३क्ष^३}{२७ब^३}$ = हा त्या मुळाचा घन.

$+\frac{१६अ^४क्ष^४}{८१ब^४}$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.

इत्यादि

$\frac{अ}{२ब}$ = हें एक मूळ आहे.

$\frac{अ^२}{४ब^२}$ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

$\frac{अ^३}{८ब^३}$ = हा त्या मुळाचा घन होय.

$\frac{अ^४}{१६ब^४}$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.

इत्यादि

क्ष−अ = हें एक मूळ आहे.

$$\begin{array}{l} क्ष-अ \\ \underline{क्ष-अ} \\ क्ष^२-अक्ष \\ \underline{\quad -अक्ष+अ^२} \end{array}$$

टीप. जेव्हां सांगितले मुळाचें कार्य प्रकाशक चिह्न (+) धन आहे, तेव्हां त्यापासून जें वर्गादिक होईल तें सर्व धन होईल. परंतु जेव्हां त्या सांगितले मुळाचें कार्यप्रकाशक चिह्न (−) ऋण आहे, तेव्हां त्यापासून जें वर्गघनादिक करायाचें तें वर्गादिप्रकाशक सम असेल त्या स्थळीं धन होईल, आणि तो विषम असेल त्यास्थळीं ऋण होईल. हें सर्व गुणाकार रीतीनें जाणावें.

उदाहरणें.

$अ$ = हें एक मूळ आहे.	$अ^{२}$ = हें एक मूळ आहे.
$अ^{२}$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय.	$अ^{४}$ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.
$अ^{३}$ = हा त्याच मूळाचा घन होय.	$अ^{६}$ = हा त्या मुळाचा घन होय.
$अ^{४}$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.	$अ^{८}$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात होय.
$अ^{५}$ = हा त्या मुळाचा पंचघात.	$अ^{१०}$ = हा त्या मुळाचा पंचघात होय.
इत्यादि	इत्यादि
−२ अ = हें एक मूळ आहे.	−३ $अब^{२}$ = हें एक मूळ आहे.

$क्ष^{२}-२अक्ष+अ^{२}$= हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

$\underline{क्ष-अ}$

$क्ष^{३}-२अक्ष^{२}+अ^{२}क्ष$

$\underline{\qquad -अक्ष^{२}+२अ^{२}क्ष-अ^{३}}$

$क्ष^{३}-३अक्ष^{२}+३अ^{२}क्ष-अ^{३}$= हा त्या मुळाचा घन होय

$क्ष+अ$= हें एक मूळ आहे.

$\underline{क्ष+अ}$

$क्ष^{२}+अक्ष$

$\underline{\qquad +अक्ष+अ^{२}}$

$क्ष^{२}+२अक्ष+अ^{२}$= हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

$\underline{क्ष+अ}$

$क्ष^{३}+२अक्ष^{२}+अ^{२}क्ष$

$\underline{\qquad +अक्ष^{२}+२अ^{२}क्ष+अ^{३}}$

$क्ष^{३}+३अक्ष^{२}+३अ^{२}क्ष+अ^{३}$= हा त्या मुळाचा घन होय.

हीं दोन उदाहरणें $क्ष-अ$ आणि $क्ष+अ$ या दोन मुळांचे वर्ग आणि घन दाखवितात.

दुसरीं उदाहरणें.

पहिलें, $३अ^{२}$ यांचा घन काय होतो?

उत्तर, $२७अ^{६}$

दुसरें, $२अ^{२}ब$ यांचा चतुर्घात काय होतो?

तिसरें, $-८अ^{२}ब^{२}$ यांचा घन काय होतो?

चवथें, $-\frac{अ^{२}क्ष}{२ब^{२}}$ यांचा चतुर्घात काय होतो?

पांचवें, $अ-२क्ष$ यांचा पंचघात काय होतो?

साहावें, $२अ^{२}$ यांचा षट्घात काय होतो?

सर एजाक न्यूटन याची द्वियुक्पदाचें वर्गादिक करायाची.

रीति.⁂

१ वेळा प्रकाशकावांचून पदें करायाचीं. त्यांचा आरंभ द्वियुक्पदाचे प्रथम पदापासून होतो. आणि

⁂ यारीतीचें सामान्यतः हें रूप आहे (न) ह्मणजे कोणतीही संख्या $(अ+क्ष)^{न} = अ^{न} + न\cdot अ^{न-१}क्ष + न\cdot\frac{न-१}{२}अ^{न-२}क्ष^{२} + न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}अ^{न-३}क्ष^{३}$ इत्यादि.

त्यांस वर्गादिप्रकाशक असावा तो द्वियुक्पदाचा इच्छिल्या वर्गादिकाचा प्रकाशक आहे तोच होय. आणि त्याचे पुढील पदांस वर्गादि प्रकाशक असावा तो हाच प्रतीपदीं अनुक्रमें एक एक उणा करून होतो. आणि द्वियुक्पदाचे राहिल्या दुसऱ्या पदास वर्गादिप्रकाशक असावा तो शून्यापासून ०·१·२·३ या अनुक्रमें प्रतिपदीं एक एक वाढवून होतो, तो इच्छिल्या वर्गादिप्रकाशकापर्यंत. ह्मणजे, इच्छिल्या वर्गादिकाचें प्रथम मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ प्रथमपद होईल, तें इच्छिल्यावर्गादि प्रकाशकानें युक्त, आणि या श्रेढीचें शेवटील पद त्या मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ दुसरें पद होईल तें इच्छि

$(अ-क्ष)^{न} = अ^{न} - न.अ^{न-१}क्ष + न.\frac{न-१}{२}अ^{न-२}क्ष^{२} - न.\frac{न-१}{२}.\frac{न-२}{३}अ^{न-३}क्ष^{३}$ इत्यादि

टीप प्रत्येक पवरामध्यें वेळा प्रकाशकांची बेरीज (२) या संख्येचे प्रत्येक पवरा बरोबर आहे, जसें, १+१=२ हें मूळ अथवा प्रथम पवर १+२+१=४=$२^{२}$ हें वर्गस्थळ अथवा दुसरा पवर १+३+३+१=८=$२^{३}$ हा घन अथवा तिसरा पवर, याप्रमाणें पुढें ही जाणावें.

$अ+ब \qquad अ^{२}+२अब+ब^{२} \qquad अ^{३}+३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३}$

$१+१=२ \qquad १+२+१=४ \qquad १+३+३+१=८$

$अ^{४}+४अ^{३}ब+६अ^{२}ब^{२}+४अब^{३}+ब^{४}$

$१+४+६+४+१=१६$

पवर ह्मणजे घातमूळ, ह्मणजे एकपवर. अथवा एकघात वर्ग ह्मणजे द्विघात, घन ह्मणजे त्रिघात, याप्रमाणें पुढें ही जाणावें.

ल्या वर्गादि प्रकाशकानें युक्त परंतु दुसरीं अथवा मध्य पदें मूळद्वियुक्पदाचे गुणाकार होतील अशा रीतीनें कीं, मूळद्वियुक्पदाचे पहिल्यापदास प्रतिपदीं वर्गादिप्रकाशक एक एक उणा आणि दुसऱ्या पदास वर्गादिप्रकाशक प्रतिपदीं एक एक अधिक होत जाईल.

२ वेळाप्रकाशक काढायाची रीति श्रेढीचे प्रथम पदाचा वेळाप्रकाशक १ आहे. दुसऱ्यापदाचा वेळाप्रकाशक तो आहे कीं, जो इछिल्या वर्गादिकाचा प्रकाशक आहे. तिसऱ्यापदाचा वेळाप्रकाशक याप्रमाणें निघतो कीं, दुसऱ्यापदाचा वेळाप्रकाशक आणि त्याच दुसरे पदांतील पहिल्या अक्षराचा वर्गादिप्रकाशक हे दोन परस्पर गुणून तो गुणाकार दोहोनीं भागावा, भागाकार येईल तो त्या तिसऱ्यापदाचा वेळाप्रकाशक होईल, आणि याप्रमाणें पुढें ही. ह्मणजे शेवटीं वेळाप्रकाशक निघाला आहे तो त्याच पदाचे प्रथम अक्षराचें वर्गादिप्रकाशकानें गुणून तो गुणाकार तेंच पद कित्यावें असेल तितक्या संख्येनें भागून जो भागाकार येईल तो त्याच पदापुढील जवळचे पदाचा वेळाप्रकाशक होईल. या रीतीनें एकापुढें एक अशा सर्व पदांचा वेळाप्रकाशक निघेल.

टीप. श्रेढींतील सर्वपदांची संख्या इच्छिल्या वर्गादिप्रकाशक संख्येहून एकानें अधिक होईल, आणि मूळद्वियुक्पदांतील दोन हीं पदें (+) धन आहेत तर श्रेढीचीं सर्वपदें (+) धन होतील. परंतु, जर त्या मूळद्वियुक्पदांत दुसरें पद (−) ऋण आहे तर श्रेढीचीं विषम पदें (+) धन होतील. आणि समपदें (−) ऋण होतील. याच कारणास्तव तीं सर्वपदें (+) धन (−) ऋण (+) धन (−) ऋण अशा अनुक्रमें होतील. पुनः प्रतीपदीं त्या त्या पदांतील अक्षरांचे वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज इच्छिल्या वर्गादिकाचे प्रकाशका बरोबर आहे, आणि श्रेढीचे मध्यापासून दोहीं कडील स्थळीं वर्गादिप्रकाशक बराबर आहेत, परंतु अक्षरांचा मात्र बदल आहे; आणि मध्यापासून दोहींकडील बराबर स्थळीं वेळाप्रकाशकही बराबर आहेत. तसें आदीपासून मध्यापर्यंत वेळाप्रकाशक जितक्या जितक्या अंतरानें वाढत गेला आहे, तितक्या तितक्या अंतरानें वेळाप्रकाशक मध्यापासून अंतापर्यंत उणा होत जातो.

उदाहरणें.

पहिलें, अ+क्ष याचा पंचघात करायाचा आहे.

प्रथम रीतीनें वेळाप्रकाशका वांचून पदें करावीं.

अ^{५} , अ^{४}क्ष अ^{३}क्ष^{२} अ^{२}क्ष^{३} अक्ष^{४} क्ष^{५}

आणि दुसऱ्या रीतीनें वेळाप्रकाशक काढावे.

$$\begin{array}{cccccc} १ & ५, & \frac{५\times४}{२} & \frac{१०\times३}{३} & \frac{१०\times२}{४} & \frac{५\times१}{५} \\ १ & ५ & १० & १० & ५ & १ \end{array}$$

याजकरितां मूळ द्वियुग्गणाचा पंचघात हें सर्व जुळून आहे अ^{५}+५अ^{४}क्ष+१०अ^{३}क्ष^{२}+१०अ^{२}क्ष^{३}+५अक्ष^{४}+ क्ष^{५}

परंतु हें उत्तम आहे कीं, वेळाप्रकाशक आणि वर्गादि प्रकाशक हे तपशिलावांचून जुळून सर्व पदें एक ओळींत लिहावीं. जसें दुसरें उदाहरण पुढें लिहितों.

दुसरें, अ−क्ष याचा षड्घात करायाचा.

अ^{६}−६अ^{५}क्ष+१५अ^{४}क्ष^{२}−२०अ^{३}क्ष^{३}+१५अ^{२}क्ष^{४}−६अक्ष^{५} + क्ष^{६}

तिसरें, अ−क्ष याचा चतुर्घात करायाचा.

अ^{४}−४अ^{३}क्ष+६अ^{२}क्ष^{२}−४अक्ष^{३} + क्ष^{४}

आणि या रीतीनें कोणतेंही वर्गादिक करण्यानें एके ओळींत लिहितां येईल.

बीजवर्गादिमूळ.

बीजवर्गादिमूळ ह्मणजे वर्गादिकांची उलट मागितल्या पदापासून त्याचें वर्गादिमूळ काढायाचें. तें पद एकाकी अथवा संयुक्त असेल.

प्रथमप्रकार.

एकाकी पदाचें मूळ काढायाचा.

अंकगणितरीतीनें वेळाप्रकाशकाचें मूळ काढावें, आणि अक्षरचिन्हाचा वर्गादिप्रकाशक झाल्यावर्गादिमूळप्रकाशकानें भागावा, ह्मणजे तो भागाकार अक्षरचिन्हाचें मूळ होईल. नंतर हें मूळ पूर्ववेळाप्रकाशक मूळाशीं जोडिलें असतां झालिलें वर्गादिमूळ होईल.[*]

---

[*] धन(+) पदाचें कोणतेंही सममूळ (+) धन अथवा (-) ऋण असेल. ह्मणजे जसें $+अ^2$ याचें वर्गमूळ +अ अथवा -अ असेल, कारण $+अ\times+अ=+अ^2$ आणि $-अ\times-अ=+अ^2$ आहे.

परंतु कोणत्याही पदाचें विषममूळ त्या पदाचे चिन्हाप्रमाणें आहे. जसें $+अ^3$ याचें घनमूळ +अ आहे आणि $-अ^3$ याचें घनमूळ -अ आहे. कारण $+अ\times+अ\times+अ=+अ^3$ आहे आणि $-अ\times-अ\times-अ=-अ^3$ आहे. कोणत्याही पदांचे सममूळ ऋण होतनाहीं, कारण $+अ\times+अ$ अथवा $-अ\times-अ$ हे दोनही $-अ^2$ होण्यास परम अशक्य.

उदाहरणें.

[illegible], $४अ^{२}$ यांचें वर्गमूळकाढ.

उत्तर, २अ

दुसरें, $८अ^{३}$ यांचें घनमूळकाढ.

उत्तर, २अ

तिसरें, $\frac{५अ^{२}ब^{२}}{९क^{२}}$ यांचें वर्गमूळकाढ.

$\surd\frac{५अ^{२}ब^{२}}{९क^{२}}=\frac{अब}{३क}\surd ५$ हें उत्तर.

चवथें, $-\frac{१६अ^{४}ब^{६}}{२७क^{३}}$ यांचें घनमूळकाढ.

उत्तर, $-\frac{२अब^{२}}{३क}\surd २अ$

पांचवें, $२अ^{२}ब^{४}$ यांचें वर्गमूळकाढ.

उत्तर, $अब^{२}\surd २$

साहावें, $-६४अ^{३}ब^{६}$ यांचें घनमूळकाढ.

उत्तर, $-४अब^{२}$

सातवें, $\frac{८अ^{२}ब^{२}}{३क}$ यांचें वर्गमूळकाढ.

उत्तर, $\frac{२अब}{क}\surd\frac{२}{३क}$

आठवें, $८१अ^{४}ब^{५}$ याचें चतुर्घातमूळकाढ.

उत्तर, $३अब\surd ब$

कोणत्याही गुणाकाराचें मूळ त्या गुण्य गुणकांचे वेगळाले मुळांचे गुणाकाराबरोबर आहे आणि अपूर्णबीजाचे मूळाची इछा असेल तर त्या अंशछेदांची वेगळालीं मुळें काढावीं. ह्मणजे तीं मुळें त्या अपूर्णबीजाचें इछिलें मूळ होईल.

नववें, –३२ अँ बँ यांचें पंचघातमूळकाढ.

उत्तर, –२अब५ ब

दुसराप्रकार.

संयुक्त पदाचें वर्गमूळ काढायाचा.

याची रीति अंकगणिताप्रमाणें आहे. ह्मणजे,

१ ज्यापदाचे घातादिक अधिक असेल तें पद प्रथम लिहून पुढें अनुक्रमें उतरतीं अशारीतीनें सर्वपदें लिहावीं. नंतर प्रथम पदाचें मूळ भागाकारस्थळीं लिहावें.

२. या मुळाचा वर्ग प्रथम पदाखालीं लिहून त्यांतून वजा करावा. नंतर नवे भाज्याकरितां बाकीजवळ वरचीं दुसरीं-दोनपदें घ्यावीं, आणि नवे भाजकाकरितां मुळाची दुपटकरून भाजकस्थळीं लिहावी.

३ तो भाज्य भाजकानें भागावा आणिजें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि भाजकासही जोडावें.

४ आतां वाढविला भाजक भागाकारस्थळीं जें आतां नवें लिहिलें त्याणें गुणून गुणाकार भाज्याखालीं लिहावा, आणि त्यांतून वजा करावा. या प्रमाणें अंकगणित रीतीनें करीत जावें.

उदाहरणें.

पहिलें, $अ^४-४अ^३ब+६अ^२ब^२-४अब^३+ब^४$ यांचें वर्गमूळ काढ.

$अ^४-४अ^३ब+६अ^२ब^२-४अब^३+ब^४($ $अ^२-२अब+ब^२$ हें वर्गमूळ हें उत्तर.

$२अ^२-२अब)-४अ^३ब+६अ^२ब^२$

$\underline{-४अ^३ब+४अ^२ब^२}$

$२अ^२-४अब+ब^२)$ ※ $+२अ^२ब^२-४अब^३+ब^४$

$\underline{+२अ^२ब^२-४अब^३+ब^४}$

※ ※ ※

दुसरें, $अ^४+४अ^३ब+१०अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$ यांचे वर्गमूळ काढ.

$अ^४+४अ^३ब+१०अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४($ $अ^२+२अब+३ब^२$ वर्गमूळ हें उत्तर.

$\underline{अ^४}$

$२अ^२+२अब)+४अ^३ब+१०अ^२ब^२$

$\underline{+४अ^३ब+४अ^२ब^२}$

$२अ^२+४अब+३ब^२)$ ※ $+६अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$

$\underline{+६अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४}$

※ ※ ※

तिसरें, $अ^{४}+४अ^{३}+६अ^{२}+४अ+१$, यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $अ^{२}+२अ+१$

चवथें, $अ^{४}-२अ^{३}+२अ^{२}-अ+\frac{१}{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $अ^{२}-अ+\frac{१}{२}$

पांचवें. $अ^{२}-अब$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $अ-\frac{ब}{२}-\frac{ब^{२}}{८अ}-\frac{ब^{३}}{१६अ^{२}}$ इत्यादि.

तिसरा प्रकार.

कोणत्याही वर्गादीचें मूळ काढायाचा.

याची रीति अंकगणिताप्रमाणेंच आहे. ह्मणजे प्रथम पदाचें सांगितलें मूळ काढून तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि त्या मुळाचें वर्गादिक करून त्या प्रथम पदांतून वजा करावें. नंतर नवे भाज्याकरितां वरचें दुसरें पद खालीं घ्यावें, आणि नवे भाजका करितां तें काढिलें मूळ सांगितल्या वर्गादि घातांत एक घात कमी पर्यंत वाढवून त्यास सांगितल्या वर्गादि प्रकाशकानें गुणून भाजक स्थळीं लिहावें. आणि या नव्या भाजकानें तो नवा भाज्य भागितां जें येईल तें

भागाकारस्थळीं लिहावें. नंतर भागाकारस्थळींचें तें सर्व मूळ सांगितला वर्गादिघात पर्यंत वाढवून सांगितले सर्व वर्गादींतून वजा करावें. नंतर बाकीचें प्रथम पद प्रथम भाजकानें भागितां जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि तें भागाकारस्थळींचें सगळें मूळ सांगितले वर्गादि घात पर्यंत वाढवून सांगितल्या वर्गादींतून वजा करावें. याप्रमाणें शेवट पर्यंत करावें, ह्मणजे इछिलें वर्गादि मूळ मिळेल.[*]

---

[*] जेव्हां सांगितला घात फार मोठा आहे तेव्हां या रीतीनें तपशील करण्यामुळें फार श्रम पडतो असें कोणाचे मनांत येईल तर कोणे समयीं संयुक्तपदाचें मूळ स्वल्पांत निघण्याची रीति ही आहे कीं त्यांतील कित्येक सोईचीं पदें घेऊन त्यांचीं सांगितलीं मुळें काढावीं आणि तीं मुळाचीं पदें क्रमारानें (+) धन (−) ऋण चिन्हांनीं जोडून लिहावीं. नंतर हें मूळ सांगितल्या घाता पर्यंत वाढवावें. नंतर तें जर सांगितल्याघाता बरोबर जालें तर हेंच मूळ खरें आहे परंतु जर वाढविल्या घाताचीं क्रमारानें पूर्वीं केलेलीं चिन्हें सांगितले घाता बराबर नाहींत तर तीं पुनः तपासून तें मूळ आणि वाढविला घात या दोन ही ठिकाणी सांगितले घाताबरोबर होतील अशीं करावीं.

जसें पांचवे उदाहरणांत ३ अ – २ ब हें मूळ प्रथम आणि शेवट या दोन पदांचे मूळांचे वजा बाकी बराबर आहे आणि तिसरे उदाहरणांत अ -- ब + क्ष हें संयुक्त मूळ प्रमथ चवथें आणि शेवट या तीन पदांचे मूळांची बेरीज आहे. आणि साहावे उदाहरणांत संयुक्त मूळ प्रथम आणि शेवट या दोन पदांपासून निघतें.

उत्तर, अ − ब + क्ष

थें, $अ^{६} - ३ अ^{५} + ९ अ^{४} - १३ अ^{३} + १८ अ^{२} - १२ अ$

घनमूळ काढ.

उत्तर, $अ^{२} - अ + २$

वें, $८१ अ^{४} - २१६ अ^{३}ब + २१६ अ^{२}ब^{२} - ९६,$

$ब^{४}$ यांचे चतुर्घात मूळ काढ.

उत्तर, $३ अ - २ ब$

साहावें, $अ^{५} - १० अ^{४} + ४० अ^{३} - ८० अ^{२} + ८० अ - ३२$ यांचें पंचघात मूळ काढ.

उत्तर, $अ - २$

सातवें. $१ - क्ष^{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर,

आठवें. $१ - क्ष^{३}$ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर,

करणी.

करणी ह्मणजे ज्याचें मूळ बराबर पूर्ण येत नाहीं तें पद आणि या करणीस मूळप्रकाशकानें अथवा मूळ चिह्नानें युक्त लिहितात. जसें. $३^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{३}$ हीं दो

पहिलें, $अ^४ - २ अ^३ब + ३ अ^२ब^२ - २ अब^३ + ब^४$ यांचें वर्गमूळ काढ.

$अ^४ - २ अ^३ब + ३ अ^२ब^२ - २ अब^३ + ब^४ (अ^२ - अब + ब^२$

$\underline{अ^४}$

हें वर्गमूळ, हें उत्तर.

$२अ^२ \quad) - २ अ^३ब$

$अ^४ - २ अ^३ब + अ^२ब^२ = (अ^२ - अब)^२$

$२अ^२) \quad + २ अ^२ब^२$

$अ^४ - २ अ^३ब + ३ अ^२ब^२ - २ अब^३ + ब^४ = (अ^२ - अब + ब^२)^२$

दुसरें, $अ^६ - ६ अ^५ + २१ अ^४ - ४४ अ^३ + ६३ अ^२ - ५४ अ + २७$ यांचें घनमूळ काढ.

$अ^६ - ६ अ^५ + २१ अ^४ - ४४ अ^३ + ६३ अ^२ - ५४ अ + २७ (अ^२ - २ अ + ३$ घनमूळ हें उत्तर.

$\underline{अ^६}$

$३ अ^४ \quad) - ६ अ^५$

$अ^६ - ६ अ^५ + १२ अ^४ - ८ अ^३ = (अ^२ - २ अ)^३$

$३ अ^४ \quad) \quad + ९ अ^४$

$अ^६ - ६ अ^५ + २१ अ^४ - ४४ अ^३ + ६३ अ^२ - ५४ अ + २७ = (अ^२ - २ अ + ३)^३$

* * * * * * *

तिसरें, $अ^२ - २ अब + २ अक्ष + ब^२ - २ बक्ष + क्ष^२$ यांचें वर्गमूळ काढ.

नही ३ या संख्येचें वर्गमूळ दाखवितात. आणि $२^{\frac{२}{३}}$ अथवा $\sqrt[३]{२^{२}}$ अथवा $\sqrt[३]{४}$ हीं २ या संख्येचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितात. ह्मणजे २ हें पद कोणत्या घाता पर्यंत वाढवावें हें मूळप्रकाशक अंश दाखवितात, आणि वाढविल्या पदाचे कोणत्या घाताचें मूळ काढावें तें छेद दाखवितात.

पहिलाप्रकार.

अखंड पदास करणीचें रूप द्यावयाचा.

सांगितल्या पदास करणीचा प्रकाशक असेल तितका घात पर्यंत वाढवावें, नंतर या नवे वाढविल्या पदास सांगितल्या करणीचे मूळ चिह्नानें युक्त करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, ४ यांस वर्गमूळाचें रूप दे.

$४^{२} = ४ \times ४ = १६$ तर $\sqrt{१६}$ अथवा $१६^{\frac{१}{२}}$ हे उत्तर.

दुसरें, ३अ यांस घनमूळाचें रूप दे.

आतां $(३अ)^{३} = ३अ \times ३अ \times ३अ = २७अ^{३}$ तर $\sqrt[३]{२७अ^{३}}$ अथवा $(२७अ^{३})^{\frac{१}{३}}$ हें उत्तर.

तिसरें, ६ यांस घनमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[३]{२१६}$ अथवा $(२१६)^{\frac{१}{३}}$

चवथें, ३ अब यांस वर्गमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{९अ^{२}ब^{२}}$ अथवा $(९अ^{२}ब^{२})^{\frac{१}{२}}$

पांचवें, २ यांस चतुर्घातमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[४]{१६}$ अथवा $(१६)^{\frac{१}{४}}$

साहावें, $अ^{३}$ यांस पंचघातमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[५]{अ^{१५}}$ अथवा $(अ^{१५})^{\frac{१}{५}}$

सातवें, अ+क्ष यांस वर्गमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२}}$ अथवा $(अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}$

आठवें, अ−क्ष यांस घनमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[३]{अ^{३}-३अ^{२}क्ष+२अक्ष^{२}-क्ष^{३}}$ अथवा $(अ^{३}-३अ^{२}क्ष+३अक्ष^{२}-क्ष^{३})^{\frac{१}{३}}$

दुसरा प्रकार.

पदांस सममूळप्रकाशक रूप द्यावयाचा.

१ सांगितल्या पदांचे मूळप्रकाशक समछेदकरावे, नंतर तीं प्रत्येक पदें वेगळाले अंशस्थळींचे संख्येइ-

तर्के घातापर्यंत वाढवावी. आणि त्या समछेदांचे अंशास्थळीं १ हा अंक लिहावा. ह्मणजे तीं पदें सममूळप्रकाशक जालीं.

२ जर सांगितलें सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचें आहे, तर पदाचा मूळप्रकाशक सांगितले प्रकाशकानें भागावा. ह्मणजे ते वेगळाले भागाकार त्या त्या पदांचेनवेमूळप्रकाशक होतील. नंतर त्या त्या पदांस ते ते नवे प्रकाशक लिहून त्यांजवर सांगितला प्रकाशक लिहावा, ह्मणजे इछिलें बराबर पद निघेल.

उदाहरणें.

पहिलें, $३^{\frac{१}{२}}$ आणि $५^{\frac{१}{५}}$ यांस सममूळप्रकाशक रूपदे.

आतां $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{५} = \frac{५}{१०}$ आणि $\frac{२}{१०}$

याजकरितां $३^{\frac{१}{२}}$ आणि $५^{\frac{१}{५}} = (३^५)^{\frac{१}{१०}}$ आणि $(५^२)^{\frac{१}{१०}}$

ह्मणजे $\sqrt[१०]{२४३}$ आणि $\sqrt[१०]{२५}$, सममूळप्रकाशक जालें हें

उत्तर

दुसरें, $अ^{३}$ आणि $ब^{३}$ यांस $\frac{१}{२}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

आतां $\frac{३}{१} \div \frac{१}{२} = \frac{३}{१} \times \frac{२}{१} = \frac{६}{१}$ हा प्रथमपदाचा मूळप्रकाशक.

आणि $\frac{१}{३} \div \frac{१}{२} = \frac{१}{३} \times \frac{२}{१} = \frac{२}{३}$ हा दुसरे पदाचा मूळप्रकाशक.

याजकरितां $(अ^{६})^{\frac{१}{२}}$ आणि $(ब^{\frac{२}{३}})^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{अ^{६}}$ आणि $\sqrt{ब^{\frac{२}{३}}}$ हीं इछिलीं पदें पूर्व पदांचे बराबर किमतीचीं आहेत.

तिसरें, $४^{\frac{२}{३}}$ आणि $५^{\frac{१}{३}}$ यांस $\frac{१}{६}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

उत्तर, $(२५६)^{\frac{१}{६}}$ आणि $(२५)^{\frac{१}{६}}$

चवथें, $अ^{\frac{१}{२}}$ आणि $क्ष^{\frac{१}{३}}$ यांस $\frac{१}{६}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

उत्तर, $(अ^{३})^{\frac{१}{६}}$ आणि $(क्ष^{२})^{\frac{१}{६}}$

पांचवें, $अ^{\frac{१}{२}}$ आणि $क्ष^{\frac{१}{३}}$ यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{अ^{३}}$ आणि $\sqrt{क्ष^{६}}$

साहावें, $(अ+क्ष)^{\frac{१}{२}}$ आणि $(अ-क्ष)^{\frac{१}{३}}$ यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

सातवें, $(अ+ब)^{\frac{१}{२}}$ आणि $(अ-ब)^{\frac{१}{३}}$ यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

तिसरा प्रकार.

करणीस अतिसरळ रूप द्यावयाचा

रीति.

सांगितली संख्या अथवा पद याचे गुण्य गुणक रूपानें दोन अवयव करावे. असे कीं, जांतील एक अवय व त्या संख्येचे आंत सांगितले मूळाचा मोठा घात होईल. नंतर या मोठे घाताचें सांगितलें मूळ काढून तें राहिले दुसरें अवयवाचे डावेकडे लिहावें. आणि या दोहोंचे मध्यें सांगितले मूळाचें चिह्न करावें.*

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{४८}$ या कणीस अति सरळ रूप दे.

आतां $\sqrt{४८} = \sqrt{१६ \times ३} = ४\sqrt{३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt[३]{१०८}$ या करणीस अति सरळ रूप दे.

आतां $\sqrt[३]{१०८} = \sqrt[३]{२७ \times ४} = ३\sqrt[३]{४}$ हें उत्तर

---

* जेव्हां सांगितले करणींत वर सांगितले गुण्य गुणकरूप दोन अवयवांतील एकही अवयव सांगितले मुळाचा बरोबर मोठा घात होत नाहीं. तेव्हां ती करणी सरळ रूपच आहे. जसें $\sqrt{१५}$ यास याहून दुसरें सरळ रूप होत नाहीं. कारण गुण्य गुणक रूप दोन अवयव एक ५ आणि दुसरा ३ या दोहोंतून एकही इच्छिले मूळाचा पूर्ण घात ह्मणजे एथें वर्ग होत नाहीं.

प्रथम टीप. जेव्हां कोणतीही संख्या अथवा पद करणीस मागें जोडिलें आहे, तेव्हां तें पद त्या गुण्य गुणकरूप दोन अवयवांत जो पूर्णघात असेल त्याचे मुळांनी गुणून तो गुणाकार पूर्व रीतीनें त्या दुसरे अवयवाशीं जोडून लिहावा.

उदाहरणें.

पहिलें, $२\sqrt{३२}$ यांस अतिसरळ रूप दे.

आतां $२\sqrt{३२} = २\sqrt{१६ \times २} = २ \times ४\sqrt{२} = ८\sqrt{२}$ हे उत्तर

दुसरें, $५\sqrt[३]{२४}$ यांस अतिसरळ रूप दे.

आतां $५\sqrt[३]{२४} = ५\sqrt[३]{८ \times ३} = ५ \times २\sqrt[३]{३} = १०\sqrt[३]{३}$ हें उत्तर.

दुसरी टीप. अपूर्ण करणीसही अतिसरळ रूप देतां येतें. या पुढील रीती करून

रीति.

अंश आणि छेद हे कोणत्याही संख्येनें अथवा पदानें गुणावे. असे कीं. गुणिलेले छेद सांगितले मुळाचा पूर्णघात होतील. नंतर त्या घाताचें सांगितलें मूळ काढून त्याजवर अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा, आणि त्यास करणीचा राहि

पांचवें, $\sqrt{७५}$ याकरणीस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $५\sqrt{३}$

साहावें, $\sqrt[३]{१८९}$ याकरणीस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $३\sqrt[३]{७}$

सातवें, $\sqrt{७५ अ^{२} ब}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $५अ\sqrt{३ब}$

आठवें, $७\sqrt{८०}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $२८\sqrt{५}$

नववें. $९\sqrt{८१}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर. ८१

दाहावें, $\sqrt{\frac{४४}{७५}}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $\frac{२}{१५}\sqrt{३३}$

अकरावें, $\sqrt[३]{\frac{१३५}{३२}}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $\frac{३}{४}\sqrt[३]{१०}$

बारावें, $\frac{क}{ड}\sqrt{\frac{अ}{ब}}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर. $\frac{अक}{बड}\sqrt{ब}$

तेरावें, $\frac{२}{७}\sqrt{\frac{२}{७}}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $\frac{२}{४९}\sqrt{१४}$

चौदावें, $\frac{२}{३}\sqrt[३]{\frac{१५}{९}}$ यांस अतिसरळरूपदे.

उत्तर, $\frac{२}{२७}\sqrt{१८}$

पंधरावें, $\sqrt{९८ अ^{२} क्ष}$ यांस अतिसरळरूपदे.

ला दुसरा अवयव जोडून मध्यें पूर्वप्रमाणें मूळ चिन्ह करावें.*

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{\frac{२}{७}}$ या करणीस अतिसरळरूप दे.

आतां $\sqrt{\frac{२}{७}} = \sqrt{\frac{२\times७}{७\times७}} = \sqrt{\frac{१४}{४९}} = \frac{१}{७}\sqrt{१४}$ हें उत्तर.

दुसरें, $३\sqrt[३]{\frac{२}{५}}$ यांस अतिसरळरूप दे.

आतां $३\sqrt[३]{\frac{२}{५}} = २\sqrt[३]{\frac{२\times२५}{५\times२५}} = ३\sqrt[३]{\frac{५०}{१२५}} = ३\sqrt[३]{\frac{१}{१२५}}\times\sqrt[३]{५०} = ३\times\frac{१}{५}\sqrt[३]{५०} = \frac{३}{५}\sqrt[३]{५०}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt{३२}$ या करणीस अतिसरळरूप दे.

उत्तर, $४\sqrt{२}$

चवथें, $\sqrt{३२०}$ या करणीस अतिसरळरूप दे.

उत्तर, $८\sqrt{५}$

---

* करणीस अतिसरळरूप द्यावयाचा उपयोग असा आहे कीं, उत्तर दशांशांत सरळ निघतें हें या प्रथम उदाहरणाचा विचार केला असतां कळेल. पाहा, यांत दिसतें कीं $\sqrt{\frac{२}{७}} = \frac{१}{७}\sqrt{१४}$ या उदाहरणांत १४चें वर्गमूळ काढायाचें, अथवा वर्गमूळ कोष्टकांतून तयार घ्यावयाचें आणि त्या मूळास ७ याणीं भागायाचें इतकें मात्र आहे. आणि सरळरूप न दिलें तर छेदांनीं अंश भागून भागाकाराचें मूळ काढावें लागतें, अथवा अंश छेदांचीं वेगळालीं मुळें काढून अंशाचें मूळ छेदांचे मूळानें भागावें लागतें. आणि या दोन्ही रीतींही मूळ काढण्यास अतिसरळरूप रीतीपेक्षां या उदाहरणीं बहुत श्रम पडतात. आणि दुसरे उदाहरणांत तर अतिसरळरूप न दिल्यास बहुतच श्रम पडतात.

सोळावें, $\sqrt{क्षै - अे\, क्षे}$ याकरणीस अतिसरळ [illegible] पदे.

चवथाप्रकार.

करणीपदांचीमिळवणी करायाचा.

रीति.

१ अपूर्ण पदें असतील तीं समछेद करावीं, आणि पूर्वप्रकारा प्रमाणें सर्व पदांस अतिसरळरूप द्यावें.

२ ज्या पदाचा मूळप्रकाशक विषम आहे, त्यास दुसरे प्रकाराप्रमाणें बरोबर किमतीचें सममूळप्रकाशकपदाचें रूप द्यावें.

३ आतां जर सर्व पदांत करणी अवयव एकरूपच असेल, तर त्या पदांचे अखंड अवयवांची बेरीज घेऊन तीस ती करणी जोडून लिहावी, हीच त्यांची मिळवणी. परंतु सर्व पदांत करणीअवयव एकरूप नसेल, तर तीं सर्वपदें (+) धन (−) ऋण चिन्हें जोडून लिहावीं, हीच त्यांची मिळवणी.

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{१८}$ आणि $\sqrt{३२}$ यांची बेरीज काय होती?

$$\text{आतां } \sqrt{१८} = \sqrt{९ \times २} = ३\sqrt{२}$$

$$\text{आणि } \sqrt{३२} = \sqrt{१६ \times २} = ४\sqrt{२}$$

तर, $\overline{\quad ७\sqrt{२}}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt[३]{३७५}$ आणि $\sqrt[३]{१९२}$ यांची बेरीज काय होती?

$$\text{आतां } \sqrt[३]{३७५} = \sqrt[३]{१२५ \times ३} = ५\sqrt[३]{३}$$

$$\text{आणि } \sqrt[३]{१९२} = \sqrt[३]{६४ \times ३} = ४\sqrt[३]{३}$$

$\overline{९\sqrt[३]{३}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt{२७}$ आणि $\sqrt{४८}$ यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $७\sqrt{३}$

चवथें, $\sqrt{५०}$ आणि $\sqrt{७२}$ यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $११\sqrt{२}$

पांचवें, $\sqrt{\frac{३}{५}}$ आणि $\sqrt{\frac{२}{५}}$ यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $४\sqrt{\frac{३}{५}}$ अथवा $\frac{४}{५}\sqrt{१५}$

साहावें, $\sqrt[३]{५६}$ आणि $\sqrt[३]{१८९}$ यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, ५ ३√ ७

सातवें, ३√ ५०० आणि ३√ १०८ यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, ८ ३√ ४

आठवें, ३√ १/४ आणि ३√ १/३२ यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, ३/४ ३√ २

नववें, ४ √ १४७ आणि ३ √ ७५ यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, ४३ √ ३

दाहावें, ३ √ २/५ आणि २ √ १/१० यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, ४/५ √ १०

अकरावें, ३ √ अंब आणि ५ √ १६ अॅब यांची बेरीज काय होती?

बारावें, १/२ √ अॅब आणि १/२ √ ४ ब क्षॅ यांची बेरीज काय होती?

पांचवा प्रकार.

करणी पदांची वजाबाकी करायाचा.

रीति.

पूर्व प्रकारा प्रमाणें दोनहीं पदें सिद्ध करावीं नंतर करणी एकरूपच असेल तर अखंड पदांची वजाबाकी करावी, आणि राहिले बाकीस ती साधारण करणी जोडावी, ह्मणजे वजाबाकी जाली. त्या पदांची करणी एकरूप नसेल तर तीं पदें (-) ऋणचिन्ह जोडून लिहावीं, ह्मणजे हीच वजाबाकी जाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{३२०}$ आणि $\sqrt{८०}$ यांची वजाबाकी कर.

आतां $\sqrt{३२०}=\sqrt{६४\times५}=८\sqrt{५}$

आणि $\sqrt{८०}=\sqrt{१६\times५}=४\sqrt{५}$

$४\sqrt{५}$ बाकी हें उ०

दुसरें, $\sqrt[३]{१२८}$ आणि $\sqrt[३]{५४}$ यांची वजाबाकी कर.

आतां $\sqrt[३]{१२८}=\sqrt[३]{६४\times२}=४\sqrt[३]{२}$

आणि $\sqrt[३]{५४}=\sqrt[३]{२७\times२}=३\sqrt[३]{२}$

$१\sqrt[३]{२}$ हें उत्तर.

तिसरें, $५\sqrt{२०}$ आणि $३\sqrt{४५}$ यांची वजाबाकी कर.

आतां $५\sqrt{२०} = ५\sqrt{४ \times ५} = १०\sqrt{५}$

आणि $३\sqrt{४५} = ३\sqrt{९ \times ५} = ९\sqrt{५}$

$१\sqrt{५}$ बाकीं. हें उत्तर.

चवथें, $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{३}}$ आणि $\frac{२}{५}\sqrt{\frac{३}{८}}$ यांची वजाबाकी कर.

आतां $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{३}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{६}{९}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{१}{९}}\sqrt{६} = \frac{१}{४}\sqrt{६}$

आणि $\frac{२}{५}\sqrt{\frac{३}{८}} = \frac{२}{५}\sqrt{\frac{६}{१६}} = \frac{२}{५}\sqrt{\frac{१}{१६}}\sqrt{६} = \frac{१}{१०}\sqrt{६}$

$\frac{३}{२०}.\sqrt{६}$ बाकी हें उ.

पांचवें, $\sqrt{७५}$, आणि $\sqrt{४८}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\sqrt{३}$

साहावें, $\sqrt[३]{२५६}$ आणि $\sqrt[३]{३२}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $२\sqrt[३]{४}$

सातवें, $\sqrt{\frac{३}{४}}$ आणि $\sqrt{\frac{१}{३}}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{१}{६}\sqrt{३}$

आठवें, $\sqrt{\frac{२}{३}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{८}}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{१}{१२}\sqrt{६}$

नववें, $\sqrt[३]{\frac{३}{५}}$ आणि $\sqrt[३]{\frac{३}{४०}}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{१}{१०}\sqrt[३]{७५}$

दाहावें, $\sqrt{२४}$ **अबं** आणि $\sqrt{५४}$ **बं** यांची वजाबाकी कर

उत्तर, (२बै-२अव)√६

साहावा प्रकार.

करणी पदें परस्पर गुणायाचा.

रीति.

जेव्हां सर्व पदांत करणी एक जातीची आहे, तेंव्हां त्या पदांचे अखंड अवयवांचा गुणाकार करावा. तसाच खंड अवयवांचाही गुणाकार करावा. नंतर ते दोनही गुणाकार जोडून त्यांचे मध्यें साधारण करणी चिन्ह लिहावें, ह्मणजे हा इच्छिला गुणाकार होईल. या गुणाकारास तिसरे प्रकाराप्रमाणें अतिसरळ रूप देतां येईल.

