~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

सं.ग.[illegible]

Keshowshewran
Subdy Inspector
J.C.

No. 48.

C.[?] 48th Laxman Ball[?] als[?]
Bhaway [illegible]
Poona [illegible]

ग्रं.ड्या. ९२

आदिकरण मुमेता[?]

# ELEMENTS OF GEOMETRY.

TRANSLATED

INTO MARATHI LANGUAGE

FROM THE WORKS OF DR. HUTTON.

BY THE LATE

COLONEL G. R. JERVIS,

BOMBAY ENGINEERS.

FOURTH EDITION.

LITHOGRAPHED AT GUNPUT CRUSHNAJEE'S PRESS,

BOMBAY.

1856.

PRICE, ONE RUPEE, FOUR ANNAS.

# आदिकरण भूमिति.



याचें मूळपुस्तक इंग्रेजी भाषेंत आहे त्याचा कवि

डाक्तर हटन.

त्या पुस्तकाचें भाषांतर

माजी

## कर्नल जे. आर. जार्विस साहेब

मुंबईचे इंजनेर

याणीं महाराष्ट्र भाषेंत केलें.

आवृत्ति चवथी.

मुंबईंत गणपत कृष्णाजी यांचे छापखान्यांत छापिलें.

१८५६.

किंमत एक रुपाया चार आणे.

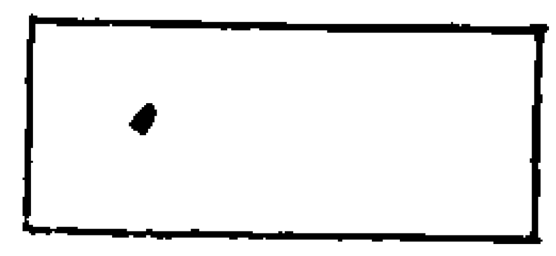
# भूमिति

## व्याख्या.

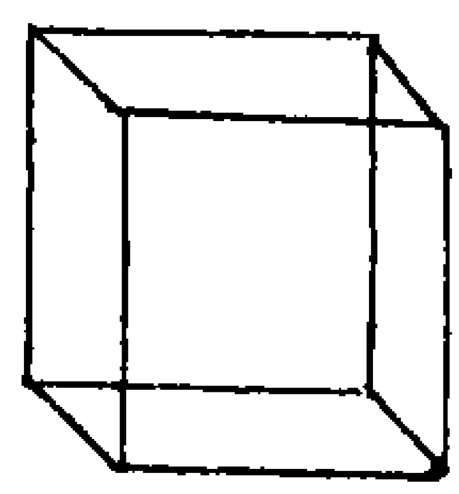
१ बिंदु ह्मणजे तोच होय. जास स्थिति मात्र आहे. महत्व आणि माप नाहीं. ह्मणूनच त्यास लांबी रुंदी आणि जाडी नाहीं.

२ रेघ ह्मणजे तीच होय. जीस लांबी मात्र आहे. जाडी आणि रुंदी नाहीं.

३ पातळी ह्मणजे अवकाश अथवा दोन मापांची आकृति होय तीं दोन मापें लांबी आणि रुंदी परंतु जाडी वांचून.

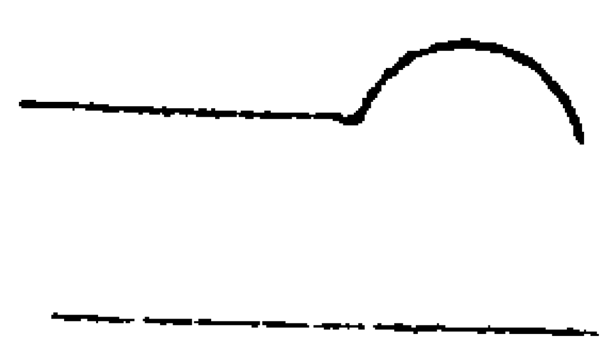


४ पिंड अथवा भरींव ह्मणजे तीन मापांची आकृति होय. तीं मापें लांबी रुंदी आणि ओंडी अथवा उंची.



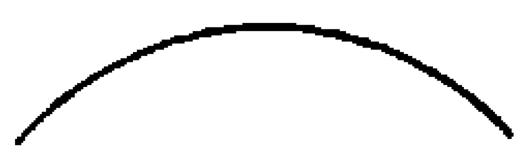
५ रेघा ह्मणजे त्याच दोन. सरळ अथवा वांकडी किंवा मिश्र. मिश्र ह्मणजे सरळ आणि वांकडी या दोनीं जींत एकत्र मिळाल्या आहेत.

६ सरळ रेघ तीच होय. जी एक शेवटा पासून दुसऱ्ये शेवटाचे दिशेस समोर गेली आहे. अथवा दोन बिंदूमध्यें जी सर्वांहून लाहान अंतर मापित्ये.



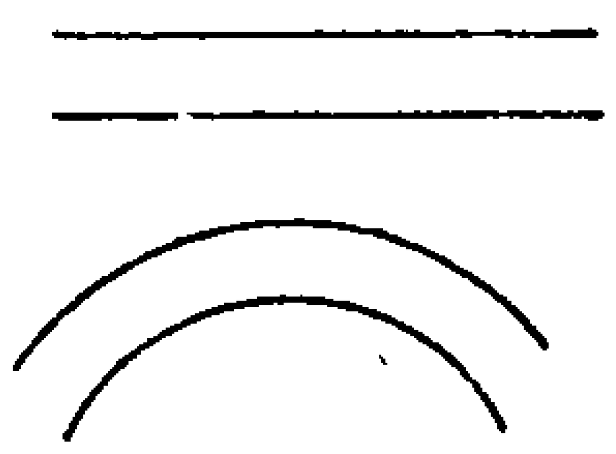
जेव्हां पुढें कोठे ही रेघ इतकेंच सांगेल तेव्हां तेथें सरळ रेघ जाणावी.

७ वांकडी रेघ तीच होय. जी एक शेवटा पासून दुसऱ्या शेवटाकडे समोर नगेली ह्मणजे ती दिशा बदल करून गेली आहे.

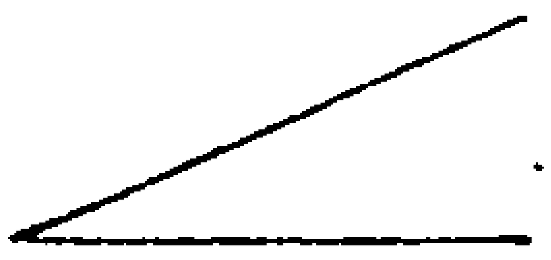


८ रेघा त्याच होत. जा समांतर अथवा तिर्कस अथवा लंब अथवा स्पर्श आहेत.

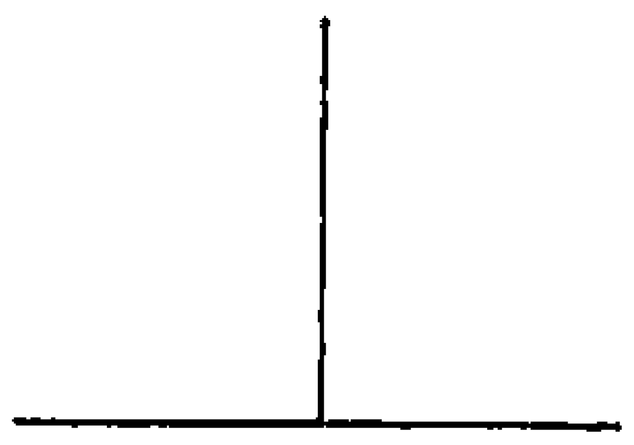
९. समांतर रेघा त्याच होत. जांत लंबांतर सर्वत्र बराबर आहे. आणि कितीही वाढविल्या तरीं एक दुसरीशीं मिळत नाहीं.



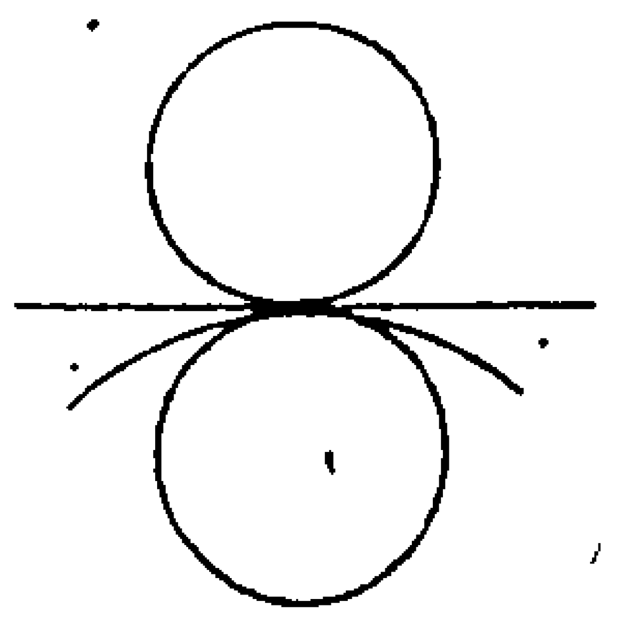
१० तिर्कसरेघा त्याच होत. जांत अंतर अधीक उणें आहे आणि उणें आहे तिकडे अधीक वाढविल्या असतां त्यांचीं टोंकें एकत्र मिळतात.



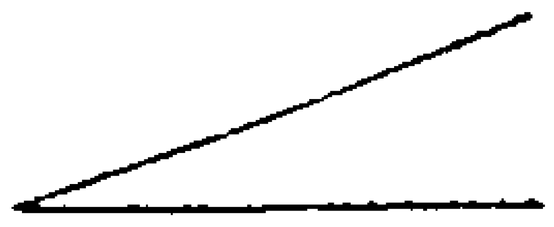
११ लंबरेघ तीच होय. जी सरळ रेघेवर उभी असतां. तिचें शिर एक बाजूं पेक्षां दुसऱ्ये बाजूवर अधीक झोंकत नाहीं. अथवा तिचे दोहों बाजूं कडील दोन कोन बराबर होतात.



१२ स्पर्शरेघ अथवा स्पर्श वर्तुळ तेंच होय. जी वर्तुळावर अथवा कोणत्येही वांकड्ये रेघेवर किती वाढविली तरीं छेदिल्या वांचून वर्तुळास स्पर्श मात्र करित्ये.



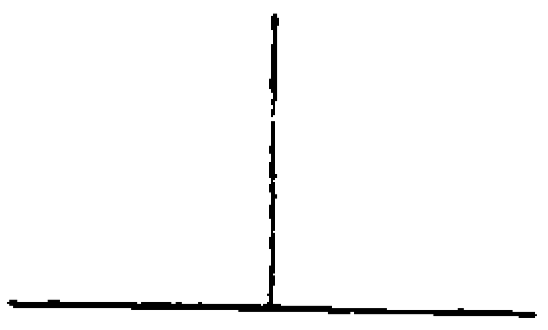
१३ कोन ह्मणजे दोन दिशांस गेलेल्ये दोन रेघांचीं टोंकें. एकत्र मिळतात तो. अथवा त्या रेघांचा झोंक अथवा अंतर होय.



१४ कोन दोन प्रकारचे आहेत. काट कोन आणि तिर्कस कोन त्यांत ति

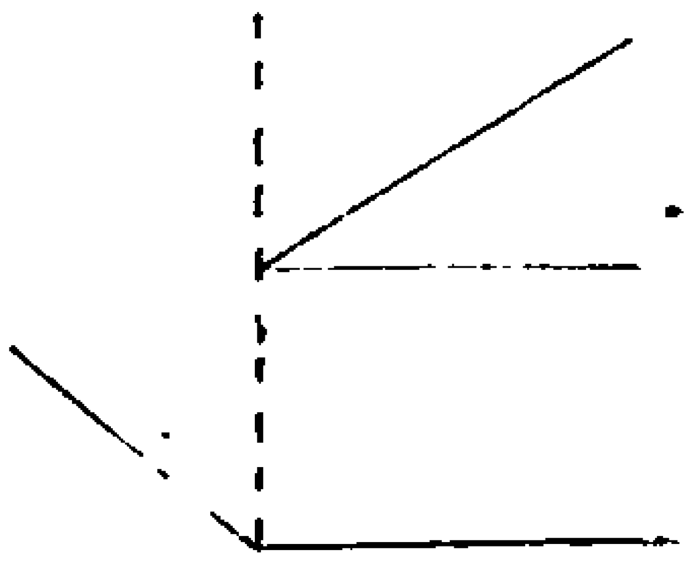
र्क

र्कस कोनाचे दोन भेद आहेत. लघु आणि विशाळ.



१५ काट कोन तोच होय. जो एक रेघेवर दुसरी लंब रेघ केल्यापासून जाला अथवा त्या लंबाचे दोन बाजूंस बराबर दोन कोन जाले. ते काट कोन.

१६ तिर्कस कोन तोच होय. जो दोन तिर्कस रेघां पासून जाला. आणि तो काट कोनाहून लाहान किंवा मोठा असतो.



१७ लघु कोन काट कोनाहून लाहान आहे.

१८ विशाळ काटकोनाहून मोठा आहे.

१९ पातळी दोन प्रकारची आहे सरळ आणि वांकडी.

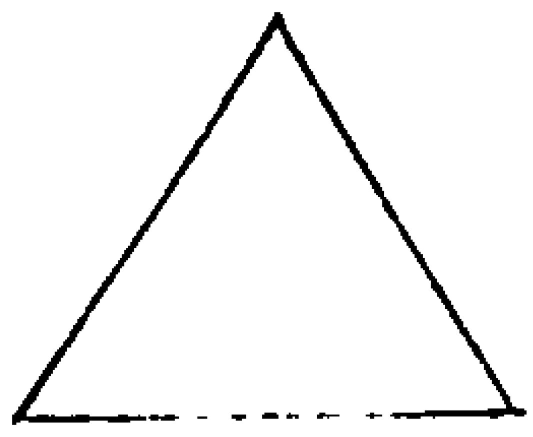
२० सरळ पातळी तीच होय. जीजवर सरळ रेघ फिरवून फिरवून कशी ही ठेविली तरीं सर्वत्र सारखी लागत्ये. अथवा सरळ रेघेचे दोन बिंदू पातळीस स्पर्श करितात. तसे सर्व बिंदू स्पर्श करितील ती सरळ पातळी आणि जी अशी नव्हे ती वांकडी पातळी.

२१ सरळ पातळीस मर्यादा दोन आहेत. सरळ रेघ किंवा वांकडी रेघ.

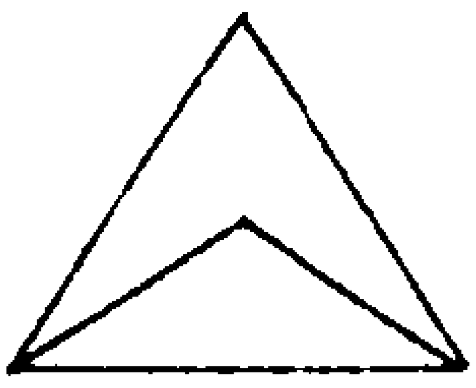
२२ जा सरळ पातळीस मर्यादा सरळ रेघ आहे. तीस बाजू अथवा कोन यांचे संख्ये प्रमाणें अनेक नामें होतात. कारण तीस जितक्या बाजू तितकेच कोन आहेत त्यांची संख्या सर्वांहून थोडया अशा तीन.

२३ जा आकृतीस बाजू अथवा कोन तीन आहेत. तीस त्रिकोण म्हणतात. त्या त्रिकोणास बाजू आणि कोन यांचे गुणाप्रमाणें वेगळालीं नावें होतात.

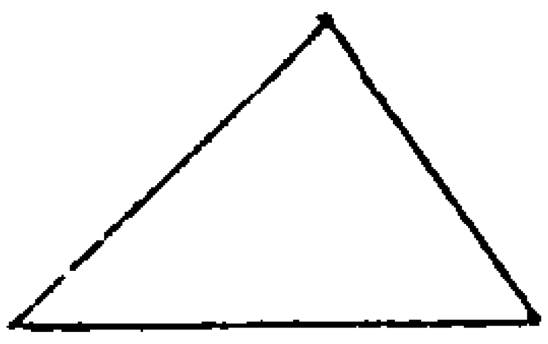
२४ समबाजू त्रिकोण तोच होय. जाचा तीन बाजू बराबर आहेत.



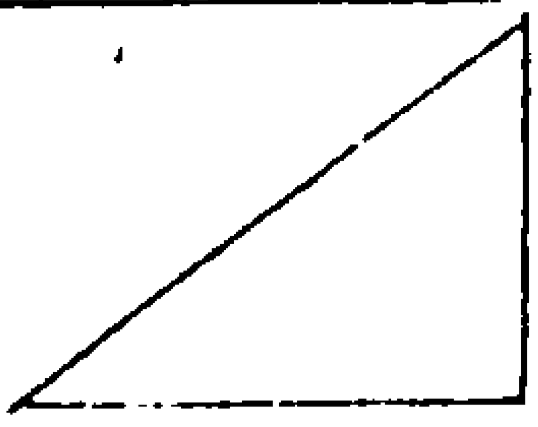
२५ सम द्विबाजू त्रिकोण तोच होय. जाचा दोन बाजू बरावर आहेत.



२६ विषम वाजू त्रिकोण तोच होय. जाचा तीन वाजू परस्पर विषम आहेत.

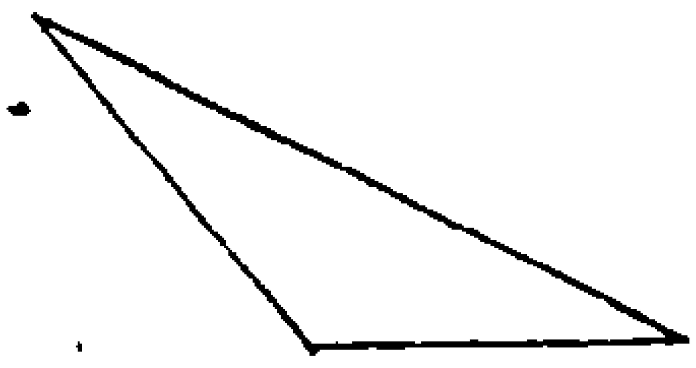


२७ काटकोन त्रिकोण तोच होय. जाचा एक कोन काट कोन आहे.

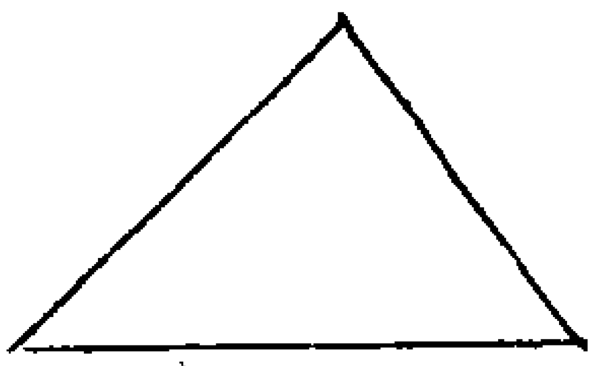


२८ दुसरे त्रिकोण तिर्कसकोन त्रिकोण आहेत. लघुकोन त्रिकोण. अथवा विशाळकोन त्रिकोण.

२९ विशाळकोन त्रिकोण तोच होय. जाचा एक कोन विशाळकोन आहे.



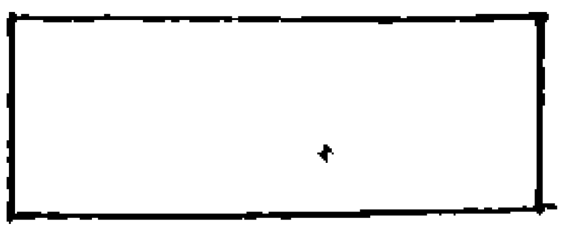
३० लघुकोन त्रिकोण तोच होय. जाचे तीनही कोन. लघुकोन आहेत.



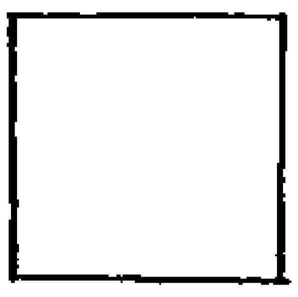
३१ जा आकृतीस चार बाजू अथवा चार कोन आहेत त्या आकृतीस चौबाजू अथवा चौकोन ह्मणतात.

३२ समांतर रेघ चौकोन तेंच होय. जाचे वाजूचे दोनही जोड समांतर रेघा आहेत. आणि त्यास या प्रमाणें नावें होतात. काटकोन चौकोन. चौरस रांबस आणि रांबायद.

३३ काटकोन चौकोन तेंच होय. जा समांतर वाजू चौकोनांत एक कोन काटकोन आहे.



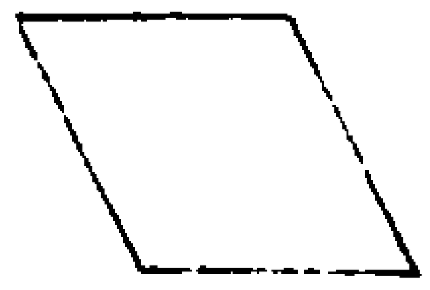
३४ चौरस तेंच होय. जें समबाजू चौकोन आहे. ह्म



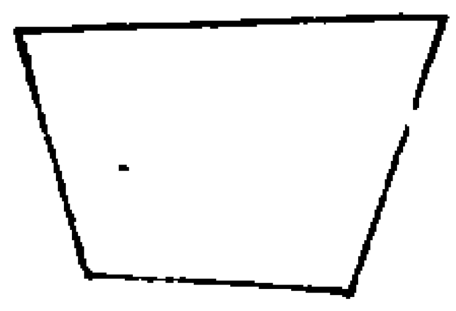
म्हणजे ज्याची लांबी आणि रुंदी बराबर आहे

३५ रांबायद तेंच होय. जें तिर्कसकोन समांतररेघ चौबा-
जू आहे.

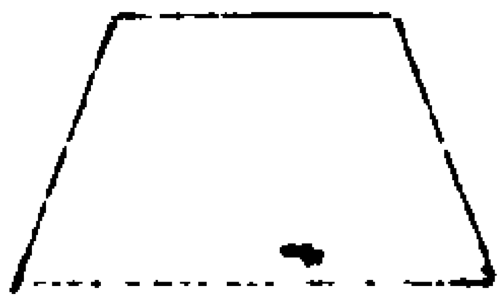
३६ रांबस तेंच होय. जें रांबायद चारी बाजू बराबर पण
तिर्कसकोन आहे.



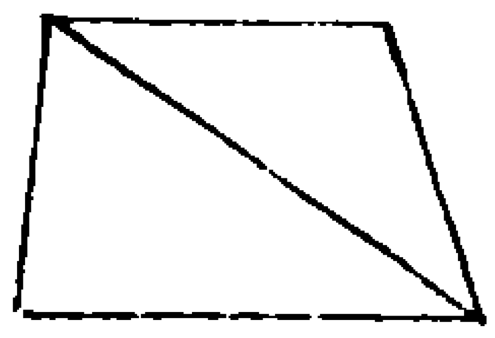
३७ त्रापीज्यम तेंच होय. ज्याचा चारही बाजू समोरास
मोरचे रेघांशीं समांतर रेघा नाहींत.



३८ त्रापीज्यायद तेंच होय. ज्या चौबाजूंत बाजूंचा एक
जोड समांतररेघा आहेत.



३९ कर्णरेघ तीच होय. जी सरळ रेघ समोरासमोरचे दो
नकोन सांधिते.



४० ज्या पातळीस चोहोंपेक्षां अधिक बाजू आहेत. तीस सामान्यतः ब-
हुबाजू म्हणतात. आणि त्या पातळीस बाजू आणि कोन यांचे संख्येवरून
वेगळाली विशेष नावें आहेत.

४१ पंचकोन बहुकोन तें होय. ज्यास पांच बाजू आहेत. षट्कोणास ६ बा
जू सप्तकोनास ७ बाजू- अष्टकोनास ८ बाजू- नवकोनास ९ बाजू- दशको
नास १० बाजू- एकादशकोनास ११ बाजू- द्वादशकोनास १२ बाजू- आहेत.

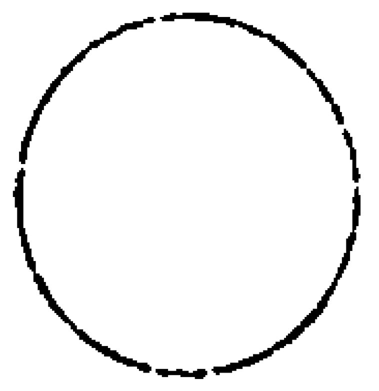
४२ सम बहुकोन तें होय. ज्याचा सर्व बाजू व सर्व कोन बराबर आहेत.
आणि ज्याचा यासारिख्या बराबर नाहींत. तें विषम बहुकोन होय.

४३ समबाजू त्रिकोण तीन समबाजूंची सम पातळी आहे. आणि चौरस
त्यासारिखीच चार बाजूंची समपातळी आहे.

४४ कोणतीही आकृती सम बाजू होय. जेव्हां तिचा सर्वबाजू बराबर

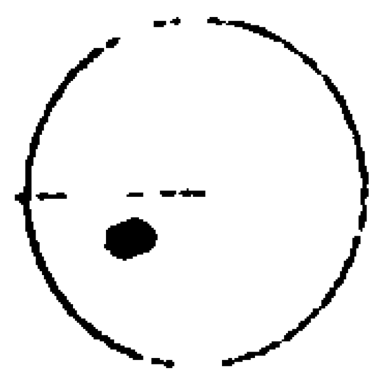
आहेत. तसे सर्वकोन बराबर आहेत. ती समकोन होय. जेव्हां हीं दोनीं बराबर आहेत. तेव्हां समपातळी जाली.

४५ वर्तुळ समपातळी ती होय. जीस मर्यादा वांकडी रेघ आहे. जा रेघेस परिघ ह्मणतात. तो परिघ मध्यबिंदूपासून सर्वत्र सारख्ये अंतरानें आहे. त्याबिंदूस वर्तुळ मध्य ह्मणतात.

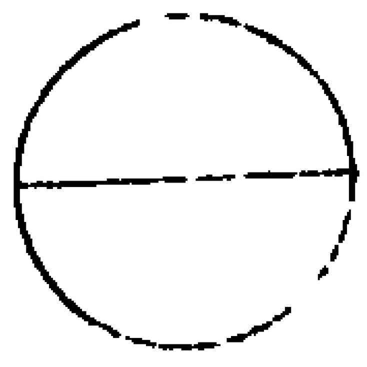


केवळ परिघासही बहुधा वर्तुळ ह्मणतात.