परंतु जर करणी अनेक जातीची आहे, तर त्या करणीस सममूळप्रकाशक रूप देऊन तीं पदें वर सांगितल्या प्रमाणें. गुणावी.

या समयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ५५) असावें. जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गादिमूळप्रकाशक विरूप आहे, तर त्यांचा पदाचे प्रका

शकांची बेरीज करून ती त्या साधारण पदास रीती प्रमाणें जोडावी ह्मणजे गुणाकार जाला.

उदाहरणें.

पहिलें, $३\sqrt{८}$ आणि $२\sqrt{६}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां $३\sqrt{८}$ हे गुण्य

आणि $२\sqrt{६}$ हे गुणक

$६\sqrt{४८} = ६\sqrt{१६\times ३} = २४\sqrt{३}$ गुणाकार हें उ॰

दुसरें, $\frac{१}{२}\sqrt[३]{\frac{२}{३}}$ आणि $\frac{३}{४}\sqrt[३]{\frac{५}{६}}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

आता $\frac{१}{२}\sqrt[३]{\frac{२}{३}}$

$\frac{३}{४}\sqrt[३]{\frac{५}{६}}$

$\frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{१०}{१८}} = \frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{५}{९}} = \frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{१५}{२७}} - \frac{१}{८}\sqrt[३]{१५}$ गुणाकार हें उ॰

तिसरें, $२^{\frac{१}{२}}$ आणि $३^{\frac{१}{३}}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

$\frac{१}{२}\,\frac{१}{३} = \frac{३}{६}$ हा प्रथम पदाचा

$= \frac{२}{६}$ हा दुसरे पदाचा

आतां $२^{\frac{१}{२}} = २^{\frac{३}{६}} = (२^{३})^{\frac{१}{६}} = ८^{\frac{१}{६}}$

$३^{\frac{१}{३}} = ३^{\frac{२}{६}} = (३^{२})^{\frac{१}{६}} = ९^{\frac{१}{६}}$

$७२^{\frac{१}{६}}$ हा गुणाकार हें उत्तर

चवथें, $५\sqrt{अ}$ आणि $३\sqrt[३]{अ}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां, $५\sqrt{अ} = ५अ^{\frac{१}{२}} = ५अ^{\frac{३}{६}}$

$३\sqrt[३]{अ} = २अ^{\frac{१}{३}} = ३अ^{\frac{२}{६}}$

$१५अ^{\frac{५}{६}} = १५(अ^{५})^{\frac{१}{६}} = १५\sqrt[६]{अ^{५}}$

हेंउत्तर.

पांचवें, $३\sqrt{२}$ आणि $२\sqrt{८}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

उत्तर, २४

साहावें, $\frac{२}{३}\sqrt[३]{४}$ आणि $\frac{३}{४}\sqrt[३]{१२}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

उत्तर, $\frac{१}{२}\sqrt[३]{६}$

सातवें, $\frac{५}{५}\sqrt{\frac{३}{८}}$ आणि $\frac{६}{१०}\sqrt{\frac{२}{५}}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

उत्तर, $\frac{३}{२०}\sqrt{१५}$

आठवें, $२\sqrt[३]{१४}$ आणि $३\sqrt[३]{४}$ यांचा गुणाकार काय होतो!

उत्तर, $१२\sqrt[३]{७}$

नववें, $२अ^{\frac{३}{४}}$ आणि $अ^{\frac{५}{४}}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

उत्तर, $२अ^{२}$

दाहावें, $(अ+ब)^{\frac{१}{३}}$ आणि $(अ+ब)^{\frac{१}{२}}$ यांचा गुणाकार काय होतो?

अकरावें, २ क्ष + √ब आणि २ क्ष − √ यांचा गुणाकार काय होतो?

बारावें, $(अ+२\sqrt{ब})^{\frac{१}{२}}$ आणि $(अ-२\sqrt{ब})^{\frac{१}{२}}$ ांचा गुणाकार काय होतो?

तेरावें, $२ क्ष^{\frac{१}{न}}$ आणि $३ क्ष^{\frac{१}{न}}$ यांचा गुणाकार काय ोतो?

चवदावें, $४ क्ष^{\frac{१}{न}}$ आणि $२ य^{\frac{१}{न}}$ यांचा गुणाकार का होतो?

सातवा प्रकार.

एक करणीपदास दुसरे करणीपदानें भागायाची रीति.

जेव्हां करणी एक जातीची आहे, तेव्हां अखंड पदांचा भागाकार करावा. तसाच खंड पदांचाही भागाकार करावा. आणि त्या दोन भागाकारामध्यें साधारण करणी चिह्न लिहावें, ह्मणजे भागाकार जाला.

जर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सममूळप्रकाशक रूप देऊन वरचे प्रमाणें भागाकार करावा.

यासमयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ ५६) असावें. जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गमूळादि प्रकाशक भिन्नजाति आहेत, तर त्यांचा भागाकार प्रकाशकांचे वजावाकी वरून होतो तो असा कीं प्रकाशकांची वजाबाकी करून ती साधारणपदास रीतिप्रमाणें जोडावी, ह्मणजे भागाकार जाला.

उदाहरणें.

पहिलें, $८\sqrt{१०८}$ यांस $२\sqrt{६}$ यांनीं भाग.

आतां $\frac{८\sqrt{१०८}}{२\sqrt{६}} = ४\sqrt{१८} = ४\sqrt{९\times२} = १२\sqrt{२}$ भागाकार हें उत्तर.

दुसरें, $८\sqrt[३]{५१२}$ यांस $४\sqrt[३]{२}$ यांनीं भाग.

आतां $\frac{८\sqrt[३]{५१२}}{४\sqrt[३]{२}} = २\sqrt[३]{२५६} = २\sqrt[३]{६४\times४} = ८\sqrt[३]{४}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{१}{२}\sqrt{५}$ यांस $\frac{१}{३}\sqrt{२}$ यांनीं भाग.

आतां $\frac{\frac{१}{२}\sqrt{५}}{\frac{१}{३}\sqrt{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{५}{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{१०}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{१०}$ हें उ०

चवथें, $\sqrt{७}$ यांस $\sqrt[३]{७}$ यांनीं भाग.

आतां $\frac{\sqrt{७}}{\sqrt[३]{७}} = \frac{७^{\frac{१}{२}}}{७^{\frac{१}{३}}} = \frac{७^{\frac{३}{६}}}{७^{\frac{२}{६}}} = ७^{\frac{३}{६} - \frac{२}{६}} = ७^{\frac{१}{६}}$ हें उत्तर

पांचवें, $४\sqrt{५०}$ यांस $२\sqrt{५}$ यांनीं भाग.

उत्तर, $२\sqrt{१०}$

साहावें, $६\sqrt{१००}$ यांस $३\sqrt{५}$ यांनीं भाग.

उत्तर, $२\sqrt{२०}$

सातवें, $\frac{१}{६}\sqrt{\frac{१}{६}}$. यांस $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{५}}$ यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{२}{९}\sqrt{५}$

आठवें, $\frac{२}{४}\sqrt{\frac{३}{१६}}$ यांस $\frac{२}{५}\sqrt{\frac{२}{५}}$ यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{१}{१६}\sqrt{३०}$

नववें, $\frac{५}{६}\sqrt{अ}$ यांस अथवा $\frac{५}{६}अ^{\frac{१}{२}}$ यांस $\frac{२}{३}\sqrt[३]{अ}$ यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{५}{४}अ^{\frac{१}{६}}$

दाहावें, $अ^{\frac{१}{२}}$ यांस $अ^{\frac{१}{३}}$ यांनीं भाग.

अकरावें, $७अ^{\frac{१}{२}}$ यांस $८अ^{\frac{१}{३}}$ यांनीं भाग.

टीप. करणीचा भागाकार भाज्य भाजकांचें मूळप्रकाशकचिन्हाचें वजाबाकीवरून होतो. यावरून निश्चय कळतें कीं, कोणतेही अपूर्णांकाचे अथवा अपूर्णबीजाचे छेद अंशस्थळीं घेता येतील अथवा अंश छेदस्थळीं घेतां येतील. असें कीं, प्रकाशक चिन्ह धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन असें बदल क

ल्न.

पुनः $\frac{अ^{म}}{अ^{म}} = १$ अथवा $अ^{म-म} = अ^{०}$ या पासून निघतें कीं हें अक्षर चिन्ह कोणतेही एक पदाबरोबर आहे, जें पद १ या संख्येचे बरोबर आहे. याजकरितां ज्या स्थळीं $अ^{०}$ अशा रीतीचें अक्षर चिन्ह येतें तेथें १ हा अंक लिहितां येईल.*

---

* याजवरयाहून अधिक विचार केला पाहिजे.

१ कोणतेही पदास शून्य मिळविलें अथवा त्यांतून वजा केलें तरतें पद अधिक किंवा उणें होत नाहीं. ह्मणजे,

$अ+०=अ$ आणि $अ-०=अ$

२ जर कोणतेही पदानें शून्य गुणिलें किंवा भागिलें तर गुणाकार किंवा भागाकार शून्य होईल. कारण, किती वेळां शून्य घेतलें तर शून्यच होईल शून्याचे किती भाग घेतले तरीं शून्यच होईल. ह्मणजे $०×अ$ अथवा $अ×०=०$ आणि $\frac{०}{अ}=०$

३ यांतूनही निघतें कीं, शून्यानें भागिलें शून्य त्याचा भागाकार कांही एक सांतपद आहे कारण.

$०×अ=०$ अथवा $०=०×अ$ याजकरितां $\frac{०}{०}=अ$

४ याहून ही अधिक जर कोणतेंही सांत पद शून्यानें भागिलें तर भागाकार अनंत होईल. या पुढील उदाहरणांत पाहा

$\frac{ब}{अ}=क$ जर बची किंमत सर्वकाळ बराबर असेल तर साफ दिसतें कीं जितका अ लाहान होत जाईल तितका क मोठा होईल, याजकरितां जर अ अनंत लाहान आहे. तर क अनंत मोठा होईल. आणि जेव्हां अ शून्य आहे तेव्हां क अनंत होईल. ह्मणजे,

$\frac{ब}{०}$ अथवा $\frac{१}{०}=\infty$ अनंत आहे.

हा गुण विचार या विद्येंत शेवटीं मोठे मोठे कामांत बहूत उपयोगी आहे, याजकरितां पक्केपणें स्मरणांत असावा.

उदाहरणें.

पहिलें, जसें $\frac{१}{अ} = \frac{अ^{-१}}{१}$ अथवा $अ^{-१}$ आणि $\frac{१}{अ^{न}} = \frac{अ^{-न}}{१}$ अथवा $अ^{-न}$

दुसरें, $\frac{ब}{अ^{२}} = \frac{ब अ^{-२}}{१}$ अथवा ब $अ^{-२}$ आणि $\frac{अ^{-न}}{ब^{म}} = \frac{१}{अ^{न} ब^{म}} = \frac{ब^{-म}}{अ^{न}}$

तिसरें, $\frac{१}{अ^{२}}$ यांस प्रकाशक चिह्न ऋण करून लिहि.

चवथें, $अ^{-३}$ यांस प्रकाशक चिह्न धन करून लिहि

पांचवें, $\frac{१}{अ+क्ष}$ यांस प्रकाशक चिह्न ऋण करून लिहि.

साहावें, $अ\,(अ^{२}-क्ष^{२})^{३}$ यास प्रकाशक चिह्न धन करून लिहि.

आठवा प्रकार.

करणी पदास वर्ग घनादिकें करून वाढवायाचा.

रीति.

जेव्हां करणी पद एकाकी आहे. वर्गकरणें आहे तर

त्या करणी पदाचें प्रकाशक चिह्न दोहोंनीं गुणावें, आणि घनकरणें आहे तर तिहीनीं गुणावें, इत्यादि चतुर्घातादिकीं, हें करणीचे खंड अवयवाचें इछिलें वर्गघनादिक होईल. नंतर त्या करणी पदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इछिलें वर्गघनादिक करून त्यास जोडावें. ह्मणजे करणीचे एकाकी पदाचें इछिलें वर्गघनादिक होईल. जर करणी संयुक्त पद आहे तर इछिलें वर्गघनादिक करावया करितां इछिलें वर्गघनादिक होई तोपर्यंत वर्गघनादि रीतीनें तें करणी संयुक्त पद पुनः पुनः गुणावें.[*]

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{२}{३}अ^{३}$ याचा वर्ग काय होतो?

आतां $(\frac{२}{३}अ^{३})^{२} = \frac{४}{९}अ^{३\times२} = \frac{४}{९}अ^{६}$ अथवा $\frac{४}{९}अ^{६}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{२}{३}\sqrt{३}$ याचा घन काय होतो?

---

[*] जेव्हां कोणतेंही पद वर्गमूळचिन्हानें युक्त आहे. आणि त्याचा वर्गकरणें आहे तर तें वर्गमूळ चिन्ह पुसून टाकावें. ह्मणजे वर्ग जाला. जसें,

$(\sqrt{अ})^{२}$ अथवा $\sqrt{अ}\times\sqrt{अ} = अ$ आणि $(\sqrt{अ+ब})^{२}$ अथवा $\sqrt{अ+ब}\times\sqrt{अ+ब} = अ+ब$

आतां, $\left(\frac{२}{३}\sqrt{३}\right)^{३} = \frac{८}{२७} \times ३^{\frac{१}{२} \times ३} = \frac{८}{२७} \times ३^{\frac{३}{२}} = \frac{८}{२७} \times \sqrt{२७} = \frac{८}{२७} \times \sqrt{९ \times ३} = \frac{२४}{२७}\sqrt{३} = \frac{८}{९}\sqrt{३}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२}{३}\sqrt{६}$ याचा घन काय होतो?

आतां $\frac{२}{३} \times \frac{२}{३} \times \frac{२}{३} = \frac{८}{२७}$ नंतर $६^{\frac{१}{२} \times ३} = ६^{\frac{३}{२}} = \sqrt{२१६} = \sqrt{३६ \times ६} = ६\sqrt{६}$

तेव्हां $\left(\frac{२}{३}\sqrt{६}\right)^{३} = \frac{८}{२७} \times ६\sqrt{६} = \frac{४८}{२७}\sqrt{६} = \frac{१६}{९}\sqrt{६}$ हें उत्तर.

चवथें, $२\sqrt[३]{२}$ याचा वर्ग काय होतो?

उत्तर, $४\sqrt[३]{४}$

पांचवें, $३^{\frac{१}{२}}$ याचा घन काय होतो?

उत्तर, $३\sqrt{३}$

साहावें, $\frac{१}{२}\sqrt{३}$ याचा घन काय होतो?

उत्तर, $\frac{३}{८}\sqrt{३}$

सातवें, $\frac{१}{२}\sqrt{२}$ याचा चतुर्घात काय होतो?

उत्तर, $\frac{१}{४}$

आठवें, $अ^{\frac{१}{२}}$ याचा म घात काय होतो?

नववें, $२ + \sqrt{३}$ याचा वर्ग काय होतो?

दाहावें, $३ + २\sqrt{५}$ याचा वर्ग काय होतो?

अकरावें, $\sqrt{क्ष} + ३\sqrt{य}$ याचा घन काय होतो?

नववा प्रकार.

करणीपदांचें वर्गघनादि मूळ काढायाचा.

जेव्हां करणीपद एकाकी आहे, आणि त्याचें वर्गमूळ काढणें तर, त्या करणीपदाचें प्रकाशक चिह्न $\frac{१}{२}$ यानें गुणावें, आणि घनमूळ काढणें तर $\frac{१}{३}$ यानें गुणावें इत्यादि चतुर्घातादि मूळीं हें करणीचे खंड अवयवाचें इछिलें वर्गादिमूळ होईल. नंतर त्या करणी पदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचे इछिलें वर्गादिमूळ काढून त्या करणी पदांतील त्या अखंड अवयवाचे वर्गादिमूळास जोडावें ह्मणजे करणीचे एकाकीपदाचें इछिलें वर्गादिमूळ होईल. जर करणी संयुक्त आहे तर पूर्वी सांगितले रीतीप्रमाणें त्यांचे वर्गादिमूळ काढावें.[*]

---

[*] कोणतेंहि पद अ याचे म घाताचें न मूळ अथवा कोणतेंही पद अ याचे न मूळाचा म घात = $अ^{\frac{म}{न}}$

आणि कोणतेंही पद अ याचे म मूळाचें न मूळ, अथवा कोणतेंही पद अ याचे न मूळाचें म मूळ = $अ^{\frac{१}{नम}}$

उदाहरणें.

पहिलें, $९\sqrt[४]{३}$ याचें वर्गमूळ काढ.

आतां, $(९\sqrt[४]{३})^{\frac{१}{२}} = ९^{\frac{१}{२}} \times ३^{\frac{१}{४}\times\frac{१}{२}} = ३^{१} \times ३^{\frac{१}{८}} = ३\sqrt[८]{३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{१}{८}\sqrt{२}$ याचें घनमूळ काढ.

आतां, $(\frac{१}{८}\sqrt{२})^{\frac{१}{३}} = (\frac{१}{८})^{\frac{१}{३}} \times २^{\frac{१}{२}\times\frac{१}{३}} = \frac{१}{२} \times २^{\frac{१}{६}} = \frac{१}{२}\sqrt[६]{२}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{३}{६}$ याचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $६\sqrt{५}$

चवथें, $\frac{१}{८}अ^{३}ब$, याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, $\frac{१}{२}अ\sqrt[३]{ब}$

पांचवें, $१६अ$ याचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, $२\sqrt[४]{अ}$

साहावें, $क्ष^{न}$ याचें म मूळ काढ.

सातवें, $अ^{२} - ६अ\sqrt{ब} + ९ब$ यांचे वर्गमूळ काढ.

यावरून कळतें कीं, अ पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे चतुर्घात मूळा बराबर आहे आणि अ पदाचे वर्गमूळाचें घनमूळ अथवा अ पदाचे घनमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे षड्घात मूळा बरोबर आहे, आणि याप्रमाणें पुढें ही कोणते ही पदाचे मूळाचें मूळ काढणें असेल तर याप्रमाणें काढावें.

आठवें, $अ_{३} \sqrt{अ_{३}}$ यांचें घनमूळ काढ.

दाहावा प्रकार.

द्वियुक्त पदास अथवा धनर्ण पदास सामान्य करणी रूप द्यावयाचा.

रीति.

सांगितलें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद यास त्यांतील करणीचे घाता पर्यंत वाढवावें, नंतर त्या घाताचें मूळ चिन्ह त्या द्वियुक्तपदास अथवा धनर्णपदास जोडून लिहावें, ह्मणजे त्या पदास सामान्य करणीरूप जालें,

उदाहरणें.

पहिलें, $२ + \sqrt{३}$ यास सामान्य करणी रूप दे.

आतां $(२ + \sqrt{३})^{२} = ४ + ३ + ४\sqrt{३} = ७ + ४\sqrt{३}$ याजकरितां $२ + \sqrt{३} = \sqrt{७ + ४\sqrt{३}}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{२} + \sqrt{३}$ यास सामान्य करणी रूप दे.

रीति.

या खालचे दोन सारणीकोष्टकांत अक्षरस्थळीं सांगितले करणीचे दोन अवयव लिहावे, ह्मणजे सांगितले द्वियुक्पदाचे अथवा धनर्णपदाचें इच्छिलें मूळ होईल.

$$\sqrt{अ+\sqrt{ब}}=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}}+\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}}$$

$$\sqrt{अ-\sqrt{ब}}=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}}-\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}}$$

पाहायाचें आहे जर या दोन सारणीकोष्टकांत अ आणि $\sqrt{अ^{२}-ब}$ अखंड पदें असतील, तर मूळपदें दोनही असतील. अथवा एकपद अखंड आणि दुसरें पद करणी असें असेल. ह्मणून दोन प्रकारचीं मात्र उदाहरणें यारीतीच्या उपयोगीं आहेत.

उदाहरणें.

पहिलें, $११+\sqrt{७२}$ अथवा $११+६\sqrt{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

आतां $\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}}=\sqrt{\frac{११}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{१२१-७२}}=$ $\sqrt{\frac{११}{२}+\frac{७}{२}}=\sqrt{\frac{१८}{२}}=\sqrt{९}=३$

आतां $+\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}}=\sqrt{\frac{११}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{१२१-७२}}=$ $\sqrt{\frac{११}{२}-\frac{७}{२}}=\sqrt{\frac{४}{२}}=\sqrt{२}$ याजकरितां $\sqrt{११+६\sqrt{२}}=३+\sqrt{२}$ हें उत्तर.

आतां $(\sqrt{२}+\sqrt{३})^{२} = २+३+२\sqrt{६} = ५+२\sqrt{६}$ याज करितां $\sqrt{२}+\sqrt{३} = \sqrt{५+२\sqrt{६}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४}$ यास सामान्यकरणी रूप दे. आतां $(\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})^{३} = ६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}$ याज करितां $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४} = \sqrt[३]{६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}}$ अथवा $\sqrt[३]{६(१+\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})}$ हें उत्तर.

चवथें, $३-\sqrt{५}$ यास सामान्यकरणी रूप दे.

पाचवें, $\sqrt{२}-२\sqrt{६}$ यास सामान्य करणी रूप दे

साहावें, $४-\sqrt{७}$ यास सामान्य करणी रूप दे.

सातवें, $२\sqrt{३}-३\sqrt{९}$ यास सामान्य करणी रूप दे.

अकरावा प्रकार.

द्वियुक्पदाचे अथवा धनर्णपदाचे वर्गमूळ काढयाचा.

दुसरें, $३ - २\sqrt{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

आतां $\sqrt{\frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}\sqrt{अ^{२} - ब}} - \sqrt{\frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}\sqrt{अ^{२} - ब}}$

$$\sqrt{\frac{३}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{९ - ८}} = \sqrt{\frac{३}{२} + \frac{१}{२}} = \sqrt{\frac{४}{२}} = \sqrt{२}$$

$$-\sqrt{\frac{३}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{९ - ८}} = -\sqrt{\frac{३}{२} - \frac{१}{२}} = -१$$

याजकरितां $\sqrt{३ - २\sqrt{२}} = \sqrt{२} - १$ हें उत्तर.

तिसरें, $६ \pm २\sqrt{५}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\sqrt{५} \pm १$

चवथें, $२३ \pm ८\sqrt{७}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $४ \pm \sqrt{७}$

पांचवें, $४ + २\sqrt{३}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $१ + \sqrt{३}$

साहावें, $६ - २\sqrt{५}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\sqrt{५} - १$

बारावा प्रकार.

एक किंवा अधिक गुणक काढायाचा.

तो गुणक असा कीं, ज्याणें करणी द्वियुक्पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाऊन तें अखंड होईल.

रीति.

१ जेव्हां करणीचे एकपदाचा किंवा दोहींपदांचें मूळप्रकाशक सम आहेत, तेव्हां सांगितले द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें एकचिह्न बदल करावें, ह्मणजे तोच गुणक जाला. नंतर त्या गुणकानें तें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद गुणावें. याप्रमाणें गुणाकारांतही एकचिह्न बदल करून पुनःपुनः गुणावें, गुणाकारास करणीरूप सुटे पर्यंत.

या रीतीनें त्रियुक्पदादि करणीसही करणीरूप सुटून अखंड रूप देतां येईल. असें कीं, त्रियुक्पदादि करणीसही एकचिह्न बदल करावें, पंचयुक्पद करणीस तीन चिह्नें बदल करावीं, इत्यादि षड्युक्पदादि कीं ही.

२ जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळप्रकाशक विषम आहे, तेव्हां रीति याहून अधिक कठिण आहे परंतु दोन वर्गमूळांची बेरीज किंवा वजा बाकी करायास इच्छिला गुणक त्रियुक्पद करणी होईल. हें त्रियुक्पद या रीतीनें उत्पन्न होतें कीं, जीं दोन पदें आहेत त्यांचे वर्ग दोन पदें आणि त्याच पदांचा गुणाकार धनर्ण असल्यास ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावा, तो तिसरें म

तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी $\sqrt[4]{५} + \sqrt[4]{३}$

गुणक $\sqrt[4]{५} - \sqrt[4]{३}$

$$\sqrt{५} + \sqrt[4]{१५}$$

$$- \sqrt[4]{१५} - \sqrt{३}$$

$$\sqrt{५} - \sqrt{३}$$

पुनः गुणक. $\sqrt{५} + \sqrt{३}$

$$५ - \sqrt{१५}$$

$$+ \sqrt{१५} - ३$$

$५ - ३ = २$ हें उत्तर.

चवथें, $\sqrt[3]{७} + \sqrt[3]{३}$ याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी $\sqrt[3]{७} + \sqrt[3]{३}$

गुणक. $\sqrt[3]{७^{२}} - \sqrt[3]{७ \times ३} + \sqrt[3]{३^{२}}$

$$७ + \sqrt[3]{७^{२} \times ३}$$

$$- \sqrt[3]{७^{२} \times ३} - \sqrt[3]{७ \times ३^{२}}$$

$$+ \sqrt[3]{७ \times ३^{२}} + ३$$

गुणाकार. $\overline{७ + ३ = १०}$ हें उत्तर.

पांचवें, $\sqrt{५} - \sqrt{क्ष}$ याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन तें अ

ध्य पद होतें.

उदाहरणें.

पहिलें, $५ + \sqrt{३}$ यांचा एकगुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी $५ + \sqrt{३}$

गुणक $५ - \sqrt{३}$

$$\begin{array}{r} २५ + ५\sqrt{३} \\ - ५\sqrt{३} - ३ \\ \hline २५ - ३ = २२ \end{array}$$

हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{५} + \sqrt{३}$ याचा एकगुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी. $\sqrt{५} + \sqrt{३}$

$\sqrt{५} - \sqrt{३}$

$$\begin{array}{r} ५ + \sqrt{५}\sqrt{३} \\ - \sqrt{५}\sqrt{३} - ३ \\ \hline ५ - ३ = २ \end{array}$$

हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt[३]{५} + \sqrt[३]{३}$ याचा एकगुणक काढायाचा ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन

खंड पद होईल.

साहावें, $\sqrt{अ} + \sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाचा. ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सातवें, $अ + \sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाचा. ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

आठवें, $१ + \sqrt[३]{२अ}$ याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

नववें, $\sqrt[३]{३} - \frac{१}{२}\sqrt[३]{२}$. याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

तेरावा प्रकार.

ज्या अपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी किंवा संयुक्त करणी आहेत, त्यांस बदल अखंडरूप देण्याचा.

रीति

१ जेव्हां कोणतेंही एकाकी अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{ब}{\sqrt{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद त्याचे अंशांनीं ह्मणजे एथें $\sqrt{अ}$ यांनीं गुणावे, ह्मणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{ब\sqrt{अ}}{अ}$

अथवा जेव्हां तें अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{ब}{\sqrt[३]{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[३]{अ}$ यांनीं गुणावे, ह्मणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{ब\sqrt[३]{अ}}{अ}$

आणि जेव्हां या सामान्य पद्धतीचें रूप आहे $\frac{ब}{\sqrt[न]{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[न]{अ^{न-१}}$ यांनीं गुणावे ह्मणजें त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{ब\sqrt[न]{अ^{न-१}}}{अ}$

२ जेव्हां अपूर्णबीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत, तेव्हां पूर्व १२ व्या प्रकारा प्रमाणें गुणक काढावा. असा कीं, ज्याणें ते छेद गुणिले असतां त्यांचें करणीरूप जाऊन अखंड रूप होतील. नंतर अंश आणि छेद त्या गुणकांनीं गुणिले असतां अपूर्ण बीजास इछिलें अखंड छेद रूप होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{२}{\sqrt{३}}$ आणि $\frac{३}{\sqrt[३]{५}}$ या दोन अपूर्ण बी

ध्य पद होतें.

उदाहरणें.

पहिलें, ५ + √ ३ यांचा एकगुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी ५ + √ ३
गुणक ५ − √ ३
२५ + ५√३
− ५√३ − ३
२५ − ३ = २२ हें उत्तर.

दुसरें, √ ५ + √ ३ याचा एकगुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी. √ ५ + √ ३
√ ५ − √ ३
५ + √५√३
− √५√३ − ३
५ − ३ = २ हें उत्तर.

तिसरें, ∛ ५ + ∛ ३ याचा एकगुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन

तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी $\sqrt[२]{५}+\sqrt[२]{३}$

गुणक $\sqrt[२]{५}-\sqrt[२]{३}$

$$\overline{\sqrt{५}+\sqrt[२]{१५}}$$

$$-\sqrt[२]{१५}-\sqrt{३}$$

$$\overline{\sqrt{५}-\sqrt{३}}$$

पुनः गुणक. $\sqrt{५}+\sqrt{३}$

$$\overline{५-\sqrt{१५}}$$

$$+\sqrt{१५}-३$$

$$\overline{५-३=२}$$ हें उत्तर.

चवथें, $\sqrt[३]{७}+\sqrt[३]{३}$ याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी $\sqrt[३]{७}+\sqrt[३]{३}$

गुणक. $\sqrt[३]{७^२}-\sqrt[३]{७\times३}+\sqrt[३]{३^२}$

$$\overline{७+\sqrt[३]{७^२\times३}}$$

$$-\sqrt[३]{७^२\times३}-\sqrt[३]{७\times३^२}$$

$$+\sqrt[३]{७\times३^२}+३$$

गुणाकार. $\overline{७+३=१०}$ हें उत्तर.

पांचवें, $\sqrt{५}-\sqrt{क्ष}$ याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन तें अ

खंड पद होईल.

साहावें, $\sqrt{अ} + \sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाचा. ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सातवें, $अ + \sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाचा. ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

आठवें, $१ + \sqrt[३]{२अ}$ याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

नववें, $\sqrt[३]{३} - \frac{१}{२}\sqrt[४]{२}$. याचा गुणक काढायाचा, ज्याणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

तेरावा प्रकार.

ज्या अपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी किंवा संयुक्त करणी आहेत, त्यांस बदल अखंडरूप देण्याचा.

रीति

१ जेव्हां कोणतेंही एकाकी अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{ब}{\sqrt{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद त्याचे अंशांनीं ह्मणजे एथें $\sqrt{अ}$ यांनीं गुणावे, ह्मणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{ब\sqrt{अ}}{अ}$

अथवा जेव्हां तें अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{ब}{\sqrt[३]{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[३]{अ^{२}}$ यांनीं गुणावे, ह्मणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{ब\sqrt[३]{अ}}{अ}$

आणि जेव्हां या सामान्य पद्धतीचें रूप आहे $\frac{ब}{\sqrt[न]{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[न]{अ^{न-१}}$ यांनीं गुणावे ह्मणजें त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{ब\sqrt[न]{अ^{न-१}}}{अ}$

२ जेव्हां अपूर्णबीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत, तेव्हां पूर्व १२ व्या प्रकारा प्रमाणें गुणक काढावा. असा कीं, ज्याणें ते छेद गुणिले असतां त्यांचें करणीरूप जाऊन अखंड रूप होतील. नंतर अंश आणि छेद त्या गुणकांनीं गुणिले असतां अपूर्ण बीजास इच्छिलें अखंड छेद रूप होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{२}{\sqrt{३}}$ आणि $\frac{३}{२\sqrt{५}}$ या दोन अपूर्ण बी

जांस अखंड छेद रूप दे.

आतां $\frac{२}{\sqrt{३}} = \frac{२}{\sqrt{३}} \times \frac{\sqrt{३}}{\sqrt{३}} = \frac{२\sqrt{३}}{३}$ हें एक उदाहरणाचें उ०

आणि $\frac{३}{२\sqrt[३]{५}} = \frac{३}{२\sqrt[३]{५}} \times \frac{\sqrt[३]{५^{३}}}{\sqrt[३]{५^{३}}} = \frac{३\sqrt[३]{५^{३}}}{२\times५} = \frac{६\sqrt[३]{५^{३}}}{५} = \frac{६}{५}\sqrt[३]{}$
१२५ हें दुसरे उदाहरणाचें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३}{\sqrt{५}-\sqrt{२}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

आतां $\frac{३}{\sqrt{५}-\sqrt{२}} \times \frac{\sqrt{५}+\sqrt{२}}{\sqrt{५}+\sqrt{२}} = \frac{३\sqrt{५}+३\sqrt{२}}{३} = \frac{\sqrt{५}+\sqrt{२}}{१}$
$= \sqrt{५}+\sqrt{२}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{\sqrt{२}}{३-\sqrt{२}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

आतां $\frac{\sqrt{२}}{३-\sqrt{२}} \times \frac{३+\sqrt{२}}{३+\sqrt{२}} = \frac{३\sqrt{२}+२}{९-२} = \frac{३\sqrt{२}+२}{७}$ अथवा
$\frac{२}{७} + \frac{३}{७}\sqrt{२}$ हें उत्तर.

चवथें, $\frac{\sqrt{६}}{\sqrt{७}+\sqrt{३}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

पांचवें, $\frac{क्ष}{१+\sqrt{क्ष}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

साहावें, $\frac{अ-\sqrt{ब}}{अ+\sqrt{ब}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

सातवें, $\frac{१०}{\sqrt{७}-\sqrt{५}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

आठवें, $\frac{\sqrt{३}}{\sqrt{८}+\sqrt{१०}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

नववें, $\frac{४}{\sqrt{४}+\sqrt{५}}$ या अपूर्णबीजास अखंड छेद रूप दे.

गणित प्रमाण आणि श्रेढी.

गणितप्रमाण एकजातीचे दोन पदांचे वजाबाकी करून त्यांचें संबंधि आहे. या वजाबाकीस गणितप्रमाणात उत्तर ह्मणतात.

चार पदें गणितप्रमाणात आहेत असें ह्मणतात, जेव्हां पहिलें आणि दुसरें यांचें उत्तर तिसरें आणि चवथें यांचे उत्तरा बरोबर आहे.

जसें, ३ , ७ , १२ ; १६ , आणि **अ**, **अ+ब**, **क**, **क+ब** परस्पर गणित प्रमाणांत आहेत.

गणितश्रेढी तीच होय, जी कितीएकपदांची श्रेणी

एकच उत्तरानें चढती किंवा उतरती आहे.

जसें, १, ३, ५, ७, ९, ११ इत्यादि आणि अ, अ+ब, अ+२ब, अ+३ब, अ+४ब, अ+५ब इत्यादि या श्रेणी गणित प्रमाणांत आहेत, ज्यांत प्रथमेचें उत्तर २ आणि दुसरीचें उत्तर ब आहे.

गणित प्रमाण आणि श्रेढी यांचे परम उपयोगी अवयव पूर्वी अंकगणितामध्यें उघड करून सांगितले आहेत, ते बीज गणितामध्यें या प्रमाणें लिहितात. जसें,

अति लाहान पद दाखवायास	अ घे
अति मोठें पद दाखवायास	ज्ञ घे
उत्तर ————	ड घे
गछ ————	न घे
सर्वधन ————	स घे

तेव्हां गणित प्रमाणांतील मुख्य गुण यापुढील समीकरणांत दाखविला जातो. ह्मणजे,

१, $\text{ज्ञ} = \text{अ} + \text{ड} \cdot (\text{न} - \text{१})$

२, $\text{अ} = \text{ज्ञ} - \text{ड} \cdot (\text{न} - \text{१})$

३, $\text{स} = (\text{अ} + \text{ज्ञ}) \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{न}$

४, $\text{स} = (\text{ज्ञ} - \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{ड} \cdot \overline{\text{न} - \text{१}}) \text{न}$

५, $\text{स} = (\text{अ} + \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{ड} \cdot \overline{\text{न} - \text{१}} \text{न}$

आणि जेव्हां प्रथम पद अ =० आहे, तेव्हां वरचे समीकरणास हें रूप होतें.

$$\text{ज्ञ} = \text{ड}\,(\text{न} - १)$$

$$\text{स} = \frac{१}{२}\,\text{नज्ञ}$$

उदाहरणें.

पहिलें, एक चढती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १ उत्तर २ आणि गछ २१ तीचें सर्व धन काय होईल?

प्रथम, $१+२\times२०=१+४०=४१$ हें अति मोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{१+४१}{२}\times२१=२१\times२१=४४१$ हें इछिलें सर्व धन.

दुसरें, एक उतरती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १९९ उत्तर ३ आणि गछ ६७ आहे, तीचें सर्व धन काय होईल?

प्रथम, $१९९-३\times६६=१९९-१९८=१$ हें अति लाहान पद.

तेव्हां, $\frac{१९९+१}{२}\times६७=१००\times६७=६७००$ हें इछिलें सर्व धन.

तिसरें, १, २, ३, ४, ५, ६ इत्यादि मूळ संख्यांची श्रेणी, गछ १०० पर्यंत आहे, तीचें सर्व धन काय होईल?

उत्तर, ५०५०

चवथें, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम संख्यांची श्रेणी, गछ १९ पर्यंत आहे, तीचें सर्वधन काय होईल?*

पांचवें, इताल्या मुलकांत वेनीस्या या नामें एकशहर आहे, तेथें सूर्योदयापासून दुसरा सूर्योदय पर्यंत, प्रथम १ दुसरे वेळे २ तिसरे वेळे ३ अशारीतीनें चोविसावे वेळे २४ पर्यंत घडयाळांत अवर वाजतात, तेव्हां एकदिवसांत अवराचे टोले किती वाजतात? अवर ह्मणजे १ तास अथवा $२\frac{१}{२}$ घटिका

उत्तर, ३०० टोले

---

* १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम अंकांचे गणित श्रेढीचे नगछ पर्यंत सर्वधन त्यागछाचे $(न^{२})$ वर्गा बरोबर आहे. जसें,

जर १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि पदें असतील.

तेव्हां $१^{२}$, $२^{२}$, $३^{२}$, $४^{२}$, $५^{२}$ हीं प्रथम, दुसरें, तिसरें इत्यादि पदांचीं सर्वधनें होतील. या प्रमाणें,

० + १ = १ अथवा $१^{२}$ हें प्रथम पदाचें सर्वधन.
१ + ३ = ४ —— $२^{२}$ हें दोन पदांचें सर्वधन.
४ + ५ = ९ —— $३^{२}$ हें तीन पदांचें सर्वधन.
९ + ७ = १६ —— $४^{२}$ हें चार पदांचें सर्वधन.
१६ + ९ = २५ —— $५^{२}$ हें पांच पदांचें सर्वधन. आहे इत्यादि.

ह्मणून वरचा प्रथम सिद्धांत किंवा समीकरण यानें १ + २ (न − १) = १ + २ न − २ = २ न − १ ह्मणजे हें मोठें पद आहे, तेव्हां गछन आहे; या मोठे पदाशीं प्रथम पद १ मिळवून दोन शेवट पदांची बेरीज २ न होईल, अथवा त्या बेरिजेचें अर्ध न होईल; तेव्हां वरचे तिसरे समीकरणानें सम सर्वधन = न.न = $न^{२}$. यावरून स्पष्ट होतें कीं, सर्वदा दोन शेवटांचे बेरिजेचें अर्ध आणि गछ एकच आहे; आणि सर्वधन आणि त्या गछाचा वर्ग $(न^{२})$ एकच आहे.

साहावें, २, ४, ६, ८, १०, १२ इत्यादि या सम पद श्रेणींत ३६५वें पद काय आहे?

उत्तर, ७३०

सातवें, गणित श्रेढींतील एक उतरती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १०, उत्तर $\frac{१}{२}$ आणि गछ २१, तीचें सर्वधन किती होईल?

उत्तर, १४०

आठवें, एके सरळ रेघेंत एक एक यार्डाचे अंतरानें १०० खडे ठेविले आहेत, आणि प्रथम खडयापासून एक यार्डाचे अंतरानें पांटी ठेविली आहे, आणि एक मनुष्यास आज्ञा जाली कीं, त्याणें एक एक खेपेस त्या खडयांतील एक एक खडा त्या पांटींत टाकावा. तेव्हां सर्व खडे त्या पांटींत येतपर्यं त्या मनुष्यास किती चालावें लागेल?

मैल यार्ड
उत्तर, ५ ‥ १२००

गणित श्रेढीचें व्यवहारी संगती करण.

उदाहरणें.

पहिलें, एक पलटन त्रिकोणाकृति उभें आहे; त्याचे पाहिले ओळींत १ मनुष्य, दुसरींत ३, तिसरींत ५, अशा-

रीतीनें चढत्या तीस ओळी आहेत, तर त्या त्रिकोणाकृति पलटणांतील सर्व मनुष्यें किती होतील?

उत्तर, ९०० मनुष्यें

दुसरें, फौजेंतील एके टोळीस सर्कार आज्ञा जाली कीं, त्यांनीं पुढें सांगतो अशा मजला करून १२ दिवसांत एके अमुकगावीं पोंचावें; त्यांत प्रथमदिवशीं ६ मेल, दुसरे दिवशीं १०½ मेल इत्यादि प्रत्यहीं ४½ मेल अधिक या प्रमाणें, तेव्हां त्यांस शेवटचे दिवशीं किती मेल चालावें लागेल, आणि सर्व मजला मिळून किती मेल होतील?

उत्तर, ५५½ मेल शेवटील मजल.
आणि ३६९ मेल सर्व मिळून.

तिसरें, एके किल्यास वेढा देऊन फौज बसली होती, त्यांतील इंजनेरांचे एक ब्रिगेडानें* तो किल्ला घेण्यास आरंभ केला; प्रथम रात्रौ त्याणें १५ यार्ड साप खणिला, दुसरे रात्रीस १३ यार्ड, इत्यादि प्रतिरात्रीस २ यार्ड उणे, आणि शेवटील रात्रीस ३ यार्ड मात्र खणिला, तेव्हां किती रात्री काम केलें, आणि सर्व मिळून साप किती यार्ड खणिला तें सांग.

---

* ब्रिगेड ह्मणजे जमात इंजनेरांचें एक ब्रिगेडांत आठ मनुष्यें असतात, ज्यांच्या दोन टोळ्या करितात, तेव्हां एक टोळी हातांनीं काम करून साप वाढविते, तेव्हां दुसरी टोळी त्यास सामान पुरविते आणि जेव्हां प्रथम टोळी थकली तेव्हां तीचे बदली दुसरी टोळी काम करिते. तें अशा रीतीनें

उत्तर, { ७ रात्री काम केलें
६३ यार्ड साप खणिला

चौथें, कितीएक गेबीयन⁂ साहा ओळींत एकावर एक असे उभे करायास दिले, ते असे कीं, प्रति ओळीचे गेबीयनांचे संख्येचें उत्तर बरोबर, आणि खालचे ओळींत १ गेबीयंन आणि वरचे ओळींत ४ तेव्हां साहा ओळी मिळून गेबीयंन किती, आणि प्रति ओळीचे गेबीयंन संख्येंत अंतर किती तें सांग.

उत्तर, { १ गेबीयंन प्रति ओळीचें अंतर.
३९ गेबीयंन साहा ओळी मिळून.

पांचवे, दोन फौजांच्या टोळ्या १११ मेलाचे अंतरानें होत्या, नंतर जे एक चांगलें स्थळ दोहों टोळ्यापासून बराब

कीं, ते सर्व आप आपले पाळी प्रमाणें सापाची शिरावर काम करितात; साप ह्मणजे खाडा. ज्याची रुंदी ३ फूट आणि ओंडी ४ फूट याशिवाय या कामांत दुसरे खाडे करितात. ज्यांची रुंदी १० फूट पासून १५ फूट पर्यंत असते त्यांस मेंच ह्मणतात.

⁂ गेबीयंन ह्मणजे कणग्या सारखी शिलिंदररूपाची वेत अथवा बिंबी इत्यादिकांनीं केलेली टोपली आहे. जिची दोनही तोंडें उघडीं असतात. त्यांत जिचा व्यास २ फूट आणि उंची ३ फूट, त्या टोपल्या मेंचाचे बाजूवर ठेहून त्यांत माती भरितात; आणि जिचा व्यास आणि उंची याहून अधिक आहे, त्या मोरचे इत्यादि कामांत उपयोगी आहेत; तसें जिचा व्यास आणि उंची याहून उणी आहे, त्या लाहान कामांत उपयोगी आहेत; परंतु या जातीच्या टोपल्या बहुत उपयोगी आहेत.

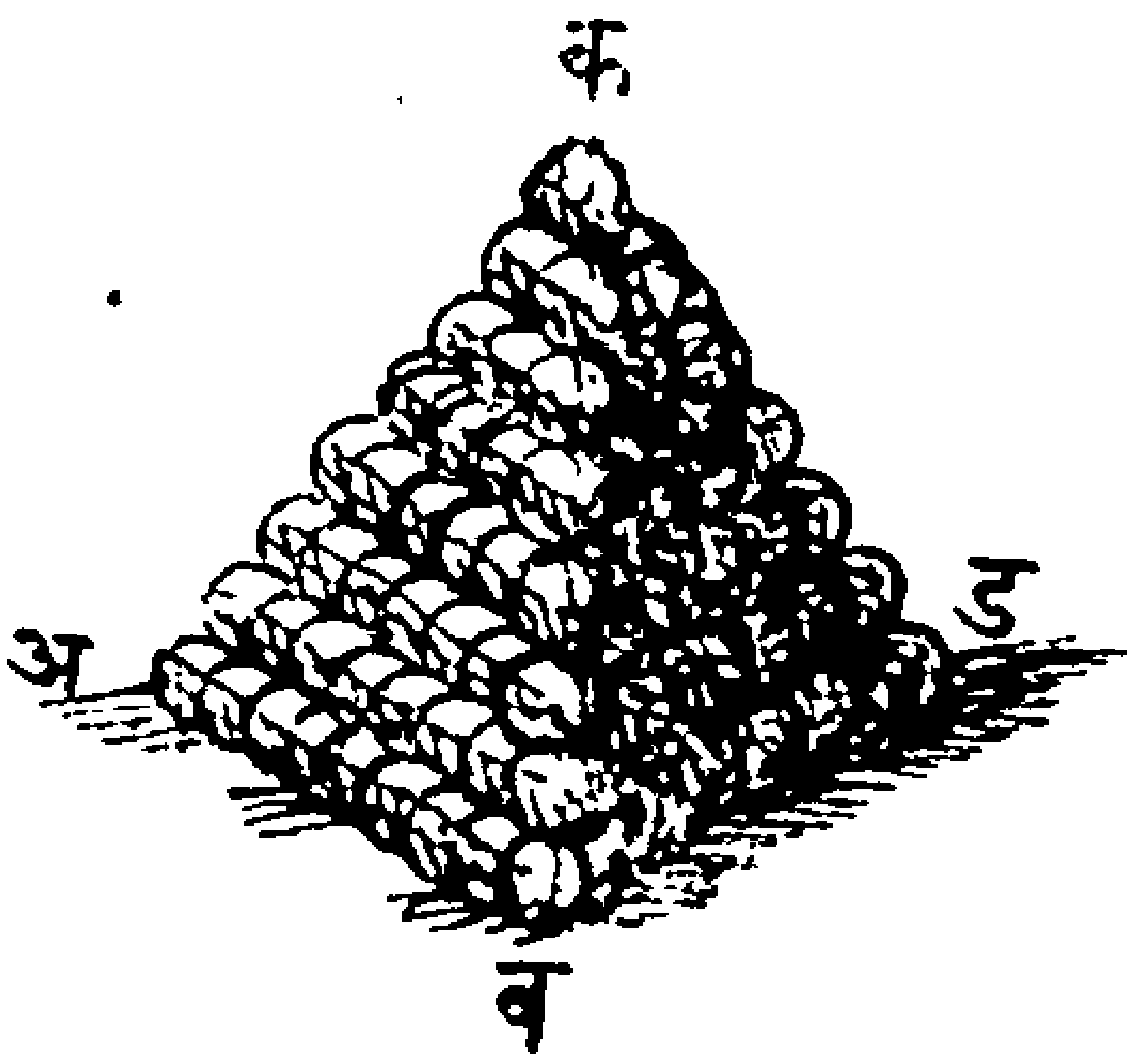
र अंतरानें होतें, तेथें जाऊन राहावें. ऐसें दोहोंचे चित्तीं येऊन निघाल्या, परंतु वेगळाले समयांत; प्रथम टोळी प्रत्यहीं पूर्व दिवसापेक्षां ३ तीन मैल मजल अधिक करित होती; आणि दुसरी टोळी ६ साहा मैल अधिक दोन टोळ्या त्या चांगले स्थळीं एकदांच येऊन पावल्या; ह्मणजे प्रथम टोळी कुच केले दिवसापासून पांचवे दिवशीं; आणि दुसरी टोळी कुच केले दिवसापासून चवथे दिवशीं, तेव्हां प्रति टोळीनें प्रति दिवशीं किती मैल मजल केली तें सांग.

उत्तर, { प्रथम टोळीची श्रेढी. ५ ७/१०, ८ ७/१०, ११ ७/१०, १४ ७/१०, १७ ७/१०
दुसरे टोळीची श्रेढी. ४ ५/८, १० ५/८, १६ ५/८, २२ ५/८

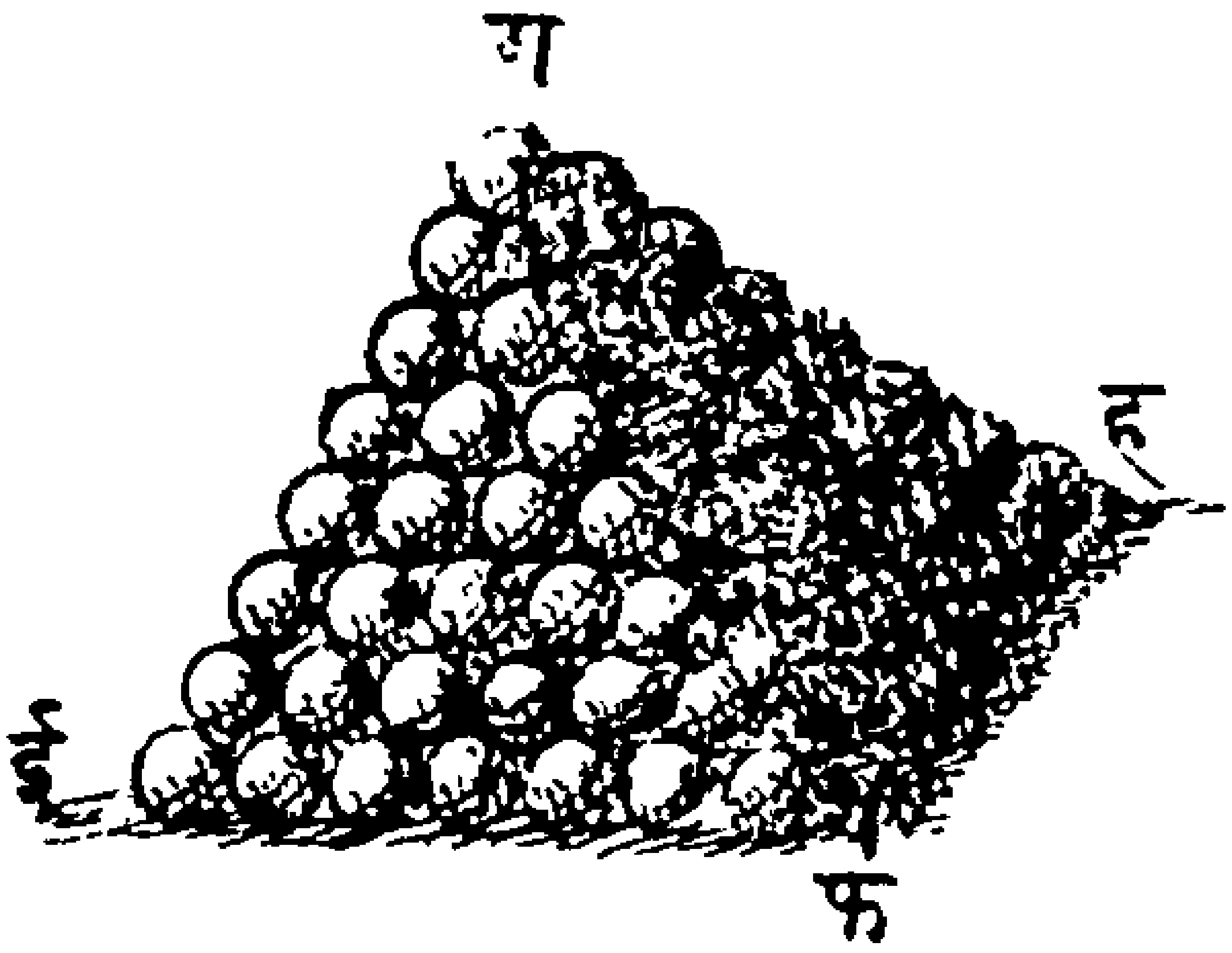
सम आकृतींत ठेविलेले गोळ्यांचे राशीचें गणित.

तोफेचे गोळ्यांच्या राशी बहुतकरून तीन रीतींहीं करितात, त्यांस पायाचे आकृतीवरून वेगळालीं नामें होतात. पाया त्रिकोण असल्यास त्रिकोण राशि ह्मणतात; पाया चौरस असल्यास चौरस राशि; आणि पाया काटकोन चौकोन असल्यास काटकोन चौकोन राशि.

प्रथम आकृति.



दुसरी आकृति.

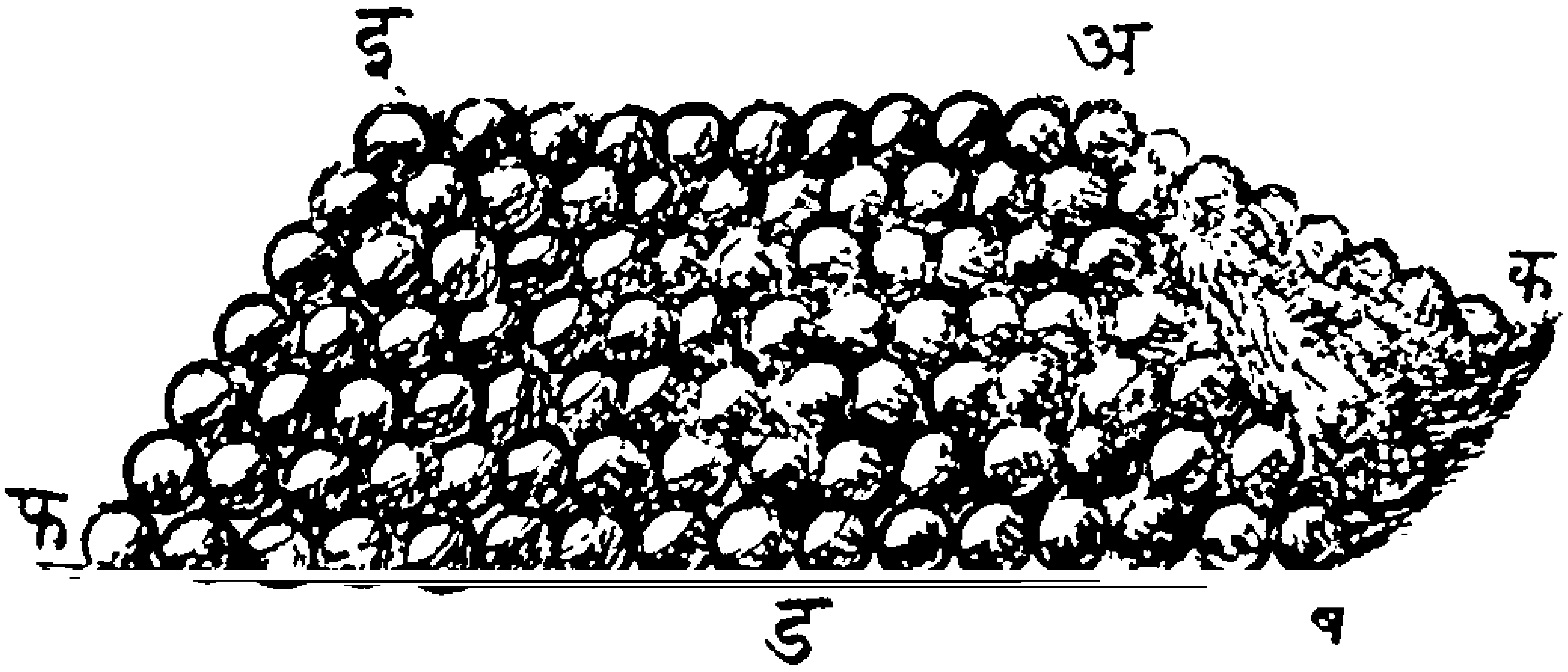


अबकड प्रथम आकृति त्रिकोण राशि आहे.

ईफगह दुसरी आकृति चौरस राशि आहे.

अबकडईफ तिसरी आकृति काटकोन चौकोन राशि आहे.

तिसरी आकृति.



गोळ्यांचे त्रिकोण आकृति थर एकावर एक रचिल्यापासून त्रिकोण राशि उत्पन्न होते; आशा रीतीनें कीं, प्रति थराची एकेक बाजू आरंभापासून एकेक गोळ्यानें उणी होत जाते; अशी कीं, शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो.

गोळ्यांचे चौरस थर एकावर एक रचिल्यापासून चौरस राशि उत्पन्न होते, अशारीतीनें कीं, प्रतिथराचे एकेक बाजूस आरंभापासून एकेक गोळा उणा होतजातो, असा कीं, शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो.

त्रिकोण आणि चौरस राशी मध्यें, बाजू किंवा मुखें सम बाजू त्रिकोण आहेत; आणि त्या बाजूंतील गोळे गणितश्रेढी आहेत, जिचें प्रथमपद १, शेवटीलपद आणि गच्छ पायाचे थरांतील गोळ्यांचे संख्ये बरोबर; कारण, थरांची संख्या अथवा आकृतीचे कोण तेही एक कोनावरील गोळ्यांची संख्या सर्वदा पायाचे एक बाजूंतील गोळ्यांचे संख्ये बराबर आहे त्रिकोण अथवा चौरस राशीच्या बाजू किंवा मुखें यास गणित त्रिकोण ह्मणतात आणि त्या गणित त्रिकोणांतील गोळ्यांचे संख्येस त्रिकोण संख्या ह्मणतात **अबक** प्रथम आकृतींतील आणि **ईफग** दुसरे आकृतींतील गणित त्रिकोण आहेत.

काटकोन चौकोनराशि कल्पनें करून याप्रमाणें उत्पन्न होते, ह्मणजे **अबकड** चौकोनराशीवर **अड** मुख किंवा बाजूवर तितके गणित त्रिकोण ठेविले. जितके पायाचे **बड** बाजूचे बाहेर त्याच बाजूंत गोळे

आहेत; ते सर्व त्या मुखाचे बरोबर आहेत आणि त्या गणित त्रिकोणांची संख्या सर्वदां त्याचे बरोबर आहे, जे वरचे ओळीचे गोळ्यांत एक उणा अथवा पायाचे लाहान आणि मोठे बाजूचे वजाबाकी बरोबर आहे.

साहावें, **अबकड** प्रथम आकृति ह्मणजे त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे?

पृथक्करण, सांगितले राशींत गोळ्यांचे समपातळी थर आठ आहेत, आणि ते प्रत्येकीं समबाजू त्रिकोण आहेत, ह्मणून या प्रत्येकांतील गोळे गणित श्रेढी आहेत, ज्यांचे प्रथमपद, शेवटील पद, आणि गछ हीं कळलीं आहेत; यापासून निघतें कीं, या आठ थरांची अथवा आठ श्रेढींची बेरीज या त्रिकोण राशींतील सर्व गोळ्यांची संख्या आहे; तेव्हां,

त्रिकोण राशींतील प्रथम अथवा
खालचे त्रिकोण थरांतील गोळ्यांची संख्या

पहिला = (८+१) × ४ = ३६
दुसरा = (७+१) × ३½ = २८
तिसरा = (६+१) × ३ = २१
चौथा = (५+१) × २½ = १५
पांचवा = (४+१) × २ = १०
साहावा = (३+१) × १½ = ६

सातवा $=(२+१)\times१=$ ३

आठवा $=(१+१)\times\frac{१}{२}=$ १

गोळे सांगितले राशींतील बेरीज $\overline{१२०}$

सातवें, **ईफगह** दुसरी आकृति, या चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या काढ. जिचे **ईफ** खालचे थराचे ओळींत आठ गोळे आहेत.

पृथक्करण,

खालचे ओळींत गोळे ८ आहेत, आणि तिचे वरचिंत ७च आहेत; ह्मणून त्या ओळी या श्रेढींत आहेत ८, ७, ६, ५, ४, ३, २, १ यांत प्रत्येक पद त्या त्या चौरस थराचें वर्गमूळ आहे ज्या थरापासून चौरस राशि उत्पन्न जाली; यापासून निघतें कीं, या मूळपदांचे वर्गांची बेरीज इछिली गोळ्यांची संख्या आहे; ह्मणजे वर्गांची बेरीज $८^२+७^२+६^२+५^२+४^२+३^२+२^२+१^२=२०४$ आहेत. हें सांगितले राशींतील इछिले गोळे जाले.

आठवे, **अबकडईफ** तिसरी आकृति; या काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या काढ. जींत **बफ** = १६ आणि **बक** = ७

पृथक्करण, इछिली काटकोन चौकोन राशि, **अबकड** चौरस राशि, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत ७ गोळे आहेत; आणि या शिवाय ९ गणित त्रिकोण,

ज्यांचे आदि अंत आणि गछ कळले आहेत, त्यांणी मिळून जाला आहे, याजकरितां जर चोरस राशीचे

गोळ्यांची संख्या = १४०

त्यांत श्रेढींची बेरीज मिळाली = २५२

सर्व मिळून काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या = ३९२ गोळे

पहिली टीप.

या पुढील कोष्टकांतील त्रिकोण राशि आणि चौकोन राशि आणखीही प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच काढितां येईल **अ** कोष्टक खालचे थराचे एक ओळीचे गोळ्यांची संख्या १ यापासून ४० पर्यंत दाखवितो; **ब** कोष्टक त्रिकोण संख्या अथवा प्रत्येक थरांतील संख्या; **क** कोष्टक त्रिकोण संख्यांची बेरीज दाखवितो; ह्मणजे त्रिकोणराशींतील संख्यांची बेरीज, ज्या संख्यांस बहुतेक शंकु संख्या ह्मणतात; **ड** कोष्टक **अ** कोष्टकांतील संख्यांचे वर्ग दाखवितो; ह्मणजे प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या; आणि **ई** कोष्टक या चोरस थरांची बेरीज अथवा चोरस राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो.

क	ख	अ	इ	ई
शंकु संख्या	त्रिकोण संख्या	मूळ अंक	मूळ अंकांचे वर्ग	या वर्गांची बेरीज
१	१	१	१	१
४	३	२	४	५
१०	६	३	९	१४
२०	१०	४	१६	३०
३५	१५	५	२५	५५
५६	२१	६	३६	९१
८४	२८	७	४९	१४०
१२०	३६	८	६४	२०४
१६५	४५	९	८१	२८५
२८६	६६	११	१२१	५०६
३६४	७८	१२	१४४	६५०
४५५	९१	१३	१६९	८१९
५६०	१०५	१४	१९६	१०१५
६८०	१२०	१५	२२५	१२४०
८१६	१३६	१६	२५६	१४९६
९६९	१५३	१७	२८९	१७८५
११४०	१७१	१८	३२४	२१०९
१३३०	१९०	१९	३६१	२४७०
१५४०	२१०	२०	४००	२८७०
१७७१	२३१	२१	४४१	३३११
२०२४	२५३	२२	४८४	३७९५
२३००	२७६	२३	५२९	४३२४
२६००	३००	२४	५७६	४९००
२९२५	३२५	२५	६२५	५५२५
३२७६	३५१	२६	६७६	६२०१
३६५४	३७८	२७	७२९	६९३०
४०६०	४०६	२८	७८४	७७१४
४४९५	४३५	२९	८४१	८५५५
४९६०	४६५	३०	९००	९४५५
५४५६	४९६	३१	९६१	१०४१६
५९८४	५२८	३२	१०२४	११४४०
६५४५	५६१	३३	१०८९	१२५२९
७१४०	५९५	३४	११५६	१३६८५
७७७०	६३०	३५	१२२५	१४९१०
८४३६	६६६	३६	१२९६	१६२०६
९१३९	७०३	३७	१३६९	१७५७५
९८८०	७४१	३८	१४४४	१९०१९
१०६६०	७८०	३९	१५२१	२०५४०
११४८०	८२०	४०	१६००	२२१४०

ह्मणून जर त्रिकोण राशींतील खालचे थराचे एके ओळींत १९ गोळे असतील, तर सर्व राशींतील गोळे १३३० होतील; आणि तसेच चौरस राशींतील गोळे २४७० होतील; या रीतीनें ही चौरस किंवा त्रिकोण राशींच्या संख्या सांगितल्या असतां स्वल्पानें खालचे थराचे ओळीची संख्या कळेल.

पूर्व कोष्टकापासून काटकोन चौकोन राशीची ही संख्या थोडक्यानें कळेल, ज्यांत लहान बाजूत ४० पेक्षां अधिक गोळे नसतील; तसे लहान आणि मोठी या बाजूंची वजा बाकी ४० पेक्षां अधिक नसेल जसें एक काटकोन चौकोन राशीचे लाहान बाजूत १५ आणि मोठे बाजूत २५ गोळे असतील; आरंभीं, चौकोन राशीची ह्मणजे कल्पनेनें जीपासून काटकोन चौकोन राशि जाली आहे; तिची संख्या कोष्टकांतून काढावी; ह्मणजे एक चौरस राशीची संख्या काढावी, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत १५ गोळे आहेत! ह्मणजे ही कोष्टकांत १२४० आहे. नंतर गणित त्रिकोणाचे खालचे ओळींत संख्या १५ आहे त्याचे समोरची त्रिकोण संख्या १२० यांस २० गुणावें; कारण, चौरसाचे बाहेर २० त्रिकोण आहेत. नंतर यांस चौरस राशीची संख्या मिळवावी, ह्मणजे १२०×२०+१२४०=२४००+१२४०=३६४०

ही सांगितले काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची इत्किली संख्या जाली.

दुसरी टीप.

पुढील बीजाचे सारणी कोष्टक कोणतेही राशींतील गोळ्यांची संख्या स्वल्प श्रमानें आणि त्वरेनें काढायास कामांत येतात.

त्रिकोण राशीचें गणित करा- यास हा सारिणी कोष्टक आहे. $\frac{(\text{न}+२)\times(\text{न}+१)\times\text{न}}{६}$

चौरस राशीचें गणित करा यास हा सारणी कोष्टक आहे. $\frac{(\text{न}+१)\times(२\text{न}+१)\times}{६}$

या प्रत्येकांत **न** अक्षर खालचे थराचे एक ओळीची संख्या दाखवितें! ह्मणजे जिचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत, त्या त्रिकोण राशीमध्यें सगळी संख्या हीच होईल.

$\frac{(३०+२)\times(३०+१)\times३०}{६}$ = ४९६० गोळे.

चौरस राशीमध्यें, जिचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत तिची संख्या हीच होईल. $\frac{(३०+१)\times(६०+१)\times३०}{६}$ =९४९५ गोळे.

काटकोन चौकोन राशीचा सारणी कोष्टक हा आहे, $\frac{(२\text{न}+१+३\text{म})\times(\text{न}+१)\times\text{न}}{६}$ ज्यांत न अक्षर थरांची संख्या

दाखवितें, आणि म अक्षर वरचे थराची एकोन संख्या दाखवितें, जसें, एक काटकोन चौकोन राशीमध्यें ३० थर आहेत, आणि वरचे थरांत ३१ गोळे आहेत.

$\frac{(६०+१+९०)\times(३०+१)\times३०}{६}=२३४०५$ गोळे.

तिसरी टीप.

एक उपयोगी रीति सुगम आहे, जिणें तीन प्रकारच्या पुऱ्या राशि ह्मणजे त्रिकोण राशि, चौरस राशि, आणि काटकोन चौकोन राशी, यांतील गोळ्यांची संख्या निघते. ह्मणून आरंभीं तिसरे आकृतीवर लक्ष्य ठेऊन कर, तेव्हां.

(**बड**+**अ**+**क**) × $\frac{१}{६}$ **बडक** = त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या.

(**ईफ**+**ईफ**+**ग**) × $\frac{१}{६}$ **गफह** = चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या.

(**बफ**+**बफ**+**अई**) × $\frac{१}{६}$ **अबक** = काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या.

यांतून एक सामान्य रीति निघते, पायाचे बाजूचे एके ओळींत जी गोळ्यांची संख्या आहे ती, आणि तिशी समांतर दुसरेकडील बाजूचे ओळींतील संख्या, (ती एक किंवा अनेक असतील) आणि पायाशीं समांतर रा

शिशिर ओळींतील संख्या, अशा या तीनसंख्या एकत्र मिळवून ती बेरीज राशीचे तिर्कस बाजूंतील गोळ्यांचे संख्येचे एक तृतीयांशानें गुणावी, तो गुणाकार राशींतील इच्छिली संख्या होईल.

भूमिति प्रमाण आणि श्रेढी.

भूमिति प्रमाण ह्मणजे एकपद दुसरे पदाचा काय भाग आहे, अथवा काय गुणक आहे; अथवा एकपद दुसरे पदांत किती वेळां जातें, असा विचार करतां पदसंबंधि आहे.— परस्पर मिळविले दोन पदांतील प्रथमपदास अग्रसर ह्मणतात, आणि दुसरे पदास उपाग्रसर. त्याचें गुणोत्तर ह्मणजे भागाकार आहे. जें एक दुसऱ्यानें भागून उत्पन्न होतो.

चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत, जेव्हां दोन युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे, अथवा जेव्हां प्रथम पद दुसरे पदाचा भाजक किंवा गुणक आहे, तसाच तिसरें चौथ्याचा. जसें ३, ६, ४, ८ आणि **अ**, **अर**, **ब**, **बर**, हीं भूमिति प्रमाणांत आहेत.

कारण $\frac{६}{३} = \frac{८}{४} = २$ आणि $\frac{अर}{अ} = \frac{बर}{ब} = र$, आणि

त्यांस यारीतीनें लिहितात.जसें, २:६::४:८, इत्यादि अंक गणितामध्यें पाहा.

भूमिति श्रेढी तीच होय जींतील सर्वपदांचें गुणोत्तर अनुक्रमानें एकच आहे. जसें, १, २, ४, ८, १६ इत्यादि ज्यांत गुणोत्तर २ आहेत.

भूमितिश्रेढीचा साधारण गुण हाच आहे कीं, कोणते ही दोन पदांचा गुणाकार, अथवा कोणते ही एकपदाचा वर्ग, प्रत्येक दोन पदांचे गुणाकारा बराबर आहे. जीं दोन पदें त्यांपासून बराबर अंतरानें दोहोंकडून घेतलीं आहेत, ह्मणजे जसें या पदांतील. १, २, ४, ८, १६. ३२, ६४ इत्यादि १×६४=२×३२=४×१६=८×८=६४

कोणतेही भूमिति श्रेढींतील जर

अ, अति लाहान पद दाखवितो.
ल, अति मोठें पद ————
र, गुणोत्तर ————
न. गछ ————
स, सर्वधन ————

तेव्हां या पदांतील कोणतेही एकपदाची किंमत दुसरे पदांचे किमती पासून निघेल. या पुढील सामान्य समीकरणावरून

पुढील कोणतींही रूपें परस्पर प्रमाणांत होतील.

१ समरीतीनें **अ:अर::ब:बर,** अथवा

२: ६: : ४: १२,

२ व्यस्त —— **अर:अ: : बर:ब,** ——

६: २: : १२:४,

३ परावर्त — **अ:ब: : अर:बर,** ——

२: ४: : ६: १२,

४ संयुक्त —— **अ:अ+अर: : ब:ब+बर,** ——

२: ८: : ४ :१६

५ वियुक्त —— **अ:अर−अ: : ब:बर−ब,** ——

२: ४: :४: ८

६ मिश्र —— **अर+अ:अर−अ: : बर+ब:बर −ब,** ८: ४: : १६: ८

७ गुणाकार — **अक:अरक::ब:बर.** ——

२×३:६×३: : ४: १२,

८. भागाकार $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$: $\frac{\text{अर}}{\text{क}}$: : **ब : बर.** ——

१ : ३: : ४: १२,

९ **अ. ब, क, ड,** हीं च्यार पदें समस्वर प्रमाणांत आहेत. जेव्हां **अ : ड : : अ ∽ ब : क ∽ ड.** अथवा जेव्हां तीं व्युत्क्रम पदें, अे, बे, कै, डे, गणित प्रमाणांत आहेत.

१, $र = (\frac{इ}{अ})$

२, $इ = अ \times र^{न-1}$

३, $अ = \frac{इ}{र^{न-1}}$

४, $न = \frac{ला\cdot\frac{रइ}{अ}}{ला\cdot र} = \frac{ला\cdot र + ला\cdot इ - ला\cdot अ}{ला\cdot र}$

५, $स = \frac{र^{न}-1}{र-1} \times अ = \frac{र^{न}-1}{र-1} \times \frac{इ}{र^{न-1}}, - \frac{र इ अ}{र-1}$

जेव्हां श्रेणी अनंत आहे, तेव्हां अतिलाहानपद **अ** शून्य आहे, आणि सर्वधन **स** $= \frac{रइ}{र-1}$ होतें.

कोणतेही चढते भूमिति श्रेणीमध्यें अथवा कोणतेही श्रेढीमध्यें ज्याचा आरंभ १ पासून होतो, तर तिसरें. पांचवें, सातवें इत्यादि पदें वर्ग होतील. चवथें, सातवें, दाहावें इत्यादिपदें घन होतील; आणि सातवें वर्ग आणि घनही होईल. जसें या श्रेणींत १, र, $र^{२}$, $र^{३}$, $र^{४}$, $र^{५}$, $र^{६}$, $र^{७}$, $र^{८}$, $र^{९}$ इत्यादि, $र^{२}$, $र^{४}$, $र^{६}$, $र^{८}$, हे वर्ग आहेत; $र^{३}$, $र^{६}$, $र^{९}$, हे घन आहेत; आणि $र^{६}$ हा वर्ग आणि घन ही आहे.

उतरती श्रेढीमध्यें गुणोत्तर **र** अपूर्ण आहे, आणि तेव्हां **स** $= \frac{1-र^{न}}{1-र}$ **अ**.

जर **न** अनंत असेल, तर **स** $= \frac{अ}{1-र}$ यांत **अ** प्रधन पद दाखवितो.

जेव्हां चारपदें प्रमाणांत आहेत. जसें, **अ**, **अ र**, **ब**, **ब र**, अथवा. २, ६, ४, १२, तेव्हां त्या पदांची

उदाहरणें.

पहिलें, एक भूमिति श्रेढीचें प्रथम पद १ आहे, गुणोतर २, आणि गछ १२, इचें सर्व धन काय होईल?

आतां $१\times२^{११}=१\times२०४८$ हें अति मोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{२०४८\times२-१}{२-१}=\frac{४०९६-१}{१}=४०९५$ हें इछिलें सर्व धन.

दुसरें, एक भूमिति श्रेढीचें प्रथम पद $\frac{१}{३}$ आहे, गुणोत्तर $\frac{१}{२}$, आणि गछ ८, तिचें सर्व धन काय होईल?

आतां $\frac{१}{३}\times\left(\frac{१}{२}\right)^{७}=\frac{१}{३}\times\frac{१}{१२८}=\frac{१}{३८४}$ हें अति मोठें पद,

तेव्हां $\left(\frac{१}{३}-\frac{१}{३८४}\times\frac{१}{२}\right)\div\left(१-\frac{१}{२}\right)=\left(\frac{१}{३}-\frac{१}{७६८}\right)\div\frac{१}{२}=$ $\frac{२५५}{७६८}\times\frac{२}{१}=\frac{२५५}{३८४}$ हें इछिलें सर्व धन.

तिसरें, १, २, ४, ८, १६, ३२ इत्यादि गछ २०, याचें सर्व धन काय?

उत्तर, १०४८५७५

चवथें, १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{१}{१६}$, $\frac{१}{३२}$ इत्यादि गछ ८, याचें सर्व धन काय?

उत्तर, $१\frac{१२७}{१२८}$

पांचवें, १, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{९}$, $\frac{१}{२७}$, $\frac{१}{८१}$ इत्यादि गछ १०, याचें सर्व धन काय?

उत्तर, $१\frac{९८४१}{१९६८३}$

साहावें, १, २, ४, ८, १६, ३२ इत्यादि गछ १०० याचें सर्व धनकाय?

उत्तर, १२६७६५०६००२२८२२९४०१४९६७०३२०५३७५

सातवें, कोणा एक मनुष्याजवळ बहुत चांगला एक घोडा होता, तो कोणी होशी मनुष्यानें पाहून विकत मागितला. तेव्हां त्याणें आपली प्रतिज्ञा सांगितली कीं, याचे चार नाल मिळून चुका ३२ आहेत, त्यास प्रथमचुकेस रेस ५ पुढें एकेक चुकेस त्याचे त्याचे दुपटीनें वाढते, याचे रुपये जे होतील ते जो देईल त्यास घोडा मिळेल ह्मणून, त्या प्रमाणें त्या होशीस तो घोडा घेणें तर किती रुपये द्यावे लागतील?

रु. पा. रे.

उत्तर, ५३६८७०९१ … ० … ७५

अनंतश्रेणी.

ही अनंत श्रेणी, ज्यांत संयुक्तपद भाजक आहे, अशा भागाकारा पासून आणि संयुक्त करणी पदाचें मूळ काढिल्या पासून उत्पन्न होतें. अथवा दुसरें कांहीं सामान्यरीतीनें. आणि ती कितीही वाढविली तरी अं

त पावत नाहीं. जसें अपूर्णांकगणितांत दशांश*

परंतु किती एक पदें प्रथम उत्पन्न करून, श्रेणीचा मार्ग प्रकट होईल, आणि तपशिलाचा श्रम केल्यावांचून अशारीतीनें श्रेणी पुढें चालवितां येईल.

प्रथमकृत्य.

अपूर्ण पदांस भागाकारानें अनंत श्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

रीति.

भागाकाररीतीनें अंशछेदांनीं भागावे; आणि हें भागाकारकृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावें, ह्मणजे इच्छिली अनंतश्रेणी उत्पन्न होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{२\text{अब}}{\text{अ}+\text{ब}}$ यास अनंत श्रेणीचें रूप दे.

$$\text{अ}+\text{ब})\ २\text{अब}\ (२\text{ब}-\frac{२\text{ब}^२}{\text{अ}}+\frac{२\text{ब}^३}{\text{अ}^२}-\frac{२\text{ब}^४}{\text{अ}^३}+\text{इत्यादि.}$$

---

* या अनंत श्रेणीची रीति डाकतर वालिस साहेब यांहीं प्रथम कामांत आणिली आणि सन १६५७ इसवीमध्यें त्याणीं गणित पुस्तकें छापिलीं त्यांत $\frac{\text{अ}}{१-\text{र}}$ हें अपूर्णबीज चालते भागाकारानें भागतां भागतां ही अनंत श्रेणी रीति उत्पन्न केली. $\text{अ}+\text{अर}+\text{अर}^२+\text{अर}^३+\text{अर}^४+$ इत्यादि

$$\underline{२अब + २ब^२}$$

$$-२ब^२$$

$$\underline{-२ब^२ - \frac{२ब^३}{अ}}$$

$$+\frac{२ब^३}{अ}$$

$$\underline{+\frac{२ब^३}{अ} + \frac{२ब^४}{अ^२}}$$

$$-\frac{२ब^४}{अ^२}$$

$$\underline{-\frac{२ब^४}{अ^२} - \frac{२ब^५}{अ^३}}$$

$$+\frac{२ब^५}{अ^३}$$ इत्यादि.

दुसरें, $\frac{१}{१-अ}$ यास अनंत श्रेणीचें रूप दे.

$$१ - अ) १ (१ + अ + अ^२ + अ^३ + अ^४ + \text{इत्या॰}$$

$$\underline{१ - अ}$$

$$+ अ$$

$$\underline{+ अ - अ^२}$$

$$+ अ^२$$

$$\underline{+ अ^२ - अ^३}$$

$$+अ^{२}$$
$$+अ^{२}-अ^{४}$$
$$\overline{+अ^{४}}\ \text{इत्यादि}$$

तिसरें. $\frac{ब}{अ+क}$ यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{ब}{अ}\times(१-\frac{क}{अ}+\frac{क^{२}}{अ^{२}}-\frac{क^{३}}{अ^{३}}+$ इत्यादि $)$.

चौथें, $\frac{अ}{अ-ब}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१+\frac{ब}{अ}+\frac{ब^{२}}{अ^{२}}+\frac{ब^{३}}{अ^{३}}+$ इत्यादि.

पांचवें, $\frac{१-क्ष}{१+क्ष}$ यास अनंत श्रेणींतवाढीव.

उत्तर, $१-२क्ष+२क्ष^{२}-२क्ष^{३}+२क्ष^{४}-$ इत्यादि.

साहावें, $\frac{अ^{२}}{(अ+ब)^{२}}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१-\frac{२ब}{अ}+\frac{३ब^{२}}{अ^{२}}-\frac{४ब^{३}}{अ^{३}}+$ इत्यादि.

सातवें, $\frac{१}{१+१}=२$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

दुसरें कृत्य.

संयुक्त करणी पदास अनंत श्रेणीचें रूप द्याव याचें.

रीति.

गणितरीतीनें त्याचें मूळ काढावें, आणि हें मूळक्रत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावें, ह्मणजे इच्छिली अनंतश्रेणी उत्पन्न होईल; परंतु ही रीति वर्ग मूळ काढायास उ

पयोगी आहे. याहून मोठे घाताचें मूळ काढायास बहुत श्रम पडतो.

उदाहरणें.

पहिलें, $\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2$ याचें अनंत श्रेणींत मूळ काढ.

$$\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2 \,(\text{अ} - \frac{\text{क्ष}^2}{२\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^4}{८\text{अ}^3} - \frac{\text{क्ष}^6}{१६\text{अ}^5} - \frac{५\text{क्ष}^8}{१२८\text{अ}^7} \text{ इत्यादि.}$$

$$२\text{अ} - \frac{\text{क्ष}^2}{२\text{अ}} \qquad -\text{अ}^2$$

$$)-\text{क्ष}^2$$

$$-\text{क्ष}^2 + \frac{\text{क्ष}^4}{४\text{अ}^2}$$

$$२\text{अ} - \frac{\text{क्ष}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^4}{८\text{अ}^3} \qquad)-\frac{\text{क्ष}^4}{४\text{अ}^2}$$

$$-\frac{\text{क्ष}^4}{४\text{अ}^2} + \frac{\text{क्ष}^6}{८\text{अ}^4} + \frac{\text{क्ष}^8}{६४\text{अ}^6}$$

$$२\text{अ} - \frac{\text{क्ष}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^4}{४\text{अ}^3} - \frac{\text{क्ष}^6}{१६\text{अ}^5} \qquad)-\frac{\text{क्ष}^6}{८\text{अ}^4} - \frac{\text{क्ष}^8}{६४\text{अ}^6}$$

$$-\frac{\text{क्ष}^6}{८\text{अ}^4} + \frac{\text{क्ष}^8}{१६\text{अ}^6} + \frac{\text{क्ष}^{10}}{६४\text{अ}^8} + \frac{\text{क्ष}^{12}}{२५६\text{अ}^{10}}$$

$$-\frac{५\text{क्ष}^8}{६४\text{अ}^6} \text{ इत्या.}$$

दुसरें, $\sqrt{१+१} = \sqrt{२}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{१}{२} - \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} - \frac{५}{१२८}$ इत्यादि.

तिसरें, $\sqrt{१-१}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ - \frac{१}{२} - \frac{१}{८} - \frac{१}{१६} - \frac{५}{१२८}$ इत्यादि.

चौथें. $\sqrt{\text{अ}^2 + \text{क्ष}}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

पांचवें, $\sqrt{\text{अ}^{२}-\text{२बक्ष}-\text{क्ष}^{२}}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

तिसरें कृत्य.