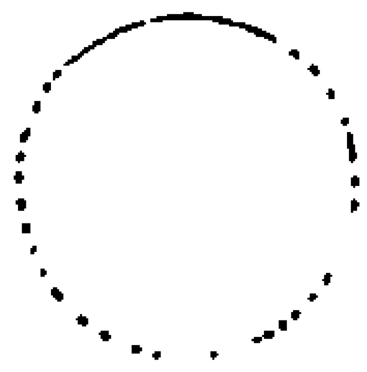
४६ त्रिज्या तीच होय. जी रेघ मध्यबिंदूपासून परिघ पर्यंत केली आहे.



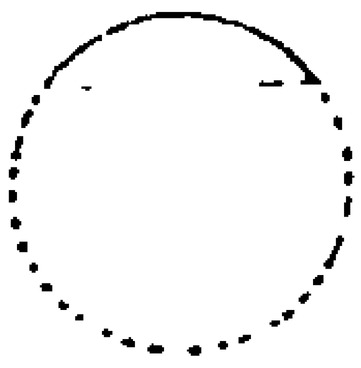
४७ वर्तुळाचा व्यास तोच होय. जी रेघ मध्य छेदून पार गेली तिचे दोनही शेवट परिघावर आहेत.



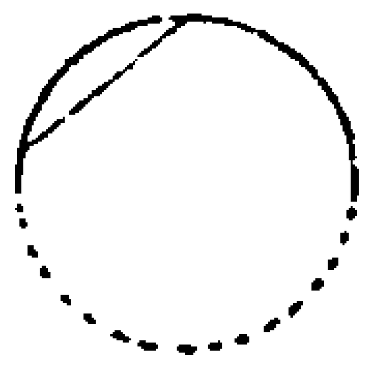
४८ वर्तुळाचा कौंस तोच होय. जो परिघाचा भलता एक तुकडा आहे.



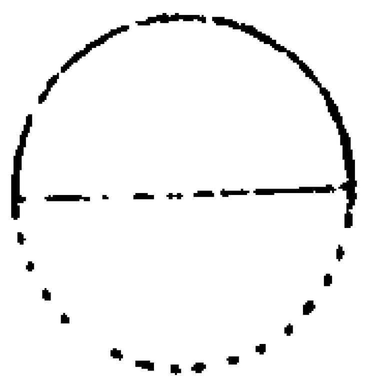
४९ ज्या सरळरेघ आहे. जी कौंसाचे दोनी शेवट सांधिते



५० खंड. वर्तुळाचा भलता एक तुकडा आहे. जास मर्यादा कौंस आणि ज्या आहे.

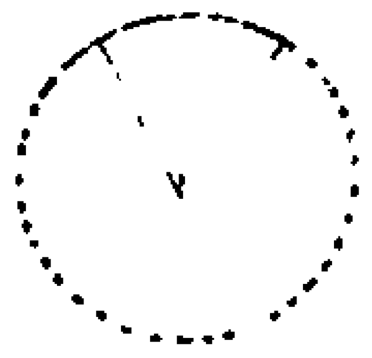


५१ अर्धवर्तुळ ह्मणजे वर्तुळाचें अर्ध अथवा खंड. जास मर्यादा कौंस आणि व्यास आहे.

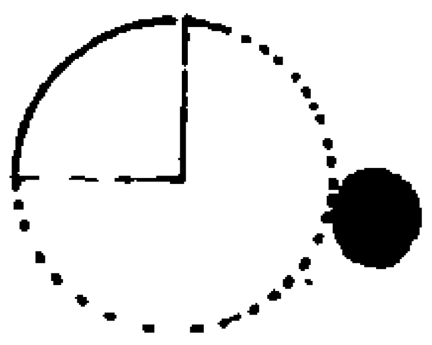


काणे वेळेस अर्धपरिघास अर्ध वर्तुळ ह्मणतात.

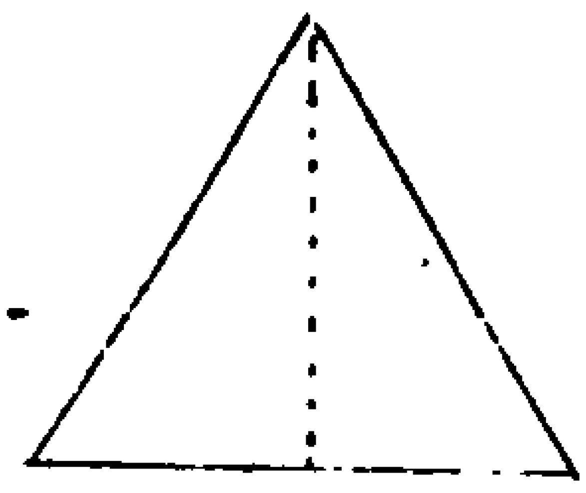
५२ सेकतोर तोच होय. जाची मर्यादा कौंस आणि दोन त्रिज्या आहेत.



५३ वर्तुळपाद सेक्तोर आहे. ज्याचा कोंस परिघाचा चौथा भाग आहे. आणि त्याचा दोन त्रिज्या परस्परांवर लंब आहेत.

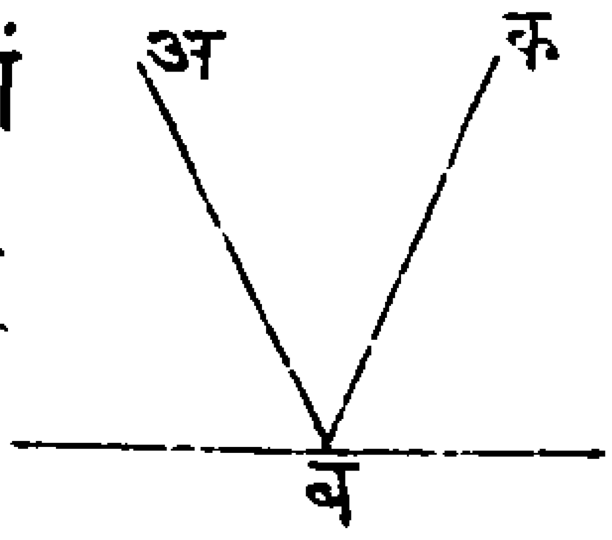


५४ कोणत्येही आकृतीची उंची तीच होय. जो शिरापासून समोरचे बाजूवर लंब केला आहे. जा बाजूस पाय ह्मणतात.



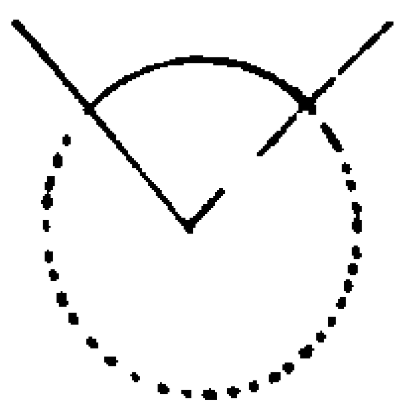
५५ काटकोन त्रिकोणांत काटकोना समोरचे बाजूस कर्ण ह्मणतात. आणि राहिल्ये दोन बाजूस बाजू ह्मणतात. केव्हां भूज कोटी असेंही.

५६ जेव्हां कोणताही कोन तीन अक्षरांनीं चिन्हित करितात एक अक्षर कोनस्थळीं. आणि दोन अक्षरें कोनरेघांचे शेवटांवर. तो कोन सांगत्ये समयीं कोनस्थळींचे अक्षर मध्यें उच्चारावें.

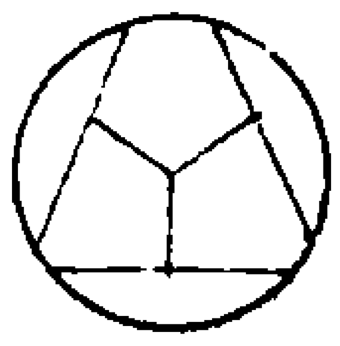



५७ सर्ववर्तुळमात्राचे परिघाचे ३६० भाग मानिले त्यांस अंश ह्मणतात. एक अंशाचे ६० भाग मानिले त्यांस कळा ह्मणतात. एक कळेचे ६० भाग मानिले त्यांस विकळा ह्मणतात. याप्रमाणें पुढें ही जाणावें.

५८ कोनाचे माप कोणत्येही वर्तुळाचे कोंसावर आहे जा वर्तुळाचा मध्य कोनबिंदु आणि तो कोंस कोनरेघांचे मध्यें आहे. त्या कोंसावर जितके अंश आहेत. ते कोनाचें माप होय.



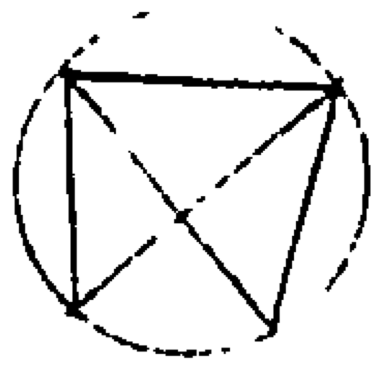
५९ रेघा किंवा जा वर्तुळमध्यापासून समदूर ह्मणतात.



जर वर्तुळ मध्यापासून त्याजवर केलेले लंब बराबर आहेत.

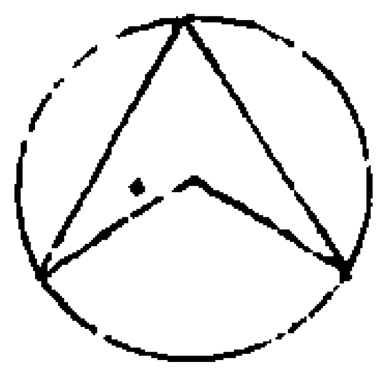
६० जा सरळ रेघेवर मध्यापासून केलेला लंब दुसऱ्याहून अधिक लांब आहे. ती सरळरेघ मध्यापासून दुसऱ्यांपेक्षां अधिक दूर ह्मणतात.

६१ वर्तुळखंडांतर कोन तोच होय. जो खंडाचे कौंसावर कोणत्येही स्थळापासून कौंसाचे शेवटांपर्यंत दोन रेघांनीं होतो.

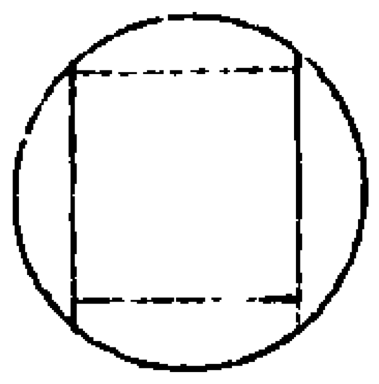


६२ वर्तुळखंडावर कोन तोच होय. जो त्याचे समोरचा अथवा सप्लुमेंट कौंसावर कोणत्येही स्थळापासून त्या कौंसाचे शेवटांपर्यंत दोन रेघांनीं होतो.

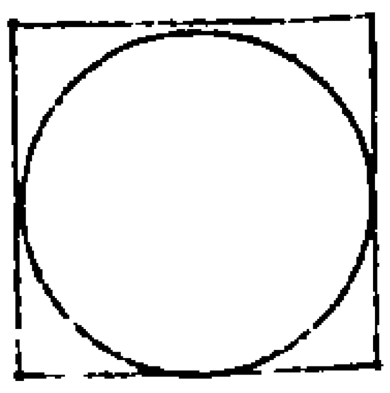
६३ परिघकोन तोच होय. जाचा कोन बिंदू परिघावर आहे. आणि मध्यकोन तोच होय. जाचा कोन बिंदू वर्तुळमध्यस्थळीं आहे.



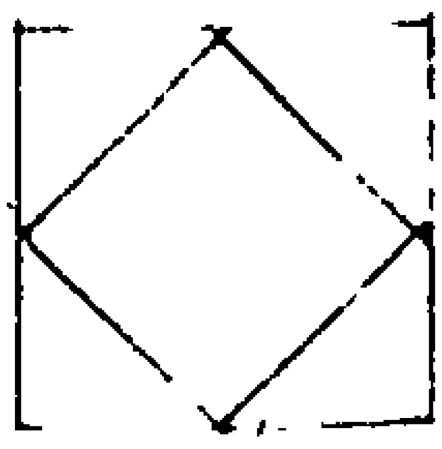
६४ एक सरळरेघाकृती वर्तुळांत केली अथवा तिचें भोंवतें संलग्न वर्तुळ केलें जेव्हां तिचे सर्व कोन परिघावर आहेत.



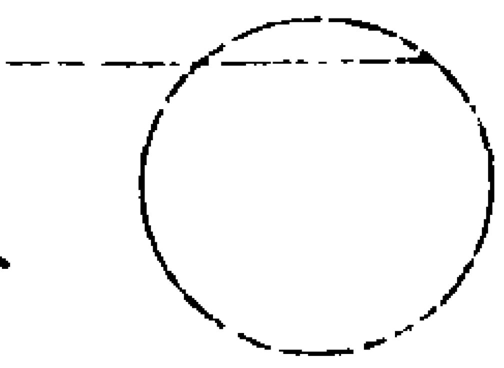
६५ एक सरळरेघाकृती वर्तुळा भोंवती संलग्न केली अथवा वर्तुळ त्यांत केलें जेव्हां आकृतीचा सर्व बाजू वर्तुळ परिघास स्पर्शतात.



६६ एक सरळरेघाकृती दुसऱ्ये सरळ रेघाकृतीचे आंत केली अथवा तिचे भोंवती संलग्न केली जेव्हां तिचे सर्व कोन दुसऱ्ये आकृतीचे बाजूंवर ठेविले आहेत.



६७ छेदनरेघ तीच होय. जी वर्तुळपरिघास आंतून स्पर्शू



न दुसऱ्येकडे परिघ छेदून पार बाहेर गेली आहे.

६८ दोन त्रिकोण अथवा कोणत्याही दोन सरळरेघाकृती परस्पर समबाजू ह्मणतात. जेव्हां एकाचा सर्वबाजू दुसऱ्याचे सर्व बाजूंशीं अनुक्रमें प्रत्येकीं बराबर आहेत. आणि त्यांस परस्पर समकोन ह्मणतात. जेव्हां एकाचे सर्वकोन अनुक्रमें दुसऱ्याचे सर्वकोनांशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत.

६९ एक रूपाकृती त्याच होत. जा परस्पर समकोन असून समबाजू आहेत. अथवा एकीचा सर्वबाजू आणि सर्वकोन दुसरीचा सर्वबाजू आणि सर्वकोन यांशी प्रत्येकीं अनुक्रमें बराबर आहेत. असेंकीं एक आकृती दुसऱ्ये आकृतीवर ठेविलीअसतां एकीचा सर्वबाजू दुसरीचा सर्वबाजूंनी सर्वांशीं दांकिल्या जातील. यानंतर त्या दोन आकृती असोन एकच आकृती आहे असें दिसण्यांत येईल.

७० सरूपाकृती त्याच होत. जेव्हां एकीचे सर्वकोन अनुक्रमें दुसरीचे सर्व कोनांशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत. आणि कोनांचा बाजू प्रमाणांत आहेत.

७१ कोणत्येही आकृतीची परिमिती तीच होय. जी तिचे सर्वबाजूंची मिळून बेरीज आहे.

७२ निश्चित तेंच होय. जें कांहीं करणें अथवा केल्याचा ताळा दाखविणें तें निश्चित दोन प्रकारचें आहे. कृत्य आणि सिद्धांत.

७३ कृत्य तेंच होय. जें कांहीं करायास सांगीतलें.

७४ सिद्धांत तोच होय. जो कांहीं केल्याचा ताळा.

७५ लिंम तेंच होय. जें कांहीं पूर्वी सांगीतलें किंवा सिध केलें. पुढें येणार तें सुगम जाया साठीं.

७६ कुरलरी तीच होय. जो पूर्वील प्रत्यय आला अथवा सिद्धांता पासून.

न जो प्रत्यय प्राप्त जाला.

७७ स्कोलंम ह्मणजे टीप. पूर्वी सांगीतल्ये पुरःकरणावर ह्मणजे त्या कृत्यावरील अवांतर विशेष.

# प्रत्यक्षप्रमाणें

१ जा वस्तू दुसज्ये एक वस्तूशीं प्रत्येक सम ह्मणजे बरोबर आहेत. तर त्या सर्व वस्तू परस्पर बराबर आहेत.

२ समांत सम मेळविले तर बेरीज सम होत्ये.

३ समांतून सम वजा केले तर सम बाकी राहातात.

४ समांत विषम मेळविले तर बेरीज विषम येत्ये.

५ विषमांतून सम वजा केले तर विषम बाकी राहातात.

६ जा वस्तू प्रत्येकीं दुसज्ये एक वस्तूचे दुपट आहेत.त्या सर्व परस्पर बराबर आहेत.

७ जा वस्तू प्रत्येकीं दुसज्ये एक वस्तूचे अर्धा बरोबर आहेत. त्या सर्व बराबर आहेत.

८ कोणतीही वस्तू तिचे सर्व तुकड्यांचे बेरिजे बराबर आहे.

९ जा वस्तू सर्वांशीं परस्पर मिळतात अथवा सारिखी जागा भरितांत. त्या एकरूप आहेत.

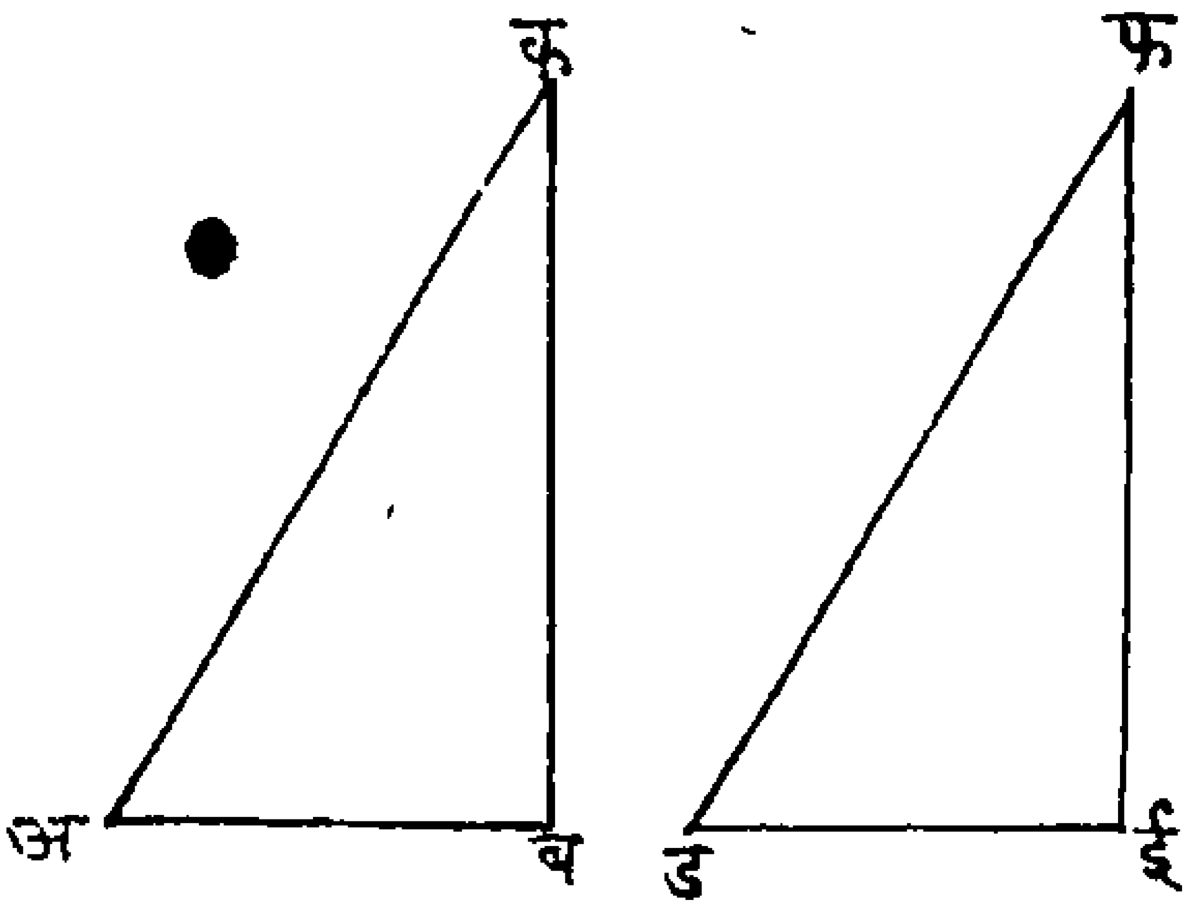
१० सर्व काटकोन परस्पर बराबर आहेत.

११ जाचें माप अथवा कौंस बराबर आहेत. ते सर्व कोन परस्पर बराबर आहेत.

# प्रथमसिद्धांत.

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू व अंतर कोन दुसऱ्याचा दोन बाजू व अंतरकोन यांशीं बराबर असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम होतील.

अबक आणि डईफ या दोन त्रिकोणांमध्यें जर अक बाजू डफ बाजूचे बराबर. आणि बक बाजू ईफ बाजू बराबर आणि क अंतरकोन फ अंतर कोनाचे बराबर असेल. तर हे दोनी त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं बराबर होतील.

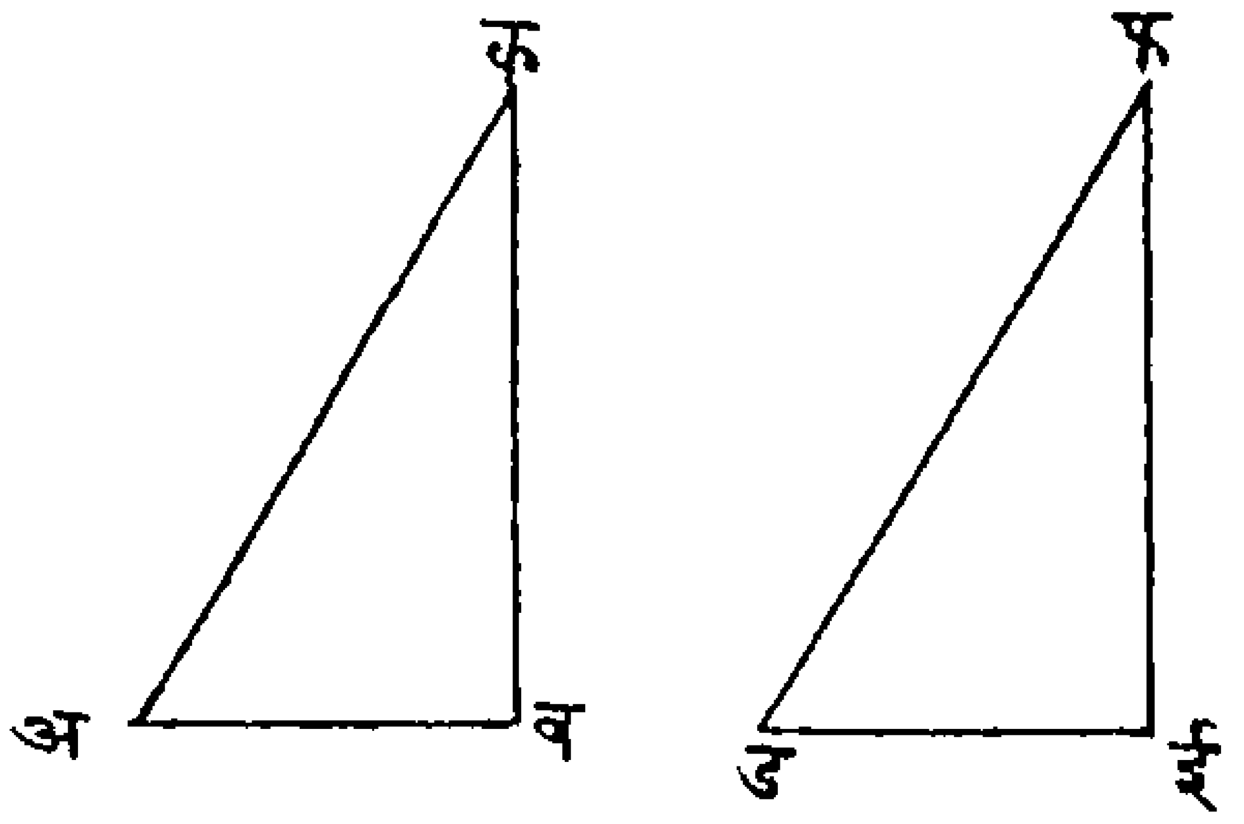



आतां मनांत आणकीं अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर ठेविला. अशा रीतीनें कीं क कोन बिंदू फ कोन बिंदूशीं बराबर मिळेल. आणि अक बाजू तिचे बराबरीचे डफ बाजूशीं मिळेल. तेव्हां क कोन आणि फ कोन (वर सांगितले प्रमाणें) बराबर आहेत. तेव्हां बक बाजू ईफ बाजूवर येईल. आणि अक बाजू (वर सांगीतलें प्रमाणें) डफ बाजू बराबर येईल. तेव्हां ब कोन बिंदू ई कोन बिंदूशीं मिळेल. याजकरितां अब बाजू डई बाजूस मिळेल ह्मणोन हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि त्यांचे बाकी अवयव प्रत्येकीं अनुक्रमें बराबर मिळतात. (९ प्रत्यक्षम०) ह्मणजे अब बाजू डई बाजू बराबर. अ कोन ड कोनाबराबर. आणि ब कोन ई कोनाबराबर. हें सिद्ध जालें.

# दुसरा सिद्धांत.

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन व अंतर बाजू दुसऱ्याचे दोन कोन व अंतर बाजू यांशीं अनुक्रमें बराबर असतील. तर ते दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्यांचा बाकी बाजू व बाकी कोन बराबर. ह्मणजे ते सर्वांशीं सम होतील.

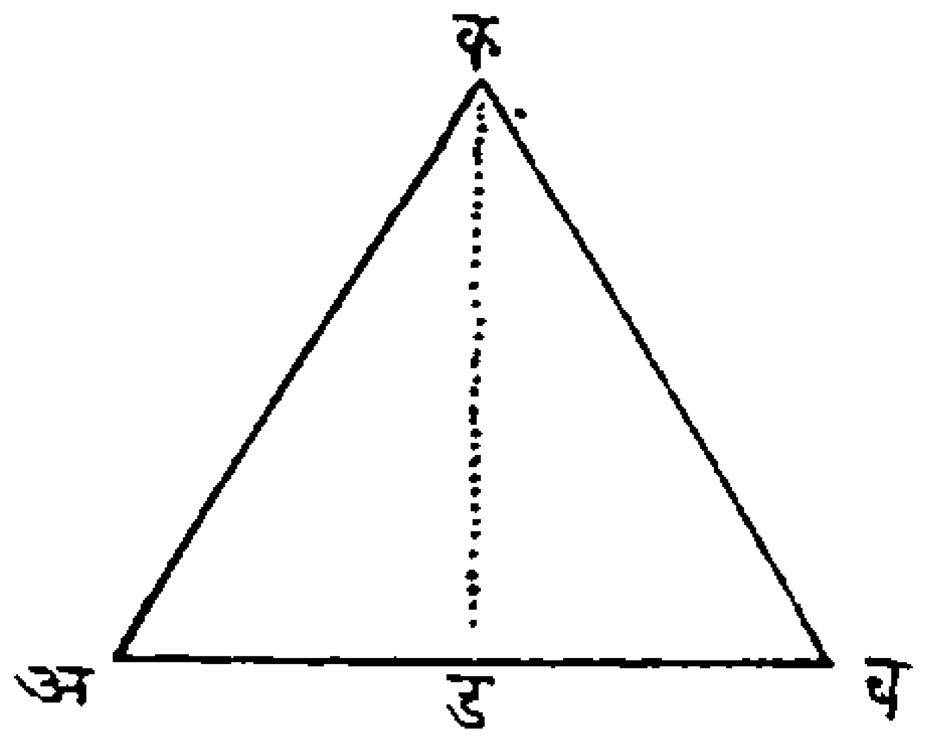
अबक आणि डईफ या दोन त्रिकोणांत जेव्हां असें असेल कीं अ कोन ड कोनाचे बरोबर आणि ब कोन ई कोनाचे बरोबर आणि अब बाजू डई बाजूचे बराबर. तेव्हां हे दोन त्रिकोण एक रूप आहेत.