कोणतेंही द्वियुक्पदाचें मूळ काढायाचें, अथवा द्वियुक्पदकरणीस अनंत श्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

हें कृत्य पुढील सारणी कोष्टका पासून होतें, असें कीं, त्यांतील अक्षरांचे स्थानीं द्वियुक्पदाचीं अक्षरें ठेविल्यानें ह्मणजे.

$$(\text{प}+\text{पक})^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}=\text{प}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}+\frac{\text{म}}{\text{न}}\text{अक}+\frac{\text{म}-\text{न}}{\text{२न}}\text{बक}+\frac{\text{म}-\text{२न}}{\text{३न}}\text{कक}+\text{इत्यादि}.$$

प, प्रथम पद दाखवितो.

क, दुसरें पद प्रथमानें भागिलें तें दाखवितो.

$\frac{\text{म}}{\text{न}}$, घात किंवा मूळ याचा प्रकाशक दाखवितो.

अ, ब, क, ड इत्यादि अक्षरें त्यांचे त्यांचे पूर्वींचीं पदें दाखवितात.

उदाहरणें.

पहिलें, $\text{अ}^{२}+\text{ब}^{२}$ याचें वर्गमूळ अनंत श्रेणींत काढ.

एथें $प = अ^{२}$, $क = \frac{ब}{अ^{२}}$, $\frac{म}{न} = \frac{१}{२}$! याजकरितां
$प^{\frac{म}{न}} = (अ^{२})^{\frac{१}{२}} = अ = अ$ हें श्रेणीचें प्रथम पद.

$\frac{म}{न} अ क = \frac{१}{२} × अ × \frac{ब}{अ^{२}} = \frac{ब}{२अ} = ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद.

$\frac{म-न}{२न} ब क = \frac{१-२}{४} × \frac{ब}{२अ} × \frac{क}{अ} = -\frac{ब^{२}}{२·४अ^{३}} = क$ हें श्रेणीचें तिसरें पद.

$\frac{म-२न}{३न} क क = \frac{१-४}{६} × -\frac{ब^{२}}{२·४अ^{३}} × \frac{ब}{अ^{२}} = \frac{३ब^{३}}{२·४·६अ^{५}} = ड$ हें श्रेणीचें चोथें पद आहे.

याजकरितां $अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब^{२}}{२·४अ^{३}} + \frac{३ब^{३}}{२·४·६अ^{५}} -$ इत्यादि.

अथवा, $अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब^{२}}{८अ^{३}} + \frac{ब^{३}}{१६अ^{५}} - \frac{५ब^{४}}{१२८अ^{७}} +$ इत्यादि. इछिली श्रेणी, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{१}{(अ-क्ष)^{२}}$ अथवा त्याचे बरोबर किमतीचे $(अ-क्ष)^{-२}$* याची अनंत श्रेणींत किमत काढ.

एथें $प = अ$, $क = -\frac{क्ष}{अ}$, $\frac{म}{न} = \frac{-२}{१} = -२$; याजकरितां
$प^{\frac{म}{न}} = अ^{-२} = \frac{१}{अ^{२}} = अ$, हें श्रेणीचें प्रथम पद.

---

* ही रीति अपूर्ण बीजावर लावायास पुढें सांगतों, त्या प्रकारें सुगम करावी. तो प्रकार, आधीं हें समजायास योग्य कीं, कोणतीही करणी छेदस्थळांतून अंशस्थळीं आणणें अथवा अंशस्थळांतून छेदस्थळीं नेणें हें तिचें प्रकाशक चिन्ह बदल करून शक्य आहे. जसें, $\frac{१}{क्ष^{२}} = १ × क्ष^{-२}$ अथवा $क्ष^{-२}$, इतकें मात्र; आणि $\frac{१}{(अ+ब)^{२}} = १ × (अ+ब)^{-२}$ अथवा $(अ+ब)^{-२}$ इतकें मात्र; आणि $\frac{अ^{२}}{(अ+क्ष)^{२}} = अ^{२}(अ+क्ष)^{-२}$; आणि $\frac{क्ष^{\frac{१}{२}}}{क्ष^{\frac{१}{३}}} = क्ष^{\frac{१}{२}} × क्ष^{-\frac{१}{३}}$; आणि $\frac{(अ^{२}+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}}{(अ^{२}-क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}} = (अ^{२}+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}} × (अ^{२}-क्ष^{२})^{-\frac{१}{२}}$ इत्यादि.

$\frac{म}{न}$ अक $= -२ \times \frac{१}{अ^{२}} \times -\frac{क्ष}{अ} = \frac{२क्ष}{अ^{३}} = २\overline{अ}^{३}क्ष = ब$
हें श्रेणीचें दुसरें पद.

$\frac{म-न}{२न}$ बक $= -\frac{३}{२} \times \frac{२क्ष}{अ^{३}} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{३क्ष^{२}}{अ^{४}} = ३\overline{अ}^{४}क्ष^{२} = क$
हें श्रेणीचें तिसरें पद.

$\frac{म-२न}{३न}$ कक $= -\frac{४}{३} \times \frac{३क्ष^{२}}{अ^{४}} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{४क्ष^{३}}{अ^{५}} = ४\overline{अ}^{५}क्ष^{३}$
$=$ ड हें श्रेणीचें चौथें पद.

तेव्हां $\overline{अ}^{२} + २\overline{अ}^{३}क्ष + ३\overline{अ}^{४}क्ष^{२} + ४\overline{अ}^{५}क्ष^{३} +$ इत्यादि.
अथवा, $\frac{१}{अ^{२}} + \frac{२क्ष}{अ^{३}} + \frac{३क्ष^{२}}{अ^{४}} + \frac{४क्ष^{३}}{अ^{५}} + \frac{५क्ष^{४}}{अ^{६}}$ इत्यादि इच्छिली श्रेणी हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{अ^{२}}{अ-क्ष}$ यांची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ + क्ष + \frac{क्ष^{२}}{अ} + \frac{क्ष^{३}}{अ^{२}} + \frac{क्ष^{४}}{अ^{३}} + \frac{क्ष^{५}}{अ^{४}}$ इत्यादि.

चौथें, $\frac{१}{\sqrt{अ^{२}+क्ष^{२}}}$ अथवा $\frac{१}{(अ^{२}+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}}$ याची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $\frac{१}{अ} - \frac{क्ष^{२}}{२अ^{३}} + \frac{३क्ष^{४}}{८अ^{५}} - \frac{५क्ष^{६}}{१६अ^{७}}$ इत्यादि.

पांचवें, $\frac{अ^{२}}{(अ-ब)^{२}}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{२ब}{अ} + \frac{३ब^{२}}{अ^{२}} + \frac{४ब^{३}}{अ^{३}} + \frac{५ब^{४}}{अ^{४}} +$ इत्यादि.

साहावें, $\sqrt{अ^{२}-क्ष^{२}}$ अथवा $(अ^{२}-क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $अ - \frac{क्ष^{२}}{२अ} - \frac{क्ष^{४}}{८अ^{३}} - \frac{क्ष^{६}}{१६अ^{५}} - \frac{५क्ष^{८}}{१२८अ^{७}}$ इत्यादि.

सातवें, $\sqrt[३]{(अ^{३}-ब^{३})}$ अथवा $(अ^{३}-ब^{३})^{\frac{१}{३}}$ याची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ - \frac{ब^३}{३अ^२} - \frac{ब^६}{९अ^५} - \frac{५ब^९}{८१अ^८} -$ इत्यादि.

आठवें, $\sqrt[५]{(अ^५ + क्ष)}$ अथवा $(अ^५ + क्ष)^{\frac{१}{५}}$ याची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ + \frac{क्ष}{५अ^४} + \frac{२क्ष^२}{२५अ^९} + \frac{६क्ष^३}{१२५अ^{१४}} +$ इत्यादि.

नववें, $\frac{अ + ब}{अ - ब}$ याचें वर्गमूळ अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $१ - \frac{ब}{अ} + \frac{ब^२}{२अ^२} - \frac{ब^३}{२अ^३}$, इत्यादि.

दाहावें, $\frac{अ^३}{अ^३ + ब^३}$ याचें घनमूळ अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $१ - \frac{ब^३}{३अ^३} + \frac{२ब^६}{९अ^६} - \frac{१४ब^९}{८१अ^९}$ इत्यादि.

अनंतश्रेणी दुसरा भाग.

प्रथमकृत्य.*

सांगितले श्रेणीचे पदांचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा करायाचें.

रीति.

१ प्रथम पद दुसऱ्यांतून वजा करावें, तसें

---

* एकवर्ण समीकरण आणि वर्गसमीकरण हीं शिकल्यानंतर हें शिकावें हें बरें आहे.

दुसरें तिसऱ्यांतून, तिसरें चौथ्यांतून, या प्रमाणें पुढें ही; या वाक्यांपासून एक नवी श्रेणी उत्पन्न होईल. जीस वाक्यांची प्रथम परंपरा ह्मणतात.

२ या नवे श्रेणींतील प्रथमपद दुसऱ्यांतून वजा करावें, दुसरें तिसऱ्यांतून, या प्रमाणें पूर्ववत् करावें; ह्मणजे या वाक्यांपासून एक दुसरी श्रेणी उत्पन्न होईल, तीस वाक्यांची दुसरी परंपरा ह्मणतात.

३ याप्रमाणें पुढें तिसरी चौथी पांचवी इत्यादि वाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढाव्या, बाकी होई पर्यंत, अथवा प्रयोजन आहे पर्यंत.

उदाहरणें.

पहिलें, १ , ४ , ८ , १३ , १९ . २६ इत्यादि. या श्रेणीचे वजा वाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

आतां १ , ४ , ८ , १३ , १९ , २६ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां ३ , ४ , ५ , ६ , ७ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १ ; १ , १ , १ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ० . ० . ० इत्यादि ति

सरी परंपरा.

ह्मणजे स्पष्ट आहे कीं, याजवर कान स्तब्ध जालें.

दुसरें, १ . ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि या श्रेणीचे वजा बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

आतां १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां २ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १ . ४ , ८ , १६ , ३२ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि २ , ४ , ८ , १६ इत्यादि तिसरी परंपरा.

आणि १ , ४ , ८ इत्यादि चौथी परंपरा.

आणि ३ , ४ इत्यादि पांचवी परंपरा.

आणि १ इत्यादि साहावी परंपरा.

तिसरें, १ , २ , ३ , ४ इत्यादि या श्रेणीचे वजा बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर, { प्रथमपरंपरा १, १, १, १ इत्यादि.
दुसरीपरंपरा ०, ०, ० इत्यादि.

चौथें, १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि या वर्गांपासून जाले श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर, { प्रथम परंपरा ३, ५, ७, ९ इत्यादि.
दुसरी परंपरा २, २, २ इत्यादि.
तिसरी परंपरा ०, ० इत्यादि.

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि या घनांपासून जाले श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या परंपरा काढ.

साहावें, १, ६, २०, ५०, १०५ इत्यादि या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या परंपरा काढ.

दुसरें कृत्य.

सांगितले श्रेणीचें कोणतेंही पद काढायाचें.

रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई, इत्यादि सांगितली श्रेणी असावी. आणि ड', ड'', ड''', ड''''; इत्या

दि, हीं अक्षर चिन्हें पूर्वरीती प्रमाणें कादिलें वाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदें अनुक्रमें दाखवायास असावीं, आणि न अक्षर चिन्ह इछिलें पदाचें स्थळ दाखवायास असावें.

२ तेव्हां $\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१}\circ\text{ड} + \frac{\text{न}-१}{१}\circ\frac{\text{न}-२}{२}\circ\text{ड}' + \frac{\text{न}-१}{१}\circ\frac{\text{न}-२}{२}\circ\frac{\text{न}-३}{३}\,\text{ड}'' + \frac{\text{न}-१}{१}\circ\frac{\text{न}-२}{२}\circ\frac{\text{न}-३}{३}\circ\frac{\text{न}-४}{४}\circ\text{ड}''' + \text{इत्यादि} = \text{न}$ इछिलें पद.

उदाहरणं.

पहिलें, २, ५, ९, १४, २० इत्यादि या श्रेणीचें दाहावें पद काढ.

आतां २, ५, ९, १४, २० इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां ३, ४, ५, ६ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि. १, १, १ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

यांत $\text{ड} = ३$, $\text{ड}' = १$, $\text{ड}'' = ०$ आणि $\text{अ} = २$, न

=१० याजकरितां $\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \text{डे} + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \text{डै} = २ + \frac{१०-१}{१} \cdot ३ + \frac{१०-१}{१} \cdot \frac{१०-२}{२} \times १ = २ + २७ + ३६ = ६५$ इछिलें दाहावें पद हें उत्तर.

दुसरें, २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि, या श्रेणींचें विसावें पद काढ.

आतां २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां ४, ६, ८, १० इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि २, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

यांत डे = ४, डै = २, आणि अ = २, न = २०

याजकरितां. $\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१} \circ \text{डे} + \frac{\text{न}-१}{१} \circ \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \text{डै} = २ + \frac{१९}{१} \circ ४ + \frac{१९}{१} \circ \frac{१८}{२} \circ २ = २ + ७६ + ३४२ = ४२०$ इछिलें विसावें पद आहे हें उत्तर.

तिसरें. १, ३, ६, १० इत्यादि. या श्रेणीचें पांचवें पद काय आहे?

उत्तर. १५

चौथें, १, ४, ८, १२, १९ इत्यादि, या श्रे

णीचें दाहावें पद काय आहे?

उत्तर, ६४

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि. याश्रेणीचें विसावें पद काढ.

उत्तर, ८००

तिसरें कृत्य.

जर सांगितले श्रेणीचीं पदें एकमचे अंतरानें असतील तर मध्यस्थापनापासून कोणतें ही आंतलें पद काढायावें.

रीति.

१ स्थापन करायाचें पद दाखवायाकरितां य अक्षर घ्यावें. श्रेणीचे आरंभापासून त्या पदा पर्यंत अंतर दाखवायास क्ष घ्यावें. आणि ड' ड'' ड''' ड'''' हीं बाक्यांचे परंपरांची प्रथम पदें दाखवायास असावीं.

२ तेव्हां $\text{अ} + \text{क्षड} + \text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-1}{2}\cdot\text{ड}'' + \text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-1}{2}\cdot\frac{\text{क्ष}-2}{3}\cdot\text{ड}''' + \text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-1}{2}\cdot\frac{\text{क्ष}-2}{3}\cdot\frac{\text{क्ष}-3}{4}\cdot\text{ड}'''' + \text{इत्यादि} = \text{य}$ इछिलें पद होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, ३°„४', ३°„५', ३°„६', ३°„७' आणि ३°„८' यांची लागरतंम भुजज्या सांगितली आहे यापासून ३°„६'„१५" यांची लागरतंम भुजज्या काढ.

श्रेणी	लागरतंम	प्रथ॰परंपरा	दु॰परं॰	ति॰प॰
३°„४'	८·७२८३३६६			
		२३५१६		
३„५	८·७३०६८८२		−१२६	
		२३३९०		१
३„६	८·७३३०२७२		−१२७	
		२३२६३		४
३„७	८·७३५,३५,३५		−१२३	
		२३१४०		
३„८	८·७३७६६७५			

इथें क्ष = (३°„६'„१५" − ३°„४' = २'„१५") = $\frac{९}{४}$ = य पदाचे स्थापनाचें अंतर; अ = ८·७२८३३६६, इ = २३५१६, इ'' = −१२६, आणि इ''' = १, आणि य = अ + क्षइ + क्ष॰$\frac{क्ष-१}{२}$॰इ'' + क्ष॰$\frac{क्ष-१}{२}$॰$\frac{क्ष-२}{३}$॰इ''' = (अ + $\frac{९}{४}$इ + $\frac{४५}{३२}$इ'' + $\frac{१५}{१२८}$इ''') = ८·७२८३३६६ + ·००५२९११ − ·००००१७७१८७५ + ·००००००००११७ = ८·७३३६०९९९२९६ इछिली लागरतंम भुजज्या आहे.

दुसरें, ९०, ९१, ९२, ९३, ९४ ही सांगितली श्रे-

णी आहे; $\frac{१}{९२}$ आणि $\frac{१}{९३}$ या दोन पदांचे मधील पद काढ.

उत्तर, $\frac{१}{९·५}$

तिसरें, १„ ०, १„ १, १„ २ आणि १„ ३ यांची लागरतम भुजज्या सांगितली आहे, आणि १°„ १′ ४०″ यांची लागरतम भुजज्या इछिली आहे,

उत्तर, ८·२५३७५३३

चौथें कृत्य.

मध्यस्थापनानें कोणतेंही मधील पद काढायाचें, जेंव्हां बरोबर अंतराचे श्रेणीच्या प्रथम वाक्या लघु आहेत.

रीति.

१ अ, ब, क, ड, इ, फ इत्यादि अक्षरचिन्हें सांगितली श्रेणी दाखवायास घ्यावीं, आणि न = सांगितले पदांची संख्या.

२ तेव्हां $अ - नब + न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot क - न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}\cdot ड + न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}\cdot\frac{न-३}{४}\cdot ई -$ इत्यादि $= ०$ यापा

सून स्थळांतर आणि पृथक्करण करून कोणतें ही पद उत्पन्न होईल.

उदाहरण.

पहिलें, १०, ११, १२, १३ आणि १५ यांचीं वर्गमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इच्छिलें आहे कीं, चौदाचें वर्गमूळ काढावें.

एथें **न** = ५, आणि **ई** = इच्छिलें पद.

अ = √१० = ३.१६२२७७६

ब = √११ = ३.३१६६२४८

क = √१२ = ३.४६४१०१६

ड = √१३ = ३.६०५५५१२

फ = √१५ = ३.८७२९८३२

आणि यास्तव **न** = ५, आतां श्रेणी ६ पदें पावेतां वाढविली पाहिजे, याजकरितां **अ** − **न ब** + **न** $\frac{न-१}{२}$. **क** − **न** · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ · **ड** + **न** · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ · $\frac{न-३}{४}$ · **ई** − **न** · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ · $\frac{न-३}{४}$ · $\frac{न-४}{५}$ · **फ** = ० नंतर **ई** ची किंमत काढाया करितां स्थळांतरानें हें उत्पन्न होतें. **न** · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ · $\frac{न-३}{४}$ · **ई** = − **अ** + **नब** − **न** · $\frac{न-१}{२}$ · **क** + **न** · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ **ड** + **न** · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ · $\frac{न-३}{४}$ · $\frac{न-४}{५}$ · **फ**, या समीकरणास संख्येंत हें रूप होतें. ५ **ई** = − ३.१६२२७७६

$+(५ \times ३·३१६६२४८) - (१० \times ३·४६४१०१६) + (१० \times ३·६०५५५१२) + ३·८७२९८३३ = ५५·५११६१९३ - ३७·८०३२९३६ = १८·७०८३२५७$, आणि $ई = \frac{१८·७०८३२५७}{५} = ३·७४१६६५१४$ इच्छिलें मूळ जवळ जवळ, हें उत्तर.

दुसरें, ३७, ३८, ३९, ४१ आणि ४२ यांचीं वर्गमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इच्छिलें आहे कीं, चाळिसांचें वर्गमूळ काढावें.

उत्तर, ६·३२४५५५३२

तिसरें, ४५, ४६, ४७, ४८ आणि ४९ यांचीं घनमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इच्छिलें आहे कीं ५०चें घनमूळ काढावें.

उत्तर, ३·६८४०३२

पांचवें कृत्य.

सांगितले श्रेणीस फिरवायाचें.

जेव्हां कोणते एक श्रेणीचे पदामध्यें अव्यक्त पदाचे घात आहेत. या अव्यक्त पदाचे किमतीचा शोध. दुसरे श्रेणींतील पदां पासून होतो, ज्या श्रेणींत सांगितले श्रेणी पदांचे बरोबरीचे घात आणि व्यक्त

पदें तींच असावीं.

रीति.

१ अव्यक्त पदाची किंमत दाखवायाकरितां एक श्रेणी घे, अशी कीं, तिचें रूप फिरवायाचे सांगितले श्रेणीचे रूपाचें होईल.

२ ही श्रेणी आणि इचे घात सांगितले श्रेणीचीं अव्यक्त पदें आणि घात यांचे स्थळीं ठेवावीं.

३ उत्पन्न जालेलीं तीं पदें सांगितले श्रेणीतील त्या त्या प्रतियोगी पदांचे बरोबर करावीं, ह्मणजे घेतले वेळा प्रकाशकाची किंमत उत्पन्न होते.

उदाहरणें.

पहिलें, **अक्ष** + **बक्ष**^{२} + **कक्ष**^{३} + **डक्ष**^{४} + इत्यादि = **झ** ही सांगितली श्रेणी असावी. यांतील **क्ष** ची किंमत **झ** पदांत आणि व्यक्तपदांत काढावी.

आतां **झ**^{न} = **क्ष** घे, तेव्हां स्पष्ट आहे कीं, जर **झ**^{न} आणि त्याचे हे घात सांगितले श्रेणीमध्यें **क्ष** आणि त्याचे घात यांचे स्थळीं ठेविले तर **झ** चे घात प्रकाशक हे होतील, **न**, २**न**, ३**न**, ४**न** इत्यादि, आणि १, याजकरितां **न** = १ आणि या घात प्रकाशकांच्या वजावा

क्या या आहेत. ०, १. २; ३; ४ इत्यादि. ह्मणजे या कारणास्तव घ्यावयाचे श्रेणीचे घातप्रकाशकांच्याही वजावाक्या अशाच असाव्या; ह्मणून घेतली श्रेणी हीच असावी, $\text{अज्ञ} + \text{बज्ञ}^{२} + \text{कज्ञ}^{३} + \text{डज्ञ}^{४} + \text{इत्यादि} = \text{क्ष}$, आणि जर ही श्रेणी वर्गादिकें करून वाढविली आणि क्ष चे वेगळाले वर्गादि घातस्थळीं ठेविली, तर सांगितले श्रेणीस हें रूप होईल.

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{अ अज्ञ} + & \text{अबज्ञ}^{२} + & \text{अकज्ञ}^{३} + & \text{अडज्ञ}^{४} + & \text{इत्यादि.} \\ * & + \text{बअ}^{२}\text{ज्ञ}^{२} + & \text{२बअबज्ञ}^{३} + & \text{२बअकज्ञ}^{४} + & \text{इत्यादि.} \\ * & * & * & + \text{बब}^{२}\text{ज्ञ}^{४} + & \text{इत्यादि.} \\ * & * & + \text{कअ}^{३}\text{ज्ञ}^{३} + & \text{३कअ}^{२}\text{बज्ञ}^{४} + & \text{इत्यादि.} \\ * & * & * & + \text{डअ}^{४}\text{ज्ञ}^{४} + & \text{इत्यादि.} \end{array}\right\} = \text{ज्ञ}$$

आतां यांत तीं पदें ज्यांत ज्ञचे सारिखे घात आहेत त्यांस समकरून हीं उत्पन्न होतात.

$(\text{अअज्ञ} = \text{ज्ञ})$ अथवा $\text{अ} = \frac{१}{\text{अ}}$,

$(\text{अबज्ञ}^{२} + \text{बअ}^{२}\text{ज्ञ}^{२} = ०)$ अथवा $\text{ब} = \left(-\frac{\text{बअ}^{२}}{\text{अ}}\right) = -\frac{\text{ब}}{\text{अ}^{३}}$

$(\text{अकज्ञ}^{३} + \text{२बअबज्ञ}^{३} + \text{कअ}^{३}\text{ज्ञ}^{३} = ०)$ अथवा $\text{क} = \left(-\frac{\text{२बअब} + \text{कअ}^{३}}{\text{अ}}\right) = \frac{\text{२ब}^{२} - \text{अक}}{\text{अ}^{५}}$; $\text{ड} = \left(-\frac{\text{२बअक} + \text{बब}^{२} + \text{३कअ}^{२}\text{ब} + \text{डअ}^{४}}{\text{अ}}\right) = \frac{\text{५अबक} - \text{५ब}^{३} - \text{अ}^{२}\text{ड}}{\text{अ}^{७}}$ इत्यादि.

आणि याजकरितां $\text{क्ष} = (\text{अज्ञ} + \text{बज्ञ}^{२} + \text{कज्ञ}^{३} + \text{इत्यादि}) = \frac{\text{ज्ञ}}{\text{अ}} - \frac{\text{बज्ञ}^{२}}{\text{अ}^{३}} + \frac{\text{२ब}^{२} - \text{अक}}{\text{अ}^{५}}.\text{ज्ञ}^{३} - \frac{\text{५ब}^{३} - \text{अबक} + \text{अ}^{२}\text{ड}}{\text{अ}^{७}}$.

रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई, इत्यादि अक्षर चिन्हें सांगितली श्रेणी दाखवायासघे, स = न पदपर्यंत सर्वधन, आणि ड', ड'', ड''', ड'''' इत्यादि चिन्हें प्रथम कृत्याप्रमाणें बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा दाखवायासघे.

२ तेव्हां $\text{नअ} + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\text{ड}' + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-१}{३}\cdot\text{ड}'' + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\frac{\text{न}-३}{४}\cdot\text{ड}''' + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\frac{\text{न}-३}{४}\cdot\frac{\text{न}-४}{५}\cdot\text{ड}'''' + \text{इत्यादि} = \text{स}$, हें न पदपर्यंत श्रेणीचें इछिलें सर्वधन आहे.

प्रथम प्रकार १, २, ३, ४, ५ इत्यादि न पदपर्यंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, २, ३, ४, ५, इत्यादि सांगितली श्रेणी.

१, १, १, १ इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंप

येथें अ = १, ड' = १, ड'' = ०, तेव्हां नअ + न·

$$\text{ड}' = \frac{२\text{नअ} + \text{न}^२ - \text{न}\cdot\text{ड}}{२} = \left(\frac{२\text{न} + \text{न}^२ - \text{न}}{२}\right) = \frac{\text{न}\cdot\overline{\text{न}+१}}{२}$$

$झ^{४}$ + इत्यादि, ही इछिली श्रेणी जाली.

आणि ही उत्पन्न जालेली श्रेणी, ज्यांत सांगितले श्रेणीचे अव्यक्त पदांचे घातां सारिखे घात आहेत, त्यांस ही साधारण सारणी कोष्टक आहे.

दुसरें, $क्ष - क्ष^{२} + क्ष^{३} - क्ष^{४} +$ इत्यादि $= झ$, ही श्रेणी फिरवायास इछिली आहे.

एथें $अ = १$, $ब = -१$, $क = १$, $ड = -१$ इत्यादि, या किंमती पूर्वउदाहरणाचे समीकरणांत ठेऊन हें उत्पन्न होतें, $क्ष = झ + झ^{२} + झ^{३} + झ^{४} +$ इत्यादि हें इछिलें उत्तर.

तिसरें, $क्ष - \frac{क्ष^{२}}{२} + \frac{क्ष^{३}}{३} - \frac{क्ष^{४}}{४} +$ इत्यादि, $= य$, ही श्रेणी फिरवायाची आहे.

एथें पूर्वप्रमाणें करून $अ = १$, $ब = -\frac{१}{२}$, $क = \frac{१}{३}$, $ड = -\frac{१}{४}$, या किमती पूर्व उदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = य + \frac{य^{२}}{२} + \frac{य^{३}}{६} + \frac{य^{४}}{२४} +$ इत्यादि.

साहावें कृत्य

कोणतेही अनंतश्रेढीचें न पदापर्यंत सर्वधन काढायाचें.

= स इच्छिलें सर्वधन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें २० पदें पर्यंत सर्वधन इच्छिलें आहे.

एथें न=२०, आणि स $= \frac{न\cdot\overline{न+१}}{२} = \frac{२०\times२१}{२} =$ २१० सर्वधन, हें उत्तर.

दुसरें, पूर्वश्रेणीचें १००० पदें पर्यंत सर्वधन काढ.

उत्तर, ५००५००

तिसरें, पूर्वश्रेणीचें १२३४५ पदें पर्यंत सर्वधन काढ.

दुसरा प्रकार, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि न पद पर्यंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

२, २, २, २, इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथें $\text{अ}=१$, $\text{ड}'=२$, $\text{ड}''=०$, तेव्हां $\text{न अ}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\text{ड}'=(\text{न अ}+\frac{\text{न}^२-\text{न}}{२}\cdot\text{ड}'=($ याजकरितां $\text{अ}=१$ आणि $\text{ड}=२)$ $(\text{न}+\text{न}^२-\text{न})=\text{न}^२=\text{स}$ इच्छिलें सर्व धन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें १० पदें पर्यंत सर्वधन काढ.

एथें $\text{न}=१०$, आणि $\text{स}=\text{न}^२$ १०० सर्वधन हें उत्तर.

तिसरा प्रकार, १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि वर्गांचे श्रेणीचें न पदा पर्यंत सर्व धन काढायाचा.

आतां १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

३, ५, ७, ९ इत्यादि प्रथम परंपरा.

२, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा.

०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

एथें $\text{अ}=१$, $\text{ड}'=३$, $\text{ड}''=२$, $\text{ड}'''=०$, तेव्हां $\text{न अ}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\text{ड}'+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-३}{३}\cdot\text{ड}''=(\text{न}+३\,\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}+२\,\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-३}{३}=\frac{३\text{न}^२-\text{न}}{२}+\frac{\text{न}^३-३\text{न}^२+२\text{न}}{२}=)\,\frac{\text{न}(\text{न}+१)(२\text{न}+१)}{६}$

=स इछिलें सर्वधन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें ३० पदें पर्यंत सर्वधन काढ.

एथें न=३० याजकरितां $\frac{न(न+१)(२न+१)}{६}=\frac{३०×३१×६१}{६}$ =९४५५ सर्वधन हें उत्तर.

कोष्टक पृ०१२० पाहा.

सातवें कृत्य.

वजाबाकीचे रीतीनें श्रेणीचें सर्वधन काढायाचें.

ही रीति दोन अथवा तीन सोपे उदाहरणांपासून प्रकट होईल.

प्रथमउदाहरण.

$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि पदें अनंत=स ही सांगितली श्रेणी, इचें सर्वधन काढ.

तर. $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{५}+$ इत्यादि अनंत=स-१ वजाबाकीनें $\frac{१}{१.२}+\frac{१}{२.३}+\frac{१}{३.४}+\frac{१}{४.५}+$ इत्यादि अनंत=१ सर्वधन हें उत्तर.

दुसरें.

$१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} +$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स, ही सांगितली श्रेणी इचें सर्वधन काढ.

तेव्हां $\frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} +$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स $- \frac{३}{२}$ वजाबाकीनें $\frac{२}{१\cdot३} + \frac{२}{२\cdot४} + \frac{२}{३\cdot५} + \frac{२}{४\cdot६} +$ इत्यादि $= \frac{३}{२}$

अथवा २ यांनीं भागून $\frac{१}{१\cdot३} + \frac{१}{२\cdot४} + \frac{१}{३\cdot५} + \frac{१}{४\cdot६} +$ इत्यादि $= \frac{३}{४}$ सर्वधन हें उत्तर.

तिसरें.

$\frac{१}{१\cdot२} + \frac{१}{२\cdot३} + \frac{१}{३\cdot४} +$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स ही सांगितली श्रेणी, इचें सर्वधन काढ.

तेव्हां $\frac{१}{२\cdot३} + \frac{१}{३\cdot४} + \frac{१}{४\cdot५} +$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स $- \frac{१}{२}$ वजाबाकीनें $\frac{२}{१\cdot२\cdot३} + \frac{२}{२\cdot३\cdot४} + \frac{२}{३\cdot४\cdot५} +$ इत्यादि $= \frac{१}{२}$

अथवा २ यांनी भागून $\frac{१}{१\cdot२\cdot३} + \frac{१}{२\cdot३\cdot४} + \frac{१}{३\cdot४\cdot५} +$ इत्यादि $= \frac{१}{४}$

चवथें.

$\frac{१}{२\cdot४\cdot६} + \frac{१}{४\cdot६\cdot८} + \frac{१}{६\cdot८\cdot१०} +$ इत्यादि पदें अनंत आहेत, या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

आतां प्रत्येक छेदांचे शेवटील गुणक सोड, आणि.

ली असें कल्पून.

रीति.

सांगितली श्रेणी एक अपूर्णपदाचे बरोबर करावी, ज्या अपूर्ण पदाचे छेदां हीं ती श्रेणी गुणिलीतर गुणाकार सात होईल। हा गुणाकार घेतले अपूर्ण पदाचे अंशांबरोबर असून त्याची किंमत निघेल.

उदाहरणें.

पहिलें, $क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} +$ इत्यादि अनंत पदें आहेत, या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

आतां सांगितली श्रेणी $= \frac{अ}{१-क्ष}$. घे.

तेव्हां $क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} +$ इत्यादि.

$$
\begin{array}{l}
\text{गुणिलो } \underline{१ - क्ष \qquad\qquad} \\
\quad क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + \text{इत्यादि.} \\
\qquad - क्ष^{२} + क्ष^{३} - \text{इत्यादि.} \\
\hline
अ = क्ष \quad ❋ \quad ❋
\end{array}
$$

याजकरितां $क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} +$ इत्यादि $= \frac{क्ष}{१-क्ष}$

जसें जर $क्ष = \frac{१}{२}$ तर $\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} +$ इत्यादि $= \frac{१}{२} \div \frac{१}{२} = १$

जर $क्ष = \frac{१}{३}$ तर $\frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \frac{१}{२७} +$ इत्यादि $= \frac{१}{३} \div$

$\frac{१}{२\cdot४} + \frac{१}{४\cdot६} + \frac{१}{६\cdot८} +$ इत्यादि = स घे.

तर $\frac{१}{४\cdot६} + \frac{१}{६\cdot८} + \frac{१}{८\cdot१०} +$ इत्यादि = स − $\frac{१}{८}$

वजाबाकीनें $\frac{४}{२\cdot४\cdot६} + \frac{४}{४\cdot६\cdot८} + \frac{४}{६\cdot८\cdot१०} +$ इत्यादि = $\frac{१}{८}$
अथवा ४ यांनी भागून $\frac{१}{२\cdot४\cdot६} + \frac{१}{४\cdot६\cdot८} + \frac{१}{६\cdot८\cdot१०} +$ इत्यादि = $\frac{१}{३२}$ स
र्वधन हें उत्तर.

पांचवें.

$\frac{१}{२\cdot४\cdot६\cdot८} + \frac{१}{४\cdot६\cdot८\cdot१०} + \frac{१}{६\cdot८\cdot१०\cdot१२} + \frac{१}{८\cdot१०\cdot१२\cdot१४}$
+ इत्यादि पदें अनंत आहेत, या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

उत्तर, $\frac{१}{२८८}$

साहावें.

$\frac{१}{२\cdot५\cdot८\cdot११} + \frac{१}{५\cdot८\cdot११\cdot१४} + \frac{१}{८\cdot११\cdot१४\cdot१७} +$
$\frac{१}{११\cdot१४\cdot१७\cdot२०}$ + इत्यादि पदें अनंत आहेत, या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

उत्तर, $\frac{१}{७२०}$

आठवें कृत्य.

अनंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचें, तीं अनंत श्रेणी कोणतेंही अपूर्णपद वाढविल्या पासून उत्पन्न जा

$\frac{२}{३}=\frac{१}{२}$ सर्वधन हें उत्तर.

दुसरें, $\text{क्ष}+२\text{क्ष}^{२}+३\text{क्ष}^{३}+$ इत्यादि अनंत पदें, या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

आतां सांगितली श्रेणी $=\frac{\text{क्ष}}{(१-\text{क्ष})^{२}}=\frac{\text{क्ष}}{१-२\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}}$

$$\begin{array}{lrrrl}
\text{तेव्हां} & \text{क्ष} & +२\text{क्ष}^{२} & +३\text{क्ष}^{३} & +\text{ इत्यादि.}\\
\text{गुणिली} & १ & -२\text{क्ष} & +\text{क्ष}^{२} & \\
\hline
 & \text{क्ष} & +२\text{क्ष}^{२} & +३\text{क्ष}^{३} & +\text{ इत्यादि.}\\
 & & -२\text{क्ष}^{२} & -४\text{क्ष}^{३} & \text{ इत्यादि.}\\
 & & & +\text{क्ष}^{३} & +\text{ इत्यादि.}\\
\hline
\text{क्ष}= & \text{क्ष} & ※ & ※ &
\end{array}$$

याजकरितां $\text{क्ष}+२\text{क्ष}^{२}+३\text{क्ष}^{३}+$ इत्यादि $=\frac{\text{क्ष}}{(१-\text{क्ष})^{२}}$

जर $\text{क्ष}=\frac{१}{२}$; तर, $\frac{१}{२}+\frac{२}{४}+\frac{३}{८}+\frac{४}{१६}+$ इत्यादि $=\frac{१}{२}\div\frac{१}{४}=२$

जर $\text{क्ष}=\frac{१}{३}$, तर, $\frac{१}{३}+\frac{२}{९}+\frac{३}{२७}+\frac{४}{८१}+$ इत्यादि $=\frac{१}{३}\div\frac{४}{९}=\frac{३}{४}$ सर्वधन हें उत्तर.

आणि याप्रमाणें पुढें ही आणखी प्रकार.

तिसरें, $\text{क्ष}+४\text{क्ष}^{२}+९\text{क्ष}^{३}+१६\text{क्ष}^{४}+$ इत्यादि, या अनंत श्रेणीचें सर्वधन काढ.

उत्तर, $\frac{\text{क्ष}(१+\text{क्ष})}{(१-\text{क्ष})}$

समीकरण.

समीकरण ह्मणजे बीजगणिताचा एक भाग आहे, जो अव्यक्त पदांच्या किमती त्या पदांच्या दुसऱ्या व्यक्तपदांशीं जो संबंध आहे त्याचे साहाय्यानें काढायाच्या वेगळाल्या रीति दाखवितो.

कितीएक बीजगणित संबंधी उद्देशक परस्पर बरोबर केल्यापासून हें होतें; या बरोबर केले उद्देशकांस समीकरण ह्मणतात, नंतर याचे रीतीं प्रमाणें गणित करीत चलावें. अव्यक्तपद त्या समीकरणाचे बाजूस एकाकी राही पर्यंत; ह्मणजे दुसरे बाजूंतील सांगितले व्यक्तपदांचे बरोबर होईल.

ज्यां पदांपासून समीकरण सुसंपन्न जालें त्यां पदांस समीकरणाचीं पदें ह्मणतात; आणि बरोबरीच्या = या चिन्हाचे दोहींकडे जे उद्देशक लिहिले आहेत, त्यांस समीकरणाचे दोन भाग अथवा दोन बाजू ह्मणतात.

जसें जर **क्ष** = **अ** + **ब** यांत क्ष, अ, आणि ब, हीं तीन पदें आहेत; आणि या उद्देशकाचा अर्थ हा कीं, कोणतें ही पद क्ष समीकरणाची डावी बाजू, त्याची उजवी बाजू अ आणि ब हीं दोन पदें आहेत त्यांचे बे

रिजे बरोबर आहे.

एकवर्ण समीकरण ह्मणजे तेंच होय, ज्यांत अव्यक्त पदांचे प्रथम घात मात्र येतात.

जसें $\text{क्ष} + \text{अ} = \text{२ब}$ अथवा $\text{अ क्ष} = \text{ब क}$ अथवा $\text{२ क्ष} + \text{३ अ}^{२} = \text{५ ब}^{२}$ यांत क्ष अव्यक्त पद दाखवितो; आणि दुसरीं अक्षर चिन्हें आणि अंक व्यक्त पदें दाखवितात.

अनेकवर्ण समीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्त पदांचे दोन किंवा अधिक वेगळाले घात येतात.

जसें $\text{क्ष}^{२} + \text{अ क्ष} = \text{ब}$ अथवा $\text{क्ष}^{३} - \text{४ क्ष}^{२} + \text{२क्ष} = \text{२५}$

या समीकरणाच्या जाति अथवा नावें त्यांतील अव्यक्त पदांचे सर्वांहून मोठे घात येतात त्यांवरून तशीं तशीं होतात. जशीं, वर्गसमीकरण, घनसमीकरण, चतुर्घातसमीकरण इत्यादि.

वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्त पद दोन घातांचें आहे, अथवा दुसरा घात पर्यंत चढतें आहे.

जसें, $\text{क्ष}^{२} = \text{२}$ अथवा $\text{क्ष}^{२} + \text{अ क्ष} = \text{ब}$ अथवा $\text{३ क्ष}^{२} + \text{१० क्ष} = \text{१००}$

घनसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्त पद तीन घातांचें आहे, अथवा तिसरा घात पर्यंत चढतें आहे.

जसें, क्ष^{३} = २७ अथवा २क्ष^{३} − ३ क्ष = ३५ अथवा क्ष^{३} − अक्ष^{२} + बक्ष = क

चतुर्घातसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपद चार घातांचें आहे, अथवा चवथा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें, क्ष^{४} = २५ अथवा ५ क्ष^{४} − ४ क्ष = ६ अथवा क्ष^{४} − अ क्ष^{३} + बक्ष^{२} − कक्ष = ड, इत्यादि समीकरणांस पंचघात, षड्घात, आणि यांहून अधिक महत्व जातीचीं उपपदें लागतात, त्यासर्वांस अव्यक्तपदांत सर्वांहून मोठा घात येतो तशीं नावें होतात.

समीकरणाचें मूळ तशी संख्या किंवा पद आहे, जें अव्यक्तपदाचे स्थानीं ठेविलें असतां समीकरणाच्या दोनही बाजू परस्पर उडतील, अथवा बरोबर होतील.

एकवर्णसमीकरणास एकच मूळ होतें, परंतु अनेकवर्ण समीकरणास तितकीं मुळें होतात; त्याचे अव्यक्त पदांत जितके घात आहेत, अथवा त्यांतील पदांत सर्वांहून मोटा घातप्रकाशक आहे, त्याचे संख्ये इतकीं मुळें होतात ह्मणून तो दाखवितो.

जसें, क्ष^{२} + २ क्ष = १५ या वर्गसमीकरणांत मूळ किंवा क्ष अव्यक्तपदाची किंमत +३ आहे, किंवा −५ आ

णि $क्ष^{३} - ९ क्ष^{२} + २६ क्ष = २४$ या घन समीकरणाचीं मुळें २, ३, आणि ४ हीं आहेत. ह्मणजे या तिहींतून कोणतेंही एक क्ष चे स्थळीं ठेविलें असतां या समीकरणाच्या दोनही बाजू उडतील, अथवा बरोबर होतील.

एकवर्ण समीकरण पृथक्करण्याची रीति, ज्यांत एकच अव्यक्तपद आहे.

एकवर्णसमीकरण तशीं सर्व समीकरणें यांची कृति ही आहे, कीं सर्वसमीकरणांच्या उदाहरणांत अव्यक्त पदांची किमंत काढितेसमयीं तें कोणतेंही दुसरे व्यक्तपदाशीं संबद्ध असेल, त्यास तेथून सोडून एक बाजूस लिहावें, आणि बाकी व्यक्त पदें दुसरे बाजूस लिहावीं. हेंच करायाकरितां वेगळालीं प्रत्यक्ष प्रमाणें आणि कृति घेतली पाहिजे, ह्मणून या दोहोंतील सर्वांहून उपयोगीं जीं आहेत तीं सांगतों.*

---

* हें काम करायाची कृति या पुढील प्रत्यक्ष प्रमाणांपासून प्रकट होते.

१ दोन समपदांत एकच पद प्रत्येकांत मिळविलें अथवा वजा केलें तर दोन बेरजा अथवा दोन बाक्या (२ आणि ३ प्र० प्र०), बरोबर होतील ह्मणूनच एकबाजूचें पद दुसरे बाजूस आणिलें तर त्याचें धन ऋण चिन्ह असलें तें बदल होतें हेंही तसेंच आहे.

२ कोणतींहीं दोन समपदें एकच पदानें प्रत्येकीं गुणिलीं अथवा भागिलीं तर त्यांचे दोन गुणाकार अथवा दोन भागाकार (७० आणि ७१ सि० प्र०) बरोबर होतील.

प्रथमप्रकार.

समीकरणाचे कोणतेही पदाचें स्थळांतर त्यापदाचें चिन्हबदल करून एक बाजूंतून काढून दुसरे बाजूंत नेतां येईल. असें केलें असतां ही दोनी बाजू किमतींत बरोबरच राहातील.

जसें, जर क्ष + ३ = ७ तर क्ष = ७ − ३ ह्मणजे क्ष = ४

आणि जर क्ष − ४ + ६ = ८ तर क्ष = ८ + ४ − ६ ह्मणजे क्ष = ५

आणि जर क्ष − अ + ब = क − ड तर क्ष = क − ड + अ − ब

आणि जर ४ क्ष − ८ = ३ क्ष + २० तर ४ क्ष − ३ क्ष = २० + ८ ह्मणजे क्ष = २८

या रीती पासून हें निघतें कीं जर दोनही बाजूंस पदें एकरूप आणि एकच चिन्हानें युक्त आहेत, तर तीं त्या दोनही बाजूंतून टाकितां येतील, आणि कोणत्याही समीकरणाचे सर्वपदांचीं चिन्हें बदल करितां ये

---

३ कोणतींही एकाकीं पदें किंवा संयुक्त पदें परस्पर बराबर असतील तर त्या पदांचे कोणतेही सारखे घात अथवा मूळें ही (७४सि० प्र०) बराबर होतील.

आणि पुढील साहा प्रकारांचे उदाहरणांतील वेगळाल्या कृतीवरून हीं सर्व प्रत्यक्षें उघड होतील.

तील. किंमत आहेतीच राहील.

जसें, जर क्ष + ५=७+५ तर रद्द कर्ण्याचे रीतीनें क्ष =७

आणि जर अ - क्ष=ब - क तर क्ष - अ=क - ब ह्मणजे क्ष=अ+क - ब

दुसराप्रकार.

कोणते ही समीकरणांत जर अव्यक्त पद कोणती ही संख्या किंवा अक्षर चिन्ह या गुणकानें गुणायाचें जोडिलें आहे; तर त्या गुणकानें सर्व दुसरीं पदें भागून तो गुणक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल. आणि जर अव्यक्तपद कोणती ही संख्या किंवा अक्षर चिन्ह या भाजकानें भागायाचें जोडिलें आहे, तर त्या भाजकानें सर्व दुसरीं पदें गुणून तो भाजक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल.

जसें, जर अक्ष=२अब - क तर क्ष=२ब - $\frac{\text{क}}{\text{अ}}$

आणि जर २क्ष+४=१६ तर क्ष+२=८ ह्मणजे क्ष=८ - २=६

आणि जर $\frac{\text{क्ष}}{२}$ =५+३ तर क्ष=१०+६=१६

आणि जर $\frac{२क्ष}{३} - २ = ४$, तर $२क्ष - ६ = १२$ [illegible] भागाकारानें $क्ष - ३ = ६$ अथवा $क्ष = ६ + ३ = ९$

तिसरा प्रकार.

जर कोणतेही समीकरणांत काहीं अपूर्णबीज पदें असतील, तर त्या अपूर्णबीजपदांचे छेद उडवितां येतील जे प्रतिपदाचे छेदांनीं अनुक्रमें त्या त्या पदांवांचून राहिलीं सर्वपदें गुणिल्यापासून, अथवा अपूर्णबीजपदांचे सर्वछेद परस्पर गुणून त्या गुणाकारानें सर्वपदें गुणिल्यापासून, किंवा दोनही बाजूंतील सर्वपदें सर्वछेदांचे लघुतमसाधारण[*] गुणाकारानें[*] गुणिल्यापासून.

---

[*] साधारणगुणाकार ह्मणजे एक संख्या आहे, ज्यांत दुसरी कोणतीही संख्या किती एक वेळां बराबर जाते

जसें ६ ही संख्या २ या संख्येचा साधारण गुणाकार आहे, कारण ६ यांतून २ बरोबर ३ वेळा जातात.

आणि १२ ही संख्या ६, ४, ३. या प्रत्येक संख्यांचा साधारण गुणाकार आहे, कारण १२ यांत प्रथमसंख्या ६ बराबर २ वेळा जातात, तसें दुसरी संख्या ४ बराबर ३ वेळां जातात, आणि तिसरी संख्या ३ बराबर ४ वेळां जातात.

कितीएक संख्या पदांचा लघुतमसाधारण गुणाकार काढायाची रीति.

जसें जर $\frac{क्ष}{३}+\frac{क्ष}{४}=५$, तर प्रथमपदाचे छेद ३ याणी रीती प्रमाणें गुणिल्यानें $क्ष+\frac{३क्ष}{४}=१५$, पुनः राहिले पदाचे छेद ४ यांणी गुणिल्यानें $४क्ष+३क्ष=६०$; नंतर मिळवणीनें $७क्ष=६०$, आतां भागाकारानें $क्ष=\frac{६०}{७}=८\frac{४}{७}$

आणि जर $\frac{क्ष}{४}+\frac{क्ष}{६}=१०$ तर $४\times६=२४$ ह्मणजे या

कितीएक संख्या पदें आहेत त्यांत बहुतपदें कोणत्या संख्येनें बरावर भागिलीं जातील, तें पाहून तो भाजक त्या ओळीचे भाजक स्थळीं लिहून जीं भागतील त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे खाली लिहावे; आणि जीं न भागत तीं तशींच त्यांचे खालीं लिहावीं. नंतर पुनः पूर्वप्रमाणेंच दुसरा भाजक कल्पून त्या दुसर ओळींत पूर्ववत् करावें याप्रमाणें करितां कदाचित् शेवटास दोनपदें पर्यंत नच भागिलीं जात, तर ते सर्व भाजक आणि तीं राहीलीं पदें परस्पर गुणून जो गुणाकार साधारण लघुतम गुणाकार जाला. असें जाणावें.

उदाहरण.

७, ३५, ४२, २०, २४ या संख्या पदांचा साधारण लघुतम गुणाकार कर.

$$\begin{array}{r|l} \div ७ & ७,\ ३५,\ ४२,\ २०,\ २४ \\ \div ५ & १,\ ५,\ ६,\ २०,\ २४ \\ \div ६ & १,\ १,\ ६,\ ४,\ २४ \\ \div ४ & १,\ १,\ १,\ ४,\ ४ \\ & १,\ १,\ १,\ १,\ १ \end{array}$$

तर $७\times५\times६\times४=८४०$ हा वरचे पदांचा लघुतम साधारणगुणाकार होय.

सर्वछेदांचे गुणाकारानें समीकरणाच्या दोनी बाजू गुणिल्यानें $\frac{\text{२४क्ष}}{\text{४}} + \frac{\text{२४क्ष}}{\text{६}} = \text{२४०}$, अथवा ६क्ष + ४क्ष = २४० नंतर मिळवणीनें १०क्ष = २४० आतां भागाकारानें क्ष= $\frac{\text{२४०}}{\text{१०}} = \text{२४}$

आणि जर $\frac{\text{क्ष}}{\text{४}} + \frac{\text{क्ष}}{\text{६}} = \text{१०}$ तर ४ आणि ६ यांचा लघुत्तम साधारण गुणाकार १२ यांणी समीकरणाच्या दोनी बाजू गुणिल्यानें.

$\frac{\text{१२क्ष}}{\text{४}} + \frac{\text{१२क्ष}}{\text{६}} = \text{१२०}$, अथवा ३क्ष + २क्ष = १२०, नंतर मिळवणीनें ५क्ष = १२०, आतां भागाकारानें क्ष = $\frac{\text{१२०}}{\text{५}} = \text{२४}$

यारीतीवरून कळतें कीं, जर एकच संख्या अथवा अक्षर चिन्ह समीकरणाचे दोन बाजूंस गुणक अथवा भाजक अशा रीतीनें दुसरे पदाशीं संयुक्त होऊन असेल, तर ती साधारण संख्या अथवा तें अक्षर चिन्ह त्या दोनही बाजूंतून उडवितां येईल, परंतु किंमत आहे तीच आहे.

जसें जर अक्ष = अब + अक, तर रद्दकेल्यानें क्ष = ब + क

आणि जर $\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} + \frac{\text{ब}}{\text{अ}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}$. तर रद्द केल्यानें क्ष + ब = क ह्मणजे क्ष = क − ब

चवथाप्रकार.

जर कोणतेही समीकरणांत अव्यक्तपद करणीरूप आहेतर (१ प्रकाराप्र॰) सर्वपदांस स्थळांतर करावें, असें कीं अव्यक्तपद समीकरणाचे एकबाजूस एकलें येईल, आणि राहिलीं सर्वपदें दुसरे बाजूस येतील. नंतर समीकरणाच्या दोनही बाजू करणीच्या घातापर्यंत वाढवाव्या, ह्मणजे उद्देशक समीकरण खंडपदापासून मुक्त होईल.

जसें जर $\sqrt{\text{क्ष}} - २ = ३$ तर स्थळांतरानें $\sqrt{\text{क्ष}} = ३ + २ = ५$ नंतर वर्गकेल्यानें $\text{क्ष} = २५$

आणि जर $\sqrt{३\text{क्ष} + ४} = ५$ तर वर्ग केल्यानें $३\text{क्ष} + ४ = २५$ नंतर स्थळांतरानें $३\text{क्ष} = २५ - ४ = २१$ आणि भागाकारानें $\text{क्ष} = \frac{२१}{३} = ७$

आणि जर $\sqrt[३]{२\text{क्ष} + ३} + ४ = ८$, तरस्थळांतरानें $\sqrt[३]{२\text{क्ष} + ३} = ८ - ४ = ४$, नंतर घन केल्यानें $२\text{क्ष} + ३ = ४^{३} = ६४$, पुनः स्थळांतरानें $२\text{क्ष} = ६४ - ३ = ६१$, आतां भागाकारानें $\text{क्ष} = \frac{६१}{२} = ३०\frac{१}{२}$

पांचवाप्रकार.

जर समीकरणाचे बाजूंत अव्यक्तपद कोणता

ही एकपूर्ण घात असेल, तर त्यासमीकरणाचा यारीतीनें संक्षेप केला जातो, जे समीकरणाचे दोनही बाजूचे पदांचें त्या पूर्णघाताचें मूळ काढावें.

जसें, जर $\text{क्ष}^{२} = ८१$ तर $\text{क्ष} = \sqrt{८१} = ९$

आणि जर $\text{क्ष}^{३} = २७$ तर $\text{क्ष} = \sqrt{२७} = ३$

आणि जर $३\,\text{क्ष}^{२} - ९ = २४$ तर स्थळांतरानें $३\,\text{क्ष}^{२} = २४ + ९ = ३३$ नंतर भागाकारानें $\text{क्ष}^{२} = \frac{३३}{३} = ११$ नंतर वर्गमूळ काढील्यानें $\text{क्ष} = \sqrt{११}$

आणि जर $\text{क्ष}^{२} + ६\,\text{क्ष} + ९ = २७$ तर विचारें पाहतां करणीचे डावे बाजूंत एक पूर्णघात ह्मणजे वर्ग आहे, ते कां वर्गमूळ काढिल्यानें $\text{क्ष} + ३ = \sqrt{२७} = \sqrt{९ \times ३} = ३\sqrt{३}$ तर स्थळांतरानें $\text{क्ष} = ३\sqrt{३} - ३$

साहावा प्रकार.

कोणतेही प्रमाणास त्याचे दोन शेवट पदांचा गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे, तो केल्यानें समीकरणाचें रूप देतां येईल.

जसें जर $३\,\text{क्ष} : १६ :: ५ : ६$ तर $३\,\text{क्ष} \times ६ = १६ \times ५$ अथवा $१८\,\text{क्ष} = ८०$ तर भागाकारानें $\text{क्ष} = \frac{८०}{१८} = \frac{४०}{९} = ४\frac{४}{९}$

आणि जर $\frac{२\text{क्ष}}{३} : \text{अ} :: \text{ब} : \text{क}$ तर $\frac{२\text{क्ष}}{३} \times \text{क} =$

अ × ब अथवा $\frac{\text{२क्षक}}{\text{३}}$ = अ ब, गुणाकारानें २क्ष क = ३ अ ब, भागाकारानें क्ष = $\frac{\text{३अब}}{\text{२क}}$

आणि जर १२ − क्ष : $\frac{\text{क्ष}}{\text{२}}$ :: ४ : १ तर १२ − क्ष = २ क्ष, तर स्थळांतरानें १२ = २ क्ष + क्ष = ३ क्ष, भागाकारानें क्ष = $\frac{\text{१२}}{\text{३}}$ = ४

पूर्वप्रकारांचीं वेगळालीं उदाहरणें.

पहिलें, ७क्ष − १८ = ४क्ष + ६ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमंत काय?

आतां ७ क्ष − १८ = ४ क्ष + ६

स्थळांतरानें, ७ क्ष − ४ क्ष = ६ + १८

तर ... ३ क्ष = २४

भागाकारानें .... क्ष = $\frac{\text{२४}}{\text{३}}$ = ८ हें उत्तर.

दुसरें, २० − ४ क्ष − १२ = ९२ − १० क्ष या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमंत काय?

आतां २० − ४ क्ष − १२ = ९२ − १० क्ष

स्थळांतरानें, ... १० क्ष − ४ क्ष = ९२ − २० + १२

तर ...... ६ क्ष = ८४

भागाकारानें, ... क्ष = $\frac{\text{८४}}{\text{६}}$ = १४ हें उत्तर.

तिसरें, ४ अ क्ष − ५ ब = २ ड क्ष + २ क

या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय?

आतां ४ अ क्ष − ५ ब = ३ ड क्ष + २ क

स्थळांतरानें, ४ अ क्ष − ३ ड क्ष = ५ ब + २ क

तर, ४ अ − ३ ड यांनीं भागून क्ष = $\frac{५ब + २क}{४अ − ३ड}$

हें उत्तर.

चौथें, ५ क्ष^{२} − १२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^{२} या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय?

आतां, ५ क्ष^{२} − १२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^{२} यांत सर्वपदांचा साधारण गुणक क्ष

त्यानें ती भागून .. ५ क्ष − १२ = ९ + २ क्ष

स्थळांतरानें, .. ५ क्ष − २ क्ष = १२ + ९

तर ..... ३ क्ष = २१

भागाकारानें ..... क्ष = $\frac{२१}{३}$ = ७ हें उत्तर.

पांचवें, ९ अ क्ष^{३} − १५ अ ब क्ष^{२} = ६ अ क्ष^{३} + १२ अ क्ष^{२} या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय?

आतां, ९ अ क्ष^{३} − १५ अ ब क्ष^{२} = ६ अ क्ष^{३} + १२ अ क्ष^{२} यांत सर्वपदांचा साधारण गुणक ३ अ क्ष^{२} यानें ती भागल्यानें, .. ३ क्ष − ५ ब = २ क्ष + ४

स्थळांतरानें, .. ३ क्ष − २ क्ष = ५ ब + ४

तर, · · · $क्ष = ५ ब + ४$ हें उत्तर.

साहावें, $\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे, त्याची किंमत काय?

आतां $\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$

प्रथम छेद ३ यांनीं गुणून $क्ष - \frac{३क्ष}{४} + \frac{३क्ष}{५} = ६$

दुसरें छेद ४ यांनीं गुणून $४ क्ष - २ क्ष + \frac{१२ क्ष}{५} = २४$

राहिले छेद ५ यांनीं गुणून $२० क्ष - १५ क्ष + १२ क्ष = १२०$

तर, · · · · $१७ क्ष = १२०$

भागाकारानें, · · · · · · · · · · · $क्ष = \frac{१२०}{१७} = ७ \frac{१}{१७}$ हें उत्तर.

दुसरे रीतीनें,

$$\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$$

३ · ४ · ५ हे सर्व छेद परस्पर गुणून.

६० यांनीं सर्व पदें गुणिल्यानें. $\frac{६० क्ष}{३} - \frac{६० क्ष}{४} + \frac{६० क्ष}{५} = १२०$

$$तर\ २० क्ष - १५ क्ष + १२ क्ष = १२०$$

$$तर \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot १७ क्ष = १२०$$

भागाकारानें $क्ष = १२०$

$= ७ \frac{१}{१७}$ हें पूर्ववत् उत्तर.

सातवें, $\frac{\text{क्ष}-५}{३} + \frac{\text{क्ष}}{२} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{३}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे, त्याची किंमत काय?

आतां, $\frac{\text{क्ष}-५}{३} + \frac{\text{क्ष}}{२} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{३}$

प्रथम छेद ३ यांनीं गुणिल्यानें, $\text{क्ष} - ५ + \frac{३\text{क्ष}}{२} = ३६ - \text{क्ष} + १०$

दुसरे छेद २ यांनीं गुणिल्यानें, $२\text{क्ष} - १० + ३\text{क्ष} = ७२ - २\text{क्ष} + २०$

स्थळांतरानें, ... $२\text{क्ष} + ३\text{क्ष} + २\text{क्ष} = ७२ + २० + १०$

तर, ... $७\text{क्ष} = १०२$

भागाकारानें, ... $\text{क्ष} = \frac{१०२}{७} = १४\frac{४}{७}$ हें उत्तर.

आठवें, $\sqrt{\frac{३\text{क्ष}}{४}} + ७ = १०$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे, त्याची किंमत काय?

आतां, $\sqrt{\frac{३\text{क्ष}}{४}} + ७ = १०$

स्थळांतरानें, . . $\sqrt{\frac{३\text{क्ष}}{४}} = १० - ७ = ३$

वर्गीकरणानें, . . . $\frac{३\text{क्ष}}{४} = ३^२ = ९$

गुणाकारानें, ... $३\text{क्ष} = ३६$

भागाकारानें, ... $\text{क्ष} = \frac{३६}{३} = १२$ हें उत्तर.

नववें, $२\text{क्ष} + २\sqrt{\text{अ}^२ + \text{क्ष}^२} = \frac{५\text{अ}^२}{\sqrt{\text{अ}^२ + \text{क्ष}^२}}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किंमत काय?

आतां, ... $२क्ष + २\sqrt{अ^२ + क्ष^२} = \frac{५अ^२}{\sqrt{अ^२+क्ष^२}}$

आतां, $\sqrt{अ^२ + क्ष^२}$ यानें गुणिल्यानें $२क्ष\sqrt{अ^२+क्ष^२} + २(अ^२$
$+ क्ष^२) = ५अ^२$

तर, ... $२क्ष\sqrt{अ^२+क्ष^२} + २अ^२ + २क्ष^२$
$= ५अ^२$

स्थळांतरानें, ... $२क्ष\sqrt{अ^२+क्ष^२} = ३अ^२ - २$
$क्ष^२$

वर्गकेल्यानें, ... $४क्ष^२ \times \overline{अ^२+क्ष^२} =$
$\overline{३अ^२ - २क्ष^२}^२$

तर, ... $४अ^२क्ष^२ + ४क्ष^४ = ९अ^४ - १२अ^२$
$क्ष^२ + ४क्ष^४$ दोन ही बाजूंचीं $४क्ष^४$ हीं दोन पदें
टाकिल्यानें, ... $४अ^२क्ष^२ = ९अ^४ - १२अ^२$
$क्ष^२$

स्थळांतरानें, ... $४अ^२क्ष^२ + १२अ^२क्ष^२ =$
$९अ^४$

तर, ... $१६अ^२क्ष^२ = ९अ^४$

भागाकारानें, ... $क्ष^२ = \frac{९अ^४}{१६अ^२} =$
$\frac{९अ^२}{१६}$

वर्गमूक केल्यानें .... $क्ष = \sqrt{\frac{९अ^२}{१६}} = \frac{३}{४}$
अ हें उत्तर.

दाहावें, $२ क्ष - ५ + १६ = २१$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = ५$

अकरावें, $६ क्ष - १५ = क्ष + ९$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = ४\frac{१}{५}$

बारावें, $८ - ३ क्ष + १२ = ३० - ५ क्ष + ४$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = ७$

तेरावें, $क्ष + \frac{१}{३} क्ष - \frac{१}{४} क्ष = १२$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = १२$

चौदावें, $३ क्ष + \frac{१}{२} क्ष + २ = ५ क्ष - ४$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = ४$

पंधरावें, $४ अ क्ष + \frac{१}{३} अ - २ = अ क्ष - ब क्ष$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \overline{९अ + ३ब}$

सोळावें, $\frac{१}{३} क्ष - \frac{१}{४} क्ष + \frac{१}{६} क्ष = \frac{१}{२}$ या समीक

रणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{३०}{१८}$

सत्रावें, $\sqrt{४ + क्ष} = ४ - \sqrt{क्ष}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = २\frac{१}{४}$

अठरावें, $४अ + क्ष = \frac{क्ष^२}{८अ + क्ष}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = -२अ$

एकुणिसावें, $\sqrt{४अ^२ + क्ष^२} = \sqrt{४ब^२ + क्ष^२}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \sqrt{\frac{ब^४ - ४अ^४}{२अ^२}}$

विसावें, $\sqrt{क्ष} + \sqrt{२अ + क्ष} = \frac{४अ}{\sqrt{२अ + क्ष}}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{२}{३}अ$

एकविसावें, $\frac{अ}{१ + २क्ष} + \frac{अ}{१ - २क्ष} = २ब$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमंत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{१}{२}\sqrt{\frac{ब - अ}{ब}}$

बेविसावें, $अ + क्ष = \sqrt{अ^२ + क्ष\sqrt{ब^२ + क्ष^२}}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{ब^२}{४अ} - अ.$

एकवर्णसमीकरणपृथक्करण्याचीरीति.

जेव्हां दोन अव्यक्तपदें आहेत तीं वेगळाले दोन समीकरणांत येतात, तेव्हां पुढील तीन रीतींतून एके रीतीनें त्या दोन समीकरणांस एकत्र करून त्यांचें एकच समीकरण करितां येईल.

प्रथमरीति.

प्रत्येक समीकरणांत पूर्वी सांगितले रीतीकरून एक अव्यक्तपदाची किंमत राहिले दुसरे पदाचे किंमती करून काढावी नंतर या दोन बराबर किंमतीपासून एक नवें समीकरण होईल, ज्यांत अव्यक्त पद एकच येईल, त्याची किंमत पूर्वरीती प्रमाणें निघेल.*

टीप यांत उघड दिसतें कीं, ज्या अव्यक्तपदाची किंमत काढायास सुगम आहे. त्यापासून सांगितले समीकरणांत किंमत काढायास आरंभ करावा.

उदाहरणें.

पाहिलें $\begin{cases} २क्ष + ३य = १७ \\ ५क्ष - २य = १४ \end{cases}$ या दोन समीकरणां

---

* या रीतीस तें प्रत्यक्ष आश्रय होय, ज्या वस्तू एक वस्तूशीं बराबर त्या सर्व परस्परा बराबर, तसें पुढील दोन रीतींसही आश्रय उघड प्रकटार्थ आहेत.

तील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

प्रथम समीकरणांत $२\,\text{क्ष} + ३\,\text{य} = १७$, क्षची किंमत काढाया करितां ३ य यांस स्थळांतर करून २ यांनी भागिल्यानें $\text{क्ष} = \frac{१७ - ३\,\text{य}}{२}$

दुसरे समीकरणांत $५\,\text{क्ष} - २\,\text{य} = १४$, क्षची किंमत काढाया करितां २ य यांस स्थळांतर करून ५ यांनी भागिल्यानें $\text{क्ष} = \frac{१४ + २\,\text{य}}{५}$

नंतर, क्ष च्या दोन किमती परस्पर बरावर करून

$$\frac{१७ - ३\,\text{य}}{२} = \frac{१४ + २\,\text{य}}{५}$$

आतां पूर्वरीतीनें २ आणि ५ या छेदांनीं गुणिल्यानें

$$८५ - १५\,\text{य} = २८ + ४\,\text{य}$$

स्थळांतरानें, $८५ - २८ = ४\,\text{य} + १५\,\text{य}$

तर, $१९\,\text{य} = ५७$

भागाकारानें, $\text{य} = \frac{५७}{१९} = ३$

नंतर य ची किंमत पूर्व कोणतेही समीकरणांत उघड मांडिल्यानें, प्रथमांत $\text{क्ष} = \frac{१७ - ९}{२} = ४$ आणि दुसऱ्यांत $\text{क्ष} = \frac{१४ + ६}{५} = ४$ हें उत्तर.

दुसरें, $\left\{\begin{matrix}\text{क्ष} + \text{य} = \text{अ} \\ \text{क्ष} - \text{य} = \text{ब}\end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील $\text{क्ष} = \text{अ} - \text{य}$

आणि दुसऱ्यांतील, . . . $\text{क्ष} = \text{ब} + \text{य}$

याजकरितां, ... $\text{अ} - \text{य} = \text{ब} + \text{य}$

नंतर स्थळांतरानें, . . $२\,\text{य} = \text{अ} - \text{ब}$

भागाकारानें, ... $\text{य}\ \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२}$

प्रथमांत य ची ही किंमत उघड लिहिल्यानें ($\text{क्ष} = \text{अ} - \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} = \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}$) दुसऱ्यांत य ची ही किंमत उघड लिहिल्यानें ($\text{क्ष} = \text{ब} + \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} = \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}$) हीं दोन ही बराबर हें उत्तर.

तिसरें, $\left\{ \begin{array}{l} \frac{१}{२}\text{क्ष} + \frac{१}{३}\text{य} = ७ \\ \frac{१}{३}\text{क्ष} + \frac{१}{२}\text{य} = ८ \end{array} \right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील $\frac{\text{क्ष}}{२} = ७ - \frac{\text{य}}{३}$

गुणाकारानें, ... $\text{क्ष} = १४ - \frac{२\text{य}}{३}$

दुसऱ्यांतील, ... $\frac{\text{क्ष}}{३} = ८ - \frac{\text{य}}{२}$

गुणाकारानें, ... $\text{क्ष} = २४ - \frac{३\text{य}}{२}$

याजकरितां, ... $२४ - \frac{३\text{य}}{२} = १४ - \frac{२\text{य}}{३}$

प्रथम छेद २ यांनीं गुणिल्यानें $४८ - ३\text{य} = २८ - \frac{४\text{य}}{३}$

दुसरे छेद ३ यांनीं गुणिल्यानें $१४४ - ९\text{य} = ८४ - ४\text{य}$

स्थळांतरानें, ... $१४४ - ८४ = ९\text{य} - ४\text{य}$

नंतर, ... $६० = ५\text{य}$

अथवा, $५ य = ६०$

भागाकारानें, $य = \frac{६०}{५} = १२$

प्रथमांत **य** ची किंमत १२ ती लिहिल्यानें, ($क्ष = १४ - \frac{२ \times १२}{३} = १४ - ८ = ६$) दुसऱ्यांत **य** ची किंमत १२ ती लिहिल्यानें, ($क्ष = २४ - \frac{३ \times १२}{२} = १४ - १८ = ६$) हीं दोनही बराबर हें उत्तर.

चौथें $\left\{\begin{array}{l} \frac{१}{२} क्ष + २ य = अ \\ \frac{१}{२} क्ष - २ य = ब \end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांत क्ष आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर; $क्ष = अ + ब$ आणि $य = \frac{१}{४} अ - \frac{१}{४} ब$

पांचवें, $\left\{\begin{array}{l} ३ क्ष + य = २२ \\ ३ य + क्ष = १८ \end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष = ६$ आणि $य = ४$

साहावें, $\left\{\begin{array}{l} \frac{१}{२} क्ष + \frac{१}{३} य = ४ \\ \frac{१}{३} क्ष + \frac{१}{२} य = ३ \frac{१}{२} \end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष = ६$ आणि $य = ३$

सातवें, $\frac{२ क्ष}{३} + \frac{३ य}{५} = \frac{३३}{५}$ आणि $\frac{३ क्ष}{५} + \frac{२ य}{३} = \frac{६७}{१५}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि **य** या दोन अ

व्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, $\text{क्ष} = ३$ आणि $\text{य} = ४$

आठवें, $\text{क्ष} + २\,\text{य} = \text{स}$ आणि $\text{क्ष}^{२} - ४\,\text{य}^{२} = \text{ड}^{२}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, $\text{क्ष} = \frac{\text{स}^{२} + \text{ड}^{२}}{२\,\text{स}}$ आणि $\text{य} = \frac{\text{स}^{२} - \text{ड}^{२}}{४\,\text{स}}$

नववें, $\text{क्ष} - २\,\text{य} = \text{ड}$ आणि $\text{क्ष} : \text{य} :: \text{अ} : \text{ब}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, $\text{क्ष} = \frac{\text{अ}\,\text{ड}}{\text{अ} - २\,\text{ब}}$ आणि $\text{य} = \frac{\text{ब}\,\text{ड}}{\text{अ} - २\,\text{ब}}$

दुसरीरीति.

दोन समीकरणांत अति सोईचें जें अव्यक्त पद असेल त्याची किंमत प्रथम काढ, नंतर दुसऱ्या समीकरणांत ती किंमत त्या अव्यक्ताचे स्थळीं लिहिल्यानें दुसरें नवें समीकरण होईल. असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्त पद राहील, नंतर त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणे काढितां येईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} + २\text{य} = १७ \\ ३\,\text{क्ष} - \text{य} = २\end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अति सोईचें अव्यक्त पद **क्ष** आहे, याजकरितां तेथुन आरंभ करावा. $\text{क्ष} = १७ - २\text{य}$ ह्मणून ही किंमत दुसऱ्यांत **क्ष** चे स्थळीं लिहून, $३(१७ - २\text{य}) - \text{य} = २$

तर, ... $५१ - ६\text{य} - \text{य} = २$

स्थळांतरानें, ... $-६\text{य} - \text{य} = २ - ५१$

सर्व चिन्हें बदल करून, $६\text{य} + \text{य} = ५१ - २$

तर, ... $७\text{य} = ४९$

भागाकारानें, ... $\text{य} = \frac{४९}{७} = ७$

तर, . . . $\text{क्ष} = १७ - २\text{य}$

ह्मणजे, $\text{क्ष} = १७ - २ \times ७ = १७ - १४ = ३$ हें उत्तर.

दुसरें, $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} + \text{य} = १३ \\ \text{क्ष} - \text{य} = ३\end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

आता प्रथमांत अति सोईचें अव्यक्त पद **क्ष** आहे, याजकरितां तेथून आरंभ करावा. $\text{क्ष} = १३ - \text{य}$ ह्मणून

ही किंमत दुसऱ्यांत क्ष चे स्थळीं लिहून, . . . १३

$-\text{य}-\text{य}=३$

स्थळांतरानें व चिन्हें बदल करून, . . $२\,\text{य}=१३-३=१०$

भागाकारानें, ... $\text{य}=\frac{१०}{२}=५$

तर, ... $\text{क्ष}=१३-\text{य}$

ह्मणजे, . . . $\text{क्ष}=१३-५=८$ हें उत्तर.

तिसरें, $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष}:\text{य}::\text{अ}:\text{ब}\\ \text{क्ष}^2+\text{य}^2=\text{क}\end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांत क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रमाणांस समीकरण रूप दिल्यानें $\text{बक्ष}=\text{अय}$

भागाकारानें. . . . . . . $\text{क्ष}=\frac{\text{अय}}{\text{ब}}$

ही किंमत दुसऱ्यांत क्ष चे स्थळीं लिहिल्यानें $\left(\frac{\text{अय}}{\text{ब}}\right)^2+\text{य}^2=\text{क}$

अथवा . . . . $\frac{\text{अ}^2\text{य}^2}{\text{ब}^2}+\text{य}^2=\text{क}$

छेद काढिल्यानें. . . . $\text{अ}^2\text{य}^2+\text{ब}^2\text{य}^2=\text{ब}^2\text{क}$

$\text{अ}^2+\text{ब}^2$ याणें भागिल्यानें . . . $\text{य}^2=\frac{\text{ब}^2\text{क}}{\text{अ}^2+\text{ब}^2}$

वर्गमूळानें . . . . . $\text{य}=\sqrt{\frac{\text{ब}^2\text{क}}{\text{अ}^2+\text{ब}^2}}=\text{ब}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^2+\text{ब}^2}}$ ही किंमत दुसऱ्यांत क्ष चे स्थळीं लिहिल्यानें

$\text{क्ष}=\frac{\text{अ}\times\text{ब}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^2+\text{ब}^2}}}{\text{ब}}=\text{अ}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^2+\text{ब}^2}}$ हें उत्तर.

चवथें $२\,\text{क्ष}+३\,\text{य}=२१$ आणि $३\,\text{क्ष}-२\,\text{य}=$

११ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ७ आणि **य** = ५

पांचवें, **क्ष** + **य** = १४ आणि **क्ष** − **य** = २ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ८ आणि **य** = ६

साहावें, $\left\{\begin{array}{l}\text{क्ष} : \text{य} :: ३ : २ \\ \text{क्ष}^{२} - \text{य}^{२} = २० \end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ६ आणि **य** = ४

सातवें, $\frac{\text{क्ष}}{३} + ३\,\text{य} = २१$ आणि $\frac{\text{य}}{३} + ३\,\text{क्ष} = २९$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ९ आणि **य** = ६

आठवें, $१० - \frac{\text{क्ष}}{२} = \frac{\text{य}}{३} + ४$ आणि $\frac{\text{क्ष} - \text{य}}{२} + \frac{\text{क्ष}}{४} - २ = \frac{३\text{य} - \text{क्ष}}{५} - १$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ८ आणि **य** = ६

नववें, **क्ष** : **य** : : ४ : ३ : आणि $\text{क्ष}^{३} - \text{य}^{३} = ३७$ आ

दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष**=४ आणि **य**=३

तिसरीरीति.

सांगितलीं दोन समीकरणें तशा संख्येनें किंवा अक्षर चिन्हानें गुणावीं किंवा भागावीं, कीं जेणेंकरून दोहोंतही एक अव्यक्त पद बरोबर होईल.

नंतर त्यांतील धनऋण चिन्हें जसें दाखवितात तसें त्या दोन समीकरणांची बेरीज किंवा वजाबाकी केल्यानें एक नवें समीकरण होईल. असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्तपद राहील. त्यांची किंमत पूर्वरीतीनें काढितां येईल. ह्मणजे जेव्हां त्या दोन बरोबर अव्यक्त पदांचीं चिन्हें विरूप आहेत, तेव्हां त्या दोन समीकरणांची मिळवणी करावी. आणि जेव्हां ती सरूप आहेत तेव्हां वजाबाकी करावी.

ठीप विषम वेळाप्रकाशक पदें समवेळाप्रकाशक करणें तर परस्परांस परस्परांचे वेळाप्रकाशकांनीं गुणावीं.

११ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** $= ७$ आणि **य** $= ५$

पांचवें, $क्ष + य = १४$ आणि $क्ष - य = २$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** $= ८$ आणि **य** $= ६$

साहावें, $\left\{\begin{array}{l} क्ष : य :: ३ : २ \\ क्ष^2 - य^2 = २० \end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** $= ६$ आणि **य** $= ४$

सातवें, $\frac{क्ष}{३} + ३ य = २१$ आणि $\frac{य}{३} + ३ क्ष = २९$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** $= ९$ आणि **य** $= ६$

आठवें, $१० - \frac{क्ष}{२} = \frac{य}{३} + ४$ आणि $\frac{क्ष - य}{२} + \frac{क्ष}{४} - २ = \frac{३ य - क्ष}{५} - १$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** $= ८$ आणि **य** $= ६$

नववें, $क्ष : य :: ४ : ३$: आणि $क्ष^2 - य^2 = ७$ आ

दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष=४ आणि य=३

तिसरी रीति.

सांगितलीं दोन समीकरणें तशा संख्येनें किंवा अक्षर चिन्हानें गुणावीं किंवा भागावीं, कीं जेणेंकरून दोहोंतही एक अव्यक्त पद बरोबर होईल.

नंतर त्यांतील धनऋण चिन्हें जसें दाखवितात तसें त्या दोन समीकरणांची बेरीज किंवा वजाबाकी केल्यानें एक नवें समीकरण होईल. असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्तपद राहील. त्यांची किंमत पूर्वरीतीनें काढितां येईल. ह्मणजे जेव्हां त्या दोन बरोबर अव्यक्त पदांचीं चिन्हें विरूप आहेत, तेव्हां त्या दोन समीकरणांची मिळवणी करावी. आणि जेव्हां ती सरूप आहेत तेव्हां वजाबाकी करावी.

ठीप विषम वेळाप्रकाशक पदें समवेळाप्रकाशक करणें तर परस्परांस परस्परांचे वेळाप्रकाशकांनीं गुणावीं.

उदाहरणें.

पहिलें, $\left\{\begin{array}{l} ३\,\text{क्ष} + ५\,\text{य} = ४० \\ \text{क्ष} + २\,\text{य} = १४ \end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

आतां दुसरे समीकरणास ३ यांनीं गुणून नंतर यांतून प्रथम समीकरण वजा करून

$$\begin{array}{r} ३\,\text{क्ष} + ६\,\text{य} = ४२ \\ ३\,\text{क्ष} + ५\,\text{य} = ४० \\ \hline \therefore\ \text{य} = २ \end{array}$$

ही य ची किंमत दुसरे समीकरणांत लिहून $\text{क्ष} = १४ - २\,\text{य}$

ह्मणजे, ... $\text{क्ष} = १४ - २ \times २ = १४ - ४ = १०$

उत्तर, $\text{क्ष} = १०$ आणि $\text{य} = २$

दुसरें, $\left\{\begin{array}{l} ५\,\text{क्ष} - ३\,\text{य} = ९ \\ २\,\text{क्ष} + ५\,\text{य} = १६ \end{array}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

आतां या समीकरणांतील प्रथम पदें ज्यांत क्ष अव्यक्त पद आहे तीं इछिल्या प्रमाणें बरोबर करितां येतील. अथवा दुसरीं पदें ज्यांत य अव्यक्तपद आहे तीं बरोबर करितां येतील. दोन प्रथम पदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण २ याणीं आणि दुसरें ५ याणीं गुणावें. आणि दुसरीं पदें बरोबर करणें तर प्रथम ५ याणीं आणि दु

सरें ३ याणीं गुणावें. जसें पुढें सांगतो.

१ प्रथम पदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण २ याणीं गुणावें.

ह्मणजे, ... $१० क्ष - ६ य = १८$

आणि दुसरें ५ याणीं गुणावें ह्मणजे $१० क्ष + २५ य = ८०$

नंतर वरचें खालच्यांत वजा करून . . . $३१ य = ६२$

भागाकारानें, $य = \frac{६२}{३१} = २$ याजकरितां ही किंमत प्रथमांत य चे स्थळीं लिहून क्ष $= \frac{९+३य}{५} = \frac{९+६}{५} = \frac{१५}{५} = ३$

२ दुसरीं पदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण ५, याणीं गुणावें.

ह्मणजे, ... $२५ क्ष - १५ य = ४५$

आणि दुसरें ३ याणीं गुणावें ह्मणजे $६ क्ष + १५ य = ४८$

नंतर दोहोंची मिळवणी करून $३१ क्ष$ * * $= ९३$

भागाकारानें, ... $क्ष = \frac{९३}{३१} = ३$ ही किंमत प्रथम समीकरणांत क्ष चे स्थळीं लिहावी, $- य = \frac{९-५क्ष}{३}$

अथवा . . . . $य = \frac{५क्ष-९}{३} = \frac{५\times३-९}{३} = \frac{१५-९}{३} = \frac{६}{३} = २$

उत्तर, $क्ष = ३$ आणि $य = २$

तिसरें, $\frac{क्ष+८}{४} + ६ य = २१$ आणि $\frac{य+५}{३} क्ष = २३$

या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ४ आणि **य** = ३

चवथें, $\frac{३क्ष-य}{४}+१०=१३$ आणि $\frac{३य+क्ष}{२}+५=१२$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ५ आणि **य** = ३

पांचवें, $\frac{३क्ष+४य}{५}+\frac{क्ष}{४}=१०$ आणि $\frac{६क्ष-२य}{३}+\frac{य}{६}=१४$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ८ आणि **य** = ४

साहावें, $३क्ष+४य=३८$ आणि $४क्ष-३य=०$ या दोन समीकरणांतील **क्ष** आणि **य** या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, **क्ष** = ६ आणि **य** = ५.

एकवर्णसमीकरणपृथक्करण्याची रीति.

जेव्हां तीन आदिकरून अव्यक्त पदें आहेत.

जेव्हां तीन अव्यक्तपदें वेगळाले समीकरणांत यें

तात, तेव्हां यापुढील रीती करून त्यांचें एकच समीकरण होईल.

रीति.

१ त्या प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्त पदाची किंमत काढावी, ती अशी कीं, राहिले दोन अव्यक्त पदांची किंमत ठाऊक आहेच असें मानून. नंतर या किंमतींत प्रथम दुसरीचे बरोबर करावी, आणि प्रथम किंवा दुसरी तिसरीचे बरोबर करावी, ह्मणजे दोन नवीं समीकरणें होतील. ज्यांत दोन मात्र अव्यक्त पदें राहातील. ज्यांची किंमत पूर्वरीतीकरून निघेल. यापासूनच तिसऱ्याची किंमत साफ कळेल.