आतां मनांत आणकीं अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर आणून ठेविला. अशा रीतीनें कीं अब बाजू तिचे बराबरीचे डई बाजूवर बराबर येईल आणि अ कोन ड कोनाचे बराबर (वर सांगीतले प्रमाणें) असेल तर अक बाजू डफ बाजूवर येईल तसेंब कोन ई कोनाचे बराबर असल्यास बक बाजू ईफ बाजूवर येईल. यावरून अबक त्रिकोणाचा तीनही बाजू डईफ त्रिकोणाचे तीन बाजूंवर येतील. याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप (९ प्र०प्र०) दुसऱ्या दोन बाजू अक आणि बक त्या दुसऱ्या दोन बाजू डफ आणि ईफ यांचे बराबर. बाकी राहिला क कोन दुसऱ्याचे राहिल्ये फ कोनाचे बराबर आहे, हें सिद्ध जालें.

# तिसरा सिद्धांत.

समद्विबाजू त्रिकोणांत पायाकडील कोन बराबर आहेत. अथवा जर कोणत्येही त्रिकोणांत दोन बाजू बराबर असतील तर. त्यांचे समोरासमोरचे कोन बराबर होतील.




जर अबक त्रिकोणांत अक आणि बक या दोन बाजू बराबर असतील.तर ब कोन अ कोनाचे बराबर होईल.

आतां मनांत आण कीं क कोन दुभागिला अथवा त्याचे बराबर कड रेघेनें दोन तुकडे केले. असे कीं अकड कोन बकड कोनाबराबर जाला.

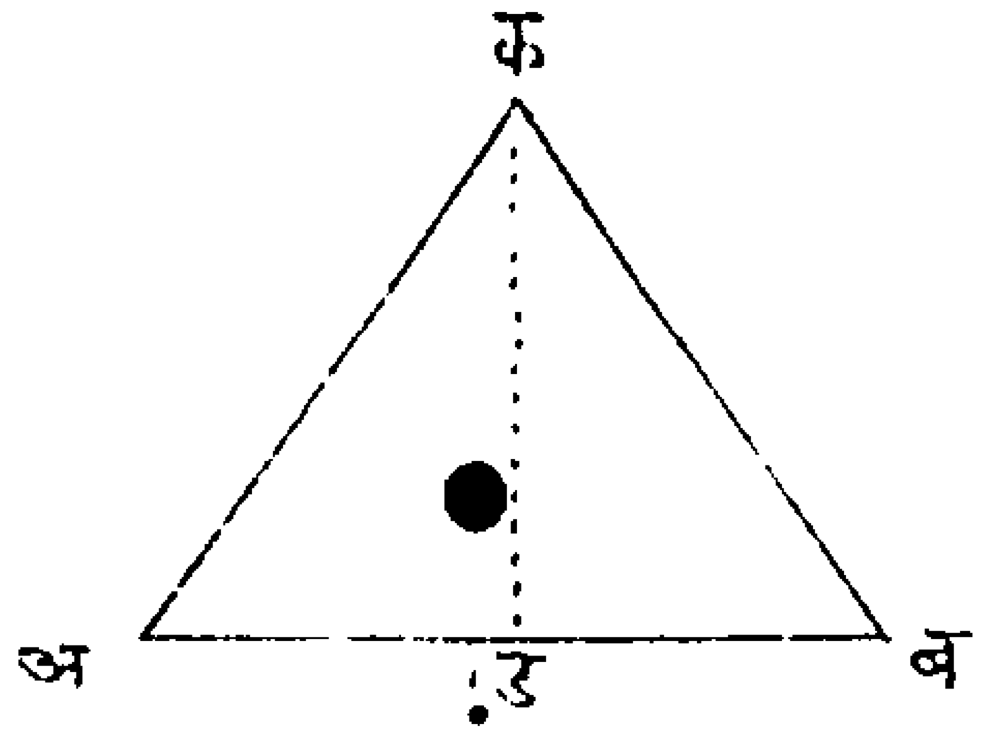
तेव्हां अकड आणि बकड या दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू न अंतर कोन दुसऱ्याचा दोन बाजू व अंतर कोन यांचे बराबर आहेत. कोणत्या तर. अक बाजू बक बाजूचे बराबर अकड कोन बकड कोनाचे बराबर आणि कड बाजू दोघांस समान याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम होत.(१ सि० प्र०) यावरून अ कोन ब कोनाचे बराबर हें सिद्ध जालें.

प्रथम कुरलरी. यावरून जी रेघ समद्विबाजू त्रिकोणाचे शिरकोनास दुभागित्ये. ती पायास दुभागित्ये. ती त्याजवर लंब आहे.

दुसरी कुरलरी. यावरून कळते कीं सर्व समबाजू त्रिकोण समकोन. अथवा त्यांचे तीन कोन बराबर आहेत.

# चवथा सिद्धांत.

जेव्हां त्रिकोणांत दोन कोन बराबर आहेत. तेव्हां त्यांचा समोरा समोरचा बाजूही बराबर होतात.




**अबक** त्रिकोणांत **अ** कोन **ब** कोना बराबर आहे. तर **अक** बाजू **बक** बाजू बराबर होईल.

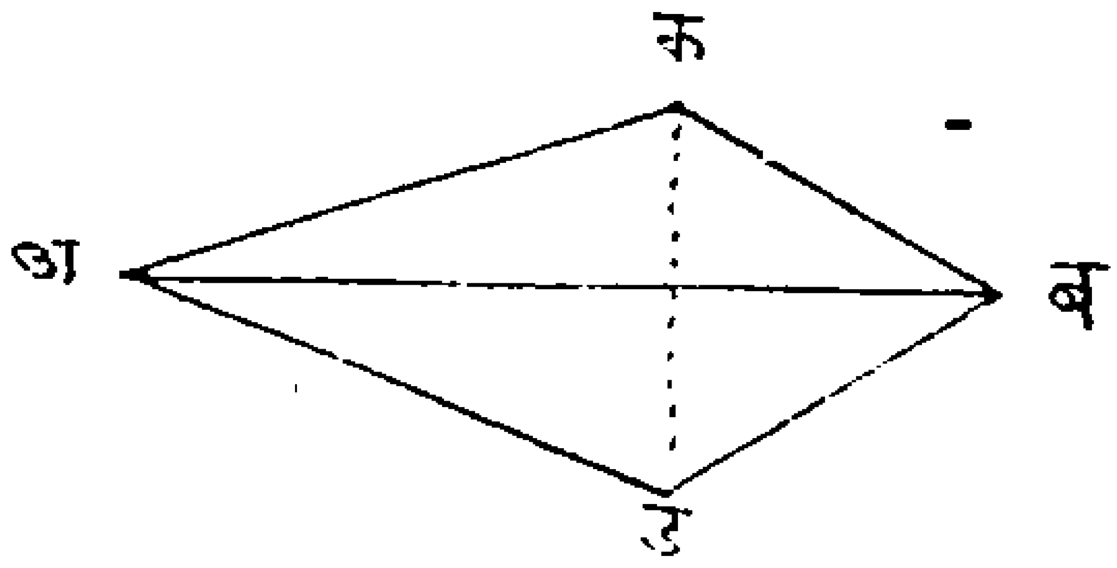
आतां मनांत आणकीं. **अब** बाजू **ड** खुणेनें दुभागिली अशी कीं **अड** आणि **बड** बराबर जाले. आतां **कड** सांध. म्हणजे त्या त्रिकोणाचे. **अकड** आणि **बकड** ऐसे दोन त्रिकोण होतील. आणि मनांत आण कीं **अकड** त्रिकोण **बकड** त्रिकोणावर ठेविला असा कीं **अड** बाजू **बड** बाजूवर पडेल.

**अड** बाजू (वर सांगीतले प्र०) **बड** बाजू बराबर आहे. तेव्हां **अ** बिंदू **ब** बिंदूशीं मिळतो. आणि **ड** बिंदू **ड** बिंदूशीं मिळतो. आणि **अ** कोन (वर सांगीतले प्र०) **ब** कोनाचे बराबर आहे. तेव्हां **अक** रेघ **बक** रेघेवर पडेल. आणि **डक** बाजू दोनही त्रिकोणास साधारण आहे. याजकरितां **अक** बाजूचा **क** शेवट **बक** बाजूचे **क** शेवटाशीं मिळेल यावरून **अक** बाजू **बक** बाजू बराबर आहे. । हें सिद्ध.

कुरलरी. यांतून निघतें कीं. हरएक त्रिकोण समकोन असल्यास तो समबाजूही आहे.

# पांचवा सिद्धांत.

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचा तीन बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचे तीन बाजूंचे बराबर आहेत. तेव्हां ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. अथवा एकाचे तीनकोन दुसऱ्याचे तीनकोनां बराबर आहेत.




**अबक** आणि **अबड** ऐसे दोन त्रिकोण असल्यास. ज्याचा तीन बाजू अनुक्रमें बपरस्पर बराबर. ह्मणजे. **अब** बाजू **अब** बाजू बराबर **अक-अड** बराबर. आणि **बक-बड** बराबर आहे. तेव्हां हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्याचे तीन कोन अनुक्रमें परस्पर बराबर. ह्मणजे. बराबर बाजूचे समोरचे कोन बराबर. ह्मणून **बअक** कोन **बअड** कोनाबराबर **अबक** कोन **अबड** कोनाचे बराबर. आणि **क** कोन **ड** कोनाचे बराबर होईल.

आतां मनांत आण कीं. हे दोन त्रिकोण यांची सर्वांहून लांब आणि परस्पर बराबर अशीजी बाजू तिणेजोडिले आहेत. आतां **कड** सरळरेघ करून साध.

**अकड** त्रिकोणांत **अक** बाजू (वरसांगीतले प्र०) **अड** बाजूबराबर. तेव्हां **अकड** कोन (३ सि० प्र०) **अडक** कोनाबराबर आहे याच रीती प्रमाणें **बकड** त्रिकोणांत **बक** बाजू **बड** बाजूबराबर आहे. याज करितां **बकड** कोन **बडक** कोनाबराबर. तेव्हां (२ प्र० प्र०) सम मिळवणीनें मेळवितां **अकड** कोन आणि **बकड** कोन यांची बेरीज **अकड** आणि **बकड** या दोन कोनांचे बेरिजे बराबर आहे. ह्मणोन सर्व **अ. क. ब** हे तीन कोन सर्व **अ. ड.**

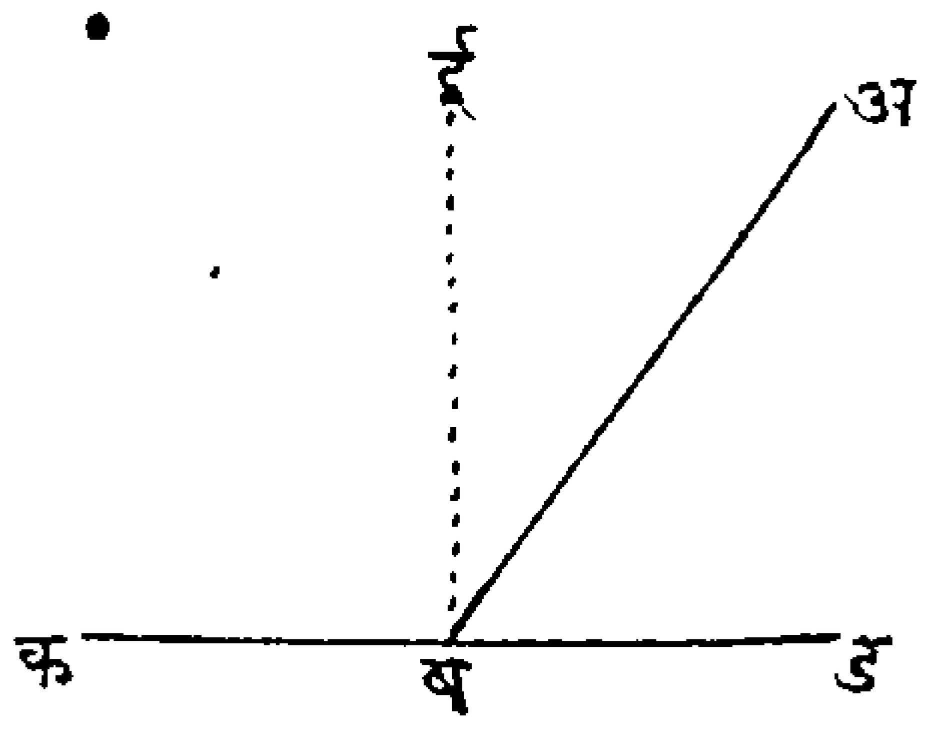
ब या तीन कोनाचे बराबर आहेत.

नंतर दोन त्रिकोणांमध्यें (वरसांगीतले प्र०) अक आणि बक या दोन बाजू अनुक्रमें अड आणि बड या दोन बाजूंचे बराबर आणि यांचे अंतर कोन अकब आणि अडब हे बराबर आहेत. याजकरितां (१सि०प्र०) अबक आणि अडब हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि त्यांचे दुसरे सर्वकोन अनुक्रमें बराबर. ह्मणजे. बअक कोन आणि बअड कोन बराबर. तसें अबक कोन अबड कोना बराबर आहे हें सिद्ध.

---

## साहावा सिद्धांत.

जेव्हां एक सरळरेघ दुसऱ्ये सरळरेघेवर मिळत्ये अथवा तीस छेदित्ये. तेव्हां त्यास्थळीं दोन कोन होतात. त्यांची बेरीज दोन काट कोनां बराबर आहे.




अब रेघ कड रेघेवर मिळाली असल्यास अबक आणि अबड हे दोन कोन मिळोन दोन काट कोना बराबर आहेत. ह्मणून प्रथम (१५.व्या०प्र०)

जेव्हां अबक आणि अबड हे दोन कोन परस्पर बराबर असतील तेव्हां दोन ही काटकोन होतील.

परंतु जर हे दोन कोन परस्पर बराबर नाहींत. तर मनांत आणकीं ईब रेघ कड रेघेवर लंब केला तेंव्हां (१५व्या०प्र०) ईबक आणि ईबड हे दोन काट कोन आहेत. आणि (८ प्र०प्र०) ईबड कोन ईबअ आणि अबड या

दोन कोनाचे बेरिजे बराबर आहे. याजकरितां **ईबक – ईबअ** आणि **अबड** हे तीन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.

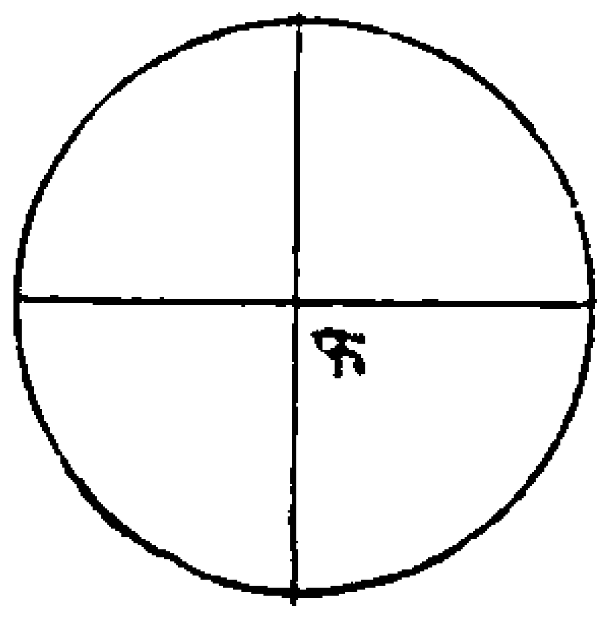
परंतु (८प्र०प्र०) **ईबक** आणि **ईबअ** हे दोन कोन मिळून **अबक** कोनां बराबर आहेत. याजकरितां **अबक** आणि **अबड** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. यावरून उलट पाहातां जर **अबक** आणि **अबड** हे दोन कोन **अब** रेषेचे दोन बाजूचे मिळोन दोन काटकोनां बराबर आहेत. तर यांतून निघतें कीं **कब** आणि **बड** मिळून **कड** एक सरळ रेघ आहे.

दुसरी कुरलरी. यावरून **कड** रेषेचे एक बाजूवर **ब** बिंदूस्थळीं कितीही कोन असले तरीं ते सर्व मिळोन दोन काट कोनाचे बराबर आहेत.

तिसरी कुरलरी. यावरून **कड** रेषेचे दुसऱ्ये बाजूवर **ब** बिंदूस्थळीं किती ही कोन असले तरीं तेसर्व मिळोन दोन काट कोनाचे बराबर आहेत. याप्रमाणें पाहातां कोणत्ये एक बिंदूवर चहूंकडून किती एक रेघांनीं जे कोन हो ऊं सकतील. ते सर्व मिळून चार काट कोनां बराबर आहेत.

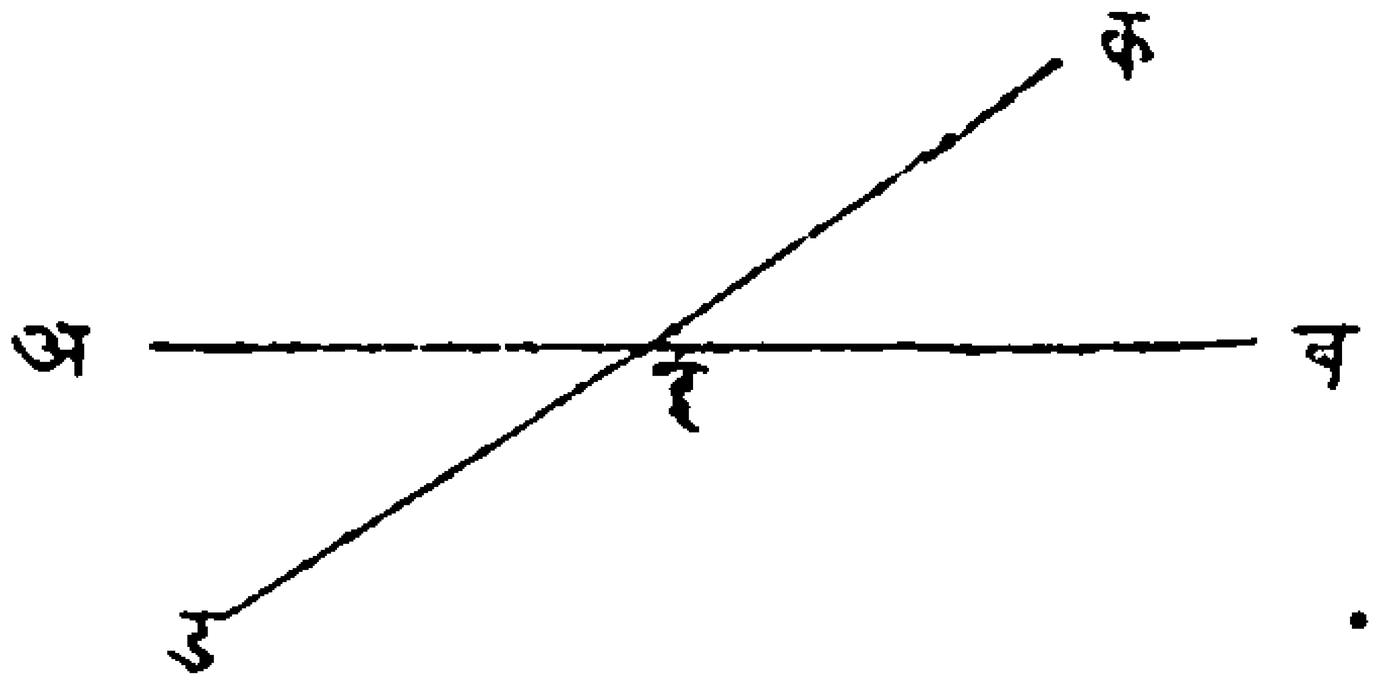
चवथी कुरलरी. यावरून (९७व्या०प्र०) **फ** बिंदूवर कितीएक सरळरेघांनीं जे काय कोन होऊं सकतात. त्यांचें माप त्या बिंदूमध्याचे बाहेरील हा वर्तुळ परिघ दाखवितो. तस्मात् वर्तुळ परिघ चार काटकोनांचें माप आहे. या




जकरितां अर्धवर्तुळ अथवा एकशें ऐशीं अंश दोन काटकोनाचें माप आहे. आणि वर्तुळपाद अथवा नवद अंश एक काटकोनाचें माप आहे.

# सातवासिद्धांत

जेव्हां दोन सरळ रेषा परस्परांस छेदितात. तेव्हां समोरा समोरचे कोन बराबर होतात.




**अब** आणि **कड** यादोन सरळ रेषा **ई** बिंदूवर परस्परांस छेदीत असल्यास **अईक** आणि **बईड** हे दोन कोन परस्पर बराबर होतील. आणि **अईड- कईब** हे दोन कोन परस्पर बराबर होतील.

ह्मणोन (६ सि० प्र०) **कई** रेष **अब** रेषेवर मिळोन **अईक, बईक** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.

या प्रमाणें **बई** रेष **कड** रेषेवर मिळून **बईक- बईड** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.

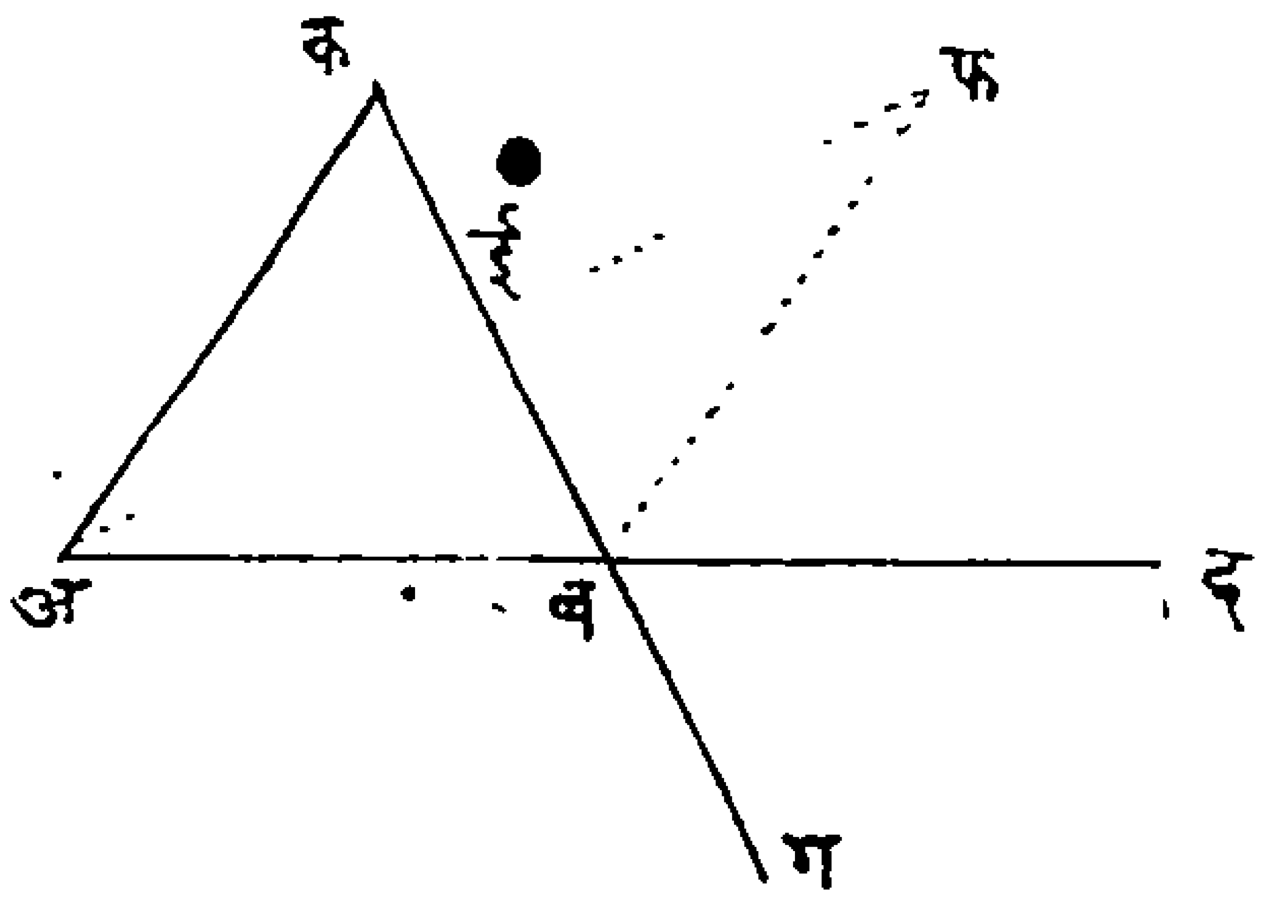
याजकरितां (१ प्र० प्र०) **अईक- बईक** यादोन कोनांची बेरीज **बईक- बईड** या दोन कोनांचे बेरिजे बराबर आहे.

आणि **बईक** कोन जो दोहोंमध्यें साधारण आहे. तो या दोन बेरिजांतून वजा केला तर (३ प्र० प्र०) बाकी राहिला **अईक** कोन बाकी राहिल्ये **बईड** कोना बराबर होईल.

आणि याचरीतीनें दाखविला जातो कीं **अईड** कोन **बईक** कोना बराबर आहे. हें सिद्ध.

# आठवा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली तर बाहेरील कोन कोणत्येही आंतील समोरचे कोनाहून मोठा होतो.




**अबक** त्रिकोणाची **अब** बाजू **द** पर्यंत वाढविली. तेव्हां बाहेरील **कबद** कोन आंतील. समोरचा **अ** कोन अथवा **क** कोन याहून मोठा आहे.