२ अथवा एकसमीकरणांतील एक अव्यक्त पदाची किंमत काढून ती राहिले दोन समीकरणांत त्या अव्यक्त पदाचे स्थळीं लिहून दोन नवीं समीकरणें होतील, ज्यांत दोनमात्र अव्यक्त पदें येतील. नंतर पूर्वरीती करून त्यांची किंमत निघेल.

३ अथवा एकेक समीकरण तशी संख्या किंवा अक्षरचिन्ह याणें गुणावें अथवा भागावें, ज्यापासून त्या सर्वसमीकरणांत एकपद बरोबर होईल. नंतर या तीन समीकरणांतून कोणतीहीं दोन समीकरणें तिस

वजा केलीं अथवा कोणतेही दोहोंची तिसऱ्याशी बेरीज घेतली, जसें त्यांचे चिन्हापासून कळेल तसें करावें, तर दोन नवीं समीकरणें होतील. अशीं कीं, ज्यांतील अव्यक्तपदाची किंमत पूर्व रीतीकरून काढितां येईल.

आणि या रीतीनें ४, ५ किंवा याहून अधिक अव्यक्त पदें असतील तीं तितकी संख्या समीकरणांतून निःशेष करितां येईल परंतु अशा प्रकारचे समीकरणांतील अव्यक्तपदांची किंमत काढायाची रीति याहून थोडक्यांत आणि अति सोपि आहे, ती बीजगणिताचा अति अभ्यास केला असतां प्रकट होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $$\left\{\begin{array}{l} क्ष + य + ज्ञ = ९ \\ क्ष + २य + ३ज्ञ = १६ \\ क्ष + ३य + ४ज्ञ = २१ \end{array}\right\}$$ या तीन समीकरणांतील **क्ष** **य** आणि **ज्ञ** या तीन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

१ रीतीनें,

या प्रत्येक समीकरणांत **य** आणि **ज्ञ** यांस स्थळांतर करून लिहि.

क्ष = ९ − य − ज्ञ

क्ष = १६ − २ य − ३ ज्ञ

क्ष = २१ − ३ य − ४ ज्ञ

नंतर प्रथम किंमत दुसरीशी बरोबर करून (९ − य − ज्ञ = १६ − २ य − ३ ज्ञ) तसेंच दुसरी तिसरीशीं बरोबर करून (१६ − २ य − ३ ज्ञ = २१ − ३ य − ४ ज्ञ) हीं दोन नवीं समीकरणें.

यांतील प्रथमांत ९ आणि ज्ञ आणि २ य यांस स्थळांतर करून
दुसऱ्यांत १६ आणि ३ ज्ञ आणि ३ य यांस

$$\left.\begin{array}{l}\text{य}=७-२\text{ज्ञ}\\ \text{य}=५-\text{ज्ञ}\end{array}\right\}\text{य}$$

च्या दोन किंमती बरोबर करून ५ − ज्ञ = ७ − २ ज्ञ

५ आणि २ ज्ञ यांस स्थळांतर करून ज्ञ = २

तेव्हां य = ५ − ज्ञ ह्मणजे य = ५ − २ = ३

आणि क्ष = ९ − य − ज्ञ ह्मणजे क्ष = ९ − ३ − २ = ४

उत्तर, क्ष = ४ य = ३ ज्ञ = २

२ रीतीनें,

प्रथम समीकरणांत क्ष = ९ − य − ज्ञ ही क्षची किंमत दुसऱ्या समीकरणांत लिहून
आणि तिसऱ्यांत

$$\left.\begin{array}{l}९+\text{य}+२\text{ज्ञ}=१६\\ ९+२\text{य}+३\text{ज्ञ}=२१\end{array}\right\}$$

हीं दोन नवीं समीकरणें जालीं.

प्रथमांत ९ आणि २ ज्ञ यास स्थळांतर करून य = ७

−२ ज्ञ ही यची किंमत शेवटील समीकरणांत लिहून १+
१४ − ४ ज्ञ + ३ ज्ञ = २१

स्थळांतरानें. . . . . . . २ = ज्ञ

याजकरितां . . य = ७ − २ ज्ञ
ह्मणजे . . . य = ७ − ४ = ३
आणि . . . क्ष = ९ − य − ज्ञ
ह्मणजे . . . क्ष = ९ − ३ − २ = ४

उत्तर, क्ष = ४, य = ३, ज्ञ = २ पूर्ववत् आहे.

३ रीतीनें,

प्रथम समीकरण दुसऱ्यांतून वजा करून य + २ ज्ञ = ७
आणि दुसरें तिसऱ्यांतून वजा करून य + ज्ञ = ५

हीं दोन नवीं समीकरणें जालीं. यांतील प्रथमांतून दुसरें वजा करून ज्ञ = २

याजकरितां . . . य = ५ − ज्ञ
ह्मणजे . . . . . य = ५ − २ = ३
आणि . . . . . क्ष = ९ − य − ज्ञ
ह्मणजे . . . . क्ष = ९ − ३ − २ = ४

उत्तर, क्ष = ४, य = ३, ज्ञ = २ पूर्व दोन उत्तरां बरोबर आहेत.

दुसरें, $$\left.\begin{array}{l} \text{क्ष}+\text{य}+\text{ज्ञ}=\text{१८} \\ \text{क्ष}+\text{३}\,\text{य}+\text{२}\,\text{ज्ञ}=\text{३८} \\ \text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{३}}\,\text{य}+\frac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{ज्ञ}=\text{१०} \end{array}\right\}$$ या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = ४, य = ६, ज्ञ = ८

तिसरें, $$\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{य}+\frac{\text{१}}{\text{३}}\,\text{ज्ञ}=\text{२७} \\ \text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{३}}\,\text{य}+\frac{\text{१}}{\text{४}}\,\text{ज्ञ}=\text{२०} \\ \text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{४}}\,\text{य}+\frac{\text{१}}{\text{५}}\,\text{ज्ञ}=\text{१६} \end{array}\right\}$$ या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ यांची किंमत काय आहे?

उत्तर, क्ष = १, य = १२, ज्ञ = ६०

चवथें, क्ष − य = २ आणि क्ष − ज्ञ = ३ आणि य + ज्ञ = ९ या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = ७, य = ५, ज्ञ = ४

पांचवें, $$\left\{\begin{array}{l} \text{२}\,\text{क्ष}+\text{३}\,\text{य}+\text{४}\,\text{ज्ञ}=\text{३४} \\ \text{३}\,\text{क्ष}+\text{४}\,\text{य}+\text{५}\,\text{ज्ञ}=\text{४६} \\ \text{४}\,\text{क्ष}+\text{६}\,\text{य}+\text{८}\,\text{ज्ञ}=\text{६८} \end{array}\right\}$$ या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ या तीन अव्यक्त पदांची किंमत काय आहे?

प्रश्नसमुदाय.

प्रश्नसमुदाय ह्मणजे कितीएक प्रश्न, ज्यांपासून एकवर्ण समीकरण उत्पन्न होतें.

प्रथम प्रश्न, दोन संख्या शोधायाच्या, ज्या दोन संख्यांची बेरीज १० होतात, आणि वजाबाकी ६ होतात.

आतां मोठी संख्या दाखवाया करितां क्ष आणि लहान संख्या दाखवाया करितां य घे[*].

तर प्रथम संकेतापासून . . $\text{क्ष} + \text{य} = १०$

दुसऱ्यापासून . . . $\text{क्ष} - \text{य} = ६$

प्रति समीकरणांतील य यास स्थळांतरानें
आणि $\left.\begin{aligned}\text{क्ष} &= १० - \text{य}\\ \text{क्ष} &= ६ + \text{य}\end{aligned}\right\}$

या दोन किंमती परस्पर.

बरोबर करून, . . . $६ + \text{य} = १० - \text{य}$

स्थळांतरानें, ... $२\,\text{य} = ४$

भागाकारानें, ... $\text{य} = \frac{४}{२} = २.$

याज करितां . . $\text{क्ष} = ६ + \text{य}$

---

[*] या सर्व उदाहरणांत जितक्या अव्यक्त संख्या आहेत, त्यांच स्थळीं तितकीं क्ष, य, ज्ञ इत्यादिक मूळ अक्षर लिपीचे शेवटील अक्षरें घेतात. तर याहून संक्षेप करून अव्यक्त संख्यांचे प्रतिस्थळीं वेगळालें अक्षर चिन्ह न घेतां कार्य होईल. परंतु शिकणारांस चांगला समज पडून पक्के व्हावें ह्मणून असें लिहिलें.

ह्मणजे [illegible] क्ष = ६ + २ = ८

उत्तर, ८ आणि २

दुसरा प्र० समाजीक रुपये १००० आहेत ते अ ब क या तीन जणांस वांटून द्यावें असे कीं अ ला ब पेक्षां २०० अधिक आणि ब ला क पेक्षां १०० अधिक होतील.

क्ष = अ चा भाग. य = ब चा भाग. आणि ज्ञ = क चा भाग असें असो.

आतां $क्ष + य + ज्ञ = १०००$

$क्ष = य + २००$

$य = ज्ञ + १००$

प्रथम समीकरणांत क्ष ची किंमत य + २०० लिहिलीतर त्या प्रथम समीकरणाचें रूप $२ य + २०० + ज्ञ = १०००$ असें होईल. नंतर यांत य ची किंमत ज्ञ + १०० य चे स्थ•

$३ ज्ञ + ४०० = १०००$

स्थळांतरानें . . . . . $३ ज्ञ = १००० - ४०० = ६००$

भागाकारानें $ज्ञ = \frac{६००}{३} = २००$

आतां $य = ज्ञ + १००$

ह्मणजे $य = २०० + १०० = ३००$

आणि $क्ष = य + २००$

ह्मणजे $क्ष = ३०० + २०० = ५००$

उत्तर, अ ५००, ब ३००, क २००

तिसरा, ५,००० रुपये २ असामीस वांटून देणें आहेत. असे कीं; त्यांचे भाग परस्पर प्रमाणांत होतील. जसे ७ : ८ तर प्रत्येकास काय काय भाग येईल?

आतां क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हें दोन अव्यक्त भाग दाखवायास घे.

तर प्रश्नाप्रमाणें ७ : ८ : : क्ष : य
यास समीकरण रूप देऊन ७ य = ८ क्ष
आणि . . . . क्ष + य = ५०००
दुसरे समीकरणांत यला स्थ० क्ष = ५००० − य हीक्षची किंमत प्रथमांत क्षचे स्थळीं लिहून ७ य = ४०००० − ८ य
८ य यास स्थळांतर करून १५ य = ४००००
भागाकारानें . . . य = $\frac{४००००}{१५}$ = २६६६$\frac{२}{३}$
वरचें समीकरण . . . क्ष = ५००० − य
यांत यची किंमत लिहून क्ष = ५००० − २६६६$\frac{२}{३}$ = २३३३$\frac{१}{३}$

उत्तर, क्ष चा भाग २३३३$\frac{१}{३}$ रुपये. आणि यचा २६६६$\frac{२}{३}$

चवथा, ती संख्या काय आहे? कीं, जिचा चौथा भाग पांचवे भागाहून १० आणि अधिकआहे.

हल्लीं अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षर चिन्ह घे.

आतां . . . . . $\frac{१}{४}क्ष - \frac{१}{५}क्ष = १०$

प्रथम छेद ४ याणीं गुणून $क्ष - \frac{४}{५}क्ष = ४०$

दुसरे छेद ५ याणीं गुणून $५क्ष - ४क्ष = २००$

तर, ... $क्ष = २००$ इच्छिली संख्या हें उत्तर.

पांचवा, ते अपूर्णांक काय होत? ज्यांचे अंशांत १ मिळविला असतां त्यांची किंमत $\frac{१}{२}$ आणि छेदांत १ मेळविला तर त्यांची किंमत $\frac{१}{३}$ होते.

एथें अव्यक्त अपूर्णांक दाखवायास $\frac{क्ष}{य}$ हीं अक्षर चिन्हें घे. तर प्रश्नाप्रमाणें . . . . $\frac{क्ष+१}{य} = \frac{१}{२}$

आणि . . . . . $\frac{क्ष}{य+१} = \frac{१}{३}$

प्रथमांत **य** आणि २ याणीं गुणून $२क्ष + २ = य$

दुसऱ्यांत **य** +१ आणि ३ याणीं गुणून $३क्ष = य + १$

प्रथम दुसऱ्यांतून वजा करून $क्ष - २ = १$

स्थळांतरानें . . . $क्ष = १ + २ = ३$

आतां . . . . $य = २क्ष + २$

ह्मणजे . . . . $य = ६ + २ = ८$

उत्तर, $\frac{३}{८}$ हे इच्छिले अपूर्णांक

साहावा, एक बिगारी याणें ३० दिवस चाकरी कबूल केली, पुढील करारा प्रमाणें ज्या दिवशीं चांगलें काम करील त्या दिवसाचे पैसे २० आणि ज्या दिवशी ख

ळेल किंवा गैरहजीर असेल त्या दिवसाचा उलटा दंड [illegible] पुढें ३० दिवस पुरे जाल्यानंतर करारा प्रमाणें त्याचें २४० पैसे निघाले, तेव्हां खेळणें व गैरहजीरी यांत किती दिवस गेले ते सांग.

अव्यक्त कामाचे दिवसस्थळीं क्ष आणि खेळणें गैरहजीर या दिवसांचे स्थळीं य हीं दोन अक्षर चिन्हें घे.

आतां . . . . $\text{क्ष} + \text{य} = ३०$

आणि . . . . $२० \text{क्ष} - १० \text{य} = २४०$ } या

प्रथम समीकरण १० याणीं गुणून $१० \text{क्ष} + १० \text{य} = ३००$ }

दोहोंची मिळवणी करून . . . $३० \text{क्ष} = ५४०$

भागाकारानें. . . . . $\text{क्ष} = \frac{५४०}{३०} = १८$

ही क्षची किंमत दुसरे समीकरणांत क्ष चे स्थळीं लिहून $\text{य} = ३० - \text{क्ष}$

ह्मणजे, ... $= ३० - १८ = १२$

उत्तर, कामाचे दिवस १८ खेळव गैरहजीरी दिवस १२

सातवा, एक पिंप पाण्यानें पूर्ण भरलें होतें. त्यांतून चतुर्थांश पाणी गळून गेलें आणि कांहीं कार्यार्थ ३० मण पाणी काढिलें, नंतर त्या पिंपांत काठी उभी करून सुमार पाहातां अर्धें पिंप पाणी बाकी आहे, तेव्हां त्या सगळे पिंपांत किती मण पाणी राहील तें सांग.

सगळे पिंपाचें पाणी अव्यक्त त्याचे स्थळीं क्ष मण घे.

आतां . . . $\frac{१}{४}$ क्ष इतकें पाणी गळोन गेलें याजकरि

तां . . . $\frac{१}{४}$ क्ष + ३० मण इतकें पाणी गेलें.

तेव्हां . . . $\frac{१}{२}$ क्ष = $\frac{१}{४}$ + ३० मण

४ या छेदांनीं गुणून २ क्ष = क्ष + १२०

क्ष यास स्थळांतर करून क्ष = १२० मण हें उत्तर.

आठवा. २० या संख्येचे दोन भाग कर, ते असे कीं, त्यांतील एके भागाची तिपट आणि दुसरे भागाची पांच पट यांची बेरिज ७६ होईल.

एथें दोन अव्यक्त भागांचे स्थळीं **क्ष** आणि **य** हीं दोन अक्षरें घे.

आतां . . . . क्ष + य = २०

आणि ३ क्ष + ५ य = ७६ } या

प्रथम समीकरण ३ याणीं गुणून ३ क्ष + ३ य = ६० }

दोहोंची वजाबाकी करून . . . २ य = १६

भागाकारानें. . . . . य = $\frac{१६}{२}$ = ८

प्रथम समीकरण . . . . क्ष = २० − य यांत

य ची किंमत **य** चे स्थळीं लिहून . . क्ष = २० − ८ = १२

उत्तर, १२ आणि ८

नववा, एके मनुष्यानें १ पैशाचे २ प्रमाणे कांहीं आंबे खरेदी करून, पुनः तितकेच आंबे १ पैशाचे ३ प्रमाणें ख

रेदी केले. नंतर ते सर्व आंबे कांही नफा व्हावा या आशेनें २ पैशाचे ५ आंबे याप्रमाणें विकले. तों शेवटीं त्यांत ३ पैसे तोटा आला तेव्हां ते सर्व आंबे किती होते सांग

आंब्याची संख्या प्रत्येक अव्यक्त ती दाखवायास क्ष अक्षर घे.

आतां, ... $\frac{१}{२}$ क्ष ही पहिले खरेदीची किंमत

आणि . . . . $\frac{१}{३}$ ही दुसरे खरेदीची किंमत

जर ५ आंबे : २ पैशास : : २ क्ष (सर्व आंबे) : $\frac{४}{५}$ क्ष ह्मणून ही दोन खरेद्यांची किंमत आहे. दर ५ आंबे २ पैशांस तर प्रश्नाप्रमाणें . . . $\frac{१}{२}$ क्ष + $\frac{१}{३}$ क्ष − $\frac{४}{५}$ क्ष = ३

प्रथम छेद २ याणीं गुणून क्ष + $\frac{२}{३}$ क्ष − $\frac{८}{५}$ क्ष = ६

दुसरे छेद ३ याणीं गुणून ३ क्ष + २ क्ष − $\frac{२४}{५}$ क्ष = १८

तिसरे छेद ५ याणीं गुणून १५ क्ष + १० क्ष − २४ क्ष = ९०

ह्मणजे . . . . क्ष = ९०

प्रति खरेदीचे इतके आंबे हें उत्तर.

दाहावा, अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळायास बसले, त्यांत अचे जवळ ८०० रुपये आणि बचे जवळ ६०० हे खेळाचे आरंभी होते. पुढें खेळांत परस्परांची हार जिंक बहुत वेळा होऊन शेवटास उठून गेले ते समयीं अचे ज

वळ रुपये ब जवळ राहिल्याचे तिपट राहिले, तेव्हां अ जवळून किती रुपये जिंकला तें सांग.

एथें **अ** चे जिंकीचे रुपये अव्यक्त त्यांचे स्थळीं **क्ष** अक्षर घे.

आतां . . . . ८०० + **क्ष** इतके **अ** चे मुद्दल व जिंक।

आणि . . . . ६०० − **क्ष** इतके **ब** चे मुद्दल वहार.

तर प्रश्नाप्रमाणें . . ८००+**क्ष** = १८००−३**क्ष**

८०० आणि ३ **क्ष** यांस स्थळांतर करून ४ **क्ष** = १०००

भागाकारानें. . . . . **क्ष** = $\frac{१०००}{४}$ = २५०

इतके रुपये **ब** पासून **अ** जिंकला हें उत्तर.

अकरावा, दोन संख्या काढ, अशा कीं ज्यांची वजाबाकी ४ आणि ज्यांचे वर्गांची वजाबाकी ६४ होतील.

उत्तर, ६ आणि १०

बारावा, दोन संख्या काढ, अशाकीं प्रथम संख्येचे अर्ध आणि दुसरे संख्येचा एक तृतीयांश मिळून ९ आणि प्रथम संख्येचा एक चतुर्थांश आणि दुसरे संख्येचा एक पंचमांश मिळून ५ होतील.

उत्तर, ८ आणि १५

तेरावा, २० या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं,

एके भागाचा एकतृतीयांश आणि दुसरे भागाचा एकपंचमांश मिळून ६ होतील.

उत्तर, १५ आणि ५

चौदावा, तीन संख्या काढ, अशा कीं प्रथम आणि दुसरी यांची बेरीज ७ आणि प्रथम आणि तिसरी यांची बेरीज ८ आणि दुसरी आणि तिसरी यांची बेरीज ९ होतील.

उत्तर, ३ आणि ४ आणि ५

पंधरावा, कोणी एक गृहस्थ होता, त्याजवळ रुपये २८००० हजार होते, त्यास एक पुत्र आणि एक कन्या ऐशीं दोन आपत्यें होतीं, पुढें तो मरण पावला. त्याणें पूर्वींच लिहून ठेविलें होतें कीं, पुत्रास १ रुपया १ पावला आणि कन्येस २ पावले या प्रमाणें वांटून द्यावे. तेव्हां ते रुपये त्याचे लेखा प्रमाणें वांटून देतां कोणास किती रुपये भाग आला तो प्रत्येकाचा सांग.

उत्तर, पुत्रास २०००० कन्येस ८०००

सोळावा, **अ**, **ब**, **क** या त्रिवर्गांनीं सर्कत केली, त्यांत सगळें भांडवल रुपये ४००० त्यांत **ब** चे **अ** चे दुपट आणि वर २०० आणि **क** चे **अ** आणि **ब** यांचे बेरिजे बरोबर, तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग.

उत्तर, अ चे ६००, ब चे १५००, आणि क चे २०००

सत्रावें, कोणी एके मनुष्यानें १००० रुपये कर्ज देणें होतें, तें चुकवितेसमयीं त्याणें कांहीं मोहरा व कांहीं रुपये अशी खिचडी मिळून नग २०२ देऊन तें बरोबर चुकविलें, तेव्हां त्यांत मोहरा किती व रुपये किती ते सांग.

उत्तर, ५७ मोहरा आणि १४५ रुपये

अठरावा, अ आणि ब हे दोघे मित्र होते, त्यांत अ ब ला सांगे कीं तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजजवळ तुझे बाकीचे दुपट रुपये होतील, तसें ब अ ला सांगे कीं तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजवळ तुझे बाकीचे तिपट रुपये होतील. तेव्हां एकेकाजवळ रुपये किती किती होते ते सांग.

उत्तर, अ २२, ब २६.

एकुणिसावा, कोणी एक गृहस्थ कांहीं रुपये घेऊन बाजारांत गेला, तेथें एके दुकानीं सामाना बद्दल २ रुपये खर्च करून पुढें चालिला, नंतर जवळ रुपये अधिक असावे ह्मणून जे बाकी राहिले होते त्यांचे बरोबर रुपये दुसऱ्या पासून कर्ज घेतले, नंतर दुसऱ्या दुकानीं गेला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकी रुपया बरोबर पूर्ववत् कर्ज घेऊन तिसरे दुकानीं गेला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकी बरोब

[illegible]वत् कर्ज घेऊन चौथे दुकानी गेला, तेथें २ रुपये खर्च केले तों जवळ बाकी कांहीं नाहीं असें जालें; तेव्हां तो गृहस्थ मुळीं किती रुपये घेऊन बाजारांत गेला तें सांग.

उत्तर, २ रुपये आणि ३ पावले.

विसावा, कोणी एक मनुष्य त्याची स्त्री आणि पुत्र यां सहवर्तमान प्रवासास गेला होता, तेथें मार्गीं कोणा एकाचे घरीं तीं तिघें जणें भोजनास गेलीं, तेव्हां त्याणें भोजन खर्च सांगितला कीं, मुलास रुपया $\frac{१}{२}$ आणि बायकोस मुला बरोबर आणि पुरुषाचा $\frac{१}{४}$ अधिक आणि पुरुषास पुत्र आणि स्त्री यांचे बरोबर इतके रुपये पडतील, असें बोलणें ठरवून भोजन दिलें. पुढें त्यांणीं काय काय द्यावें तें सांग.

पा. रे. रु. पा. रे.

उत्तर, बायकोस ३..३३$\frac{१}{३}$ पुरुषास १..१..३३$\frac{१}{३}$

एकविसावा, एक कोठार आहे त्यांत ६० खंडी धान्य राहतें, त्यांत त्रेवटी डाळ यारीतीनें भरली होती (त्रेवटी ह्मणजे चणे तुरी आणि उडीद यांच्या डाळी एकत्र मिश्रित) उडदांची डाळ चण्यांचे डाळी पेक्षां ६ खंडी अधिक, आणि तुरींचीडाळ उडदांचीडाळ आणि चण्यांचे डाळीचा $\frac{१}{२}$ इतक्यांचे बरोबर होती. तेव्हां त्या तीन डा-

व्वी प्रत्येकीं किती किती खंडी होत्या सांग.

खंडी खंडी खंडी
उत्तर, चण्यांची १५ उददांची २१ तुरींची २४

बाविसावा, कोणे एके सरदारा जवळ फौज होती, ती चौरस आकृति उभी केली तर २८४ मनुष्यें बाकी राहतात, आणि त्याचौरस आकृतीचे बाजूंस चौरस साधूनच एकेक मनुष्य वाढविलें तर २५ मनुष्यें कमीयेतात. तेव्हां ती सर्व फौज किती होती सांग.

उत्तर, २४०००

तेविसावा, ती संख्या काय आहे कीं, जीस ३, ५, ८ हे पर्यायानें मेळविले असतां तीन बेरजा भूमिति प्रमाणांत होतील.

उत्तर, १

चोविसावा, कोणी तिघांजणांनीं सर्कती व्यापार केला, तेथें भांडवल रुपये ७६०० त्यात प्रथम आणि दुसरा यांचे भाग मिळून तिसऱ्यापेक्षां २४०० रुपये अधिक होतात. तसें दुसरा आणि तिसरा यांचे भाग मिळून प्रथमांपेक्षां ३६०० रुपये अधिक होतात. तेव्हां एकेकाचे किती कीती रुपये सांग.

उत्तर, पहिल्याचे २००० दुसऱ्याचे ३००० तिसऱ्याचे २६००

[illegible] सा[illegible] दोन संख्या कोणत्या आहेत कीं ज्या परस्परांस आहेत जसे, ३ : ४ आणि त्यांचा गुणाकार त्यांचेच बरिजेचे बारा पट आहे.

उत्तर, २१, २८

सव्विसावा, किती एक मनुष्यें खाणावळ कबूल करून कोणा एकाचे घरीं जेवायास गेली होतीं, त्यांत ४ मनुष्यें अधिक असतीं तर सर्वांस प्रत्येकीं अर्ध अर्ध रुपया कमी पडता, आणि त्यांत २ उणीं असतीं तर एकेकास अर्ध अर्ध रुपया अधिक पडता. तेव्हां सर्व मनुष्यें किती आणि प्रत्येकास किती किती रुपये पडले व सर्व मिळून किती रुपये तें सांग.

उत्तर. २४ मनुष्यें, प्रत्येकास रु०३ पा०२ आणि सर्व बेरीज रु०८४

सत्ताविसावा, कोणे एके शिलेदाराजवळ २ तट्टू आणि २ जीन होते. त्यांत एक जीन बहुमोल त्याची किंमत रुपये १८० आणि जीन अल्पमोल त्याची किंमत रुपये ३० जेव्हां प्रथम तट्टूवर बहुमोल जीन आणि दुसरे तट्टूवर अल्पमोल जीन घालतो तेव्हां प्रथमाची किंमत दुसऱ्याचे दुपट होते आणि जेव्हां प्रथमावर अल्पमोल जीन आणि दुसऱ्यावर बहुमोल जीन असें घालतो तेव्हां दुसऱ्याची किंमत प्रथमाचे तिपट होते. तेव्हां त्या दोन तट्टूंची जिना वांचून वेगळाली किंमत काय आहे ती

सांग

उत्तर, प्रथमाची ६० रुपये दुसऱ्याची १० रुपये.

अठ्ठाविसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, ज्या परस्परांस आहेत. जसें, २ : ३ आणि त्या संख्यांत प्रत्येकीं ६ मिळविले असतां त्या दोन बेरजा परस्परांस होतील. जसें, ४ : ५

उत्तर, ६ आणि ९

एकुणतिसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, ज्यांत मोटी लाहानीस आहे, जशी त्यांची बेरीज २० यां संख्येस आहे आणि त्यांची वजा बाकी १० या संख्येस आहे.

उत्तर, १५ आणि ४५

तिसावा, त्या दोन संख्या कांय आहेत? ज्यांची वजा बाकी, बेरीज आणि गुणाकार यांस होते, जशी २ ही संख्या ३ आणि ५ यांस आहे.

उत्तर, २ आणि १०

एकतिसावा, गणित श्रेढीच्या त्या तीन संख्या काय आहेत, ज्यांत प्रथम तिसरीस आहे. जसें, ५ : ९ आणि त्या तिहींची बेरीज ६३ होतील.

उत्तर, १५, २१ आणि २७

बत्तिसावा, २४ या संख्येचे दोन भागकर असे

कीं मोठा भाग लाहान भागानें भागिला आणि लाहान भाग मोठे भागानें भागिला तर ते दोन भागाकार परस्परांस होतील. जसें, ४ : १

उत्तर, १६ आणि ८

तेहतिसावा, दोन गृहस्थ परस्पर अनेक गोष्टी बोलत होते, त्यांत एकानें दुसऱ्यास विचारिलें कीं, तुह्मास पुत्र २ त्यांचीं वयें काय आहेत? तेव्हां त्याणें सांगितलें जे त्या दोन पुत्रांचे वयांचे बेरिजेंत १८ मिळविले असतां वडील पुत्राचे वयाचे दुपट होतात, आणि दोघांचे वयांचे वजाबाकींत ६ वजा केले तर धाकट्याचे वया बरोबर होतात.

उत्तर, ३० आणि १२ वर्षें

चौतिसावा, त्या चार संख्या काय आहेत? ज्यांत प्रथम आणि दुसरी आणि तिसरी यांची बेरीज १२ होतील, आणि प्रथम दुसरी आणि चौथी यांची बेरीज १५ होतील. तसें प्रथम तिसरी आणि चौथी यांची बेरीज १८, तसें दुसरी तिसरी आणि चौथी यांची बेरीज २० होतील.

उत्तर, २, ४, ७ आणि ९

पस्तिसावा, ४८ या संख्येचे चार भाग कर, असे कीं, प्रथमांत ३ मिळविले ती बेरीज, दुसऱ्यांतून ३ व-

जा केले ती बाकी, तिसरा तिहींनीं गुणिला तो गुणाकार, आणि चवथा तिहींनीं भागिला तो भागाकार, हे सर्व परस्परबरोबर होतील.

उत्तर, ६, १२, ३ आणि २७

छत्तिसावा, कोणी एक फडिया सावकार आंबे मोहोर आणि पटणी या दोन जातींचे तांदूळ १०० मण एकत्र करून विकायास इछितो, त्यांत आंबे मोहोर २ रुपये मण आणि पटण १ रुपया २ पावल्यांनीं मण पडले, आणि हाली सकट भाव १ रुपया २ पावले ५० रेसांनीं मण असा आहे; तेव्हां त्याणें कोणते जातीचे किती किती मण एकत्र मिळवून १०० मण करावे, ह्मणजे पडले भावांत तोटा न येईल, तें सांग.

उत्तर, आंबे मोहोर २५ मण, पटण ७५ मण.

वर्गसमीकरण.

वर्गसमीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे.

एकाकी वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्त पदाचा वर्गमात्र येतो. जसें, **अ क्ष^2= ब**. आणि या जातीचे वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची रीति पूर्वीं एकवर्ण समीकरणांत सांगितली आहे.

संयुक्त वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्याचे एक पदां

दा[illegible] अंक अथवा अक्षर चिन्ह वेळा[illegible]कारांक असे [illegible] तर त्याणें समीकरणाचीं सर्व पदें भागावीं; आणि जर तें अव्यक्त वर्गपद ऋण (–) असेल तर त्यास समीकरणाचे सर्वपदांचीं धन (+) ऋण (–) चिन्हें बदल करावीं. कारण, अव्यक्तवर्गपद धन (+) असल्यावांचून पृथक्करण होत नाहीं, तेह्वां समीकरणाचें पृथक्करण वर्ग पुरा केल्यानें होतें. यारीतीनें.

२ वर्गसमीकरणाचे अव्यक्त बाजूचा पुरावर्ग करावा, यारीतीनें दुसरे पदाचे वेळा प्रकाशकाचें अर्ध घेऊन त्याचा वर्ग करावा, आणि हा वर्ग समीकरणाचे दोन बाजूंस मिळवावा, तेह्वां समीकरणाचे ज्या बाजूंत अव्यक्तपद आहे त्या बाजूचा पुरावर्ग होईल.

३ नंतर समीकरणाचे दोन बाजूंचे वर्गमूळ काढावें, ह्मणजे अव्यक्तपदाची किंमत प्रकट होईल. समीकरणाची व्यक्त बाजू धन किंवा ऋण (±) अशी करावी, ह्मणजे समीकरणाचीं दोन मुळें निघतील; अथवा अव्यक्त पदाच्या दोन किंमती निघतील⁂

१ टीप समीकरणाचे प्रथम बाजूचें मूळ सर्व

⁂ कोणतेही पदाचें वर्गमूळ धन + किंवा – ऋण असेल याजकरितां सर्व वर्गसमीकरणाचें पृथकरण दोन प्रकारचें होतें. जसें, + न^{2} याचें वर्गमूळ + न किंवा – न आहे. कारण + न × + न आणि

त अव्यक्तपदाचा वर्ग येतो; आणि दुसरे पदांत त्याच अव्यक्तपदाचा प्रथम घात येतो. जसें, $अक्ष^2 + बक्ष = क$

सर्वसंयुक्त वर्ग समीकरणांचीं पूर्वीं सांगितले रीतीकरून पृथक्करणें केल्यानंतर तीं समीकरणें पुढील तीन सारणी कोष्टकांतून एक कोष्टकाचे रूपाचीं होतील. जें रूप अव्यक्त पदाची किंमत काढाया करितां त्यास दिलें पाहिजे.

१ $क्ष^2 + अक्ष = ब$

२ $क्ष^2 - अक्ष = ब$

३ $क्ष^2 - अक्ष = -ब$

वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची सामान्य रीति पुढें सांगतों या प्रमाणें आहे, ज्यास वर्गपूरणीकरण ह्मणतात.

१ सांगितले वर्गसमीकरणास पूर्वरीतीनें सरळ करावें. असें कीं, वरचे तीन कोष्टकांतून एक कोष्टकासारिखें रूप होईल. याची रीति, पदांस स्थळांतर करावें. असे कीं, अव्यक्तपदें समीकरणाचे एक बाजूस होतील, आणि व्यक्तपदें दुसरे बाजूस आणि ज्यांत वर्ग आहे तें पद प्रथम स्थळीं, तसें ज्यांत प्रथम घात आहे तें पद दुसरे स्थळीं, याप्रमाणें करावें. नंतर अव्यक्तवर्गप-

दां बराबर आहे जें प्रथम पदाचें मूळ दुसरे पदाचे बळाप्रकाशकाचे अर्धानें युक्त दुसरें पद + किंवा ऋण − असेल तशा चिह्नानें ही.

$-न \times -न$ हे दोन ही $+न^{२}$ होतात. परंतु $-न^{२}$ अथवा $\sqrt{-न^{२}}$ हें सर्व मिथ्या भासवत् किंवा अशक्य. कारण, +न किंवा −न या दोहींचा ही वर्ग $-न^{२}$ होत नाही.

जसें, प्रथम सारणी कोष्टकांत $क्ष^{२}+अक्ष=ब$ यांतून निघतें कीं, $क्ष+\frac{१}{२}अ=\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ ह्मणजे हें मूळ $+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ अथवा $-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ असेल. कारण, यांतून कोणते ही एकानें त्याचें तेंच गुणिलें असतां $ब+\frac{१}{४}अ^{२}$ हा वर्ग होतो. याजकरितां याप्रमाणें मुळांत भ्रम राहतो तो दाखवाया करितां मुळाचे मागें ± हीं दोन चिन्हें लिहितात. जसें, $क्ष=\pm\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$.

या सारणी कोष्टकांत $क्ष=\pm\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ क्ष, अव्यक्त पदाची प्रथम किंमत ह्मणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ ही सर्वदा धन + आहे कारण $\frac{१}{४}अ^{२}+ब$ हें $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक आहे. तेव्हां मोठे वर्गाचें निश्चयें मोठें मूळ असावें, याजकरितां $\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ हें वर्गमूळ सर्वदा $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}}$ ह्मणजे $\frac{१}{२}अ$ याहुन मोठें आहे. याजकरितां $+\sqrt{ब\frac{१}{४}-अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा धन + होईल.

दुसरी किंमत ह्मणजे $क्ष=\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा ऋण − होईल. कारण, याचीं दोन ही पदें ऋण − आहेत. याजकरितां जेव्हां $क्ष^{२}+अक्ष=ब$ तेव्हां क्षची धन + किंमत ह्मणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ आणि क्षची ऋ. − किंमत ह्मणजे $क्ष=-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$.

दुसरे सारणी कोष्टकांत ह्मणजे $क्ष=\pm\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ यांत क्षची प्रथम किंमत ह्मणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ ही सर्वदा धन आहे. कारण दोन हीं पदें धन + आहेत. परंतु दुसरी किंमत ह्मणजे $क्ष=-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ ही सर्वदा ऋण − होईल. कारण $ब+\frac{१}{४}अ^{२}$ हें $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक आहे याजकरितां $\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ हें $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}}$

२ सर्व समीकरणें ज्यांन अव्यक्त पदांची दोन पदें येनात आणि प्रथम पदाचा घात प्रकाशक दुसरे पदाचे घात प्रकाशकाचे दुप्पट आहे, तेव्हां त्याचें पृथक्करण पूर्व प्रमाणें वर्गसमीकरणरीतीनेंच वर्गपुरा केल्यानें होतें

म्हणजे $\frac{१}{२}\text{अ}$ याहून मोठं आहे. म्हणून $\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ हें सर्वदा ऋण आहे.

याजकरितां जेव्हां $\text{क्ष}^{२}-\text{अक्ष}=\text{ब}$ तेव्हां क्षची धन+ किंमत म्हणजे $\text{क्ष}=+\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ आणि क्षची ऋण− किंमत म्हणजे $\text{क्ष}=-\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$.

यापासून कळतें कीं दोन प्रथम सारणी कोष्टकांत सर्वदा अव्यक्त पदाच्या दोन किंमती निघतात, त्यांत एक धन+ आणि दुसरी ऋण− आहे.

परंतु तिसरे सारणी कोष्टकांत जेव्हां $\text{क्ष}=\pm\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ यांत क्षच्या दोन किंमती धन होतील. जेव्हां $\frac{१}{४}\text{अ}^{२}$ हा बहुत अधिक आहे, आतां क्षची प्रथम किंमत म्हणजे $\text{क्ष}=+\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ ही धन होईल. कारण दोन ही पदें धन+ आहेत.

दुसरी किंमत म्हणजे $\text{क्ष}=-\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ ही ही धन+ आहे. कारण $\frac{१}{४}\text{अ}^{२}$ हें $\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}$ याहून अधिक आहे. याजकरितां $\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}$ म्हणजे $\frac{१}{२}\text{अ}$ हें $\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}}$ याहून अधिक आहे, म्हणून $-\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ हें सर्वदा धन+ होईल. अशापासून जेव्हां $\text{क्ष}^{२}-\text{अक्ष}=-\text{ब}$ तेव्हां क्षची प्रथम किंमत $\text{क्ष}=+\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ आणि दुसरी म्हणजे $\text{क्ष}=-\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}-\text{ब}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ या दोन ही किंमती धन आहेत.

परंतु या तिसरे सारणी कोष्टकांत जर बची किंमत $\frac{१}{४}\text{अ}^{२}$

आणि, $क्ष^४ + अ\,क्ष^२ = ब$ अथवा $क्ष^{२न} + अ\,क्ष^{न} = ब$ किंवा $क्ष + अ\,क्ष^{\frac{१}{२}} = ब$ हीं सर्व वर्गसमीकरणा सारखीं आहेत, आणि यांचें पृथक्करण त्या वर्गपृथक्करणाप्रमाणें होतें.

उदाहरण.

पहिलें, $क्ष^२ + ४\,क्ष = ६०$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . $क्ष^२ + ४\,क्ष = ६०$

वर्ग पुरा करून . $क्ष^२ + ४\,क्ष + ४ = ६० + ४ = ६४$

नंतर मूळ काढून . . $क्ष + २ = ±८$

२ यांस स्थलांतर करून . . $क्ष = ६$ किंवा -१० हीं दोन मुळें हें उत्तर.

दुसरें, $क्ष^२ - ६\,क्ष + १० = ६५$ या वर्गसमीकर

याहून अधिक असेल तर अशा प्रश्नाचें पृथक्करण करायास अशक्य आहे. कारण, कोणतें हीं पद धन + किंवा - ऋण असो परंतु त्याचा वर्ग सर्वदा धन आहे. याजकरितां ऋण पदाचें वर्गमूळ अशक्य. आणि जेव्हां ब हा $\frac{१}{४}अ^२$ याहून अधिक आहे तेव्हां $\frac{१}{४}अ^२ - ब$ हें ऋण पद होईल. आणि याजकरितां त्याचें वर्गमूळ म्हणजे $\sqrt{\frac{१}{४}अ^२ - ब}$ हा मिथ्याभास किंवा अशक्य आहे. याजकरितां या प्रकारांत $क्ष = \frac{१}{२}अ ± \sqrt{\frac{१}{४}अ^२ - ब}$ म्हणजे क्षच्या दोन किंमती अशक्य किंवा मिथ्याभासपदें आहेत.

णातील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . . $क्ष^२ - ६ क्ष + १० = ६५$

१० यांस स्थळांतर करून . $क्ष^२ - ६ क्ष = ५५$

वर्गपुराकरून . . . $क्ष^२ - ६ क्ष + ९ = ६४$

नंतर मूळ काढून . . . . $क्ष - ३ = \pm ८$

पुनः ३ यांस स्थळांतर करून . . $क्ष = ११$ किंवा -५ हें उत्तर.

तिसरें, $२ क्ष + ८ क्ष - ३० = ६०$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . . . $२ क्ष^२ + ८ क्ष - ३० = ६०$

३० यांस स्थळांतर करून . . $२ क्ष^२ + ८ क्ष = ९०$

२ यांणीं भागून. . . . . $क्ष^२ + ४ क्ष = ४५$

वर्गपुरा करून . . . . $क्ष^२ + ४ क्ष + ४ = ४५$

नंतर मूळ काढून . . . . $क्ष + २ = \pm ७$

पुनः २ यांस स्थळांतर करून . . $क्ष = ५$ किंवा -९ हें उत्तर.

चवथें, $२ क्ष^२ - ३ क्ष + ९ = ८\frac{२}{३}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . . $३ क्ष^२ - ३ क्ष - ९ = ८\frac{२}{३}$

३ यांणीं भागून . . . $क्ष^२ - क्ष + ३ = २\frac{८}{९}$

३ यांस स्थळांतर करून $क्ष^२ - क्ष = -\frac{१}{९}$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^{२} - क्ष + \frac{१}{४} = \frac{१}{३६}$

नंतर मूळ काढून . . . $क्ष - \frac{१}{२} = \pm \frac{१}{६}$

पुनः $\frac{१}{२}$ यास स्थळांतर करून . . $क्ष = \frac{२}{३}$ किंवा $-\frac{१}{३}$ हें उत्तर.

पांचवें, $\frac{१}{२} क्ष^{२} - \frac{२}{३} क्ष + ३० \frac{१}{२} = ५२ \frac{२}{३}$ या वर्ग समीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . $\frac{१}{२} क्ष^{२} - \frac{२}{३} क्ष + ३०\frac{१}{२} = ५२ \frac{२}{३}$

$३०\frac{१}{२}$ यांस स्थळांतर करून $\frac{१}{२} क्ष^{२} - \frac{२}{३} क्ष = २२ \frac{१}{६}$

२ यांणीं गुणून ; . . $क्ष^{२} - \frac{४}{३} क्ष = ४४ \frac{१}{३}$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^{२} - \frac{४}{३} क्ष + \frac{४}{९} = ४४ \frac{७}{९}$

मूळ काढून . . . $क्ष - \frac{२}{३} = \pm ६ \frac{२}{३}$

पुनः $\frac{२}{३}$ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष = ७$ किंवा $-६ \frac{२}{३}$ हें उत्तर.

साहावें. $अ क्ष^{२} - ब क्ष = क$ या वर्ग समीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . $अ क्ष^{२} - ब क्ष = क$

अ याणें भागून . . $क्ष^{२} - \frac{ब}{अ} क्ष = \frac{क}{अ}$

वर्ग पुरा करून . . $क्ष^{२} - \frac{ब}{अ} क्ष + \frac{ब^{२}}{४ अ^{२}} = \frac{क}{अ} + \frac{ब^{२}}{४ अ^{२}}$

नंतर मूळ काढून . . $क्ष - \frac{ब}{२अ} = \pm \sqrt{\frac{४ अक + ब^{२}}{४ अ^{२}}}$

$\frac{ब}{अ}$ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष = \pm \sqrt{\frac{४ अक + ब^{२}}{४ अ^{२}}} + \frac{ब}{२अ}$ हें उत्तर.

सातवें, $क्ष^४ - २ अ क्ष^२ = ब$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमतकाय आहे?

आतां . . . $क्ष^४ - २ अ क्ष^२ = ब$

वर्ग पुराकरून . : $क्ष^४ - २ अ क्ष^२ + अ^२ = अ^२ + ब$

मूळ काढून . . $क्ष^२ - अ = \pm\sqrt{अ^२ + ब}$

अ यांस स्थळांतरकरून . $क्ष^२ = \pm\sqrt{अ^२ + ब} + अ$

नंतर वर्गमूळ काढून . : $क्ष = \pm\sqrt{अ + \sqrt{अ^२ + ब}}$

या रीतीनें सर्वदा असे कामाचे शब्द प्रत्येक रेघांस लिहून शिकणारे चांगले समजदार होऊन पुढील उदाहरणांचीं पृथक्करणें लौकरकरितील असें त्यांस शिकवावें.

आठवें, $क्ष^२ - ६ क्ष - ७ = ३३$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = १०$

नववें, $क्ष^२ - ५ क्ष - १० = १४$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ८$

दाहावें, $५ क्ष^२ + ४ क्ष - ९० = ११४$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ६$

अकरावें, $\frac{१}{२} क्ष^२ - \frac{१}{३} क्ष + २ = ९$ या वर्गसमी

करणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ४$

बारावें, $३\,क्ष^{४} - २\,क्ष^{२} = ४०$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = २$

तरावें, $\frac{१}{३}\,क्ष - \frac{१}{२}\sqrt{क्ष} = १\frac{१}{२}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ९$

चौदावें, $\frac{१}{२}\,क्ष^{२} + \frac{२}{३}\,क्ष = \frac{३}{४}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ७२७६६$

पंधरावें, $क्ष^{६} + ४\,क्ष^{३} = १२$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = \sqrt[३]{२} = १.२५९९२१$

सोळावें, $क्ष^{२} + ४\,क्ष = अ^{२} + २$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = \sqrt{अ^{२}+६} - २$

प्रश्न.

ज्यापासून वर्गसमीकरणें उत्पन्न होतात.

पहिला, त्या दोन संख्या काढ, ज्यांची वजा बा

की २ आणि ज्यांचा गुणाकार ८० होतो.

दिल्या अव्यक्त २ संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन अक्षरचिन्हें घे*

आतां प्रथम संकेता प्रमाणें . . . $\text{क्ष} - \text{य} = २$

दुसऱ्या प्रमाणें . . . . $\text{क्ष}\,\text{य} = ८०$

प्रथमांतील य यास स्थळांतर करून $\text{क्ष} = \text{य} + २$

क्ष ची किंमत दुसऱ्यांत लिहून $\text{य}^{२} + २\text{य} = ८०$

वर्गपुरा करून $\text{य}^{२} + २\text{य} + १ = ८१$

मूळ काढून . . $\text{य} + १ = ९$

१ यास स्थळांतर करून $\text{य} = ८$

वर प्रमाणें क्ष ची किंमत . $\text{क्ष} = \text{य} + २ = १०$

उत्तर, १० आणि ८

दुसरा, १४ या संख्येचे दोन भाग कर. असे कीं, त्यांचा गुणाकार ४८ होईल.

दोन अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हें घे.

---

* या प्रश्नांत जसें एकवर्णसमीकरणांत आहे. कीं जितकीं अव्यक्तपदें आहेत, तितकीं अक्षर चिन्हें घेतात. पृथक्करण करायास तसेंच आहे, परंतु याहून संक्षेपरीति आहे पण अभ्यास करण्यास आरंभीं ती उपयोगी नव्हे. कारण प्रथमच कठीण लागलें तर पुढें समज होणें दुर्घट.

आतां प्रथम संकेता प्रमाणें · · $\textbf{क्ष} + \textbf{य} = १४$

आणि दुसरे संकेता प्रमाणें · · $\textbf{क्ष}\textbf{य} = ४८$

प्रथम समीकरणांतील **य** यास स्थळां० $\textbf{क्ष} = १४ - \textbf{य}$ ही **क्ष**ची किंमत

दुसरे समीकरणांतील **क्ष**चे स्थळीं लि० $१४\textbf{य} - \textbf{य}^{२} = ४८$

वर्गधनकरावया करितां सर्व चिन्हें बदल करून $\textbf{य}^{२} - १४\textbf{य} = -४८$

नंतर वर्गपुरा करून · · $\textbf{य}^{२} - १४\textbf{य} + ४९ = १$

वर्गमूळ काढून · · · $\textbf{य} - ७ = \pm १$

७ यांस स्थलांतर करून · · · $\textbf{य} = ८$ आणि ६

हे इछिले दोन भाग हें उत्तर.

तिसरा, जा दोन संख्यांची बेरीज ९ होतात, आणि ज्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ त्या दोन संख्या काय आहेत?

या दोन अव्यक्त संख्या दाखवायास **क्ष** आणि **य** हीं अक्षरें घे.

आतां प्रथम संकेता प्रमाणें · · $\textbf{क्ष} + \textbf{य} = ९$

आणि दुसरे संकेता प्रमाणें · · $\textbf{क्ष}^{२} + \textbf{य}^{२} = ४५$

प्रथम समीकरणांतील **य** यास स्थळां० $\textbf{क्ष} = ९ - \textbf{य}$ ही **क्ष**ची किंमत

दुसरे समीकरणांत लिहून $८१ - १८\textbf{य} + २\textbf{य}^{२} = ४५$

८१ यांस स्थळांतर करून . . . $२य^{२} - १८य = - ३६$

२ यांणीं भागून . . . $य^{२} - ९य = - १८$

नंतर वर्गपुरा करून . . $य^{२} - ९य + \frac{८१}{४} = \frac{९}{४}$

वर्गमूळ काढून . . $य - \frac{९}{२} = \pm \frac{३}{२}$

आतां $\frac{९}{२}$ यांस स्थळांतर करून $य = \pm \frac{३}{२} + \frac{९}{२} = ६$

आणि ३ या इछिल्या दोन संख्या हें उत्तर.

चवथा, त्या दोन संख्या काय आहेत ज्यांची बेरीज गुणाकार आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी हीं तीन ही बरोबर आहेत.

अव्यक्त दोन संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे.

प्रथम आणि दुसरे संकेता प्रमाणें $क्ष + य = क्षय$

प्रथम आणि तिसरे संकेता प्रमाणें $क्ष + य = क्ष^{२} - य^{२}$

दुसऱ्याच्या दोनबाजू क्ष + य यांणीं भागून $१ = क्ष - य$

य यास स्थळांतर करून . . $य + १ = क्ष$ ही क्षची किंमत

प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहून $२य + १ = य^{२} + य$

२ य यांस स्थळांतर करून . . $१ = य^{२} - य$

वर्ग पुरा करून . . . . $\frac{५}{४} = य^{२} - य + \frac{१}{४}$

मूळ काढून . . . . . . $\frac{१}{२}\sqrt{५} = य - \frac{१}{२}$

$\frac{१}{२}$ यास स्थळांतर करून. . $\frac{१}{२}\sqrt{५} + \frac{१}{२} = य$

आणि वरचे समीकरणा प्रमाणें . $क्ष = \frac{१}{२}\sqrt{५} + \frac{३}{२}$

या कोष्ठकांतील $\sqrt{५}$ यांची किंमत दशांशांत काढून $क्ष = + २·६१८०$ इत्यादिक निघेल – आणि $य = + १·६१८०$ इत्यादिक.

पांचवा, गणितश्रेढींत त्या चार संख्या काय आहेत. कीं ज्यांचे दोन शेवटांचा गुणाकार २२ आहे - आणि दोन मध्य पदांचा गुणाकार ४० होतो.

अतिलाहान अव्यक्तपद दाखवायास क्ष अक्षर घे आणि अव्यक्त उत्तर दाखवायास य अक्षर घे.

तर. $क्ष$, $क्ष + य$, $क्ष + २य$, $क्ष + ३य$ हीं चार पदें त्या अव्यक्त चार संख्या दाखवितात.

आतां प्रथम संकेता प्रमाणें . $क्ष^{२} + ३\,क्षय = २२$

दुसरे संकेता प्रमाणें . $क्ष^{२} + ३\,क्षय + २\,य^{२} = ४०$

दुसऱ्यांतून प्रथम वजा करून . $२\,य^{२} = १८$

२ यांणीं भागून . . . $य^{२} = ९$

वर्गमूळ काढून . . . $य = ३$ हें उत्तर आहे.

य ची किंमत प्रथमांत लिहून $क्ष^{२} + ९\,क्ष = २२$

वर्गपुरा करून . . $क्ष^{२} + ९\,क्ष + \frac{८१}{४} = \frac{१६९}{४}$

मूळ काढून. $क्ष + \frac{१}{२} = \frac{५}{२}$

$\frac{१}{२}$ यांस स्थळांतर करून. $क्ष = २$ हें अति लाहान पद याजकरितां २, ५, ८, ११ या इछिल्या च्यार संख्या हें उत्तर.

साहावा, भूमितिश्रेढींत त्या तीन संख्या काय आहेत. कीं ज्यांची बेरीज ७ होते आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज २१ होते.

अव्यक्त तीन संख्या दाखवायास क्ष, य, आणि ज्ञ हीं तीन अक्षर चिन्हें घे.

तर प्रथम संकेता प्रमाणें $क्ष\,ज्ञ = य^{२}$

आणि दुसरे संकेता प्रमाणें $क्ष + य + ज्ञ = ७$

आतां तिसरे संकेता प्रमाणें $क्ष^{२} + य^{२} + ज्ञ^{२} = २१$

दुसऱ्यांतील य यास स्थळांतर करून $क्ष + ज्ञ = ७ - य$

याच समीकरणांचे दोनही बाजूंचे वर्ग करून $क्ष^{२} + २\,क्ष\,ज्ञ + ज्ञ^{२} = ४९ - १४\,य + य^{२}$

२ क्ष ज्ञ यांचे स्थळीं प्रथमांतील. क्ष ज्ञ त्यांची किंमत $य^{२}$ ती लिहून $क्ष^{२} + २\,य^{२} + ज्ञ^{२} = ४९ - १४\,य + य^{२}$

दोन बाजूंचे $य^{२}$ वजा करून $क्ष^{२} + य^{२} + ज्ञ^{२} = ४९ - १४\,य$

आतां $क्ष^{२} + य^{२} + क्ष$ यांच्या दोन किंमतींची बराबरी करून. $२१ = ४९ - १४\,य$

२१ आणि १४ य॰ स्थळांतर करून $१४\,य = २८$

१४ यांणीं भागून. . . . **य** = २ हें दुसरें पदही.

यची किंमत प्रथमांत लिहून **क्ष ज्ञ** = ४

चौथ्या समीकरणांतील लिहून . . **क्ष** + **ज्ञ** = ५

या शेवटील समीकरणांतील **ज्ञ** यास स्थळांतर करून . . . **क्ष** = ५ − **ज्ञ** ही **क्ष**ची किंमत त्या शेवटिलाचे वरचे समीकरणांत लिहून ५ **ज्ञ** − $\text{ज्ञ}^{२}$ = ४

वर्ग धनकरायास सर्व चिन्हें बदलकरून $\text{ज्ञ}^{२}$ − ५ **ज्ञ** = − ४

वर्गपुराकरून . . . $\text{ज्ञ}^{२} - ५\,\text{ज्ञ} + \frac{२५}{४} = \frac{९}{४}$

मूळ काढून . . . $\text{ज्ञ} - \frac{५}{२} = \pm\frac{३}{२}$

$\frac{५}{२}$ यांस स्थळांतर करून . . **ज्ञ** = ४ अथवा १

ही **क्ष**ची किंमत.

याजकरितां १, २, ४ या इछिल्या तीन संख्या हें उत्तर.

वर्गसमीकरणाचे दुसरे प्रश्न.

पूर्वीं सांगितलें कीं अव्यक्त पदें आहेत तितकीं अक्षर चिह्नें घ्यावीं ह्मणून. परंतु त्या शिवाय दुसरी रीति आहे तिचीं उदाहरणें लिहितों.

उदाहरणें.

पहिलें, दोन संख्या काढ, अशा कीं त्यांची वजा बा-

की ८ आणि त्यांचा गुणाकार २४० होईल.

आतां लाहान अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर . . . . क्ष + ८ = मोठी संख्या

आणि प्रश्नाप्रमाणें क्ष (क्ष + ८) ह्मणजे क्ष^{२} + ८क्ष = २४०

वर्ग पुरा करून . . क्ष^{२} + ८ क्ष + १६ = २५६

वर्गमूळ काढून . . क्ष + ४ = १६

४ यांस स्थळांतर करून . क्ष = १२ ही लाहान संख्या.

तेव्हां क्ष + ८ = १२ + ८ = २० ही मोठी संख्या हें उत्तर.

दुसरा, ६० या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं त्यांचा गुणाकार ८६४ होईल.

आतां मोठा अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर . . . . ६० − क्ष = लाहान भाग

आणि प्रश्नाप्रमाणें . क्ष (६० − क्ष) ह्मणजे ६०

क्ष − क्ष^{२} = ८६४,

दोन बाजूंचीं सर्व चिन्हें बदल करून क्ष^{२} − ६० = − ८६४

वर्ग पुरा करून . . . क्ष^{२} − ६० क्ष + ९०० = ३६

वर्गमूळ काढून . . . क्ष − ३० = ± ६

३० यांस स्थळांतर करून . . क्ष = ± ६ + ३०

याजकरितां क्ष = ६ + ३० = ३६ अथवा ३० − ६ = २४ ह्म

मोल $\frac{\text{८०}}{\text{क्ष}+\text{४}}$

प्रश्ना प्रमाणें $\frac{\text{८०}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{८०}}{\text{क्ष}+\text{४}} + \text{१}$

क्ष नें गुणून $\text{८०} = \frac{\text{८० क्ष}}{\text{क्ष}+\text{४}} + \text{क्ष}$

क्ष + ४ यांणीं गुणून $\text{८० क्ष} + \text{३२०} = \text{८० क्ष} + \text{क्ष}^{\text{२}} + \text{४ क्ष}$

८० क्ष दोन बाजूंतून टाकून $\text{क्ष}^{\text{२}} + \text{४ क्ष} = \text{३२०}$

वर्गपुरा करून $\text{क्ष}^{\text{२}} + \text{४ क्ष} + \text{४} = \text{३२४}$

वर्गमूळ काढून $\text{क्ष} + \text{२} = \text{१८}$

२ यांस स्थळांतर करून $\text{क्ष} = \text{१८} - \text{२} = \text{१६}$ मेंढ्यांची संख्या. हें उत्तर.

साहावा, दोन संख्या काढ, अशा कीं त्यांची बेरीज १३ (अ) आणि त्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ४७२१ (ब) होईल.

अव्यक्त दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर $\frac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ} + \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{क्ष}$ म्हणजे $\frac{\text{अ}+\text{क्ष}}{\text{२}}$ ही मोठी संख्या.

आणि $\frac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ} - \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{क्ष}$ म्हणजे $\frac{\text{अ}-\text{क्ष}}{\text{२}}$ ही लाहान संख्या आहे.

आतां प्रश्ना प्रमाणें $\frac{(\text{अ}+\text{क्ष})^{\text{४}}}{\text{१६}} + \frac{(\text{अ}-\text{क्ष})^{\text{४}}}{\text{१६}} = \text{ब}$

१६ यांणीं गुणून $(\text{अ}+\text{क्ष})^{\text{४}} + (\text{अ}-\text{क्ष})^{\text{४}} = \text{१६ ब}$

घात करून त्यांची बेरीज $\text{२ अ}^{\text{४}} + \text{१२ अ}^{\text{२}}\text{क्ष}^{\text{२}} + \text{२ क्ष}^{\text{४}} = \text{१६ ब}$

स्थ० आणि २ यांणीं भागून . $क्ष^४+६अ^२क्ष^२=८ब-अ^४$

वर्गपुराकरून . $क्ष^४+६अ^२क्ष^२+९अ^४=८ब+८अ^४=८(ब+अ^४)$

मूळ काढून . . $क्ष^२+३अ^२=\sqrt{८(अ+अ^४)}$

$३अ^२$ यांस स्थळांतरकरून $क्ष^२=\sqrt{८(ब+अ^४)}-३अ^२$

पुनः वर्गमूळ काढून . $क्ष=\sqrt{\sqrt{८(ब+अ^४)}-३अ^२}$

आतां यांत **अ**ची किंमत १३ आणि **ब**ची ४७२१ ही लिहून

$$क्ष = \sqrt{\sqrt{८(४७२१+२८५६१)}-५०७}$$

$$= \sqrt{५१६-५०७}$$

$$= \sqrt{९}$$

= ३ ही **क्ष**ची किंमत ह्मणजे दोन संख्यांची वजाबाकी. तर $\frac{अ+क्ष}{२}=\frac{१३+३}{२}=\frac{१६}{२}=८$ ही मोटी संख्या

आणि . $\frac{अ-क्ष}{२}=\frac{१३-३}{२}=\frac{१०}{२}=५$ ही लाहान संख्या

यांची बेरीज $८+५=१३$ आणि $८^४+५^४=४७२१$ हें उत्तर.

सातवा, ती संख्या काय आहे. कीं जिचा वर्ग आणि ती संख्या मिळून ४२ होतात?

उत्तर, ६

आठवा, दोन संख्या काढ अशा कीं त्यांतील ला

हान संख्या मोठे संख्येस होईल. जशी मोठी संख्या वारांस होईल. आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ होते.

उत्तर, ३ आणि ६

नववा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांची वजा बाकी २ आहेत, आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ९८ आहेत?

उत्तर, ३ आणि ५

दाहावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांची बेरीज ६ होतात, आणि ज्यांचे घनांची बेरीज ७२ होतात?

उत्तर, २ आणि ४

अकरावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांचा गुणाकार २० आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ६१ आहेत?

उत्तर, ४ आणि ५

बारावा, ११ या संख्येचे दोन भागकर, असे कीं, त्या दोन भागांचे वर्गांचा गुणाकार ७८४ होतील.

उत्तर, ४ आणि ७

तेरावा, ५ या संख्येचे दोन भागकर, असे कीं ते दोन भाग परस्परानें वेगळाले भागिले असतां त्या

दोन भागाकारांची बेरीज ४ $\frac{१}{४}$ होईल.

उत्तर, १ आणि ४

चौदावा, १२ या संख्येचे दोन भागकर, असे कीं त्यांचा गुणाकार त्यांचे वजाबाकीचे आठपट होईल.

उत्तर, ४ आणि ८

पधरावा, १० या संख्येचे दोन भागकर, असे कीं लाहान भागाचे चोपटीचा वर्ग मोठे भागाचे दुपटीचे वर्गाहून ११२ यांणीं अधिक होईल.

उत्तर, ४ आणि ६

सोळावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ८९ आणि ज्यांची बेरीज त्यांतील मोठे संख्येनें गुणिली असतां १०५ होनात?

उत्तर, ५ आणि ८

सत्रावा, ती संख्या काय आहे, कीं ज्या संख्येचे अंकरूप आकृतींतील दोन मूळ अंकांचे गुणाकारानें जी भागिली असतां भागाकार ५ $\frac{१}{३}$ येतो, आणि त्या संख्येंतून ९ वजा केले तर बाकींत त्या संख्येंतील मूळ अंकांची व्युत्क्रम स्थिति होते?

उत्तर, ३२

अठरावा, २० या संख्येचे तीन भागकर, असे कीं त्या तीन भागाचा गुणाकार २७० होईल, तसें प

र्ग हालान दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला तर ४४ होतील.

उत्तर, २, ४ आणि ६

तेविसावा, अ, ब, क या तिघांजणांनीं व्यापारांत १४४४ रुपये नफा मिळविला, त्यांत जर ब चा नफा अचे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर १२० रुपये होतात, परंतु क चे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ११२ रुपये होतात. तेव्हां त्या त्रिवर्गांत एकेकाचा नफा किती किती रुपयें सांग.

उत्तर, अ चा ४००, ब चा १००, क चा १४४

चोविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, अशा कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ९३, आणि त्या संख्या ३, ४, ५ यांणीं अनुक्रमें गुणिल्या असतां त्या तीन गुणाकारांची बेरीज ६६ होतील.

उत्तर, २, ५ आणि ८

पंचविसावा, दोन संख्या काढ, अशा कीं ज्यांचा गुणाकार आणि ज्यांची बेरीज हीं मिळून ४७ होतात, आणि ज्यांची बेरीज ज्यांचे वर्गांचे बेरीजेंतून वजा केली तर ६२ बाकी राहातील.

उत्तर, ५ आणि ७

थम आणि दुसरा या दोन भागांची वजाबाकी दुसरा आणि तिसरा यांचे वजाबाकीहून २ या संख्येनें उणी असेल.

उत्तर, ५ , ६ आणि ७

एकुणिसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ५६, आणि प्रथम संख्येची तिपट, दुसरे संख्येची दुपट, आणि तिसरे संख्येची तिपट, यांची बेरीज ३२ होतील.

उत्तर, २ , ४ आणि ६

विसावा, १२ या संख्येचे तीन भागकर, असे कीं ज्यांचे वर्गांचें उत्तर बराबर असेल, आणि त्या वर्गांची बेरीज ७५ होतील.

उत्तर, १ , ५ आणि ७

एकविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, अशा कीं, ज्यांचे उत्तर बराबर, तसें ज्यांची बेरीज १२ आणि ज्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ९६२ होतील.

उत्तर, ३ , ४ आणि ५,

बाविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, अशा कीं, ज्यांचे उत्तर बराबर, आणि त्यांतील लाहान संख्येचा वर्ग मोठे दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असतां २८ होतील, आणि अतिमोठे संख्येचा व

घनादि समीकरण पृथक्करण.

घनसमीकरण अथवा तिसरे घाताचें समीकरण तेंच होय, कीं ज्यांत अव्यक्त पदाचा तिसरा घात येतो.

जसें, $\text{क्ष}^{३} - \text{अक्ष}^{२} + \text{बक्ष} = \text{क}$

चतुर्घातसमीकरण तेंच होय, कीं ज्यांत अव्यक्त पदाचा चतुर्घात येतो. जसें, $\text{क्ष}^{४} - \text{अक्ष}^{३} + \text{बक्ष}^{२} - \text{कक्ष} = \text{ड}$

पंचघातसमीकरण तेंच होय, कीं ज्यांत अव्यक्त पदाचा पंचघात येतो. जसें, $\text{क्ष}^{५} - \text{अक्ष}^{४} + \text{बक्ष}^{३} - \text{कक्ष}^{२} + \text{डक्ष} = \text{ई}$

इत्यादि. पुढें या प्रमाणें षट्घातादि समीकरणें जाणावीं. परंतु सर्वांत सर्व घात किंवा पदें जीं समीकरणांत येतात तीं करणी वांचून असावीं.

घनादि समीकरण पृथक्करणाच्या सामान्य रीति बहुत आहेत, परंतु त्या अति लांबट ह्मणून ही सोपी थोडक्यांत करायाची रीति पुढें सांगतों या रीतीवरून घनादि समीकरण पृथक्करण स्वल्पांत आणि सत्वर होईल.

रीति.

१ गणिताचा तपशील करून दोन संख्या का

ढाव्या. ज्या मुळाचे जवळ जवळ येतील. आणि त्या दोन संख्या समीकरणांत अव्यक्त पदस्थळीं वेगळाल्या ठेवाव्या. नंतर ही संख्या पदें त्यांचे वेगळाल्ये चिन्हांनीं एकत्र करावीं आणि समीकरणाची सांगितली किंमत व्यक्त पद तें त्याहून अधिक किंवा उणें अंतर आहे त्या प्रमाणें धन (+) किंवा ऋण (−) चिन्हानें तें अंतर युक्त करावें.

२ वर प्रमाणें काढिलेले दोन संख्यांची वजावाकी वरच्या दोन अंतरांतून एकानें गुणावी, आणि गुणाकार येईल तो, जर दोन अंतरांचीं चिन्हें सरूप आहेत तर त्यांचे वजावाकीनें भागावा, आणि जर तीं विरूप आहेत तर त्यांचे बेरिजेनें भागावा. किंवा या रीतीनें प्रमाणराशि कराव्या. जशी दोन अंतरांची वजाबाकी किंवा बेरीज काढिले दोन संख्यांचे वजाबाकीस आहे. तसें कोणतेंही अंतर त्यांचे संख्येन्चे शुद्धीस होईल.

३ ज्या अंतरानें गुणून शेवटील भागाकार आला, तो त्या अंतराचे संख्येंत मेळवावा, जर ती संख्या समीकरणाचे सांगितले संख्येहून उणी आहे. आणि अधिक आहे तर तो भागाकार त्यांतून वजा करावा. ह्मणजे या दोन रीतीकरून इछिले मुळाचे जवळ जवळ एक संख्या निघेल.

४ हें मूळ आणि पूर्वीं मुळा जवळ जवळ दोन

संख्या काढिल्या आहेत त्यांतून अथवा दुसरी कोणतीही संख्या जी याहून मुळाजवळ आहे ती घेऊन पूर्वप्रमाणें पुनः करावें. ह्मणजे दुसरें मूळ निघेल. तें असें कीं पूर्वीपेक्षां अधिकजवळ. या प्रमाणें पुनः पुनः करीत जावें. ह्मणजे अतिच मुळा जवळजवळ संख्या निघत जाईल.

प्रथमटीप, दोन संख्या घेणें त्या अशा घ्याव्या कीं, ज्यांची वजाबाकी उजवेकडे शेवटीं १ राहील. कारण ही बाकी वर सांगितल्याप्रमाणें गुणक १ हा अंक होईल. आणि पृथक्करण करिते समयीं लाहान अंतर कामांत घ्यावयास योग्य आहे.

दुसरीटीप, गणिताचा तपशील करिते समयीं मूळांक तपासावे. दोन संख्या घेणें त्यांत एक किंमतीहून उणी आणि एक अधिक. या रीतीनें दोन मूळांक घेऊन त्यां पासून शुद्ध करायास एकच अंक काढावा. नंतर तें शुद्धपद अव्यक्तस्थळीं ठेवून काम चालवावें. सांगितले संख्येहून उणें अंक जाले तर पुनः याहून अधिक दुसरी संख्या घेऊन पूर्ववत्करावें. कदाचित् सांगितले संख्येहून अधिकजाले तर याचे उलट दुसरी संख्या याहून उणी घेऊन पूर्ववत्करावें. या दोन संख्या घेऊन गणित करिते समयीं भागाकार असा घ्यावा, कीं शुद्धपद संख्येंत चार अंक येतील. नंतर ही चार अंकस्थानाची संख्या घेऊन

त्यांत १ अधिक किंवा उणा वर सांगितल्या प्रमाणें करून पूर्ववत् करावें. आणि या गणितांत शुद्ध संख्येंत अंकस्थानें आठपर्यंत काढावी. कारण प्रतिगणित पर्यायांत पूर्व पूर्वापेक्षां उत्तरोत्तर अंकस्थानें दुपट होतात, तेव्हां दुपटीपेक्षां अधिकांचा भरवंसा नाहीं. आणि याप्रमाणें पुनः पुनः गणितपर्याय केल्यानें उत्तरोत्तर खरे मुळाजवळ जवळ येईल.

उदाहरणें.

पहिलें, क्ष^{३} + क्ष^{२} + क्ष = १०० या घनसमीकरणाचें मूळ किंवा क्ष ची किंमत काढ.

आतां सत्वर कळतें कीं क्ष ची किंमत ४ अथवा ५ यांचे मध्यं आहे.

याजकरितां या दोन संख्या खऱ्या जाणून घे. तर पृथक्करण या प्रमाणें होतें.

पुनः ४·२ आणि ४·३ या दोन संख्या खरीं मूळें जाणून घे.

प्रथमसंख्या	अव्यक्त	दु॰ सं॰	प्र॰ सं॰	अव्यक्त	दु॰ संख्या
४	क्ष	५	४·२	क्ष	४·३
१६	क्ष^{२}	२५	१७·६४	क्ष^{२}	१८·४९

ळ आहे.

या गणित पर्यायांत चांगलें समजावें ह्मणून उघड करून लिहिलें. नाहीं तर वर्गमूळादि कोष्टकांचे साहाय्यानें याहून सत्वर आणि अति थोडक्यांत होईल.

दुसरें, $\text{क्ष}^3 - १५\,\text{क्ष}^2 + ६२\,\text{क्ष} = ५०$ या समीकरणाचें घनमूळ अथवा क्ष ची किंमत काढ.

यांत सत्वर कळतें कीं क्ष ची किंमत १ याहून कांहीं अधिक आहे.

याजकरितां १·० आणि १·१ या दोन संख्या खऱ्या जाणून घे, तर पृथक्करण याप्रमाणें होतें.

पुनः १·०३ आणि १·०२

प्रथमसं०	अव्यक्त	दुसरी सं०	प्र० संख्या	अव्यक्त	दुसरी सं०
१·०	क्ष	१·१	१·०२	क्ष	१·०३
+६३·०	६३क्ष	६९·३	६४·२६	६३क्ष	६४·८९
−१५	$-१५\,\text{क्ष}^2$	−१८·१५	−१५·६०६०	$-१५\,\text{क्ष}^2$	−१५·९१३५
१	क्ष^3	१·३३१	१·०६१२०८	क्ष^3	१·०९२७२७
४९	बेरीज	५२·४८१	४९·७१५२०८	बेरीज	५०·०६९२२७
५०	सांगितली किंमत	५०	५०	सांगितली किंमत	५०
−१	अंतरें	+२·४८१	−·२८४७९२	अंतरें	+·०६९२२७

६४	क्ष^{३}	१२५
८४	बेरीज	१५५
१००	सांगितली किंमत	१००
−१६	अंतरें	+५५

७१ ही दोन अंतरांची बेरीज जसें, ७१ : १ : : १६ : ·२

याजकरितां क्ष = ४·२ हें जवळ जवळ

७४·०८८	क्ष^{३}	७९·५०७
९५·९२८	बेरीज	१०२·२९७
१००	सांगितली किंमत	१००
−४·०७२	अंतरें	+२·२९७

६·३६९ ही दोन अंतरांची बेरीज जशी ६·३६९ : ·१ : : २·२९७ : ०·०३६ ही ४·३ यांतून वजा करून क्ष = ४·२६४ हें जवळ जवळ आहे.

पुनः ४·२६४ आणि ४·२६५ या दोन संख्या घेऊन पृथक्करण या प्रमाणें होतें.

प्रथम संख्या	अव्यक्त	दुसरी संख्या
४·२६४	क्ष	४·२६५
१८·१८१६९६	क्ष^{२}	१८·१९०२२५
७७·५२६७५२	क्ष^{३}	७७·५८१३१०
९९·९७२४४८	बेरीज	१००·०३६५३५
१००	सांगितली संख्या	१००
−०·०२७५५२	अंतरें	+०·०३६५३५
·०६४०८७	ही दोन अंतरांची बेरीज	

जसें, ·०६४०८७ : ·००१ : : ०·०२७५५२ : ०·०००४२९९ हें लाहान संख्येस मिळवून क्ष = ४·२६४४२९९ हें जवळ जव

या अंतरांची बेरीज ३·४८१ जसें; ३·४८१ : ·१ :: १ : ·०२ तर क्ष = १·०२ हें जवळ जवळ आहे.

या अंतरांची बेरीज ·३५४०१९ जसें; ·३५४०१९ : ·०१ :: ·०६९२२७ : ·००१९५५५ तर क्ष = १·०३ − ·००१९५५५ ह्मणजे. क्ष = १·०२८०४ हें जवळ जवळ आहे.

तिसरीटीप. या वेळेस पूर्वी लिहिलें आहे त्याचें स्मरण करावें, कीं प्रतिसमीकरणास तितकीं मुळें आहेत, कीं त्यांत जितक्या घातपरंपरा येतात— अथवा तितकीं मुळें आहेत, कीं समीकरणांत अव्यक्तपदाचा सर्वांहून मोठा घातप्रकाशक जितक्या किंमतीचा आहे. ह्मणजे एकवर्णसमीकरणांत मूळ किंवा मुळाची किंमत एकच आहे. परंतु वर्गसमीकरणांत मुळें किंवा त्यांच्या किंमती दोन आहेत. घनसमीकरणांत तीन, चतुर्घातसमीकरणांत चार, इत्यादि.

आणि जेव्हां कोणतेही समीकरणाचें एकमूळ संनिधरीतीप्रमाणें निघालें, तेव्हां राहिलीं मुळें किंवा त्यांच्या किंमती यापुढील रीतीकरून काढितां येतात. आतां भाज्य भाजक असावे, त्यांत भाज्याकरितां व्यक्तसंख्येस चिन्ह बदलकरून अव्यक्तबाजूस स्थळांतर करावें, ह्मण

जे तो भाज्य झाला. आणि भाजकाकरितां क्ष – उणें पूर्वीं काढिलेलें जवळ जवळचें मूळ, ह्मणजे हा भाजक झाला. नंतर या भाजकानें तो भाज्य भागून जो भागाकार येईल तो एक नवें दुसरें समीकरण होईल. ज्यांत सांगितले समीकरणाहून एक घात कमी येईल.

या नवेसमीकरणाचें मूळ पूर्व संनिधरीतीनें काढावें. ह्मणजे सांगितले समीकरणाचें दुसरें मूळ निघेल. नंतर या दुसरे मूळानें पूर्वप्रमाणें दुसरे समीकरणाहून एक घात कमी असें तिसरें नवें समीकरण करावें. नंतर या तिसरे नवे समीकरणाचें मूळ पूर्वजवळचे रीतीनें काढावें. ती सांगितले समीकरण मूळाची तिसरी किंमत होईल. या प्रमाणें वर्गसमीकरण होई पर्यंत नवें नवें समीकरण करितजावें. तें झाल्या नंतर वर्गसमीकरणरीतीनें वर्गपुरा करून त्याचीं पूर्ववत् दोनमुळें निघतील – यारीती करून सर्व मूळें कळतील.

जसें, वरचे उदाहरणाचे समीकरणांत एकमूळ काढिलें तें १·०२८०४ आहे. तर त्यास ऋण चिह्न आणि क्षजोडून भाजक झाला.

भाजक	भाज्य	भागाकार

क्ष-१·०२८०४) क्ष^{३}-१५क्ष^{२}+६३क्ष-५० (क्ष^{२}-१३·९७१९६क्ष+४८·६३६२७

हें दुसरें नवें समीकरण झालें. आतां वर सांगितल्या प्रमा-

णें कळतें कीं हें वर्गसमीकरण यां रूपाचें आहे.

$$\text{क्ष}^2 - \text{१३·९७१९६}\,\text{क्ष} = -\text{४८·६३६२७}$$

यांत वर्गपुराकरून क्ष-च्या दोन किंमती या आहेत. जे ६·५७६५३ आणि ७·३९५४३ आतां या दोन सांगितले घनाचे मुळाच्या राहिल्या दोन किंमती आहेत. ह्मणजे.

$\text{क्ष}^3 - \text{१५}\,\text{क्ष}^2 + \text{६३}\,\text{क्ष} = \text{५०}$ या समीकरणाचीं तीनमुळें हीं आहेत. आणि सर्व मुळांची बेरीज बराबर १५ ह्मणजे ही बेरीज सांगितलें घन समीकरणांतील दुसरे पदाचे वेळा प्रकाशकाचे बराबर आहे आणि ह्मणूनच हीं तीन मुळें शुद्ध आहेत. नाहीं तर अशुद्ध होतीं.

प्रथम मूळ	१·०२८०४
दुसरें मूळ	६·५७६५३
तिसरें मूळ	७·३९५४३
बेरीज	१५·०००००

चौथी टीप. यावरचे रीतींत हा मोठा लाभ आहे. जे इतर रीती करून पृथक्करण करून किंमत काढायास त्या समीकरणास एकरूप द्यावें लागतें, तसें या रीतींत नाहीं. कारण कीं, हीरीति समीकरणाचें जें रूप आहे त्याजवरच लागते. त्या समीकरणांत कशींही करणीपदें किंवा संयुक्तपदें असोत. जसें या पुढील उदाहरणांत.

तिसरें, $\sqrt{\text{१४४}\,\text{क्ष}^2 - (\text{क्ष}^2 - \text{२०})^2} + \sqrt{\text{१९६}\,\text{क्ष}^2 - (\text{क्ष}^2 - \text{२४})^2} = \text{११४}$ यासमीकरणाचें मूळ किंवा क्ष ची किंमत काढ.

कांहीं तपासिल्यावर सत्वर कळतें कीं, क्ष ची किंमत

७ याहून, कांहीं अधिक आहे. तर प्रथम संख्या क्ष = ७ आणि दुसरी संख्या क्ष = ८ या दोन संख्या खऱ्या जाणून घे.

प्रथम संख्या क्ष = ७		दुसरी संख्या क्ष = ८
४७·९०६	$\sqrt{११४क्ष^{२}-(क्ष^{२}+२०)^{२}}$	४६·४७६
६५·३८४	$\sqrt{१९६क्ष^{२}-(क्ष^{२}+२४)^{२}}$	६९·२८३
११३·२९०	बेरीज	११५·७५९
११४	सांगितली किंमत	११४
−·७१०	अंतरें	+१·७५९

+१·७५९

जसें, २·४६९ : १ : : ०·७१० : ०·२ हें जवळ जवळ

याजकरितां · · · क्ष = $\frac{७·०}{७·२}$ हें जवळ जवळ

ही संख्या अधिक आहे याजकरितां याहून उणी ७·१

ही घेऊन पुनः	क्ष = ७·२	क्ष = ७·१
४७·९९०	$\sqrt{१४४क्ष^{२}-(क्ष^{२}+२०)^{२}}$	४७·९७३
६६·४०२	$\sqrt{१९६क्ष^{२}-(क्ष^{२}+२४)^{२}}$	६५·९०४
११४·३९२	बेरीज	११३·८७७
११४	सांगितली किंमत	११४
+·३९२	अंतरें	−·१२३

−·१२३

जसें, ·५१५ : ·१ : : ·१२३ : ·०२४

७·१

याजकरितां क्ष = ७.१२४ हें जवळ जवळ

पांचवीटीप. हीरीति समीकरणाचें कसें ही विकट रूप असेल तरीं त्याजवर लागते. आणि ही रीति प्रकाशक समीकरण पृथक्करणावर ही लागते.

प्रकाशक समीकरण ह्मणजे अव्यक्ताचा घात प्रकाश कही अव्यक्त आहे तें होय. जसें, या पुढील उदाहरणांत.

चौथें उदाहरण. $क्ष^{क्ष}$ = १०० यासमीकरणांत क्षची किंमत काय?

या जातीचे समीकरणाचें पृथक्करण सत्वर करायास हें उपयोगी आहे कीं, समीकरणाचें लागरतंम काढून लागरतंमकोष्टकाचे साहाय्यानें पदांच्या वेगळाल्या किंमती लिहाव्या.

जसें, या समीकरणांत, दोन बाजूंचें लागरतंम हें आहे.

क्ष × क्ष. लाग.=२ हें १०० चें लागरतंम आहे.

नंतर तपाशिल्यापासून लवकर समजतें कीं, क्षची किंमत ३ आणि ४ या दोन संख्यांचे आंत मध्याचे जवळ, परंतु ३ या संख्येपासून दूर आणि ४ या संख्येचे जवळ. याजकरितां क्ष = ३.५ आणि क्ष = ३.६ या दोन संख्या घे. आणि लागरतंमानें तपशील करितां या प्रमाणें होईल.