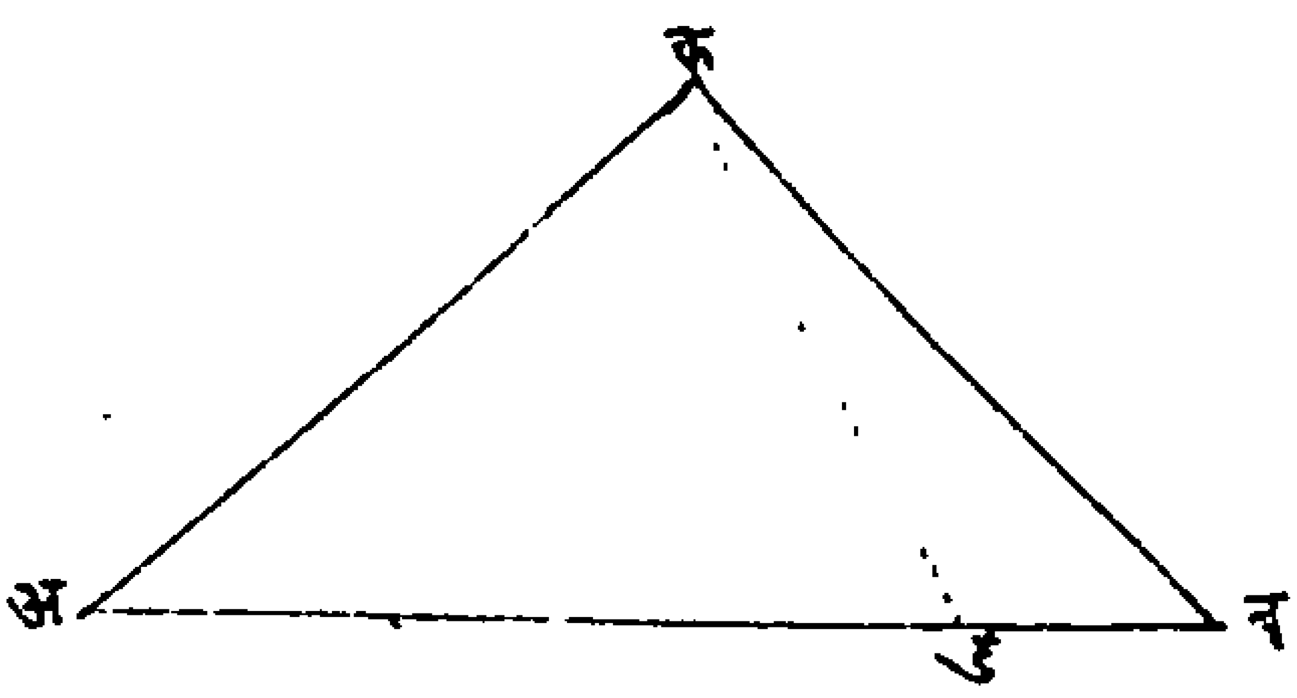
आतां मनांत आण कीं. **बक** बाजू **ई** स्थळांवर दुभागिली आणि **अई** रेघ करून वाढविली. अशी कीं. **ईफ = अई** बराबर जाली. नंतर **फब** सांध.

तेव्हां **अईक** आणि **बईफ** या दोन त्रिकोणामध्यें (वरसांगीत० प्र०) **अई** बाजू = **ईफ** बाजू. आणि **कई** बाजू = **बई** बाजू. आणि या बाजूंचे समोरासमोरचे अंतर कोन (७ सि० प्र०) **ई** कोना बराबर आहेत – याजकरितां हे दोन त्रिकोण (१ सि० प्र०) सर्वांशीं बराबर आहेत. या पासून **क** कोन = **ईबफ** कोन आहे. परंतु **कबद** कोन **ईबफ** कोनापेक्षां मोठा आहे. याजकरितां बाहेरील **कबद** कोन **क** अंतर कोनाहून मोठा आहे.

यारीतीनें **कब** बाजू. **ग** पर्यंत वाढवून **अब** दुभागिली असतां **अबग** अथवा त्याचे बराबर **कबद** कोन **अ** कोनाहून मोठा आहे. असें दाखविलें जातें.

# नववा सिद्धांत.

सर्व त्रिकोणांची अतिमोठी बाजू अतिमोठ्ये कोना समोर आहे. आणि अतिमोठा कोन. अतिमोठ्ये बाजू समोर आहे.



अबक त्रिकोण असल्यास. ज्यांत अब बाजू अक बाजूहून मोठी आहे. अतिमोठ्ये अब बाजूचे समोरचा कोन अकब तो लाहान बाजू अक तिचे समोरचे लाहान अबक कोनाहूने मोठा आहे.

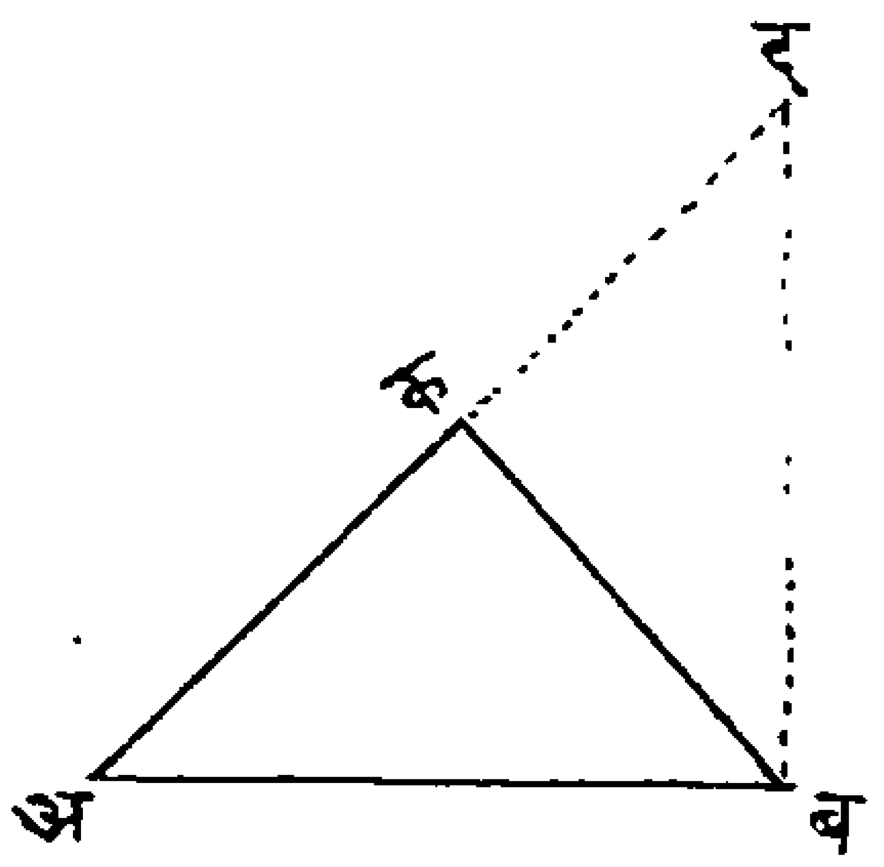
ह्मणोन अतिमोठ्ये अब बाजूवर अक चे बराबर अड करून कड सांध. तेव्हां बकड त्रिकोण झाला. आणि बाहेरील अडक कोन (८सि॰प्र॰) आंतील ब कोनाहून मोठा आहे. परंतु अड आणि अक बराबर आहेत. याजकरितां (३सि॰प्र॰) अकड कोन ब कोनाहून मोठा आहे जेव्हां अकब कोनाचा तुकडा अकड कोन ब कोनाहून मोठा आहे. तेव्हां अकब कोन ब कोनाहून मोठा असावा. खरा हें सिद्ध.

याचे उलट. जेव्हां क कोन ब कोनाहून मोठा आहे. तेव्हां त्याचे समोरची अब बाजू ब कोनाचे समोरचे अक बाजूहून मोठी आहे.

ह्मणोन जर अब बाजू अक बाजूहून मोठी नाहीं. तेव्हां तिचेबराबर अथवा तिजपेक्षा लाहान आहे. परंतु बरोबर असल्यास (३सि॰प्र॰) क कोन ब कोनाबराबर असला पाहिजे. एथें (वरसा॰प्र॰) तो नाहीं. तेव्हां बरोबर नाहीं. आणि क कोन ब कोनाहून एथें (वरसांगी॰प्र॰) लाहान होऊं सकत नाहीं. यावरून अब बाजू अक बाजूचे बराबर किंवा तिजहून लाहान नाहीं. तर तिजहून मोठी आहे. हें सिद्ध.

# दाहावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत दोनबाजूंची बेरीज तिसऱ्येबाजूहून अधिक आहे.




**अबक** त्रिकोण असेल तर त्याचे कोणत्येही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्ये बाजूहून अधिक होईल. जसें **अक + कब - अब** बाजूहून अधिक होईल.

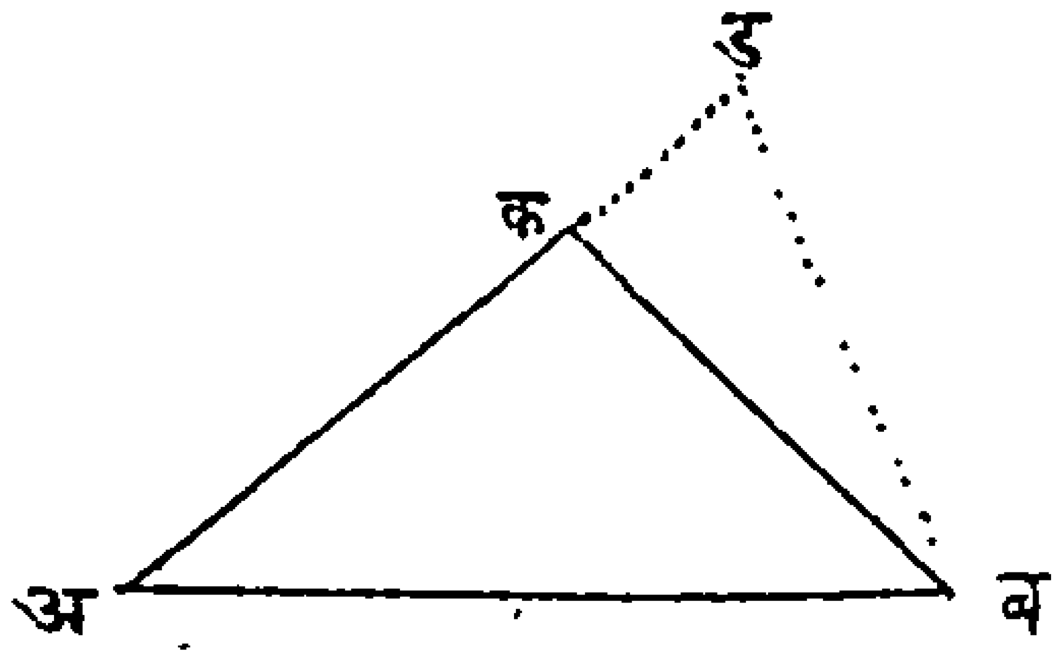
ह्मणोन **अक** वाढीव. अशीकीं **कद**. **कब** चे बरोबर अथवा **अद**. **अक + कब** चे बराबर होईल. आणि **बद** सांध.

तेव्हां (कृत्यानें) **कद**. **कब** चे बराबर. याजकरितां (३ सि० प्र०) द कोन **कबद** कोनाबराबर आहे. परंतु **अबद** कोन **कबद** कोनाहून मोठा आहे. तेव्हां द कोनाहून पण मोठा आहे. आणि (९ सि०प्र०) त्रिकोणाची अति मोटी बाजू अतिमोठ्या कोनासमोर असत्ये. तस्मात् **अबद** त्रिकोणांत **अद** बाजू **अब** बाजूहून मोटी आहे. परंतु **अद** (कृत्यानें) **अक**. **कद** यांचे अथवा **अक**. **कब** यांचे बेरिजे बराबर आहे. याजकरितां. **अक + कब**. **अब** बाजूहून मोठी आहे. हें सिद्ध.

कुरलरी. दोन बिंदूचे मध्यें अति थोडें अंतर तेंच होय. जें त्या बिंदूस एक सरळरेघ सांधित्ये.

# अकरावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत दोनबाजूंची वजाबाकी तिसऱ्ये बाजूहून लाहान आहे.



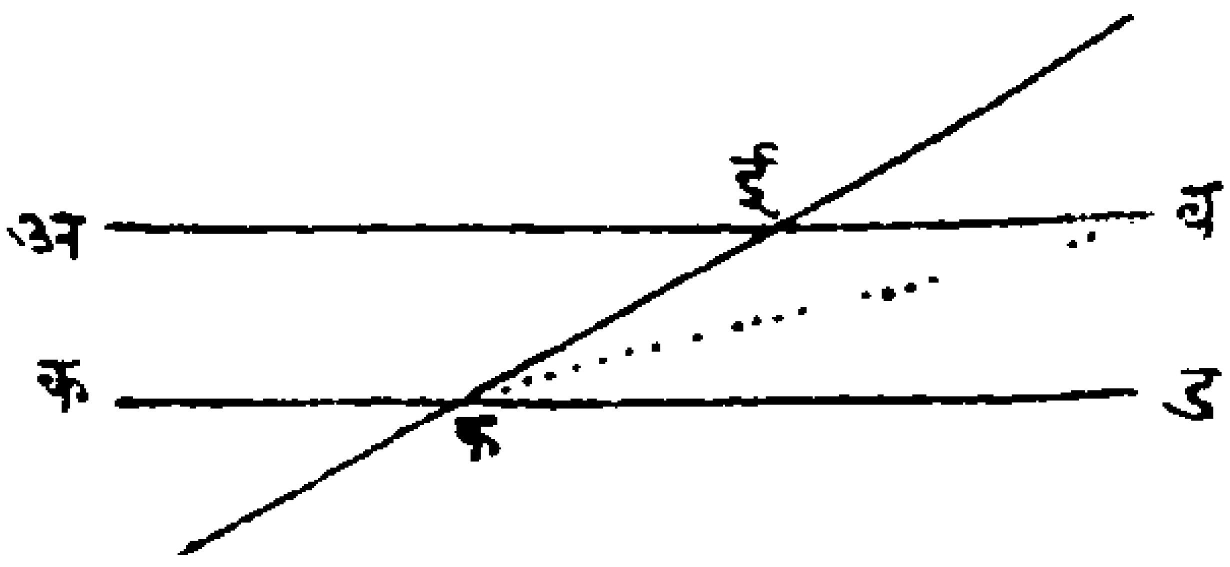

**अबक** त्रिकोण असेल तर त्याचे दोन बाजूंची वजाबाकी तिसऱ्ये बाजूहून लाहान आहे. जसें **अब-अक-बक** या तिसऱ्ये बाजूहून लाहान आहे.

ह्मणोन **अक** लाहान बाजू **ड** पर्यंत वाढीव. अशी कीं. **अड** मोठ्ये **अब** बाजू बरावर होईल. आणि **कड. अब-अक** चे बाकीबराबर होईल. आतां **बड** सांध. ह्मणजे (कृत्यानें) **अड** बाजू **अब** चे बरोबर. याज करितां (३ सि०प्र०) **ड** आणि **अबड** हे दोन कोन परस्पर बराबर. परतु **कबड** कोन **अबड** कोनाहून लाहान आहे. तेव्हां त्याचे बराबरीचे **ड** कोनाहूनही लाहान आहे. आणि (९ सि०प्र०) त्रिकोणांची अतिमोठी बाजू अतिमोठ्ये कोनासमोर आहे. तेव्हां **बकड** त्रिकोणांत **कड** बाजू **बक** बाजूहून लाहान आहे. हें सिद्ध.

---

# बारावा सिद्धांत.

जेव्हां एक सरळरेघ दोन समांतर रेघांस छेदित्ये तेव्हां व्युत्क्रम कोन बराबर करित्ये.




**ईफ** रेघ **अब** आणि **कड** या दोन समांतर रेघांस छेदील. तर **अईफ**

कोन त्याचे **ईफड** व्युत्क्रम कोनाबराबर होईल.

ह्मणोन जर हे दोन कोन बराबर नाहींत तर यांतून एक दुसऱ्याहून मोठा निश्चय असेल. तेव्हां मनांत आण कीं. **ईफड** मोठा आहे. आणि दुसरें मनांत आण कीं. **फब** रेघ केली आहे. अशी कीं. तुकडा अथवा **ईफब** कोन **अईफ** कोनाबराबर झाला. आणि **फब** रेघ **अब** रेघेवर **ब** स्थळावर मिळेल.

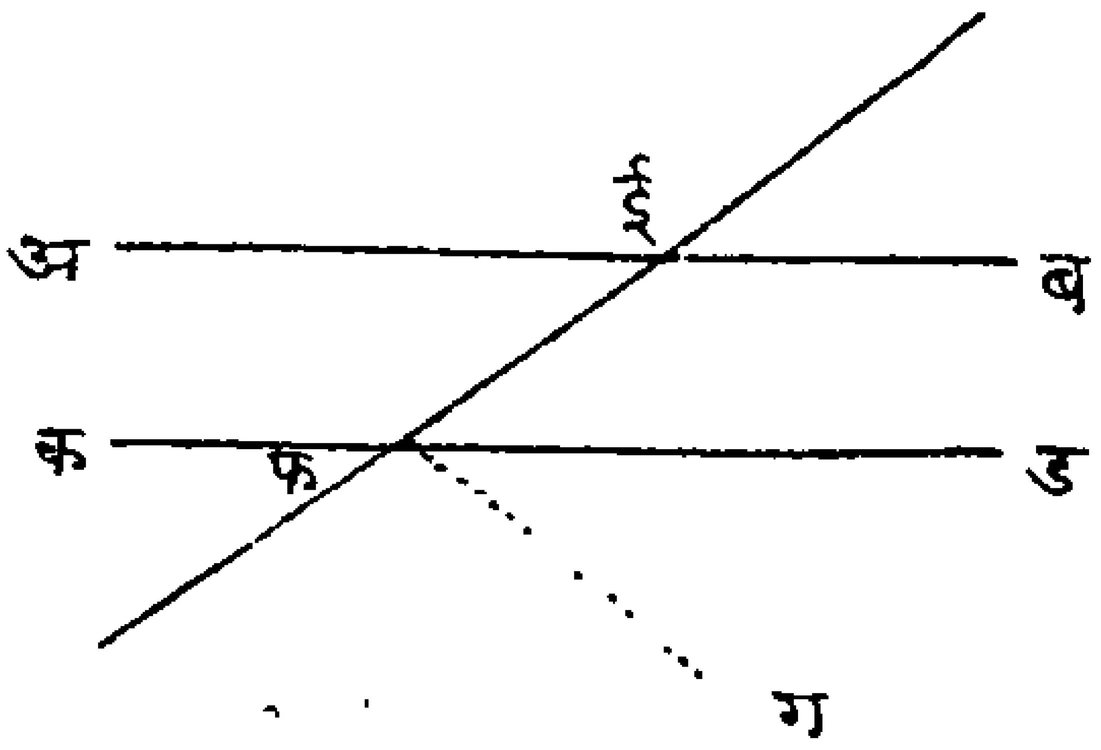
आतां **बईफ** त्रिकोणाचा बाहेरील **अईफ** कोन (८ सि० प्र०) त्याचे आंतील समोरचा **ईफब** कोनाहून मोठा आहे. आणि (कृत्यानें) हे दोन कोन परस्पर बराबर. यांतून निघतें कीं हे दोन कोन एक समयींच बराबर आहेत. आणि नाहींत. तर हें परम अशक्य. याजकरितां **ईफड** कोन त्याचे **अईफ** या व्युत्क्रम कोनाशीं बराबर नाहीं असें नाहीं. तर हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

कुरलरी. यांतून निघतें कीं. अनेक समांतर रेघा आहेत. त्यांतून एकीवर जी सरळरेघ लंब आहे. ती सर्व समांतर रेघांवर लंब आहे.

---

## तेरावा सिद्धांत.

जेव्हां एक सरळरेघ दोन रेघांस छेदून दोन व्युत्क्रम कोन बराबर करित्ये. तेव्हां त्या दोन समांतर रेघा आहेत.




जर **ईफ** रेघ **अब**, **कड** या रेघांस छेदून **अईफ** आणि **ईफड** हे दोन व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर करित्ये. तर **अब**, **कड** समांतर रेघा होतील.

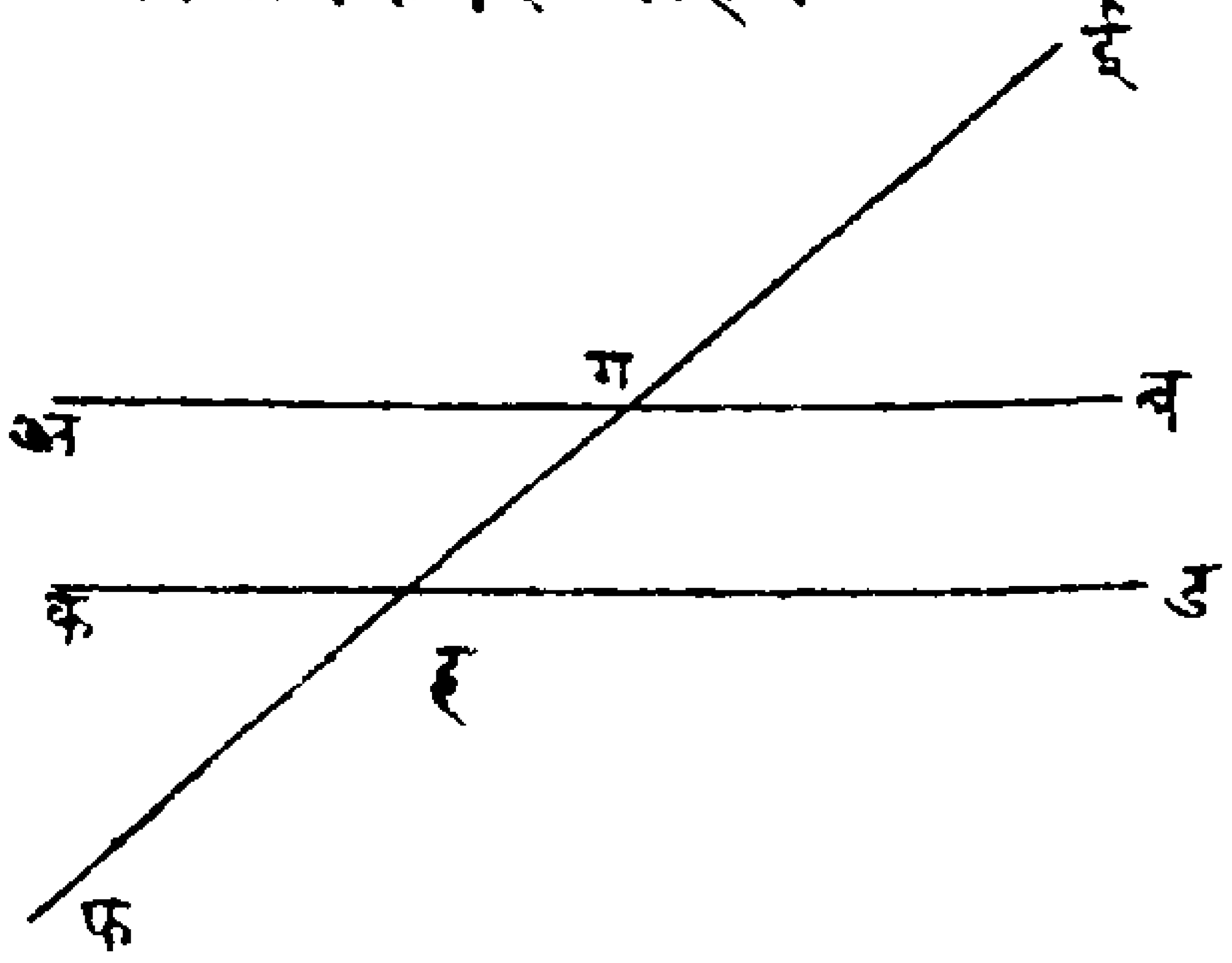
ह्मणोन त्या दोन रेघा समांतर नसतील. तर मनांत आण की. **फग** रेघ **अब** रेघेशीं समांतर रेघ आहे. याप्रमाणें **अब, फग** समांतर असोन (१२ सि॰ प्र॰) **अईफ** कोन त्याचे व्युत्क्रम **ईफग** कोना बराबर आहे. परंतु (वर सांगितले प्र॰) **अईफ** कोन **ईफड** कोना बराबर आहे. यापासून निघतें (१ प्र॰ प्र॰) **ईफड** कोन **ईफग** कोना बराबर. ह्मणजे एक तुकडा सर्वा बराबर हें होणें परम अशक्य याजकरितां **कड** वांचून दुसरी रेघ **अब** शीं समांतर होण्यास अशक्य आहे. हें सिद्ध.

कुरलरी. जा कित्येक रेघा एक रेघेवर लंब आहेत. त्या सर्व परस्पर समांतर आहेत.

---

## चौदावा सिद्धांत.

जेव्हां एक रेघ दोन समांतर रेघांस छेदित्ये. तेव्हां बाहेरील कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचा त्याच बाजूचे कोना बराबर आहे. आणि त्याच बाजूचे दोन आंतील कोन मिळोन दोन काटकोना बराबर आहेत.




जर **ईफ** रेघ **अब, कड** या समांतर रेघांस छेदित्ये. तर **ईगब** कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचा त्याच बाजूचा **गहड** कोना बराबर होईल. आणि त्याच बाजूचे आंतील दोन कोन **बगह** आणि **गहड** मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.

**अब** आणि **कड** या दोन रेघा समांतर आहेत. ह्मणून (१२ सि॰ प्र॰

**अगह** कोन त्याचे **गहड** व्युत्क्रम कोनाबराबर आहे. परंतु (७सि०प्र०) **अगह** कोन त्याचे समोरचे **ईगब** कोनाबराबर आहे. याजकरितां (१प्र० प्र०) **ईगब** कोन **गहड** कोनाबराबर आहे. हें सिद्ध.

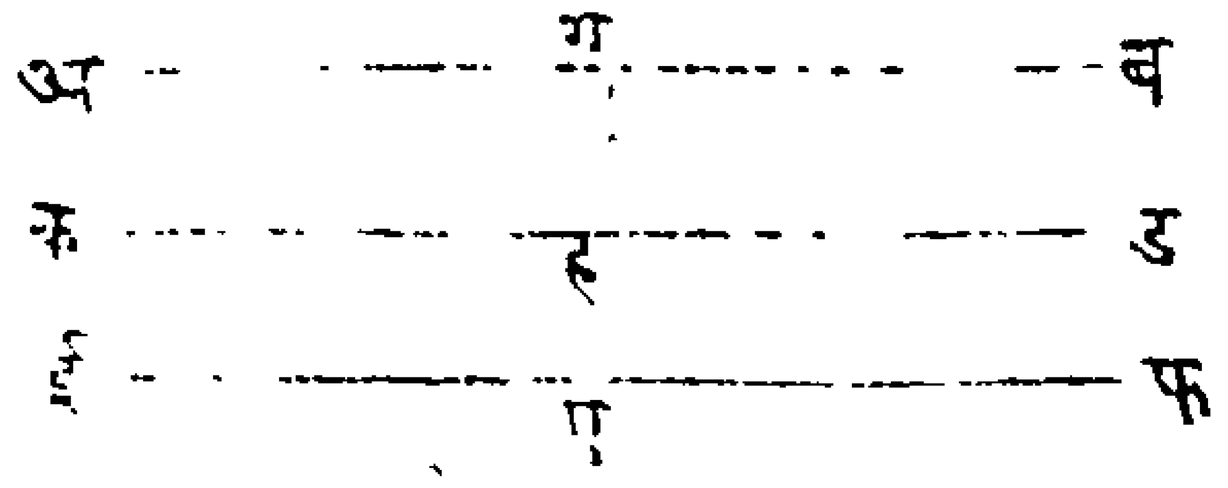
नंतर **ईगब** आणि **बगह** हे दोन कोन (६ सि० प्र०) दोन काटकोनाबराबर आहेत. आतांच वर दाखविला गेला कीं. **ईगब** कोन **गहड** कोनाबराबर आहे. याजकरितां **बगह** आणि **गहड** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनाबराबर आहेत. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. आतां याचे उलट. जेव्हां एकरेघ दुसऱ्या दोन रेघांस छेदून तिचे एक बाजूचे आंतील दोनकोन बराबर होतात. तेव्हां त्या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत.

दुसरी कुरलरी. जेव्हां एकरेघ दुसऱ्या दोन रेघांस छेदित्ये. आणि त्याचे आंतील तिचे एक बाजूचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून उणे आहेत. तेव्हां त्या दोन रेघा समांतर नाहींत. आणि त्या वाढविल्या असतां परस्पर मिळतील.

## पंधरावा सिद्धांत.

जा सरळरेघा कोणत्येही एकरेघेशीं समांतर आहेत तर त्या सर्वही परस्पर समांतर आहेत.

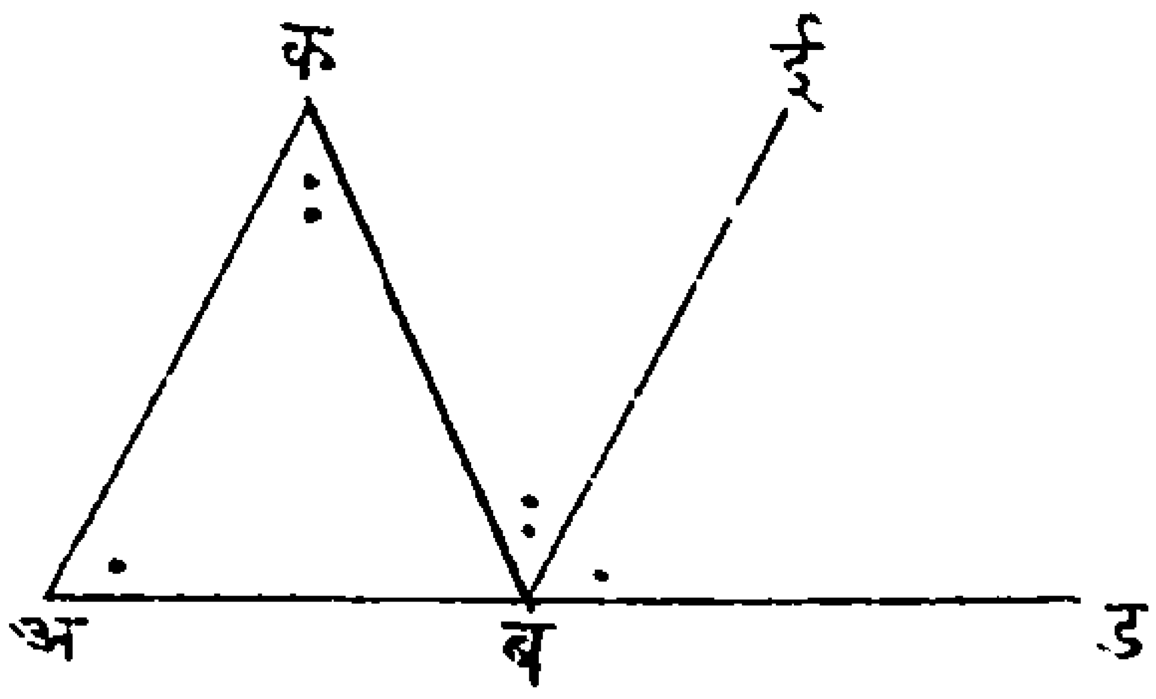



**अब** आणि **कड** या दोन रेघा **ईफ** रेघेशीं समांतर असतील. तर. **अब** आणि **कड** या रेघा परस्पर समांतर होतील.

गए लंब ईफ रेषेवर असल्यास गए रेष (१२ सि॰ कुरलरीप्र॰) अब, कड यांवरही लंब होईल. याजकरितां (१३ सि॰ कु॰ प्र॰) अब. कड या दोन रेषा समांतर आहेत. हें सिद्ध.

## सोळावा सिद्धांत.

जेव्हां त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली तेव्हां बाहेरील कोन आंतील समोरासमोरचे दोन कोनांचे बेरिजे बराबर होतो.

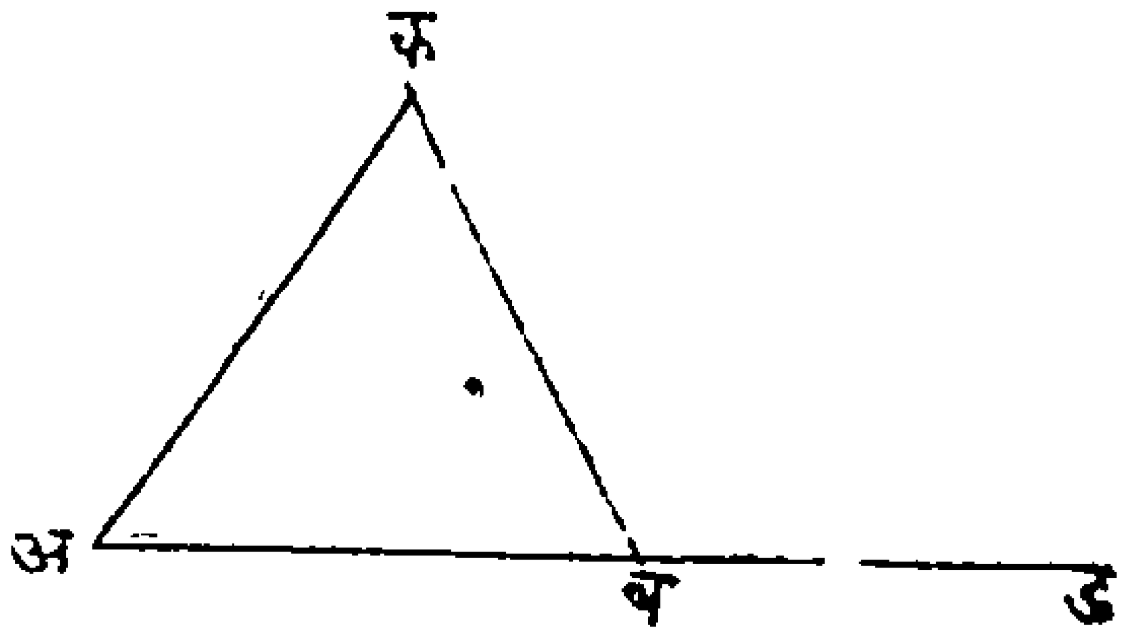



अबक त्रिकोणांत अब बाजू ड पर्यंत वाढविली तर कबड बाहेरील कोन आंतील अ आणि क या समोरासमोरचे दोन कोनांचे बेरिजे बराबर आहे.

आतां मनांत आणकीं, बई रेष अक रेषेशीं समांतर केली आतां बक रेष अक आणि बई या दोन समांतर रेघांस मिळल्ये. तेव्हां (१२ सि॰ प्र॰) क कोन आणि कबई त्याचाच व्युत्क्रम कोन हे दोन परस्पर बराबर आहेत. आणि अड रेष अक आणि बई या दोन समांतर रेघांस छेदिल्ये तेव्हां (१४ सि॰ प्र॰) त्या रेषेचे एक बाजूचे आंतील व बाहेरील, अ कोन आणि ईबड हे दोन कोन बराबर आहेत. याजकरितां बरोबर सम मिळवणीनें अ आणि क या दोन कोनांची बेरीज कबई आणि ईबड या दोन कोनांचे बेरिजेचे अथवा (२ प॰ प्र॰) बाहेरील सगळ्या कबड कोनाचे बरोबर आहे. हें सिद्ध.

# सत्रावा सिद्धांत.

कोणत्येही सरळरेघ त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज दोन काट कोना बराबर आहे.




**अबक** सरळरेघ त्रिकोण असेल तर **अ + ब + क** ही तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोना बराबर होईल.

ह्मणोन **अब** बाजू **ड** पर्यंत वाढविली. तेव्हां बाहेरील **कबड** कोन (१६ सि० प्र०) **अ + क** या आंतील समोरा समोरचे दोन कोनांचे बेरिजे बराबर आहे. या दोन बरोबऱ्या यांत आंतील **ब** कोन प्रत्येकांत मेळीव. तेव्हां **अ + क + ब** ही तीन आंतील कोनाची बेरीज - (२ प्र० प०) **अबक + कबड** या जवळचे दोन कोनांचे बेरिजे बराबर होईल. परंतु (६ सि० प्र०) या जवळचे दोन कोनांची बेरीज दोन काट कोना बराबर आहे. याजवरून ही त्रिकोणांत **अ + ब + क** ही तीन कोनांची बेरीज (१ प्र० प०) दोन काटकोनां बराबर आहे. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. जर एक त्रिकोणाचे दोन कोन अनुक्रमें दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोनां बराबर आहेत. तर त्याचा तिसरा कोन ही - त्या दुसऱ्याचे तिसऱ्ये कोना बराबर होईल. तेव्हां (३ प्र० प०) हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत.

दुसरी कुरलरी. जर एके त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्ये त्रिकोणाचे एके कोना बरांबर आहे. तर त्याचे राहिल्ये दोन कोनाचे बेरीज (३ प० प्र०) दुसऱ्याचे राहिल्ये दोन कोनाचे बेरिजे बराबर होईल.

तिसरी कुरलरी. जर एक त्रिकोणांत एक काटकोन असेल. तर बा

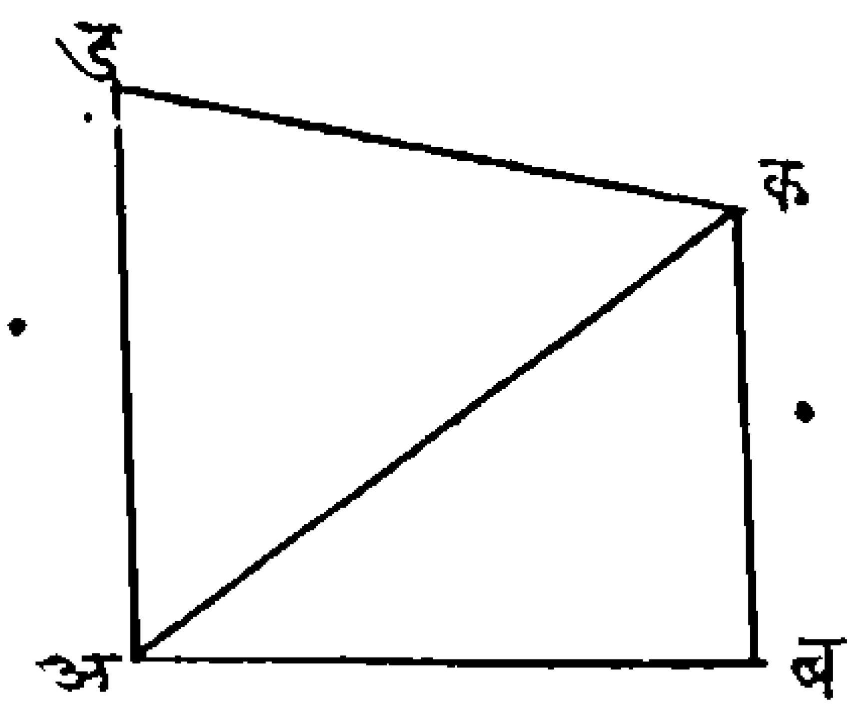
की दोन कोनांची बेरीज एक काट कोनाबराबर होईल. आणि ते प्रत्येक लघु कोन अथवा काट कोनाहून उणे असतील.

चवथी कुरलरी. सर्व त्रिकोणांत दोन कोन लाहान. तेव्हां ते लघु-कोन अथवा काट कोनाहून उणे आहेत.

---

## अठरावा सिद्धांत.

कोणत्येही सरळरेघ चौकोनांत त्याचे आंतील चारकोनांची बेरीज चारकाट कोनांबराबर आहे.




**अबकड** चौकोन असेल तर **अ+ब+क+ड** ही आंतील चारकोनांची बेरीज चार काट कोनां बराबर होईल.

आतां त्यांत **अक** कर्णरेघ करा. अशीकीं. त्याचौकोनाचे **अबक** आणि **अडक** ऐसे दोन त्रिकोण होतील. तेव्हां त्या दोन त्रिकोणांत एकेक त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज (१७ सि॰ प्र॰) दोन काटकोनाबराबर आहे. याजकरितां (२ प्र॰ प्र॰) दोनही त्रिकोणांचे सर्वकोनांची बेरीज जी चौकोनाचे चार कोनाची बेरीज आहे तीच. ती निश्चय चार काट कोनां बराबर आहे. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. यापासून कळतेंकीं. जर चौकोनाचे तीनकोन काट कोन असतील. तर चवथाही कोनकाट कोनच असेल.

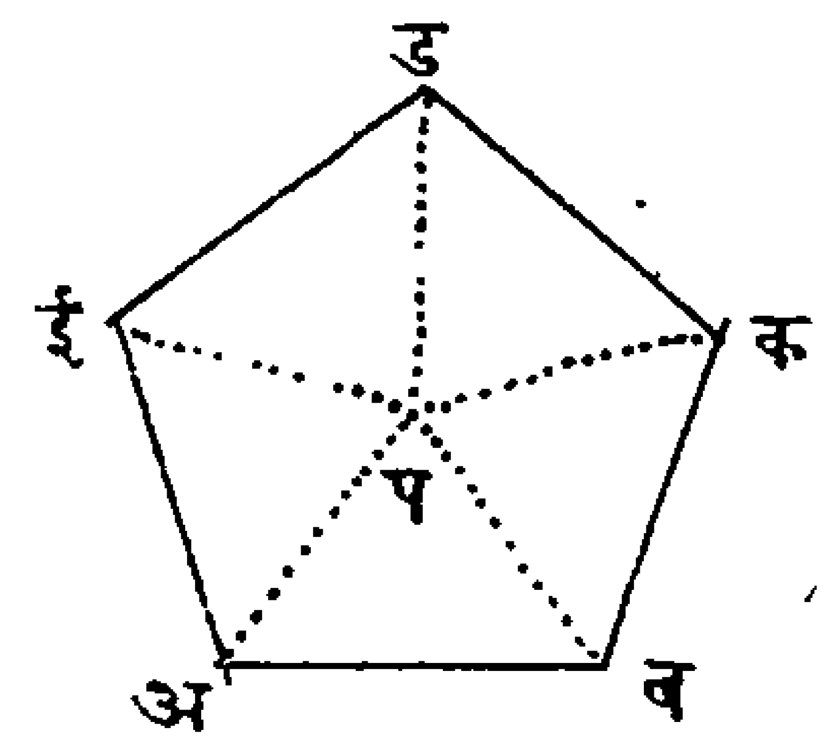
दुसरी कुरलरी. जर चार कोनांतून दोन कोनांची बेरीज दोन काट कोनां बराबर असेल. तर राहिल्ये दोन कोनांची बेरीज ही दोन काट कोनां बराबर

होईल.

## एकुणिसावा सिद्धांत.

कोण त्येही सरळरेघाकृतींत तिचे आंतील सर्व कोनांची बेरीज त्या आकृतीचे दुपट बाजू संख्येंत चार उणे इतक्ये काटकोनां बराबर आहे.

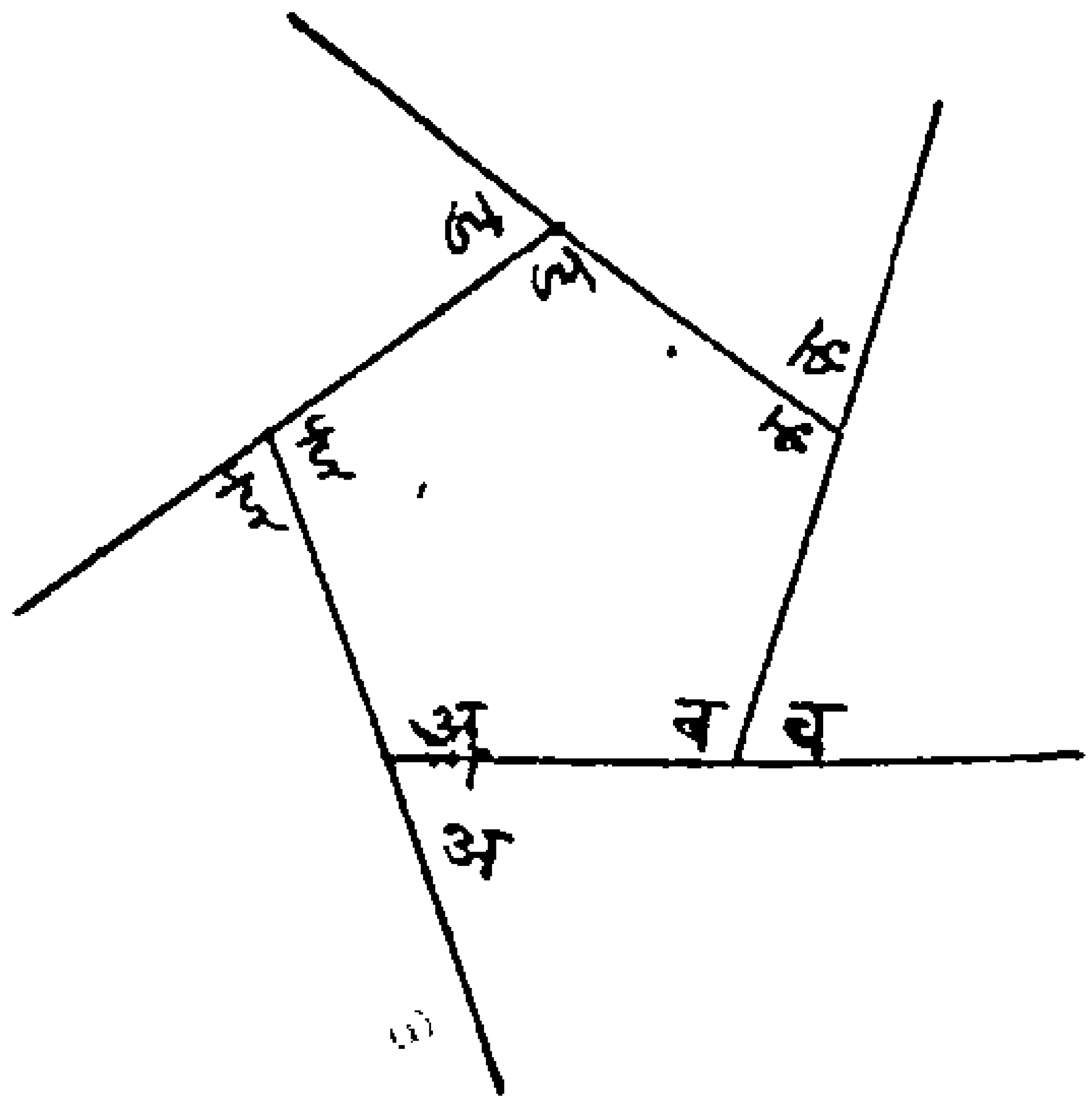
अबकडई एक सरळरेघाकृती असेल. तर तिचे आंतील कोनांची अ+ब+क+ड+ई. ही बेरीज या आकृतीचे दुपट बाजू संख्येंत चार उणें इतक्ये काटकोनां बराबर आहे.




ह्मणोन आकृतीचे आंत कोठेही प स्थळ कल्पून तेथून पअ, पब या प्रमाणें आकृतींत कोन आहेत. तितक्या रेघा कर. अशा कीं बाजू आहेत तेवढे त्रिकोण होतील. आतां त्यांत प्रत्येक त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज (१७सि०प्र०) दोन काटकोनां बराबर आहे. याजकरितां सर्व त्रिकोणांचे कोनांची बेरीव बाजू संख्येचे दुपट काटकोनां बराबर आहे. परंतु प स्थळा भोंवते सर्व त्रिकोणाचे कोन आहेत खरे. पण. ते आकृतीचे आंतील कोन नव्हेत. याजकरितां त्यांची बेरीज (९सि०३कु०प्र०) चार काटकोनां बराबर आहे. ह्मणोन पूर्व बेरिजेंत हे चार काटकोन वजा केले पाहिजेत. या पासून निघतें कीं. सरळरेघाकृतींत बहुकोनांचे आंतील कोन मात्राची बेरीज. जसें अ+ब+क+ड+ई. ही बेरीज आकृतीचे बाजूसंख्येचे दुपटींत चार उणे करून जी बाकी राहील तितके काटकोनां बराबर आहे हें सिद्ध.

# विसावा सिद्धांत.

कोण त्येही सरळरेघाकृतीच्या सर्व बाजू बाहेर वाढविल्यापासून बाहेर जे कोन होतात. त्या बाहेरील सर्व कोनांची बेरीज चार काटकोनां बरोबर आहे.

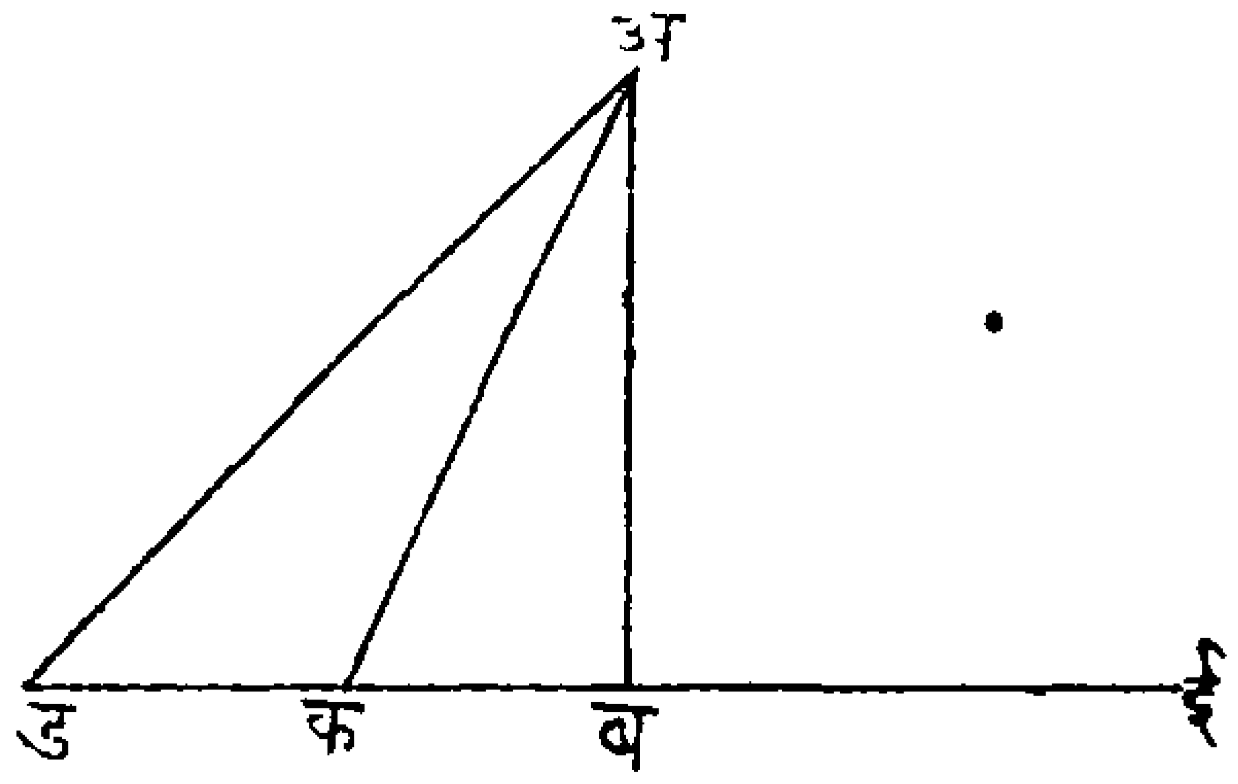


अ.ब.क.ड.ई हे कोन कोणत्येही सरळरेघाकृतीच्या बाजू वाढविल्यापासून बाहेर झाले असतील. तर त्यांची बेरीज अ+ब+क+ड+ई ही चार काटकोनां बराबर होईल.

ह्मणजे या आकृतींतील हरएक बाहेरील कोन व त्यांचे आंतील कोन यांची बेरीज (९सि०प्र०) दोन काटकोनां बराबर आहे. जसें. अ + अ. आणि आकृतीस जितक्या बाजू तितकेच आंत आणि तितकेच बाहेर कोन आहेत. याजकरितां सर्व आंतील व बाहेरील कोनांची बेरीज आकृतीचे बाजू संख्येचे दुपट काटकोनां बराबर आहे. परंतु सर्व आंतील कोनांची बेरीज आणि चार काटकोन हे (१९सि०प्र०) बाजू संख्येचे दुपट काटकोनां बराबर आहेत. याजकरितां सर्व आंतील आणि बाहेरील कोनांची बेरीज सर्व आंतील कोन आणि चार काटकोन यांचे बेरिजे बराबर आहे. ह्मणोन सर्व आंतील कोन आणि बाहेरील कोनयांची बेरीज (१प्र०प्र०) सर्व आंतील कोन आणि चार काटकोन यांचे बराबर आहे. या बेरिजेंतून आंतील सर्व कोन वजा कर. ह्मणजे बाहेरील कोनांचें माप (३प्र०प्र०) चार काटकोनां बराबर आहे. हें सिद्ध.

# एकविसावा सिद्धांत.

सांगीतल्ये बिंदूपासून सरळरेषेवर सर्वांहून लाहान जी रेघ होत्ये तीच लंब होय. आणि त्या बिंदूपासून त्यासरळरेषेवर जारेषा होतील. त्यांत लंबाजवळची रेघ जा दुसऱ्या लंबापासून दूर रेषा आहेत. त्यासर्वांहून लाहान होईल.