प्रथम, क्ष = ३·५	दुसरी, क्ष = ३·६
३·५ याचा लाग = ०·५४४०६८	३·६ याचा लाग = ०·५५६३०२
नंतर ३·५ × ३·५ चा लाग = १·९०४२३८	नंतर ३·६ × ३·६ चा लाग = २·००२६९१
खरा लाग = २·००००००	खरा लाग = २·००००००
−·०९५७६२ अंतरें	+२·००२६९१

·००२६९१

·०९८४५१ अंतरांची बेरीज.

जसें, ·०९८४५१ : ·१ : : ·००२६९१ : ·००२७३ ही दुसरे संख्येची शुद्धि

बाकी $\frac{३·६}{३·५९७२७}$ = क्ष हें जवळ जवळ

पुनः तपासून कळतें कीं, हें थोडें कमी आहे. याजकरितां क्ष = ३·५९७२७ आणि क्ष = ३·५९७२८ या दोन संख्या घे. आणि लागरतंमानें तपशील करितां या प्रमाणें होईल.

प्रथम क्ष = ३·५९७२७	दुसरी क्ष = ३·५९७२८
३·५९७२७ याचा लाग = ०·५५५९७३ हें	३·५९७२८ याचा लाग = ०·५५५९७४
३·५९७२७ × ३·५९७२७ चा ला० } = १·९९९९८५४	३·५९७२८ × ३·५९७२८ चा लाग } = १·९९९९९५२
खरा लाग = २·००००००	खरा लाग = २·००००००
−०·००००१४६ अंतरें	−०·०००००४७

−०·००००४७

०·०००००११ ही अंतरांची वजाबाकी. तर

जसें, ०·०००००११ : ·००००१ :: ·००००४७ : ०·०००००४७४७४७

दुसरे संख्येचे श्रुद्दीस. $\frac{३·५९७२८००००००}{३·५९७२८४७४७४७}$ ही

बेरीज क्षचे किंमती जवळ जवळ.

पांचवें, $\text{क्ष}^{३}+१०\,\text{क्ष}^{२}+५\,\text{क्ष}=२६०$ या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $\text{क्ष}=४·११७९८५७$

साहावें, $\text{क्ष}^{३}-२\,\text{क्ष}=५०$ या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $\text{क्ष}=३·८६४८८५४$

सातवें, $\text{क्ष}^{३}+२\,\text{क्ष}^{२}-२३\,\text{क्ष}=७०$ या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $\text{क्ष}=५·१३४५७$

आठवें, $\text{क्ष}^{३}-१७\,\text{क्ष}^{२}+५४\,\text{क्ष}=३५०$ या समीकरणांत क्ष ची किंमत काय आहे?

उत्तर, $\text{क्ष}=१४·९५४०७$

नववें, $\text{क्ष}^{४}-३\,\text{क्ष}^{३}-७५\,\text{क्ष}=१००००$ या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $\text{क्ष}=१०·२८५७२४$

दाहावें, $२\,\text{क्ष}^{४}-१६\,\text{क्ष}^{३}+४०\,\text{क्ष}^{२}-३०\,\text{क्ष}=-१$ या

समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = १.२८४७२४$

अकरावें, $क्ष^{५} + २ क्ष^{४} + ३ क्ष^{३} + ४ क्ष^{२} + ५ क्ष = ५४३२१$ या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ८.४१४४५$

बारावें, $क्ष^{क्ष} = १२३४५६७८९$. या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ८.६४००२६८$

तेरावें, $२ क्ष^{४} - ७ क्ष^{३} + ११ क्ष^{२} - ३ क्ष = ११$ या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = १.८३७५५$

चौदावें, $(३ क्ष^{२} - २\sqrt{क्ष} + १)^{\frac{३}{२}} - (क्ष^{२} - ४ क्ष\sqrt{क्ष} + ३\sqrt{क्ष})^{\frac{३}{२}} = ५६$ या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर. $क्ष = १८.३६०८७७$

घनसमीकरण पृथक्करण करायाची कार्डानाची रीति.

इष्टराशिसाधनाचे साहाय्यानें घनादिसमीकरणाचें मूळ संख्येत काढायास पूर्वसामान्य रीति फार उपयोगी

आणि सोपी आहे–परंतु घनसमीकरणांचेंच मूळ कादायास कार्डानानें विशेष रीति दुसरी केली आहे, ती या स्थळीं लिहितों. कारण, कदाचित् कोणी या रीती वरून काम करायास इछील तरीं चिंता नाहीं.

या रीतीनें पृथक्करण करणें तर घनसमीकरणास अगत्य जें रूप पाहिजे तें हें होय. ह्मणजे, $\text{झ}^{३} * \text{अझ} = \text{ब}$ ह्मणजे दुसरें पद किंवा दुसरे घाताचें पद त्यांत नसावें. याजकरितां कोणतेही घनसमीकरणास त्याचें रूप दिल्यानंतर. जसें, $\text{क्ष}^{३} + \text{पक्ष}^{२} + \text{कक्ष} = \text{र}$. ह्मणजे ज्याचे प्रथमपदास वेळाप्रकाशक नाहीं असें. तर दुसरें पद $\text{पक्ष}^{२}$ हें तेथून घालविलें पाहिजे त्याची रीति $\frac{१}{३}\text{प}$ अथवा दुसरे पदाचे वेळाप्रकाशकाचा $\frac{१}{३}$ घेऊन त्यास चिह्न बदल करावें आणि कोणतेही दुसरे अव्यक्ताशीं जोडावें. जसें, झ नर या प्रमाणें होईल. $\text{झ} - \frac{१}{३}\text{प}$ नंतर सांगितले समीकरणांत अव्यक्त क्षचे स्थळीं ठेवावें. ह्मणजे एक नवें या पुढील संक्षेप रूपाचें समीकरण उत्पन्न होईल. $\text{झ}^{३} * \text{अझ} = \text{ब}$ हें रूप कार्डानाचे रीतीनें पृथक्करण करायास अगत्य पाहिजे. आतां यांत $\text{क} = \frac{१}{३}\text{अ}$ आणि $\text{ड} = \frac{१}{२}\text{ब}$ असे असतील तर संक्षेप समीकरणास हें पूर्वीचें रूप होईल. $\text{झ}^{३} * ३\text{कझ} = २\text{ड}$.

नंतर क आणि ड यांच्या दोन किंमती या पुढील

सारणी कोष्टकांत ठेवाव्या.

$$\left.\begin{array}{l} \text{ज्ञ} = \sqrt[३]{\text{ड} + \sqrt{(\text{ड}^{२} + \text{क}^{३})}} + \sqrt[३]{\text{ड} - \sqrt{(\text{ड}^{२} + \text{क}^{३})}} \\ \qquad\qquad\qquad \text{अथवा} \\ \text{ज्ञ} = \sqrt[३]{\text{ड} + \sqrt{(\text{ड}^{२} + \text{क}^{३})}} - \dfrac{\text{क}}{\sqrt[३]{\text{ड} + \sqrt{(\text{ड}^{२} + \text{क}^{३})}}} \end{array}\right\} ⁂$$

ह्मणजे ज्ञ मुळाची किंमत $\text{ज्ञ}^{३} * \text{अज्ञ} = \text{ब}$ या संक्षेप समीकरणांत निघेल. शेवटीं $\text{क्ष} = \text{ज्ञ} - \frac{१}{३}\text{प}$ घे.

⁂ मनांत आण कीं, कोणतेंही मूळ दोन भागांचें आहे. ह्मणजे क्ष आणि य. आतां $\text{क्ष} + \text{य} = \text{ज्ञ}$. ही बेरीज सांगितले समीकरणांत ज्ञचे स्थळीं ठेवावी. ह्मणजे त्याचें हें रूप होईल.

$\text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३} + ३\,\text{क्षय}(\text{क्ष} + \text{य}) + \text{अ}(\text{क्ष} + \text{य}) = \text{ब}$.

पुनः मनांत आण कीं, $३\,\text{क्षय} = -\text{अ}$. आतां पूर्वसमीकरणांत $३\,\text{क्षय}$ यांचे स्थळीं $-\text{अ}$ ठेविल्यानें त्या समीकरणाचें हें रूप होईल. $\text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३} = \text{ब}$. आतां या समीकरणाचे वर्गांतून हें समीकरण ह्मणजे $\text{क्षय}^{३} = -\frac{१}{२७}\text{अ}^{३}$ याची चौपट वजा केली ह्मणजे ही बाकी रहते. $\text{क्ष}^{६} - २\,\text{क्ष}^{३}\text{य}^{३} + \text{य}^{६} = \text{ब}^{२} + \frac{४}{२७}\text{अ}^{३}$. नंतर याचें वर्गमूळ हें आहे. $\text{क्ष}^{३} - \text{य}^{३} = \sqrt{(\text{ब}^{२} + \frac{४}{२७}\text{अ}^{३}.)}$ हें समीकरण $\text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३} = \text{ब}$ या पूर्वसमीकरणांत मिळवून आणि परस्परांची वजा बाकी करून हीं दोन समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\left\{\begin{array}{l} २\,\text{क्ष}^{३} = \text{ब} + \sqrt{\text{ब}^{२} + \frac{४}{२७}\text{अ}^{३}} = \text{ब} + २\sqrt{(\frac{१}{२}\text{ब})^{२} + (\frac{१}{३}\text{अ})^{३}} \\ २\,\text{य}^{३} = \text{ब} - \sqrt{\text{ब}^{२} + \frac{४}{२७}\text{अ}^{३}} = \text{ब} + २\sqrt{(\frac{१}{२}\text{ब})^{२} + (\frac{१}{३}\text{अ})^{३}} \end{array}\right\} \text{ अथवा}$$

$$\left\{\begin{array}{l} २\,\text{क्ष}^{३} = २\,\text{ड} + २\sqrt{(\text{ड}^{२} + \text{क}^{३})} \\ २\,\text{य}^{३} = २\,\text{ड} - २\sqrt{(\text{ड}^{२} + \text{क}^{३})} \end{array}\right\} \text{ २ दोन यांणीं भागून घनमूळ घेऊन}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} = \sqrt[३]{\text{ड} + \sqrt{\text{ड}^{२} + \text{क}^{३}}} \\ \text{य} = \sqrt[३]{\text{ड} - \sqrt{\text{ड}^{२} + \text{क}^{३}}} \end{array}\right\} \text{ या दोहोंची बेरीज वरचे सारणी कोष्टक}$$

आहेत. ह्मणजे ज्ञची किंमत.

आतां वरचे समीकरणांतील दोन दुसरीं पदें समच्छेद केल्यापासून कळतें कीं, दुसरे सारणी कोष्टक प्रथम सारणी कोष्टकाचे किंमती बरोबर आहेत.

तर ही क्षची किंमत $क्ष^३+पक्ष^२+कक्ष=र$ या समीकरणांत इच्छिलें मूळ होईल.

या प्रमाणें सांगितले समीकरणाचें एकमूळ निघाल्या नंतर सांगितलें समीकरण पूर्वरीतीनें एकघातकमीकरून वर्गसमीकरण उत्पन्न होईल. त्याचे वर्गपूरण रीतीनें राहिलीं दोन मुळें उत्पन्न होतील.

टीप. जेव्हां **अ** किंवा **क** हा वेळा प्रकाशक ऋण आहे. आणि **क** घन **ड** वर्गाहून अधिक आहे तर हा प्रकार मूळ काढायास प्रायशः अशक्त आहे.

उदाहरण, $क्ष^३-६क्ष^२+१०क्ष=८$ या समीकरणाचीं वेगळालीं मुळें काय आहेत?

प्रथम, दुसरें पद घालवावयाकरितां त्याचा वेळाप्रकाशक -६ आहे. याचा तृतीय भाग -२ आहे. याजकरितां $क्ष=ज्ञ+२$ हें घे. तर

$$\begin{array}{rl}
क्ष^३ = & ज्ञ^३+६ज्ञ^२+१२ज्ञ+८ \\
-६क्ष^२ = & \quad\;\; -६ज्ञ^२-२४ज्ञ-२४ \\
+१०क्ष = & \qquad\qquad\;\; +१०ज्ञ+२० \\
\hline
 & ज्ञ^३ * \;\; -२ज्ञ+४=८
\end{array}$$

$$\text{अथवा}\quad ज्ञ^३ * \;\; -२ज्ञ=४$$

यांत $अ=-२$ आणि $ब=४$ याजकरितां $क=-\frac{२}{३}$ आणि $ड=२$ याजकरितां

$$\sqrt[3]{ड+\sqrt{(ड^2+क^3)}}=\sqrt[3]{२+\sqrt{(४-\frac{८}{२७})}}=\sqrt[3]{२+\sqrt{\frac{१००}{२७}}}=\sqrt[3]{२+\frac{१०}{९}\sqrt{३}}=१.५७७३५.$$

$$\text{आणि}\ \sqrt[3]{ड-\sqrt{(ड^2+क^3)}}=\sqrt[3]{२-\sqrt{(४-\frac{८}{२७})}}=\sqrt[3]{२-\sqrt{\frac{१००}{२७}}}=\sqrt[3]{२-\frac{१०}{९}\sqrt{३}}=०.४२२६५$$

नंतर या दोहोंची बेरीज ज्ञ ची किंमत आहे. ह्मणजे ज्ञ $=२$ याजकरितां $क्ष = ज्ञ + २ = ४$ हें $क्ष^3 - ६\ क्ष^2 + १०\ क्ष = ८$ या समीकरणांत क्ष चें मूळ आहे.

दुसरीं दोन मुळें काढाया करितां २५१ वें पृष्ठावरील रीतीनें भागाकार करावा. जसें,

$$
\begin{array}{l}
क्ष-४)\ क्ष^3-६\ क्ष^2+१०\ क्ष-८\ (\ क्ष^2-२\ क्ष+२=० \\
\qquad\quad \underline{क्ष^3-४\ क्ष^2} \\
\qquad\qquad ※-२\ क्ष^2+१०\ क्ष \\
\qquad\qquad\ \ \underline{-२\ क्ष^2+८\ क्ष} \\
\qquad\qquad\qquad ※\ \ +२\ क्ष-८ \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{+२\ क्ष-८} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad ※\ \ ※
\end{array}
$$

आतां स्थळांतरानें $क्ष^2 - २\ क्ष = -२$

वर्ग पुराकरून $क्ष^2 - २\ क्ष + १ = -१$

मूळ काढून $क्ष - १ = \pm\sqrt{-१}$

स्थळांतरानें $क्ष = १ \pm \sqrt{-१}$

ह्मणजे $क्ष = १ + \sqrt{-१}$ आणि $क्ष = १ - \sqrt{-१}$ हीं क्ष चीं इच्छिलीं दोन मुळें होत.

दुसरें, $क्ष^3 - ९\ क्ष^2 + २७ क्ष = ३०$ या समीकरणांत

राशि.

या समीकरणा पासून दुसरें समीकरण अल्पायासें उत्पन्न होतें, ज्यापासून दुसरे पदांच्या किंमती समजांत येतील. आणि पुढें सांगतों या प्रमाणें त्यांस एकत्र करितों.

प्रथम, $अ = प + परत$ हें व्याजमुद्दल.

दुसरें, $प = \frac{अ}{1+रत}$ हें मुद्दल.

तिसरें, $र = \frac{अ-प}{पत}$ हा व्याजाचा दर.

चौथें, $त = \frac{अ-प}{पर}$ या मुदती.

उदाहरण, कोणतेही सरळ व्याजाचे दरानें कोणतें ही मुद्दल दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या?

या उदाहरणांत प्रथम समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे. ह्मणजे, $अ = प + परत$. यांत $अ = २ प$. ह्मणजे, मुद्दलाची दुपट अ चे स्थळीं ठेविली पाहिजे. तर $२ प = प + परत$. अथवा, $परत = प$. अथवा, $रत = १$ याजकरितां $त = \frac{१}{र}$

यांत र हें एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याज आहे. याजकरितां सरळ व्याजानें मुद्दल दुपट होण्यास त मुदती भागाकार आहे. जे कोणतेंही मुद्दल त्याचे एकवर्षाचे व्याजानें भागिलें तो भागाकार मुदती भागाकार होय. अशानें १०० रुपयांस १ वर्षाचें व्याज ५ रुपये असेल, तर मुद्दल दुपट होण्यास $\frac{१००}{५} = २०$ वर्षें असावीं. अथवा चौथे स-

गळालीं मुळें काय आहेत?

उत्तर, क्ष =३ अथवा =३+√-१ अथवा =३-√-१

तिसरें, क्ष^३-७ क्ष^२+१४ क्ष=२० या समीकरणांत वेगळालीं मुळें काय आहेत?

उत्तर, क्ष =५ अथवा =१+√-३ अथवा =१-√-३

सरळव्याज.

कोणते ही मुदलाचें कितीही मुदतीनें व्याज मुद्दल आणि मुदतीयांशीं समप्रमाणांत आहे. याजकरितां एकवर्षाचें एकरुपयाचें व्याज कोणतेंही मुद्दल आणि त्याच्या मुदतीवर्ष आणिवर्षांचे अवयव हीं तीन परस्पर गुणून तो गुणाकार त्यामुदलाचें त्या मुदतीचें व्याज होईल. ह्मणजे जर

र = एकरुपयाचे एकवर्षाचे व्याजाचा दर असेल.

प = मुद्दल कर्ज असेल.

त = मुदतींची संख्या असेल.

अ = व्याज मुद्दल ह्मणजे व्याज आणि मुद्दल मिळून राशि असेल.

परत= पचें त मुदतींचे व्याज होईल. याजकरितां.

प+ परत अथवा प × (१+ रत) = अ ही व्याज मुद्दल .

मीकरणा पासून मुदती सत्वर कळतील. $त = \frac{अ-प}{पर} = \frac{२प-प}{पर} = \frac{२-१}{र} = \frac{१}{र}$ हें पूर्व प्रमाणें बराबर आहे.

चक्रवाढव्याज.

जीं पदें सरळ व्याजांत येतात ह्मणजे,

प = मुद्दल.

र = एकरुपयाचा एकवर्षाचे व्याजाचा दर.

अ = व्याज मुद्दल रास.

त = मुदती.

याशिवाय चक्रवाढव्याजांत दुसरे एक पद येतें. ह्मणजे व्याजाचे दराचें गुणोत्तर. तें हें आहे कीं, एकरुपयाचें एकमुदतीचें व्याज मुद्दल. हें पद दाखवाया करितां च अक्षर चिह्न घ्यावें. ह्मणजे, च = १ + र. हें एक रुपयाचें एकमुदतीचें व्याजमुद्दल दाखविलें. तेव्हां वेगळाले मुदतींचें व्याज मुद्दल या रीतीनें तपशील करितां कळतें. जसें,

१ रुपया कोणतेही मुदतीचे व्याज मुदलास आहे, तसें.–कोणतेंही सांगितलें मुद्दल– त्या मुदतीचें त्याचें व्याज मुदलास होईल. ह्मणजे,

जसें, १ रुपया : च :: प : पच. हें एकवर्षाचें व्याज

मुद्दल आहे.

आणि १ रुपया : $च :: पच : पच^{२}$. हें दुसरे वर्षाचें व्याज मुद्दल आहे.

तसें १ रुपया : $च :: पच^{२} : पच^{३}$. हें तिसरें वर्षाचें व्याज मुद्दल आहे.

आणि इत्यादि.

याजकरितां सामान्यतः $पच^{त} = अ$ हें व्याज मुद्दल आहे, त मुदतीचें. या समीकरणापासून हें सामान्य समीकरण उत्पन्न होतें.

प्रथम, $अ = पच^{त}$ हें व्याजमुद्दल.

दुसरें, $प = \frac{अ}{च^{त}}$ हें मुद्दल.

तिसरें, $च = \sqrt[त]{\frac{अ}{प}}$ हें गुणोत्तर.

चवथें, $त = \frac{ला॰अ - ला॰प}{ला॰च}$

या पासून कोणतेंही एक पद निघेल, जर राहिलीं तीन पदें सांगितलीं आहेत.

जेव्हां सगळें व्याजच करायाची इच्छा आहे, तेव्हां अ या व्याजमुदलापासून प हें मुद्दलमात्र वजा करावें. ह्मणजे बाकी राहिली तें व्याज.

उदाहरण, कोणतें ही मुद्दल सांगितलें चक्रवाढ व्याजाचे दरानें दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या? तर हें समजायाकरितां चवथे समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे. परं,

या कोष्टकांत सगळे घात ह्मणजे वीं घात विसावे घातापर्यंत लिहिले आहेत. किंवा एक रुपयाचें व्याज मुद्दल. त्यांचें काम हें आहे. कीं, कोणतेही मुदलाचें व्याज किंवा व्याज मुद्दल कोणतेही मुदतीचें करायाचें, जी मुदत वीस वर्षांचे आंत आहे.

उदाहरण, ५२३० रुपये मुद्दल यास दरसाल दर शेंकडा ५ रुपये व्याज प्रमाणें १५ वर्षांत चक्रवाढीनें व्याज मुद्दल रास किती होईल?

कोष्टकांत १५ चें ओळींत ५ यांचे दराखालीं एक रुपयाचें व्याज मुद्दल लिहिलें आहे. तें २.०७८९ यास सांगितले मुद्दलानें गुणून.

५२३०

६२३६७०

४१५७८

१०३९४५

१०८७२.६४७० हें व्याज मुद्दल रुपये रास.

४

२.५८८०

रु० पा० रे०

किंवा १०८७२ . . . २ . . . ५८ हें व्याज मुद्दल.

५२३०

एकरुपयाचे व्याज मुद्दल कितीही वर्षांचे संख्यन.

वर्षे	३	३½	४	४½	५	६
१	१.०३०००	१.०३५००	१.०४०००	१.०४५००	१.०५०००	१.०६०००
२	१.०६०९	१.०७१२	१.०८१६	१.०९२०	१.१०२५	१.१२६६
३	१.०९२७	१.१०८७	१.१२४९	१.१४१०	१.१५७६	१.१९१०
४	१.१२५५	१.१४७५	१.१६९९	१.१९२५	१.२१५५	१.२६२५
५	१.१५९३	१.१८७७	१.२१६७	१.२४६२	१.२७६३	१.३३८२
६	१.१९४१	१.२२९३	१.२६५३	१.३०२३	१.३४०१	१.४१८५
७	१.२२९९	१.२७२३	१.३१५९	१.३६०९	१.४०७१	१.५०३६
८	१.२६६८	१.३१६८	१.३६८६	१.४२२१	१.४७७५	१.५९३९
९	१.३०४८	१.३६२९	१.४२३३	१.४८६१	१.५५१३	१.६८९५
१०	१.३४३०	१.४१०६	१.४८०२	१.५५३०	१.६२८९	१.७९०९
११	१.३८४२	१.४६००	१.५८९५	१.६२२९	१.७१०३	१.८९८३
१२	१.४२५८	१.५१११	१.६०१०	१.६९५९	१.७९५९	२.०१२२
१३	१.४६८५	१.५६४०	१.६६५१	१.७७२२	१.८८५६	२.१३२९
१४	१.५१२६	१.६१८७	१.७३१७	१.८५१९	१.९७९९	२.२६०९
१५	१.५५८०	१.६७५३	१.८००९	१.९३५३	२.०७८९	२.३९६६
१६	१.६०४७	१.७३४०	१.८७३०	२.०२२४	२.१८२९	२.५४०४
१७	१.६५२८	१.७९४७	१.९४७९	२.११३४	२.२९२०	२.६९२८
१८	१.७०२४	१.८५७५	२.०२५८	२.२०८५	२.४०६६	२.८५४३
१९	१.७५३५	१.९२२५	२.१०६८	२.३०७९	२.५२७०	३.०२५६
२०	१.८०६१	१.९८९८	२.१९११	२.४११७	२.६५३३	३.२०७१

५.६४२ २ ५८ हें व्याज.

प्रथमटीप. जेव्हां व्याजाचा दर वर्षाचे कांहीं भागावर आहे. जसें, अर्धवर्ष, पाववर्ष, इत्यादि. तेव्हांपण हीच रीति लागते, परंतु असें आहे तर, त त्या मुदती दाखवितो. आणि च तितक्या मुदतीचें व्याज मुद्दल.

दुसरीटीप. जेव्हां कोणतेही मुद्दलाचें चक्रवाढीनें व्याज किंवा मुद्दल करायाचीइच्छा आहे तेव्हां तें या पुढील रीतीवरून करावें.

प्रथमरीति. जेव्हां मुदत एकवर्षाचा कोणताही बराबर भाग आहे. पूर्वरीतीनें एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याज मुद्दल काढावें. नंतर ती मुदत वर्षाचा कितवा भाग आहे, तो अंक त्यास मूळ प्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें. ह्मणजे त्या मुदतीचें एकरुपयाचें व्याज मुद्दल झालें. यास सांगितले मुदतीनें गुणावें, ह्मणजे इच्छिलेल्या मुदतीचें व्याज मुद्दल झालें.

दुसरीरीति. जेव्हां मुदत वर्षाचा कोणताही बराबर भागनाहीं, तेव्हां सांगितले मुदतीचे दिवस करावे आणि एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याज मुद्दल आहे, त्यास ३६५ हा अंक मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें. तें मूळ एकरुपयाचें एकदिवसाचें व्याज मुद्दल झालें. मग तें सांगितले मुदतीचे दिवस संख्या घातपर्यंत वाढवा

वें. ह्मणजे एकरुपयाचें तितके दिवसांचें व्याज मुद्दल झालें. नंतर यास सांगितले मुदलानें गुणावें, तो गुणाकार इछिलें व्याज मुद्दल होईल. या कामाचा तपशील करिते समयीं लागरतिंम बहुत उपयोगी पडेल.

प्राप्ति.

प्राप्तिशब्द कामांत घेतात ऐसाजे जो पैक्याचा लाभ बराबर मुदतींवर होतो. जसें कर्जाचें व्याज, घर भूमि इत्यादिकांचें भाडें, चाकरीचें वेतन, वर्षासन, आणि बाळ पर्वेशी इत्यादि. हे सर्वलाभ मुदतीचे मुदतीस पावतात. परंतु बहुत करून वर्षाचे मुदतीवर आहेत.. या सर्वलाभांस प्राप्ति असें ह्मणतात.

प्राप्ति दोन प्रकारची आहे. वर्तमान आणि भविष्य. वर्तमानप्राप्ति ह्मणजे जो पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला आहे ती होय. भविष्यप्राप्तिह्मणजे पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला नाहीं, परंतु कांहीं मुदतीनें किंवा कांहीं प्रतिबंध असेल तो दूर झाल्यावर निश्चित हातीं येणार.

जेव्हां प्राप्ति कितीएकवर्षें अवरुद्ध आहे. ह्मणून पे-

का ५। । ग नाहीं तीस अवरुद्ध प्राप्ति ह्मणतात.

प्राप्तीचे भेद दोन आहेत. सावधि आणि निरवधि. सावधिप्राप्ति ह्मणजे ज्या प्राप्तीस काल मर्यादा आहे. ५ वर्षे, १० वर्षे इत्यादि. निरवधिप्राप्ति ह्मणजे ज्या प्राप्तीस काळ मर्यादा नाहीं. अखंड निरंतर चालणारी.

प्राप्तीचें व्याज मुद्दल ह्मणजे अवरुद्ध प्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें व्याज आणि मुद्दल यांची बेरीज.

प्राप्तीची वर्तमान किंमत ह्मणजे प्राप्तीचा आधार मनांत धरून जो पैका एका एकीं देण्यास घेण्यास योग्य आहे तो होय.

अ = प्राप्ति.
न = अवरुद्ध प्राप्तीची वर्षसंख्या.
च = एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल.
म = प्राप्तीचें व्याज मुद्दल.
व = प्राप्तीची वर्तमान किंमत.

अशीं अक्षर चिह्नें.

आतां **च** राशीची वर्तमान किंमत १ आहे. याजकरितां प्रमाणानें कोणतीही दुसरी राशि जसा **अ** याची किंमत निघेल.

जसें, $\text{च} : १ :: \text{अ} : \frac{\text{अ}}{\text{च}}$ ही **अ**ची वर्तमान किंमत, जी एक वर्षानंतर मिळेल.

आणि $\text{च} : १ :: \frac{\text{अ}}{\text{च}} : \frac{\text{अ}}{\text{च}^२}$ ही **अ**ची वर्तमान किंमत जी दोन

वर्षा नंतर मिळेल.

तसें याप्रमाणें पुढें ही. $\frac{अ}{च^{३}}$; $\frac{अ}{च^{४}}$, $\frac{अ}{च^{५}}$ इत्यादि. या सर्व अ च्या वर्तमान किमती ३, ४, ५ इत्यादि वर्षा नंतर मिळतील याजकरितां या सर्वांची बेरीज.

$$\text{ह्मणजे}\quad \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च^{२}} + \frac{अ}{च^{३}} + \frac{अ}{च^{४}} + \frac{अ}{च^{५}}\ \text{इत्यादि.}$$

$$\text{किंवा}\quad \left(\frac{१}{च} + \frac{१}{च^{२}} + \frac{१}{च^{३}} + \frac{१}{च^{४}} + \frac{१}{च^{५}}\right) \times अ$$

हीबेरीज न पदापर्यंत न वर्षसंख्येचे प्राप्तीची वर्तमान किंमत होईल. आणि निरवधि प्राप्तीची किंमत या श्रेणीची अनंत पदें पर्यंत बेरीज आहे. परंतु सत्वर दिसतें कीं ही श्रेढी भूमिति प्रमाणांत आहे. जिचें प्रथमपद $\frac{१}{च}$ गुणोत्तर $\frac{१}{च}$ आणि गछ न आहे. याजकरितां या श्रेढीचें सर्व धन किंवा वर्तमान किंमत.

$$ब = \frac{\frac{१}{च} - \frac{१}{च} \times \frac{१}{च^{न}}}{१ - \frac{१}{च}} \times अ = \frac{च^{न} - १}{च - १} \times \frac{अ}{च^{न}}$$

जेव्हां प्राप्ति निरवधि आहे. तेव्हां न गछ अनंत आहे आणि $च^{न}$ हाही अनंत आहे. याजकरितां हें पद $\frac{१}{च^{न}} = ०$ शून्य होतें यास्तव $\frac{अ}{च-१} \times \frac{१}{च^{न}}$ हें ही $= ०$ आहे. यापासून कळतें कीं पूर्वसमीकरणास हें रूप होतें, $ब = \frac{अ}{च-१}$ ह्मणजे कोणतीही प्राप्ति एकरुपयाचे एकवर्षाचे व्याजानें भागून तो भागाकार निरवधिप्राप्तीची किंमत होतो.

अंशानें जर व्याजाचा दर शंभरांस पांचोत्रा असेल तर १०० अ ÷ ५ = २० अ हा निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ५ रुपये व्याजाचे दरानें आहे. आणि १०० अ ÷ ४ = २५ अ ही निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ४ रुपये व्याजाच्या दरानें आहे. आणि १०० अ ÷ ३ = ३३ $\frac{१}{३}$ अ ही निरवधि प्राप्तीची किंमत ३ रुपये व्याजाचे दरानें आहे इत्यादि.

पुनः एकरुपयाचें न वर्षांत व्याज मुद्दल = $च^{न}$ आहे. याजकरितां $च^{न}-१$ ही त्या मुद्दलावर वृद्धी झाली. परंतु त्याचे एकावर्षाचें व्याज किंवा प्राप्ती जी त्या वृद्धिवर आहे. ह्मणजे च − १ याजकरितां.

जसें, $च-१ : च^{न}-१ :: अ : म$. ह्मणजे.

$म = \frac{च^{न}-१}{च-१} \times अ$ आतां अवरुद्धप्राप्तीस जे वेगळाले प्रकार लागतात, ते या पूर्वसमीकरणापासून निघती. ल.

$$म = \frac{च^{न}-१}{च-१} \times अ = व च^{न}$$

$$व = \frac{च^{न}-१}{च-१} \times \frac{अ}{च^{न}} = \frac{म}{च^{न}}$$

$$अ = \frac{च-१}{च^{न}-१} \times म = \frac{च-१}{च^{न}-१} \times व च^{न}$$

$$न = \frac{ला\cdot म - ला\cdot व}{ला\cdot च} = \frac{ला\cdot\frac{मच-म+अ}{अ}}{ला\cdot च}$$

$$ला\cdot च = \frac{ला\cdot म - ला\cdot व}{न}$$

$$र = \left(\frac{1}{च^{प}} - \frac{1}{च^{न}} \right) \times \frac{अ}{च-1}$$

या शेवटील समीकरणांत र भविष्यप्राप्तीची वर्तमान किंमत प वर्षानंतर आहे, ती दाखविते. आणि हें याप्रमाणें उत्पन्न होतें कीं,

या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून त्यांत प आणि न वर्षें लिहावीं.

ह्मणजे $$\frac{च^{न}-1}{च-1} \times \frac{अ}{च^{न}} - \frac{च^{प}-1}{च-1} \times \frac{अ}{च^{प}}$$

परंतु कोणतेही प्राप्तीचें व्याज मुद्दल आणि वर्तमान किंमत कितीएक वर्षांची २१ वर्षें पर्यंत या पुढील दोन सारणी कोष्टकांचे साहाय्यानें निघेल.

दुसरें कोष्टक.

एकरुपयाचे प्राप्तीची चक्रवाढ व्याजानें वर्तमान किंमत.						
वर्षे	दर शेंकडा रुपये ३ प्रमाणें	दर शेंकडा रुपये ३½ प्र०	दर शेंकडा रुपये ४ प्र०	दर शेंकडा रुपये ४½ प्र	दर शेंकडा रुपये ५ प्र०	दर शेंकडा रुपये ६ प्र०
१	०·९७०९	०·९६६२	०·९६१५	०·९५६९	०·९५२४	०·९४३४
२	१·९१३५	१·८९९७	१·८८६१	१·८७२७	१·८५९४	१·८३३४
३	२·८२८६	२·८०१६	२·७७५१	२·७४९०	२·७२३३	२·६७३०
४	३·७१७१	३·६७३१	३·६२९९	३·५८७५	३·५४६०	३·४६५१
५	४·५७९७	४·५१५१	४·४५१८	४·३९००	४·३२९५	४·२१२४
६	५·४१७२	५·३२८६	५·२४२१	५·१५७९	५·०७५७	४·९१७३
७	६·२३०३	६·११४५	६·००२०	५·८९२७	५·७८६४	५·५८२४
८	७·०१९७	६·८७४०	६·७३२७	६·५९५९	६·४६३२	६·२०९८
९	७·७८६१	७·६०७७	७·४३५३	७·२६८८	७·१०७८	६·८०१७
१०	८·५३००	८·३१६६	८·११०९	७·९१२७	७·७२१७	७·३६०१
११	९·२५२६	९·००१६	८·७६०५	८·५२८९	८·३०६४	७·८८६९
१२	९·९५४०	९·६६३३	९·३८५१	९·११८६	८·८६३३	८·३८३८
१३	१०·६३५०	१०·३०२७	९·९८५७	९·६८२९	९·३९३६	८·८५२७
१४	११·२९६१	१०·९२०५	१०·५६३१	१०·२२२८	०·८९८६	९·२९५०
१५	११·९३७९	११·५१७४	११·११८४	१०·७३९६	१०·३७९७	९·७१२३
१६	१२·५६११	१२·०९४१	११·६५२३	११·२३४०	१०·८३७८	१०·१०५९
१७	१३·१६६१	१२·६५१३	१२·१६५७	११·७०७२	११·२७४१	१०·४७७३
१८	१३·७५३५	१३·१८९७	१२·६५९३	१२·१६००	११·६८९६	१०·८२७६
१९	१४·३२३८	१३·७०९८	१३·१३३९	१२·५९३३	१२·०८५३	११·१५८१
२०	१४·८७७५	१४·२१२४	१३·५९०३	१३·००७९	१२·४६२२	११·४६९९
२१	१५·४१५०	१४·६९८०	१४·०२९२	१३·४०४७	१२·८२१२	११·७६४१

प्रथम कोष्टक.

एक रुपयाचे प्राप्तीचें चक्रवाढ व्याजानें व्याज मुद्दल.

वर्षें	दर शेंकडा रुपये ३ प्र.	दर शेंकडा रुपये ३½ प्र.	दर शेंकडा रुपये ४ प्र.	दर शेंकडा रुपये ४½ प्र.	दर शेंकडा रुपये ५ प्र०	दर शेंकडा रुपये ६ प्र०
१	१.००००	१.००००	१.००००	१.००००	१.००००	१.००००
२	२.०३००	२.०३५०	२.०४००	२.०४५०	२.०५००	२.०६००
३	३.०९०९	३.१०६२	३.१२१६	३.१३७०	३.१५२५	३.१८३६
४	४.१८३६	४.२१४९	४.२४६५	४.२७८२	४.३१०१	४.३७४६
५	५.३०९१	५.३६२५	५.४१६३	५.४७०७	५.५२५६	५.६३७१
६	६.४६८४	६.५५०२	६.६३३०	६.७१६९	६.८०१९	६.९७५३
७	७.६६२५	७.७७९४	७.८९८३	८.०१९२	८.१४२०	८.३९३८
८	८.८९२३	९.०५१७	९.२१४२	९.३८००	९.५४९१	९.८९७५
९	१०.१५९१	१०.३६८५	१०.५८२८	१०.८०२१	११.०२६६	११.४९१३
१०	११.४६३९	११.७३१४	१२.००६१	१२.२८८२	१२.५७७९	१३.१८०८
११	१२.८०७८	१३.१४२०	१३.४८६४	१३.८४१२	१४.२०६८	१४.९७१६
१२	१४.१९२०	१४.६०२०	१५.०२५८	१५.४६४०	१५.९१७१	१६.८६९९
१३	१५.६१७८	१६.११३०	१६.६२६८	१७.१५९९	१७.७१३०	१८.८८२१
१४	१७.०८६३	१७.६७७०	१८.२९१९	१८.९३२१	१९.५९८६	२१.०१५१
१५	१८.५९८९	१९.२९५७	२०.०२३६	२०.७८४१	२१.५७८६	२३.२७६०
१६	२०.१५६९	२०.९७१०	२१.८२४५	२२.७१९३	२३.६५७५	२५.६७२५
१७	२१.७६१६	२२.७०५०	२३.६९७५	२४.७४१७	२५.८४०४	२८.२१२९
१८	२३.४१४४	२४.४९९७	२५.६४५४	२६.८५५१	२८.१३२४	३०.९०५७
१९	२५.११६९	२६.३५७२	२७.६७१२	२९.०६३६	३०.५३९०	३३.७६००
२०	२६.८७०४	२८.२७९७	२९.७७८१	३१.३७१४	३३.०६६०	३६.७८५६
२१	२८.६७६५	३०.२६९५	३१.९६९२	३३.७८३१	३५.७१९३	३९.९९२७

कोणतेही प्राप्तीचें कितीएक सांगितले वर्षांचें सांगितले व्याजाचे दरानें व्याज मुद्दल काढायाचें.

प्रथम कोष्टकांतून सांगितले वर्षांचें सांगितले व्याजाचे दरानें एकरुपयाचें व्याज मुद्दल काढावें. आणि तें सांगितले प्राप्तीनें गुणावें. तो गुणाकार सांगितले प्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें त्या दरानें व्याज मुद्दल होईल. त्याची उलट केली असतां वर्षे आणि दर निघेल.

उदाहरण, ५०० रुपये दर वर्षाची प्राप्ती. कांहीं निमित्तानें २० वर्षे पर्यंत बंद राहिली असतां चक्रवाढ व्याज दर शेंकडा दरसाल रुपये ३½ प्रमाणें तितक्या वर्षांचें व्याज मुद्दल किती होईल?

आतां प्रथमकोष्टकांत वर्षांखालीं २० चें ओळींत रुपये ३½चे दराखालीं एकरुपयाचें व्याज मुद्दल २८·२७९७ आहे तें ५०० यांणीं गुणून झाला गुणाकार १४१३९·८५ हा. किंवा १४१३९ रुपये ३ पावले ४० रेस हें इछिलें व्याज मुद्दल. हें उत्तर.

कोणतेही सांगितले प्राप्तीची सांगितलीं वर्षे पर्यंत सांगितले दरानें वर्तमान किंमत काढायाची.

दुसरे कोष्टकांतून पूर्वप्रमाणें एकरुपयाची वर्तमान किंमत काढावी. आणि ती सांगितले प्राप्तीनें गुणावी.

तो गुणाकार सांगितले प्राप्तीची सांगितलीं वर्षे पर्यंत सांगितले दरानें वर्तमान किंमत होईल.

उदाहरण, ५०० रुपये दर वर्षाची प्राप्ति वर्षे २० पर्यंत चालणार तिची दरसाल दरशेंकडा रुपये ३½ चक्रवाढ व्याज या दरानें वर्तमान किंमत काय होईल?

आतां दुसरे कोष्टकांत वर्षाखालीं २० चे ओळींत रुपये ३½ चे दराखालीं एक रुपयाची वर्तमान किंमत — १४.२१२४ आहे ती ५०० यांणीं गुणून झाला गुणाकार ७१०६.२ हा किंवा ७१०६ रुपये ० पावले ८० रेंस ही इच्छिली वर्तमान किंमत आहे, हें उत्तर.

दुसरें, आजपासून १० वर्षांनंतर प्रतिवर्षी २०० रुपये प्राप्ति चालू होणार. ती त्या दिवसापासून ११ वर्षे पर्यंत चालेल. अथवा आजपासून २१ वर्षांनी बंद होईल. तर त्या प्राप्तीची वर्तमान किंमत दर शेंकडा दरवर्षास ४ रुपये चक्रवाढ व्याजाचे दरानें काय होईल?

या सारिखे उदाहरणांत दोन मुदतीच्या बरोबर दोन प्राप्तींच्या वर्तमान किंमती काढून त्यांची वजाबाकी करावी. ह्मणजे या प्रमाणें होतें

दुसरे कोष्टकांतून काढिले दोन किंमतींची वजाबाकी करावी, आणि ती बाकी सांगितले प्राप्तीनें गुणावी, तो गुणाकार इच्छिली वर्तमान किंमत होईल.

[redacted]त, [illegible]टकांत [illegible] वर्षांची वर्तमान किंमत १४·०३९२
आणि १० वर्षांची वर्तमान किंमत ८·११०९

यांची वजा बाकी ५·९१८३

२००

११८३·६६००

४

२·६४००
१००

६४·००००

तर ११८३ रुपये २ पावलं ६४ रेंस, इछिली वर्तमान किंमत, हें उत्तर.