जर अब, अक, अड, रेघा सांगीतल्ये अ बिंदूपासून डई रेषेवर केल्या असतील. अशाकीं. जांत अब. डई वर लंब आहे तर अब लंब अक रेघेहून लाहान होईल.

आणि अक रेघ अड रेघहून लाहान होईल. याप्रमाणें पुढेंही.

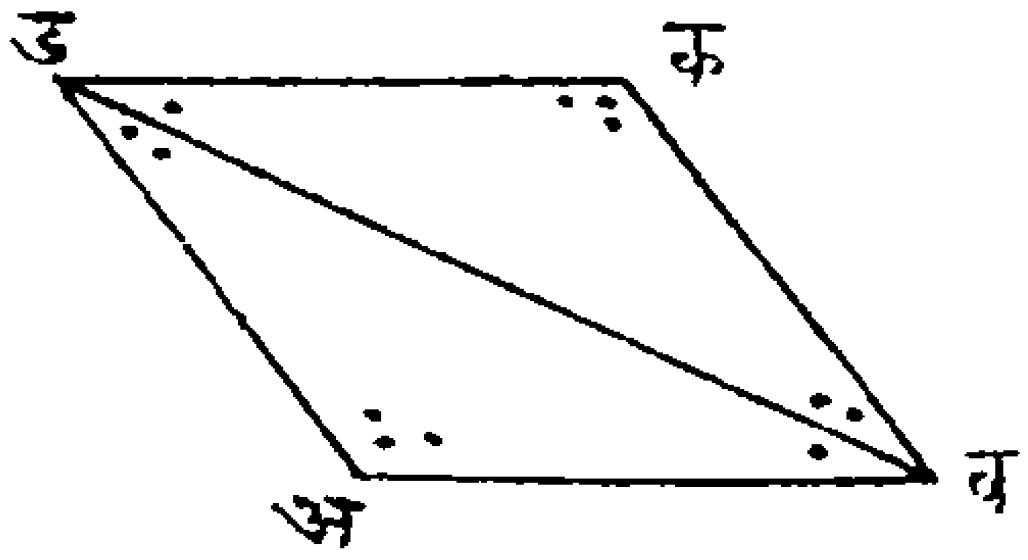
ह्मणोन ब कोन काटकोन आहे. तेव्हां (१७ सि० ३ कु० प्र०) क कोन लघुकोन आहे. याजकरितां ब कोनाहून उणा होय. परंतु (९ सि० प्र०) अति लाहान बाजू अति लाहान कोना समोर आहे. याजकरितां अब बाजू अक बाजूहून लाहान आहे.

पुनः अकब कोन लघुकोन आहे. तेव्हां (६ सिद्धांत प्र०) अकड कोन विशाळ कोन होईल. याजकरितां (१७ सि० ३ कु० प्र०) ड कोन लघु कोन आहे. ह्मणोन क कोनाहून लाहान. आणि अति लाहान बाजू अति लाहान कोना समोर असत्ये. तेव्हां अक बाजू अड बाजूहून लाहान आहे हे सिद्ध.

कुरलरी. लंब सर्वरेषांहून लाहान अंतराची रेघ आहे. जा रेघा सांगीतल्ये बिंदूपासून सरळरेषेवर करितां येतील.

# बाविसावा सिद्धांत.

कोणत्येही समांतर बाजू चौकोनांत समोरासमोरच्या बाजू आणि समोरासमोरचे कोन हे परस्पर बरोबर आहेत. आणि कर्णरेघ त्या चौकोनांस दोन त्रिकोणांनीं बराबर दुभागित्ये.




**अबकड** समांतर बाजू चौकोन असेल. जांत **बड** कर्णरेघ आहे. तर त्याच्या समोरा समोरच्या बाजू व समोरा समोरचे कोन बराबर होतील. आणि **बड** कर्णरेघ त्या चौकोनाचे बराबर दोन भाग अथवा त्रिकोण करित्ये.

ह्मणोन (३२ व्या० प०) **अब, डक** या बाजू परस्पर समांतर आहेत. आणि **अड, बक** याही समांतर आहेत. आणि **बड** रेघ त्यांस मिळत्ये. याजकरितां (१२ सि० प० ) व्युत्क्रम कोन बराबर आहेत. ह्मणजे **अबड** कोन **कडब** कोनाबराबर आहे. आणि **अडब** कोन **कबड** . कोनाबराबर. ह्मणोन या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसऱ्याचे दोन कोनांबराबर आहेत. याजकरितां (१७ सि० १ कु० प०) त्यांचे तिसरे कोनही परस्पर बराबर आहेत. ह्मणजे **अ** कोन **क** कोनाबराबर. आणि हे कोन समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन आहेत.

पुनः जर **अबड कडब** या दोन बराबर कोनांशीं **कबड अडब** हे दोन बराबर कोन मिळतील. तर (२ प्र० प०) त्यांची बेरीज बराबर होईल. ह्मणजे सर्व **अबक** कोन सर्व **अडक** कोनाबराबर आहे. आणि हे सर्व समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोर कोन आहेत. हें-

सिद्ध.

पुनः हे दोन त्रिकोण समकोन आणि प्रत्येकांची एक बाजू बराबर आहे. ह्मणजे **बड** बाजू दोहोंस साधारण आहे याजकरितां (२ सि०प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्यांचे सर्व अवयव बराबर आहेत. ह्मणजे **अब** बाजू तिचे समोरचे **डक** बाजू बराबर आणि **अड** बाजू तिचे समोरचे **बक** बाजू बराबर आणि सर्व **अबड** त्रिकोण सर्व **बडक** त्रिकोणाचे बराबर आहे. हें सिद्ध.

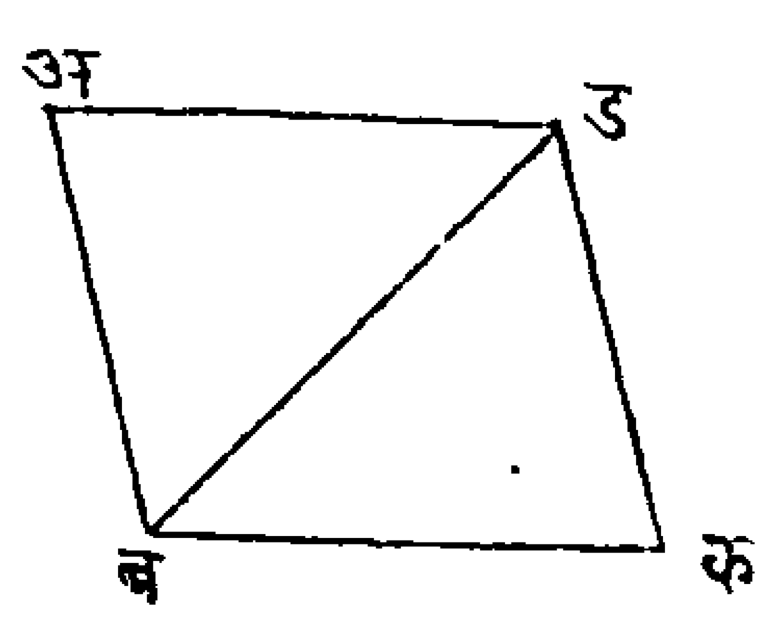
प्रथम कुरलरी. यापासून निघतें कीं. जा समांतर बाजू चौकोनांत एक कोन काटकोन आहे. तर बाकी राहिले तीन कोन काटकोन होतील. आणि समांतर बाजू चौकोन काटकोन चौकोन होईल.

दुसरी कुरलरी. यांतून निघतें कीं. कोणत्येही समांतर बाजू चौकोनांत जवळ जवळचे कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे.

---

## तेविसावा सिद्धांत.

जा चौकोनांत समोरासमोरच्या बाजू बराबर आहेत. तें समांतर बाजू चौकोन आहे. ह्मणोन समोरा समोरच्या बाजू समांतर आहेत.




**अबकड** चौकोन असेल जाच्या समोरा समोरच्या बाजू बरोबर आहेत. ह्मणजे **अब** बाजू **डक** बाजू बराबर. आणि **अड** बाजू **बक** बाजू बराबर तेव्हां या बराबरीच्या बाजू परस्पर समांतर होतील. आणि ही आकृती समांतर बाजू चौकोन आहे.

ह्मणोन त्यांत **बड** कर्ण रेघ कर. तेव्हां (वर सांगीतले प्र०)

**अबड, कबड** हे दोन त्रिकोण परस्पर समबाजू आहेत. याजकरितां (५ सि० प्र०) परस्पर समकोनही आहेत. ह्मणजे त्यांचे कोन अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां (१३ सि० प्र०) समोरासमोरच्या बाजू समांतर आहेत. ह्मणजे **अब** बाजू **डक** बाजूशीं समांतर. आणि **अड** बाजू **बक** बाजूशीं समांतर. आणि ही सर्व आकृति समांतर बाजू चौकोन आहे. हें सिद्ध.

---

# चोविसावा सिद्धांत.

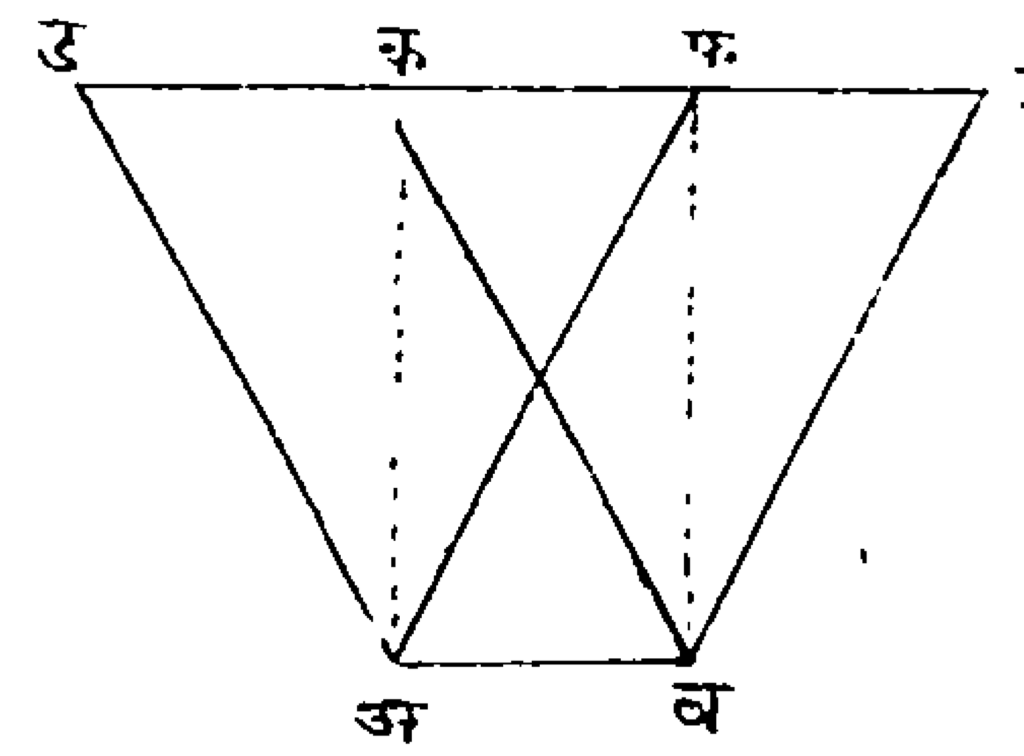
समांतर आणि बरोबर दोन रेघांचे समोरा समोरचे शेवट जा रेघा सांधितात त्या दोन रेघा परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत.

**अब डक** या दोन रेघा परस्पर समांतर आणि बरोबर असतील. तर त्यांचे समोरासमोरचे शेवट सांधितात. जा **अड, बक** रेघा त्याही समांतर आणि बरोबर होतील. आतां (वरचे आकृतीवर दृष्टीठेव)

ह्मणोन **बड** कर्ण रेघ कर. (वर सांगीतले प्र०) **अब. डक** या दोन रेघा परस्पर समांतर तेव्हां (१२ सि० प्र०) **अबड** कोन त्याचे **बडक** व्युत्क्रम कोना बराबर आहे. याजकरितां या दोन त्रिकोणांत दोन बाजू आणि अंतरकोन बराबर. ह्मणजे **अब** बाजू **डक** बाजूचे बरोबर, **बड** बाजू दोहोंस साधारण आणि **अबड** अंतरकोन **बडक** अंतर कोनाचे बरोबर. याजकरितां या दोन त्रिकोणांच्या बाकी राहिल्या बाजू व कोन हे सर्व अवयव (१ सि० प्र०) परस्पर बरोबर. ह्मणजे **अड** बाजू **बक** बाजूचे बराबर. आणि (१२ सि० प्र०) या दोन बाजू परस्पर समांतर आहेत. हें सिद्ध.

# पंचविसावा सिद्धांत.

समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण हीं जर एकच पायावर आहेत. एकच समांतर रेघांचे जोडाचे आंत. तर ते सर्व समांतर बाजू चौकोन परस्पर बराबर. आणि तसे त्रिकोण ही परस्पर बराबर आहेत.




**अबकड, अबईफ** हे दोन समांतर बाजू चौकोन असतील. आणि **अबक, अबफ** हे दोन त्रिकोण असतील. **अब** या एकच पायावर. आणि **अबडई** या एकच समांतर रेघांचे जोडामध्यें तर **अबकड** हा समांतर बाजू चौकोन **अबईफ** या समांतर बाजू चौकोना बराबर होईल. आणि **अबक** त्रिकोण **अबफ** त्रिकोणा बराबर होईल.

ह्मणोन **डई** रेघ **अफ बई** या दोन समांतर रेघांस छेदित्ये. तसेंच **अड, बक** या दोन समांतर रेघांस छेदित्ये. तेव्हां (१४ सि० प्र०) **ई** कोन **अफड** कोना बराबर आहे. आणि **ड** कोन **बकई** कोना बराबर आहे. याजकरितां (१७ सि० १ कु० प्र०) **अडफ, बकई** हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत. आणि **अड, बक** या समांतर बाजू चौकोनाचा समोरासमोरचा बाजू (२२ सि० प्र०) परस्पर बराबर आहेत. त्याच या दोन त्रिकोणाचा बाजू आहेत. याजकरितां हे दोन त्रिकोण (२ सि० प्र०) एकरूप अथवा यांचे सर्व अवयव अनुक्रमें बराबर आहेत. जर **अबडई** या सर्व स्थळांतून हे दोन सम त्रिकोण पर्यायें वजा केले तर (३ प्र० प्र०) एकीकडे **अबईफ** हे समांतर बाजू चौकोन आणि दुसऱ्येकडे **अबकड** या स-

मांतर बाजू चौकोना बराबर राहील. हें सिद्ध.

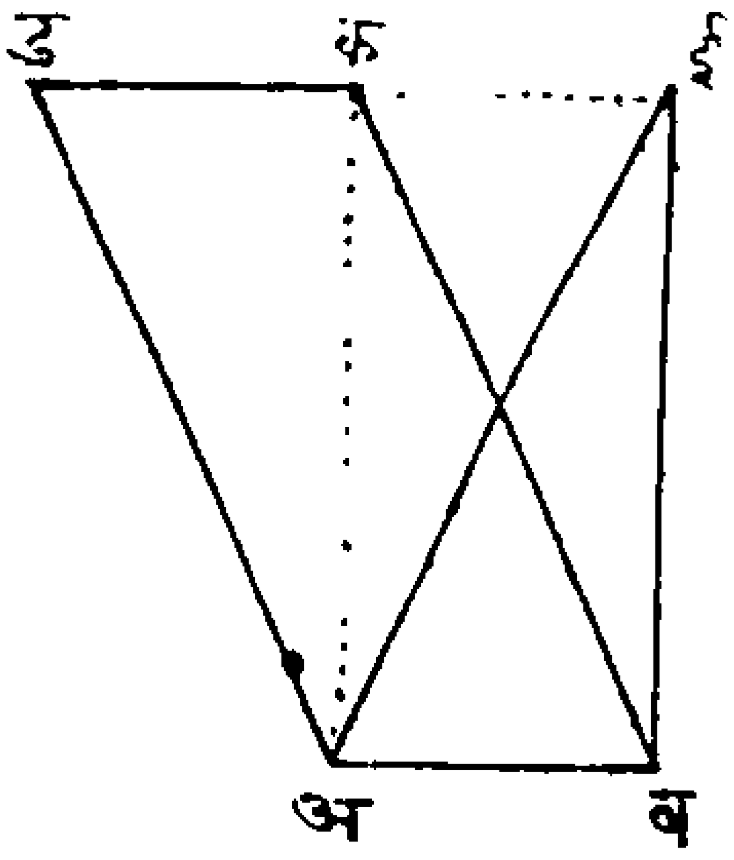
आणि **अबक, अबफ** हे दोन त्रिकोण एकच अब पायावर आहेत. आणि समांतर रेषांचे एकच जोडाचे आंत आहेत. ते परस्पर बरा बर होत. कारण (२२ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण वर सांगीतल्ये समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धबराबर आहेत. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. सर्व समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण जांचा पाया आणि उंची बरोबर. ते समांतर बाजू चौकोन परस्पर बरोबर आणि तसे त्रिकोण ही परस्पर बराबर. ह्मणजे उंची आणि समांतर रेषांचें लंबांतर हें एकच आहे. जें लंबांतर (९ व्या० प्र०) सर्वत्र बराबर आहे.

दुसरी कुरलरी. जेव्हां समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण आहेत. जांचा पाया आणि उंची बराबर एकच. तेव्हां ते समांतर बाजू चौकोन परस्पर आणि तसे त्रिकोण ही सर्व परस्पर बराबर आहेत. ह्मणजे एक आकृती दुसऱ्ये आकृतीचे पायाचे बाजूवर ठेविली असतां पाया बरोबर ह्मणजे सर्वत्र पाया मिळेल. अथवा एकच होईल. आणि तसें दोन आकृतीस एकच पाया असोन सांगीतल्या प्रमाणें उंची बराबर आहे. तर त्या दोन आकृती बराबर आहेत.

## सविसावा सिद्धांत.

जर एक समांतर बाजू चौकोन आणि एक त्रिकोण असे एकच पायावर असतील. समांतर रेषांचे एकच जोडामध्यें. तर तो समांतर बाजू चौकोन त्या त्रिकोणाचे दुपट. अथवा तो त्रिकोण त्या चौकोनाचे अर्धबराबर होईल.




**अबकड** समांतर बाजू चौकोन असेल. आणि **अबई** त्रिकोण असेल. एकच **अब** पायावर **अब, डई** या समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें. तर **अबकड** हा समांतर रेघ चौकोन **अबई** त्रिकोणाचे दुपट. अथवा. त्रिकोण त्या समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर होईल.

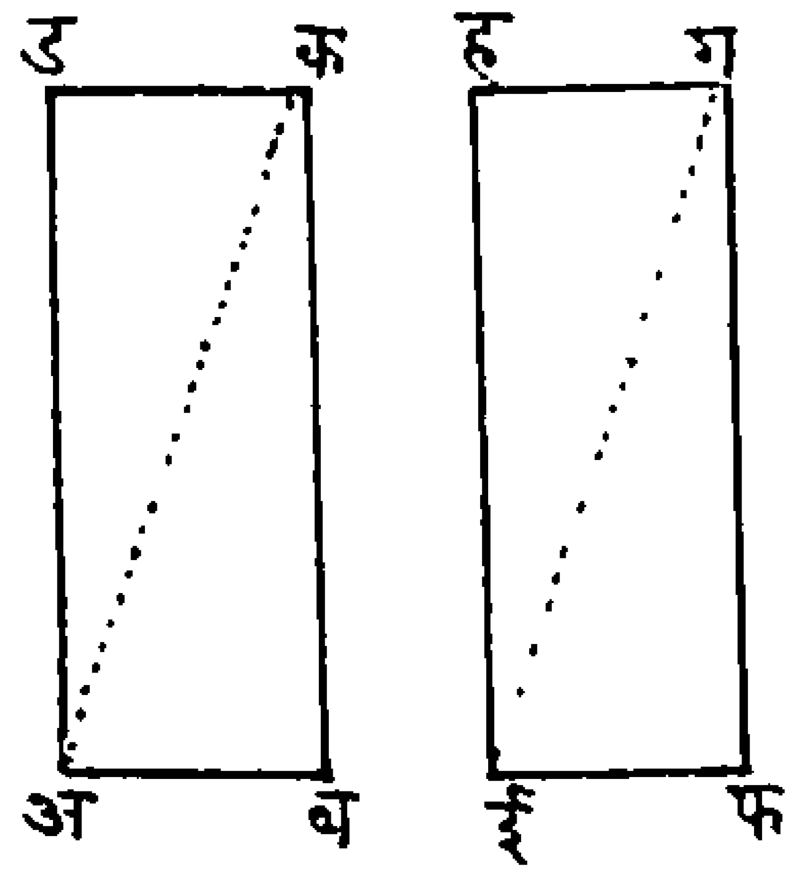
ह्मणोन समांतर बाजू चौकोनांत **अक** कर्णरेघ कर. जी रेघ (२२. सि० प्र०) त्या चौकोनास बराबर दोन त्रिकोणानीं दुभागित्ये. आतां **अबक, अबई** हे दोन त्रिकोण एकच पायावर समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें. आहेत. याजकरितां (२९ सि० प्र०) दोनी बराबर आहेत. परंतु. **अबक** - त्रिकोण (२२ सि० प्र०) **अबकड** समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा आहे. याजकरितां **अबई** त्रिकोण त्याचे बरोबर आहे, तोही **अबकड** समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर आहे. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. एक त्रिकोण समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा आहे. जेव्हां त्यांचा पाया एक आणि उंची बरोबर. ह्मणजे, उंची आणि समांतर रेघांचे जोडाचें लंबांतर एकच आहे. जें लंबांतर (९ व्या. प्रमा०) सर्वत्र बराबर आहे.

दुसरी कुरलरी. जर समांतर बाजू चौकोनाचा पाया कोणत्ये त्रिकोणाचे पायाचे अर्धा असेल. आणि त्या दोहोंची उंची बराबर. अथवा त्रिकोणाचा पाया समांतर बाजू चौकोनाचे पायाचे दुपट असोन उंची बराबर असेल. तर त्या दोन आकृती बराबर आहेत.

## सत्ताविसावा सिद्धांत.

जे काटकोन चौकोन बराबर रेघांत आहेत. ते सर्व परस्पर बराबर आहेत.



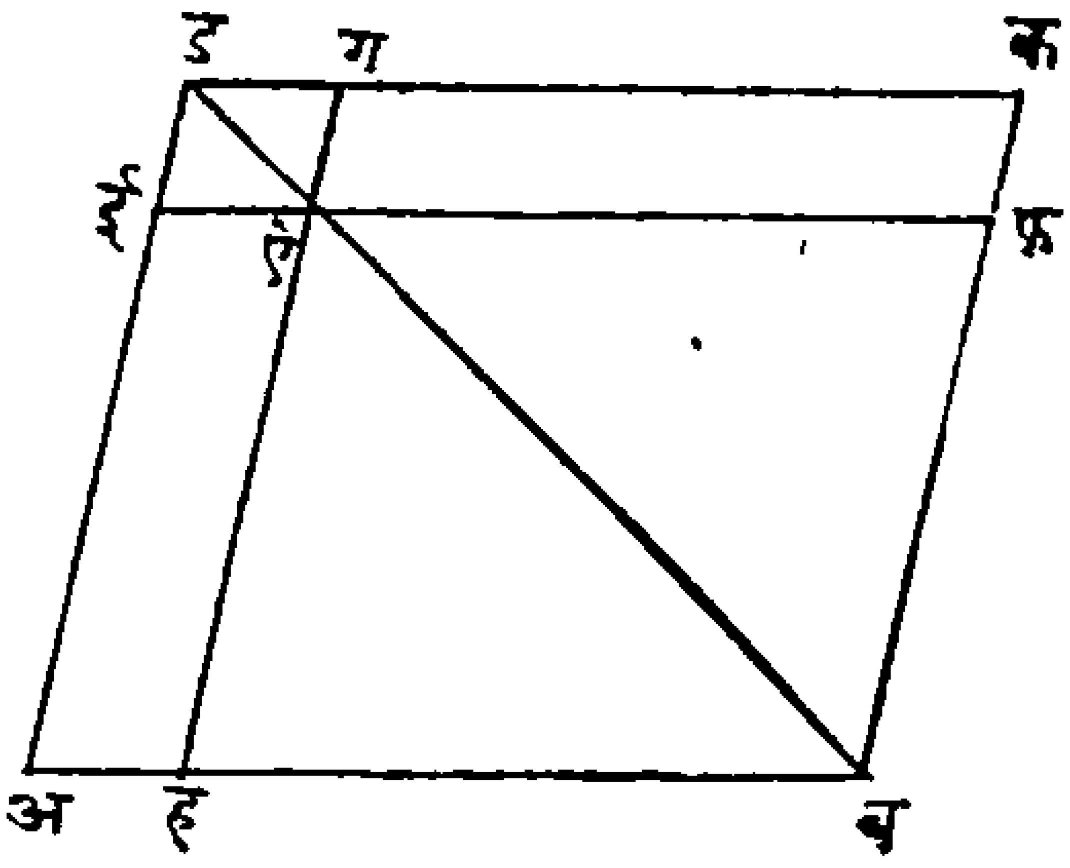

**बड** आणि **फह** हे दोन काटकोन चौकोन असतील. ज्या एकाचा **अब, बक** याबाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचे **ईफ, फग** बाजूंचे बराबर आहेत. तर, **बड** काटकोन चौकोन **फह** काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल.

ह्मणोन त्या दोन काटकोन चौकोनांत **अक, ईग** ऐशा दोन कर्ण रेघाकर, त्या प्रत्येकास बराबर दोन दोन त्रिकोणांनीं दुभागितील. आतां **अबक, ईफग** या दोन त्रिकोणांमध्यें (वरसांगीतले प्र०) एकाचा **अब, बक** या बाजू आणि आंतील **ब** कोन. दुसऱ्याचा **ईफ, फग** बाजू आणि आंतील **फ** कोन यांचे बराबर आहेत. याजकरितां (१ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर बराबर. परंतु हे बरोबर दोन त्रिकोण आप आपल्ये काटकोन चौकोनाचे अर्धे आहेत. अर्धा काटकोन चौकोन अथवा ते त्रिकोण प्रत्येक बरोबर आहेत. याजकरितां (६ प्र० प्र०) **बड, फह** हे दोन काटकोन चौकोन परस्पर बराबर आहेत.

कुरलरी. सर्व चौरस जे बराबर रेघांत आहेत, ते सर्व परस्पर बराबर आहेत. कारण, सर्व चौरस काटकोन चौकोनाची जात आहेत.

# अठ्ठाविसावा सिद्धांत.

कोणत्येही समांतर बाजू चौकोनाचे कर्णरेघेचे दोहोंकडे जे समांतर बाजू चौकोन कांप्लुमेंट आहेत. ते सर्व कांप्लुमेंट परस्पर बराबर आहेत.




**अक** समांतर बाजू चौकोन असेल. जांत **बड** कर्णरेघ आहे. **ईऐफ** रेघ **अब** अथवा **डक** शीं समांतर आणि **गऐह** रेघ **अड** शीं अथवा **बक**-शीं समांतर अशी कीं **अऐ**, **ऐक** हे दोन समांतर बाजू चौकोन **ईग**, **हफ** या दोन समांतर बाजू चौकोनांचे कांप्लुमेंट झाले. तर **अऐ** कांप्लुमेंट **ऐक** कांप्लुमेंटाचे बराबर आहे.

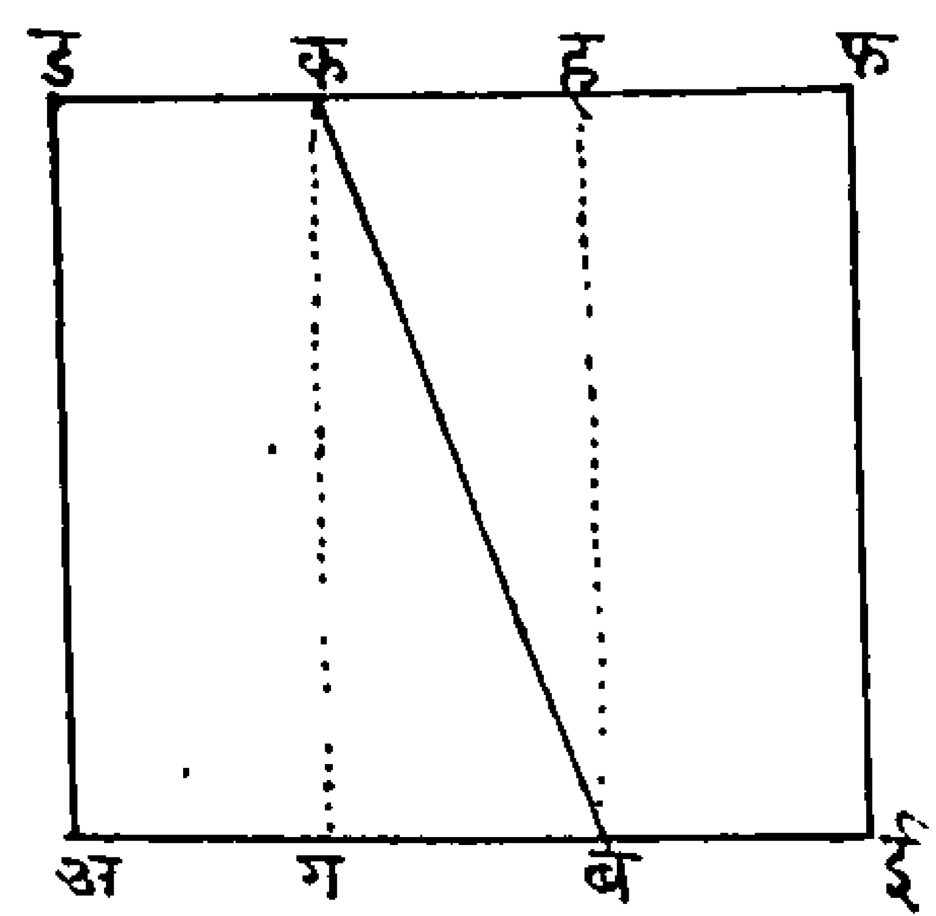
ह्मणोन (२२ सि० प्र०) **डब** कर्णरेघ **अक**, **ईग**, **हफ** या तीन समांतर बाजू चौकोनांस बराबर दुभागित्ये. तेव्हां **डअब** सर्व त्रिकोण **डकब** या सर्व त्रिकोणाचे बराबर. आणि **डईऐ**, **ऐहब** हे दोन अवयव अनुक्रमें आपआपल्ये **डगऐ**, **ऐफब** या दोन अवयवांचे बराबर आहेत. याजकरितां राहिले दोन अवयव **अऐ**, **ऐक** हे (३ प्र० प्र०) परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

---

# एकुणतिसावा सिद्धांत.

एक त्रापीज्यायद अथवा त्रापीज्यंम. जांत दोन बाजू समांतर-आहेत. तें समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर आहे. जा समांतर बाजू

चौकोनाचा पाया, त्याचे दोन समांतर बाजूंचे बेरिजे बराबर आहे. आणि उंची त्या समांतर बाजूंचे लंबांतराबरोबर आहे.



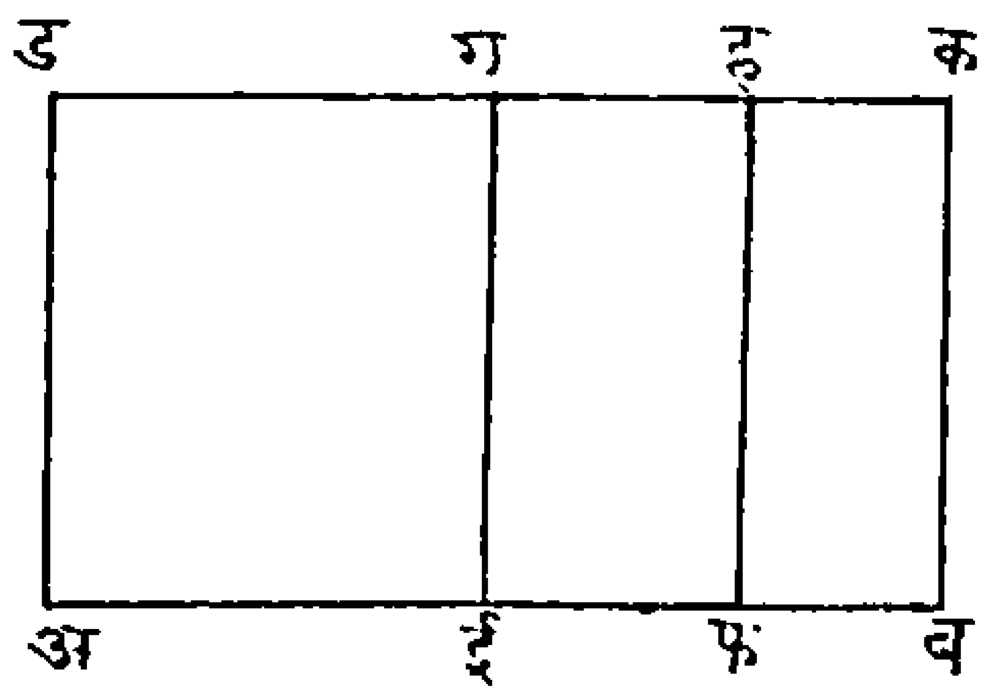

**अबकड**. एक त्रापीज्यायद असेल. जांत **अब, डक** या बाजू परस्पर समांतर आहेत. आतां **अब** वाढवून **डक** चे बरोबर **बई** कर. अशी कीं, **अई** रेघ त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर बाजूंचे बेरिजे बराबर होईल.

आतां **डक** ही वाढीव. आणि **ईफ. गक. बह** यातीन **अड** शीं समांतर रेघा कर. नंतर. **अफ** समांतर बाजू चौकोन झाला. जाची उंची **अबकड** त्रापीज्यायदाचे उंची बराबर आहे, आणि जाचा **अई** पाया त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर बाजूचे बेरिजे बराबर आहे. आतां हें सिद्ध करायाचें कीं **अबकड** त्रापीज्यायद **अईफड** समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर आहे.

आतां (२९ सि० २ कु० प्र०) त्रिकोण अथवा समांतर बाजू चौकोन परस्पर बराबर. जेव्हां त्यांचा पाया आणि उंची बराबर. याजकरितां **डग** समांतर बाजू चौकोन **हई** समांतर बाजूचौकोना बराबर. आणि **कगब** त्रिकोण **कहब** त्रिकोणा बराबर आहे. याजकरितां **बक** रेघ **अफ** समांतर बाजू चौकोनास बराबर दोन अवयवांनीं दुभागित्ये ह्मणोन **अबकड** त्रापीज्यायद **अफ**चे अर्धार्ध आहे. हें सिद्ध.

# तिसावा सिद्धांत.

जे काटकोन चौकोन एक अखंड रेघ आणि कशी ही भागलेल्ये दुसऱ्ये खंड रेघेचे तुकडे यांत होतात, त्या सर्वांची बेरीज त्याच दोन अखंड रेघांत जो काटकोन चौकोन होतो, त्याचे बराबर आहे.




**अड** एक अखंड रेघ असेल. आणि दुसरी **अब** खंडरेघ **अई, ईफ, फब** तुकडे याणीं भागिली. तर **अड, अब** रेघांत जो काटकोन चौकोन होतो तो **अड, अई. अड, ईफ. अड, फब,** या रेघांत जे काटकोन चौकोन होतात. त्या सर्वांचे बेरिजे बराबर आहे. हें लिहिण्याची रीती **अड॰ अब = अड॰ अई + अड॰ ईफ + अड॰ फब**

ह्मणोन **अक** काटकोन चौकोन कर. **अड, अब** या अखंड रेघांनीं. आणि **ईग, फह** हे दोन **अब** वर लंब अथवा **अड** शीं समांतर रेघा कर. कारण (२२ सि॰ प्र॰) या दोन रेघा **अड** चे बराबर आहेत. तेव्हां हा सर्व **अक** काटकोन चौकोन **अग, ईह, फक.** या तुकड्यां करून केला आहे. परंतु हे लाहान काटकोन चौकोन **अड, अई. ईग, ईफ. फह, फब.** या रेघांत आहेत. परंतु **ईग, फह** रेघा **अड** चे बराबर. तेव्हां **अड, अई. अड, ईफ - अड, फब.** या रेघांत होतात. त्यांचे बराबर आहे. याजकरितां **अड॰ अब** हा काटकोन चौकोन दुसऱ्ये काटकोन चौकोनांचे बेरिजे बराबर. जसें **अड॰ अई. अड॰ ईफ. अड॰ फब.** हें सिद्ध.

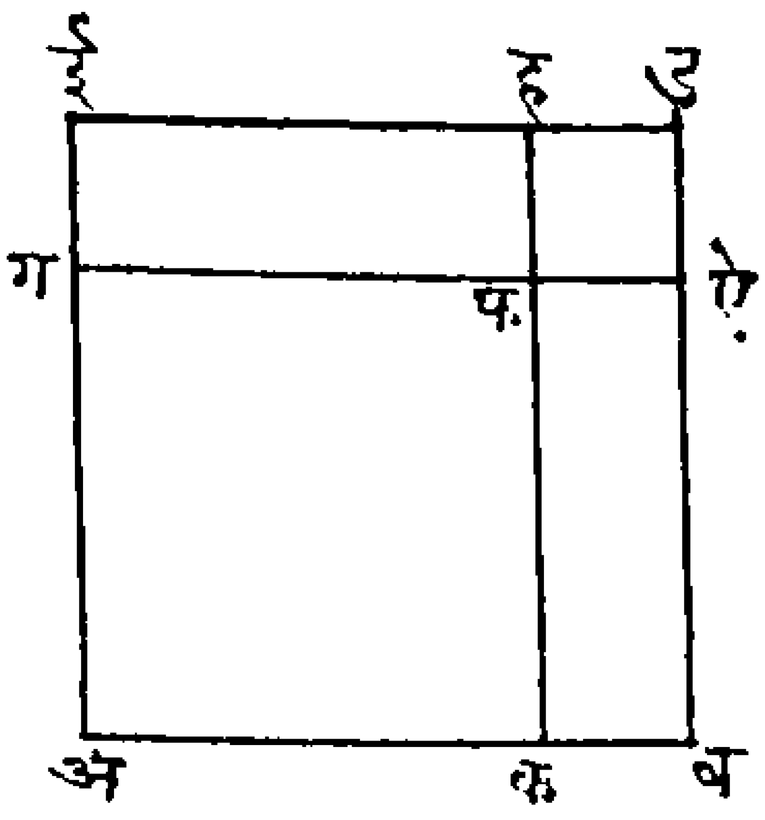
• कुरलरी. जर एक सरळ रेघेचे दोन तुकडे केले आहेत. त्या अखंड रेघेवर जो चौरस किंवा वर्ग होतो. तो त्या सरळ रेघेचे तुकड्यांवर त्याच

अखंड रेघेकरून जे काटकोन चौकोन होतात. त्यांचे बेरिजे बराबर आहे.

---

# एकतिसावा सिद्धांत.

दोन रेघांचे बेरिजेचा वर्ग त्या दोन रेघांचे वर्गांचे बेरिजेहून अधिक आहे. त्या दोन रेघांचा जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे दुपटीनें-अथवा एक अखंड रेघेचा वर्ग, त्याच रेघेचे दोन तुकडयांचे वर्गांची बेरीज त्याच तुकडयांचे काटकोन चौकोनांचे दुपटीनें अधिक इतक्या बराबर आहे.




**अब** रेघ कोणत्याही **अक, कब** या दोन रेघांची बेरीज असेल. तर **अब** रेघेचा वर्ग, या **अक, कब** रेघांचे वर्गांचीबेरिज अधिक **अक, कब** रेघांचे काटकोन चौकोनांची दुपट, इतक्या बराबर आहे. ह्मणजे **अब**² = **अक**² + **कब**² + २ **अक** ० **कब**

ह्मणोन अखंड **अब** रेघेवर **अब डई** चौरस अथवा वर्ग कर. आणि **अक** खंडावर **अक फग**. चौरस कर. नंतर **कफ** आणि **गफ** वाढीव. दुसऱ्या दोन बाजूंवर **ह** आणि **ऐ** स्थळांपर्यंत.

**कह, गऐ** या दोन रेघा (२२ सि० प्र०) **अब** अथवा **बड** या वर्ग बाजूंचे बराबर आहेत. याजकरितां परस्पर बरोबर. यांतून **कफ, गफ**. या **अक** चौरसाचा बाजू वजा कर. तेव्हां **फह**. **फऐ** चे बरोबर राहिली आणि **फह, फऐ** त्याचे समोरचे **डह. डऐ** चे बरोबर आहेत. कारण समांतर बाजू चौकोनाचा समोरा समोरचा बाजू आहेत. यांतून कळलेंकीं **हऐ** आकृती समबाजू आहे. आणि (२२ सि० १कु० प्र०) त्या आकृतीचें

सर्व कोन काटकोन आहेत. याजकरितां हऐ आकृति फऐ रेघेचा अथवा त्याचे बरोबर कब रेघेचा वर्ग आहे.

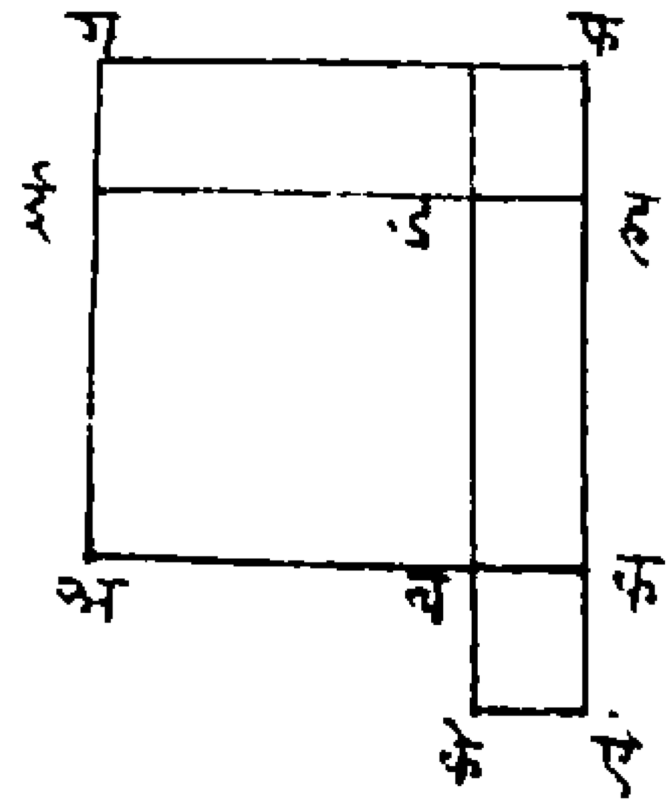
आतां ईफ आणि फब या दोन आकृती दोन काटकोन चौकोनां बराबर आहेत. जे अक आणि कब रेघांत होतात. कारण गफ, फक या रेघा अक चे बराबर आहेत. आणि फह अथवा फऐ. कब चे बराबर आहे. परंतु सर्व वर्ग अड चार आकृती मिळून झालेला. ह्मणजे. अफ, फड हे दोन वर्ग आणि ईफ. फब हे दोन काटकोन चौकोन मिळोन. अब चे वर्गा बरोबर आहेत जे अक, कब यांचा वर्ग-अधिक अक, कब यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें. हें सिद्ध.

कुरलरी. यांतीन निघतें कीं. जर कोणती ही रेघ बराबर दोन तुकड्यांनीं दुभागिली. तर त्या अखंड रेघेचा वर्ग त्याच रेघेचे अर्धाचे वर्गाचे चौपट आहे.

---

## बत्तिसावा सिद्धांत

दोन रेघांचे वजाबाकीचा वर्ग. त्यांचे वर्गांचे बेरिजेहून उणा आहे. त्या रेघांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें




कोणत्याही अक, बक या दोन रेघा असतील. त्यांची वजाबाकी अब आहे. तर अब चा वर्ग अक आणि बक चे वर्गाहून उणा होईल. अक. बक यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें. ह्मणजे. अबे=अके+बके-२ अक० बक

ह्मणोन अब वजाबाकीवर अबडई चौरस अथवा वर्ग करआ

णि अक रेघेवर अक.फग चौरस अथवा वर्गकर. नंतर ईड रेघ हपर्यंत वाढीव. आणि डब, हव. वाटवून केए रेघकर. अशीकीं बक रेघेवर बए चौरस होईल.

आतां दिसतेंकीं अड वर्ग अफ, बए या दोन वर्गांहून उणा - आहे. ईफ, डए या दोन काटकोन चौकोनांनीं. परंतु गफ रेघ अक रेघेचे बराबर आहे. आणि गई अथवा फह दुसऱ्ये बक रेघेचे बराबर आहे. याजकरितां ईफ काटकोन चौकोन. जो ईग, गफ रेघांत होतो. तो अक, बक रेघांतील काटकोन चौकोना बराबर आहे.

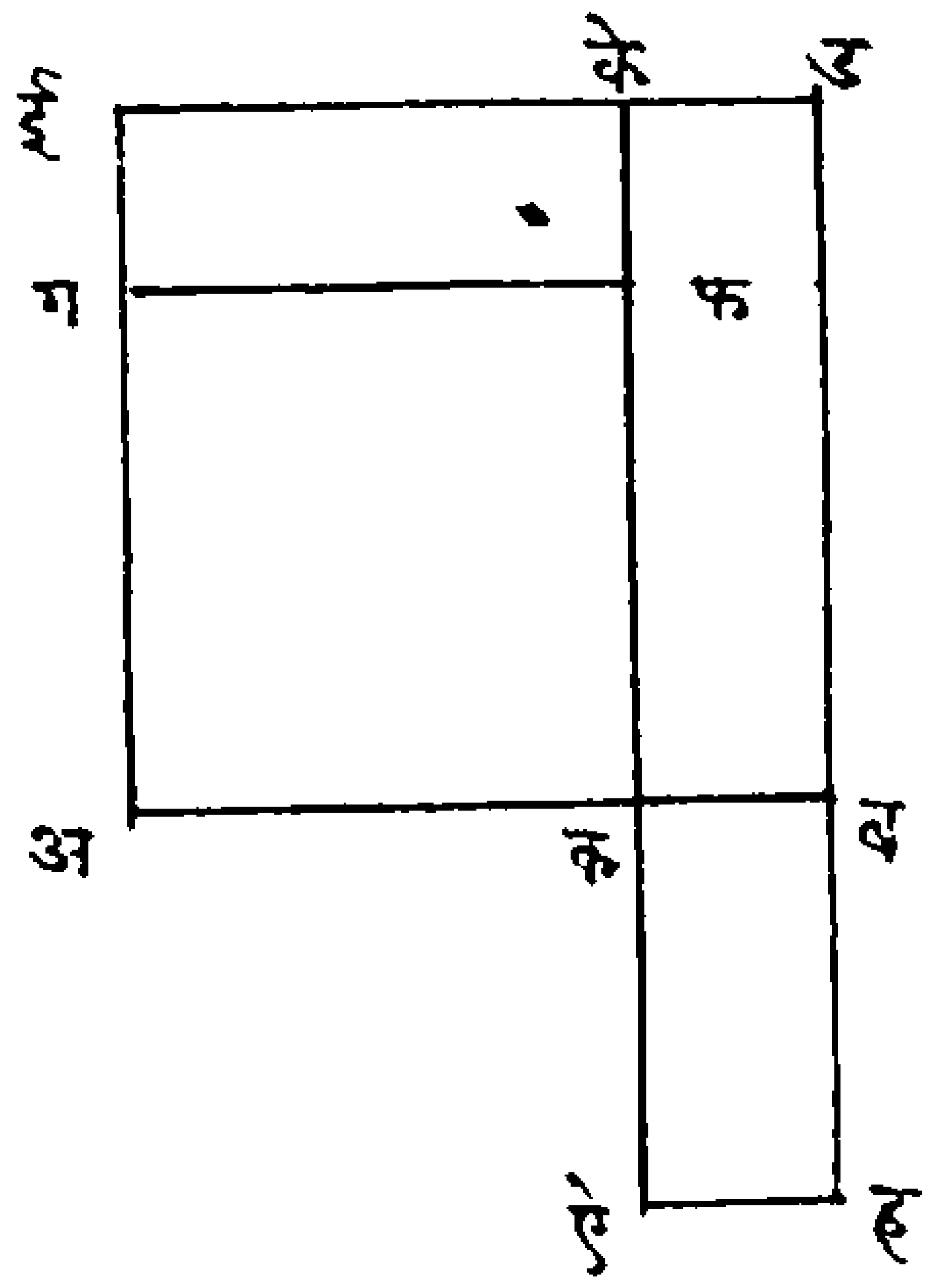
पुनः फह, कए अथवा बक अथवा हड चे बराबर आहे. साधारण अवयव हक मिळून सर्व हए. सर्व फक चे बराबर. अथवा त्याचे बरोबरीचे अक रेघेचे. याजकरितां डए आकृति अक. बक रेघांतील. काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

यांतून निघतेंकीं. ईफ. डए या दोन आकृती अब, बक रेघांतील दोन काटकोन चौकोनांचे बराबर आहेत. याजकरितां अब चा वर्ग अक. बक चे वर्गांहून उणा आहे. अक० बक या काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें हें सिद्ध.

---

## त्रेतिसावा सिद्धांत.

दोन रेघांची बेरीज व त्या रेघांची वजाबाकी यांत जो काटकोन चौकोन होतो. तो त्याच रेघांचे वर्गांचे वजा बाकी बराबर आहे.



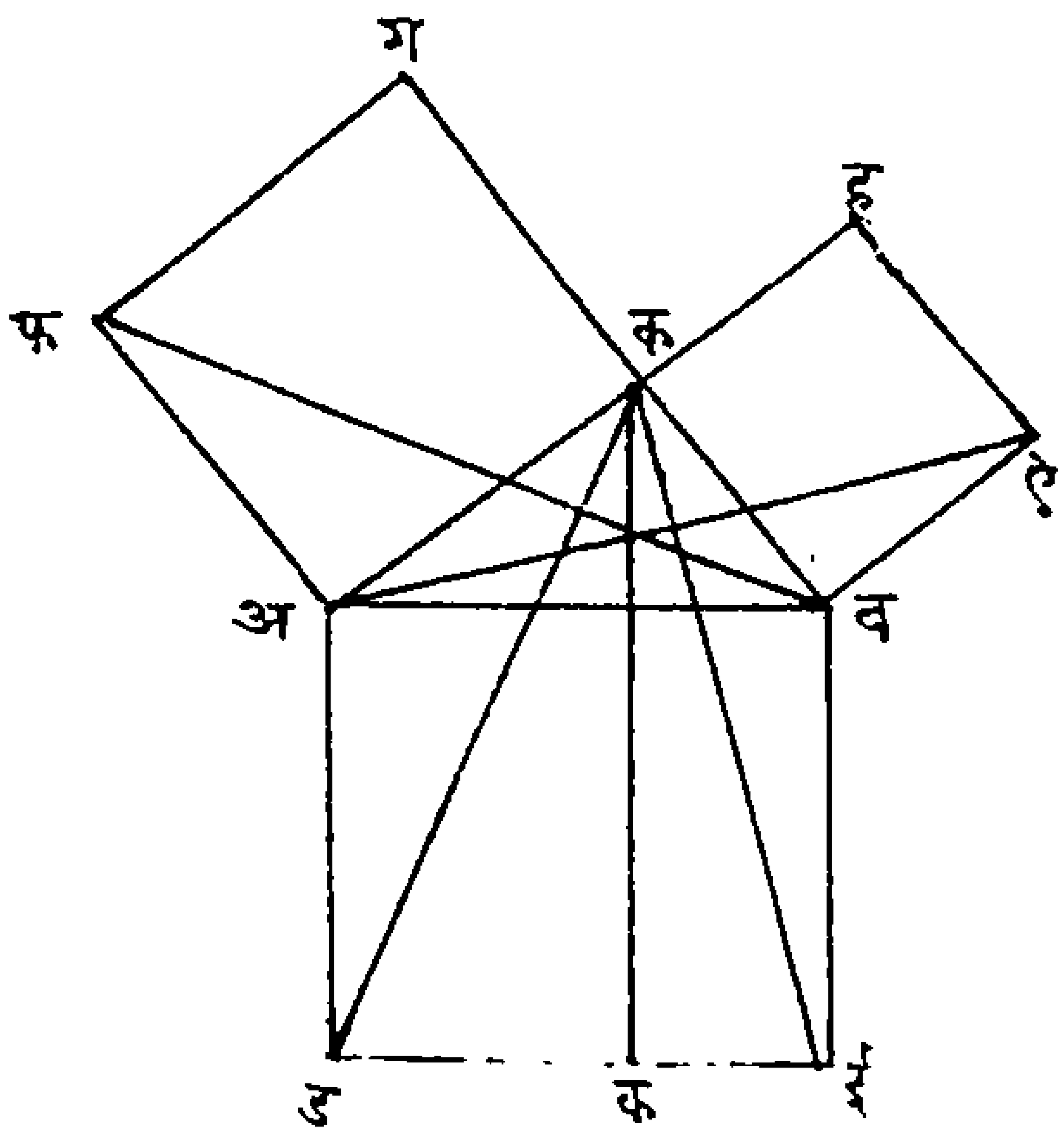

अब, अक या दोन विषम रेघा असतील. तर अब, अक यांचे वर्गांची वजाबाकी एक काटकोन चौकोना बराबर होईल. जो त्यांची बेरीज व वजाबाकी यांत केला. ह्मणजे $अब^{2}-अक^{2}=\overline{अब+अक}\;\overline{अब-अक}$

ह्मणोन अब रेघेवर अबडई वर्ग कर. आणि अक रेघेवर अकफग वर्ग कर. डब वाढीव. अशीकीं बह. अक चे बराबर होईल. हऐ. अबशीं अथवा ईड शीं समांतर कर. आणि फक दोहोंकडे ऐ आणि के पर्यंत वाढीव.

आतां दिसतें कीं. अड, अफ या दोन वर्गांची वजाबाकी ईफ, केब हे दोन काटकोन चौकोन आहेत. परंतु ईफ. बऐ हे परस्पर बराबर. कारण. बराबर रेघांत आहेत. असें कीं. ईके. बह या दोनी अक चे बराबर आहेत. आणि गई, कब चे बराबर. आणि या दोन अब, अक. आणि अई, अग यांची वजाबाकी आहेत. याजकरितां ईफ, केब हे दोन काटकोन चौकोन केब, बऐ. या दोन काटकोन चौकोनां बराबर. अथवा केह चे बराबर. ह्मणोन केह काटकोन चौकोन अड, अफ वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे. परंतु. केह काटकोन चौकोन या दोन रेघांत आहे. एक डह ह्मणजे. अब आणि अक यांची बेरीज दुसरी केड ह्मणजे. अब आणि अक यांची वजाबाकी. याजकरितां अब. अक यांचे वर्गांची वजाबाकी एक काटकोन चौकोना बराबर आहे. जो त्यांची बेरीज आणि वजाबाकी यांत होतो. हें सिद्ध.

# चौतिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही काटकोन त्रिकोणांत कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे.




अबक एक काटकोन त्रिकोण असेल. जांत क कोन काटकोन आहे. तर अब कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजू अक. बक यांचे वर्गांचे बेरिजे बराबर होईल. ह्मणजे. अब$^2$= अक$^2$+ बक$^2$-

ह्मणोन अब रेघेवर अई वर्ग कर. आणि अक, बक रेघांवर अग, बह हे दोन वर्ग कर. नंतर कके. अड शीं अथवा बई शीं समांतर कर. आणि अऐ, बफ. कड. कई या रेघांनीं सांध.

आतां अक रेघ कग, कब या दोन रेघांस मिळत्ये, अशी कीं. दोहोंकडे दोन काटकोन होतात. याजकरितां (९सि०१कु०प्र०) या दोन रेघा मिळून एक बग रेघ होत्ये. आणि फअक, डअब हे दोन कोन वर्गांचे कोन अथवा काटकोन आहेत. ह्मणोन परस्पर बराबर. या दोन बराबर कोनांशीं साधारण बअक कोन मेळीव. ह्मणजे फअब सर्व कोन अथवा बेरीज कअड सर्व कोनाचे अथवा बेरिजेचे बरोबर. परंतु. फअ रेघ आपल्ये वर्गाचे दुसऱ्ये अक बाजूचे बराबर आहे. आणि अब रेघ आपल्ये वर्गाचे दुसऱ्ये अड बाजूचे बराबर आहे. या प्रमाणें फअ, अब या दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील फअब कोन कअ. अड या दोन बा-

जू आणि त्यांचे आंतील **फअड** कोन हीं एकमेकांचीं अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. ह्मणोन (१सि०प्र०) **अफब** हा त्रिकोण **अकड** या त्रिकोणाचे बराबर आहे.

परंतु **अग** वर्ग **अफब** त्रिकोणाचे दुपट आहे. कारण (२९सि०प्र०) या दोन आकृती एकच **अफ** पायावर आहेत. आणि **फअ**, **गब** या समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें. या प्रमाणें **अके** हा काटकोन चौकोन **अकड** या त्रिकोणाचे दुपट आहे. कारण. एकच **अड** पायावर **डअ**. **केक** या समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें आहेत. आणि (६प्र०प्र०) जा वस्तू प्रत्येकीं दुसऱ्ये एक वस्तूचे दुपट आहेत. त्या सर्व परस्पर बराबर. याजकरितां **अग** वर्ग **अके** समांतर बाजू चौकोनाचे बराबर आहे.

याच रीतीनें हेंही सिद्ध होतें कीं. **बह** वर्ग **बके** समांतर बाजू चौकोनाचे बराबर आहे.

याजकरितां **अग**. **बह** हे दोन वर्ग मिळून. **अके**, **बके** या दोन समांतर बाजू चौकोना बराबर आहेत. अथवा त्यांचे सगळ्ये **अई** वर्गाबरोबर. ह्मणजे. त्रिकोणाचे दोन लाहान बाजूंचे वर्गांची बेरीज मोठ्ये बाजूंचे वर्गाबरोबर आहे हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. यांतून निघतें कीं. काटकोन त्रिकोणाचे कोणत्येही लाहान बाजूचा वर्ग (३प्र०प्र०) कर्ण आणि दुसरी लाहान बाजू यांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे. अथवा (२३सि०प्र०) कर्ण आणि राहिली दुसरी बाजू यांचीं बेरीज आणि वजाबाकी यांत जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे बराबर आहे.

दुसरी कुरलरी यांतून निघतें कीं. दोन काटकोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचे दोन बाजू बराबर असतील. तर त्यांची तिसरी

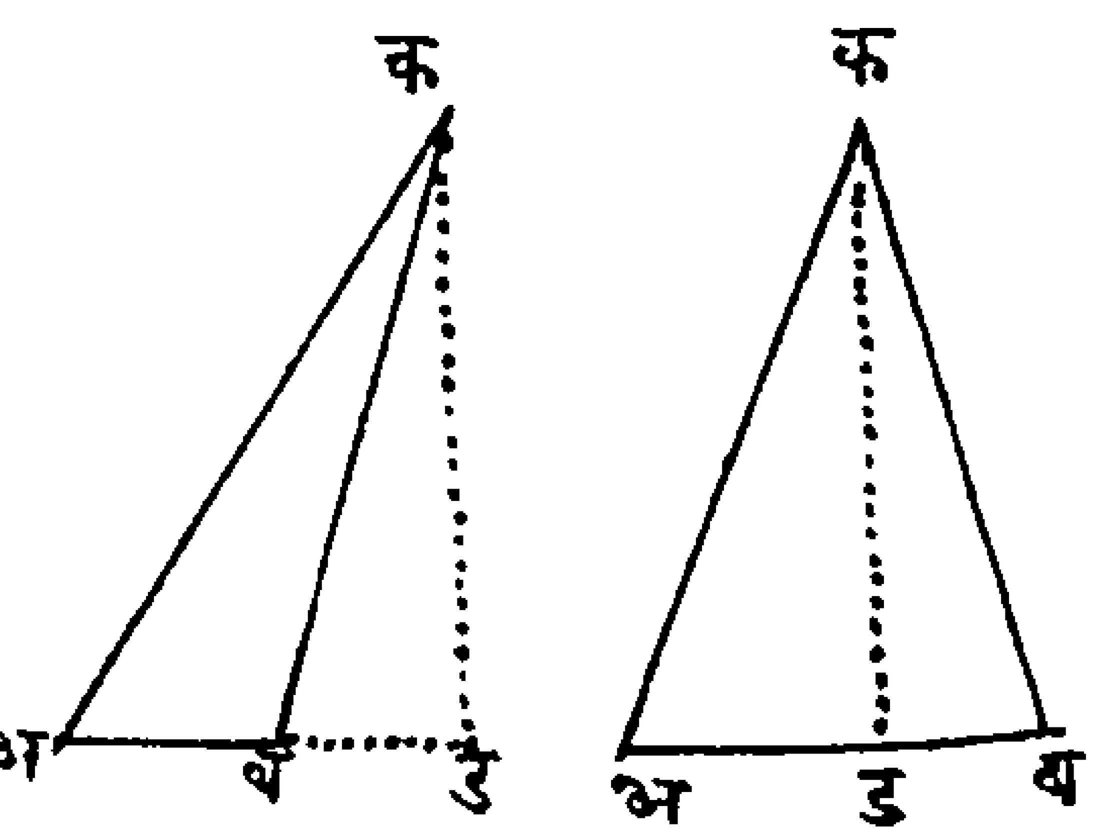
बाजूही बराबर होईल. आणि ते दोन काटकोन त्रिकोण परस्पर एक-रूप होतील.

---

## पसतिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत दोन बाजूंचे वर्गांची वजाबाकी पायाचे दोन खंडांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे. दोन खंडें ह्मणजे त्रिकोणाचे शिरापासून पायावर जो लंब केला आहे त्या पर्यंत पायाचे दोन शेवटांपासून दोन अंतरें अथवा तुकडे.

कोणताही अबक त्रिकोण असेल जांत कड रेघ अब पायावर लंब आहे. तर अक, बक या दोन बाजूंचे वर्गांची वजाबाकी अड, बड या दोन खंडांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे ह्मणजे




$$\text{अक}^2 - \text{बक}^2 = \text{अड}^2 - \text{बड}^2$$

ह्मणोन अकड काटकोन त्रिकोणांत $\text{अक}^2 = \text{अड}^2 + \text{कड}^2$ ⎫
आणि बकड काटकोन त्रिकोणांत $\text{बक}^2 = \text{बड}^2 + \text{कड}^2$ ⎭ (३४ सि० क०)

याजकरितां $\text{अक}^2$ आणि $\text{बक}^2$ यांची वजाबाकी.

$$\left.\begin{array}{l}\text{अड}^2 + \text{कड}^2 \\ \text{बड}^2 + \text{कड}^2\end{array}\right\}$$ यांचे वजाबाकी बराबर आहे.

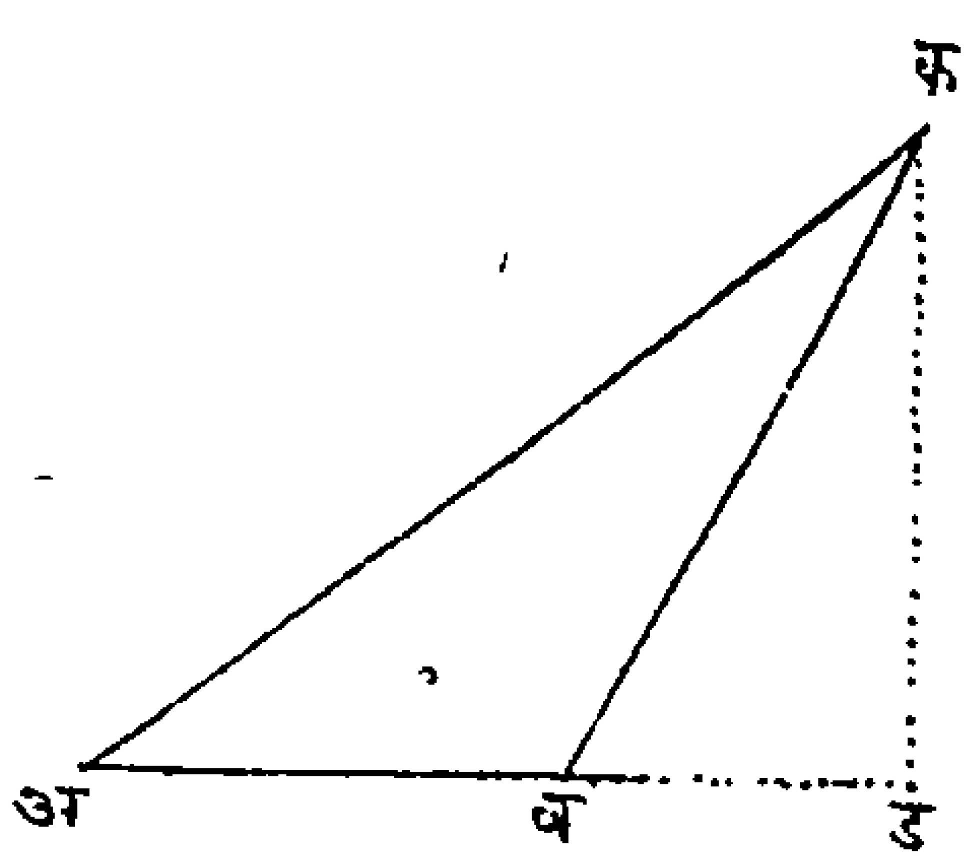
या दोहोंत $\text{कड}^2$ वर्ग साधारण आहे तो सोडून $\text{अक}^2$ आणि $\text{बक}^2$ यांची वजाबाकी $\text{अड}^2$ आणि $\text{बड}^2$ यांचे वजाबाकी बरोबर झाली हें सिद्ध.

कुरलरी. जो काटकोन चौकोन कोणत्येही त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजाबाकी यांत होतो तो (३६ सि॰प्र॰) शिरापासून जो लंब केला आहे. त्यापर्यंत पायाचे दोन शेवटांपासून दोन अंतरांची अथवा दोन खंडांची बेरीज आणि त्यांचीच वजाबाकी या दोन रेघांचे काटकोन चौकोना बरोबर आहे. अथवा यां बरोबर आहे. एक काटकोन चौकोन जो पुढें सांगतो तो या रेघांत होतो एक रेघ पाया आणि दुसरी रेघ पायाचे पूर्वोक्त खंडांची वजाबाकी जेव्हां लंब त्रिकोणांत पडतो तेव्हां आणि जेव्हां लंब त्रिकोणांचे बाहेर पडतो तेव्हां पायाचें पूर्वोक्त खंडांची बेरीज ह्मणजे $\overline{\text{अक}+\text{बक}}\cdot\overline{\text{अक}-\text{बक}}=\overline{\text{अड}+\text{बड}}\cdot\overline{\text{अड}-\text{बड}}$ अथवा $\overline{\text{अक}+\text{बक}}\cdot\overline{\text{अक}-\text{बक}}=\overline{\text{अब}}\cdot\overline{\text{अड}-\text{बड}}$ दुसऱ्ये आकृतींत जेव्हां लंब त्रिकोणांत पडला आहे. आणि $\overline{\text{अक}+\text{बक}}\cdot\overline{\text{अक}-\text{बक}}=\overline{\text{अब}}\cdot\overline{\text{अड}+\text{बड}}$ दुसऱ्ये आकृतींत जेव्हां लंब त्रिकोणाचे बाहेर पडला आहे.

---

## छत्तिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही विशाळकोन त्रिकोणांत विशाळकोनाचे समोरचे बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरिजेहून अधिक आहे. कशानेंतर. पाया आणि विशाळ कोनापासून लंबपर्यंत जें अंतर आहे. त्या दोन रेघांत जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे दुपटीनें




**अबक** एक त्रिकोण असेल. त्यांत ब विशाळ कोन आहे. आणि **अड** या पासून त्याजवर **कड** लंब आहे. तर **अक** बाजूचा वर्ग **अब**, **बक**

या दोन बाजूंचे वर्गांहून **अब, बड** यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक आहे. ह्मणजे. $\text{अक}^{२} = \text{अब}^{२} + \text{बक}^{२} + \overline{२\,\text{अब}\cdot\text{बड}}$.

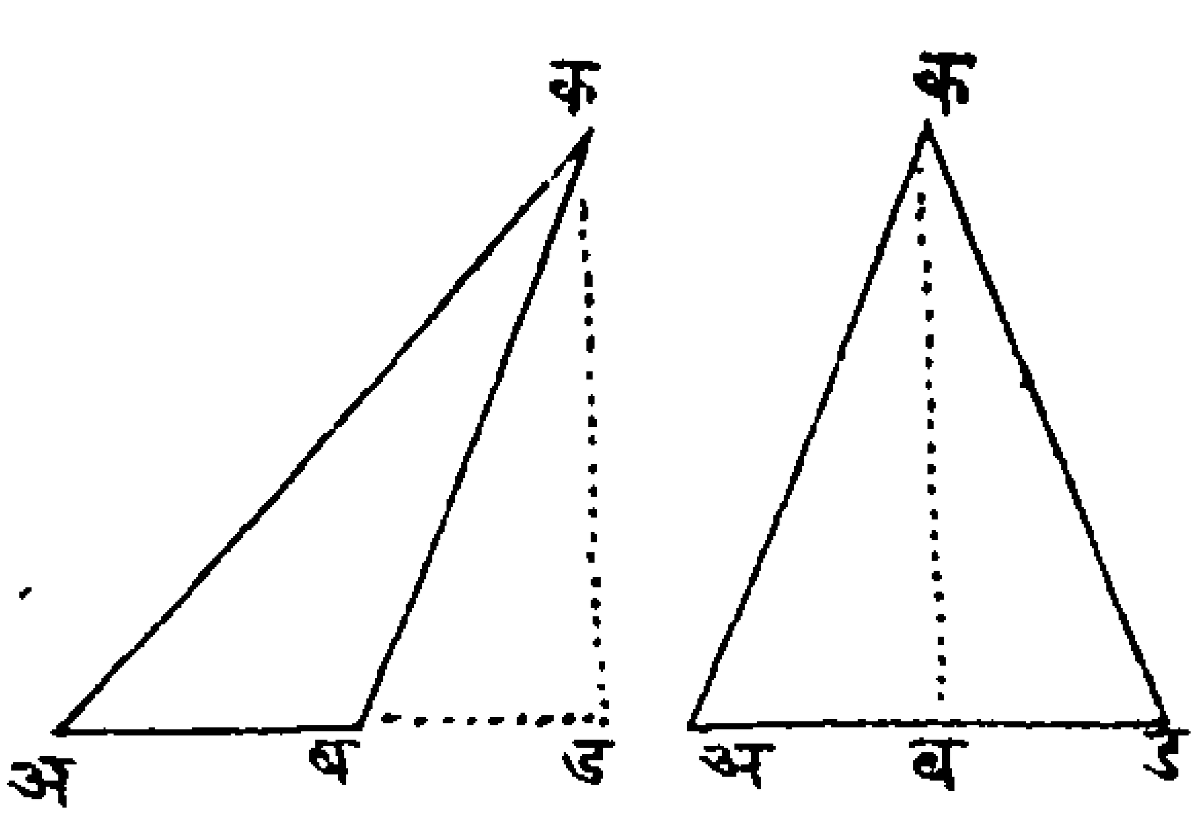
ह्मणोन अखंड **अड** रेघेचा वर्ग (३१ सि॰प्र॰) तिचे **अब, बड** या खंडांचे वर्ग, त्याच खंडांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक इतक्या बराबर आहे. जर या दोन बरोबऱ्यांवर **कड** वर्ग मिळेल तर (२ प्र॰प्र) **अड, कड** यांचे वर्गांची बेरीज, **अब, बड, कड** यांचे वर्गांची बेरीज **अब, बड** यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक इतक्याचे बरोबर आहे.

परंतु (३९ सि॰प्र॰) **अड, कड** यांचा वर्ग **अक** चे वर्गाबरोबर आहे. आणि **बड. कड** यांचा वर्ग **बक** चे वर्गा बराबर आहे. याजकरितां **अक** चा वर्ग **अब, बक** यांचे वर्गांची बेरीज **अब, बड** यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक. इतक्याचे बरोबर आहे. हें सिद्ध.

## सततिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत लघुकोना समोरचे बाजूचा वर्ग पाया आणि दुसरी बाजू यांचे वर्गांचे बेरिजेहून उणा आहे. पाया आणि लघुकोना पासून लंबपर्यंत जें अंतर आहे त्या दोन रेघांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें.

**अबक** एक लघुकोन त्रिकोण असेल. जांत **अ** लघुकोन आहे. आणि **अब** पायावर **कड** लंब आहे तर **बक** चा वर्ग **अब अक** या दोहोंचे वर्गांहून **अब, अड** यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें उणा आहे. ह्मणजे.

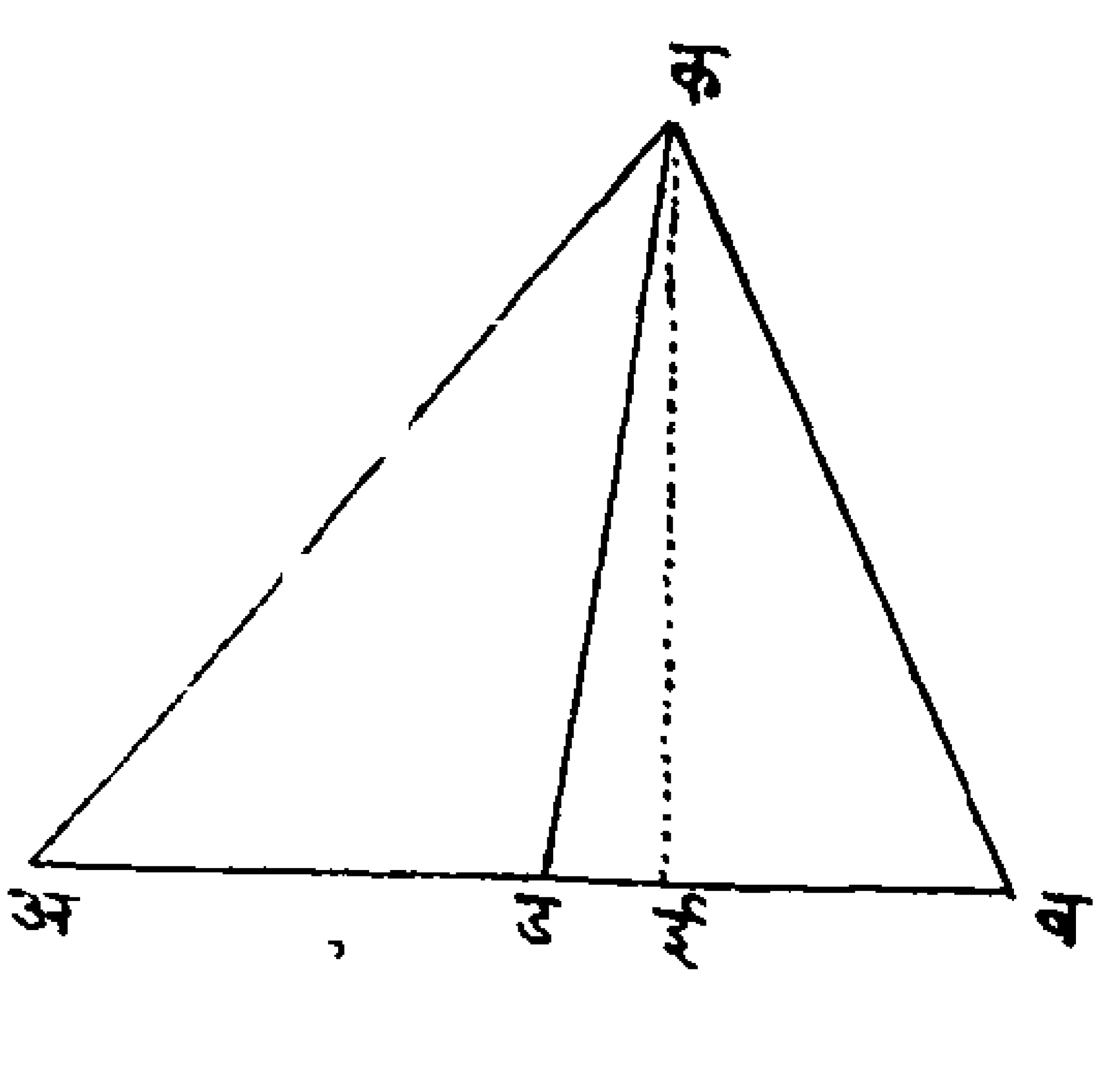


बक$^{२}$ = अब$^{२}$ + अक$^{२}$ - २ अब॰अड प्रथम आकृतींत (३६ सि॰ प्र॰) अक$^{२}$ = बक$^{२}$ + अब$^{२}$ + २ अब॰अड या दोन बरोबऱ्यांत अब चा वर्ग मेळीव तर (२ प्र॰ प्र॰) अब$^{२}$ + अक$^{२}$ = बक$^{२}$ + २ अब$^{२}$ + २ अब॰ बड अथवा अब$^{२}$ + अक$^{२}$ = बक$^{२}$ + २ अब॰ अड (३० सि॰ प्र॰) अथवा बक$^{२}$ = अब$^{२}$ + अक$^{२}$ - २ अब॰अड. हें सिद्ध.

पुनः दुसऱ्ये आकृतींत (३५ सि॰ प्र॰) अक$^{२}$ = अड$^{२}$ + डक$^{२}$ आणि (३१ सि॰ प्र॰) अब$^{२}$ = अड$^{२}$ + बड$^{२}$ + २ अड॰डब याजकरितां (२ प्र॰ प्र॰) अब$^{२}$ + अक$^{२}$ = बड$^{२}$ + डक$^{२}$ + २ अड$^{२}$ + २ अड॰ डब अथवा अब$^{२}$ + अक$^{२}$ = बक$^{२}$ + २ अड$^{२}$ + २ अड॰ डब. (३५ सि॰ प्र॰) अथवा अब$^{२}$ + अक$^{२}$ = बक$^{२}$ + २ अब॰ अड अथवा बक$^{२}$ = अब$^{२}$ + अक$^{२}$ - २ अब॰अड हें सिद्ध.

## अठतिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत जी रेघ शिरापासून पायाचे मध्या पर्यंत केली तिचे वर्गाची दुपट आणि अर्ध्ये पायाचे वर्गाची दुपट मिळून दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे.




अबक एक त्रिकोण असेल. आणि त्यांत शिरापासून अब पायाचे ड मध्या पर्यंत कड रेघ केली अशी कीं. पायास बराबर अड, डब या दोन खंडांनीं दुभागित्ये तर अक, कब चा वर्ग कड, बड या दोहोंचे वर्गांचे दुपटी

बराबर आहे. ह्मणजे **अक**$^{२}$ + **कब**$^{२}$ = २**कड**$^{२}$ + २**डब**$^{२}$

ह्मणोन **अब** पायावर **कई** लंब कर आतां **अडक** या विशाळ कोन त्रिकोणांत जांत **ड** विशाळ कोन आहे. (३६ सि॰प्र॰) **अक** चा वर्ग **अड**, **कड** यांचे (अथवा **बड**, **कड** यांचे) वर्गांहून याच रेघांतील काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक आहे. २**अड**॰**डई** (अथवा २**बड**॰**डई**) आणि **डबक** या लघुकोन त्रिकोणांत जांत लघु कोन **ड** आहे (३७ सि॰प्र॰) **बक**$^{२}$ = **बड**$^{२}$ आणि **कड**$^{२}$ याहून पूर्वी सांगितल्ये काट कोन चौकोनाचे दुपटीनें उणा आहे. याजकरितां **अक**$^{२}$ आणि **बक**$^{२}$ मिळोन त्या पूर्व बेरिजेचे दुपट आहेत. जांत अधिक जाति आणि ऊन जाति काटकोन चौकोन बाद होतात

ह्मणजे **अक**$^{२}$ = **बड**$^{२}$ + **कड**$^{२}$ + २ **बड**॰**डई** (३६ सि॰प्र॰)

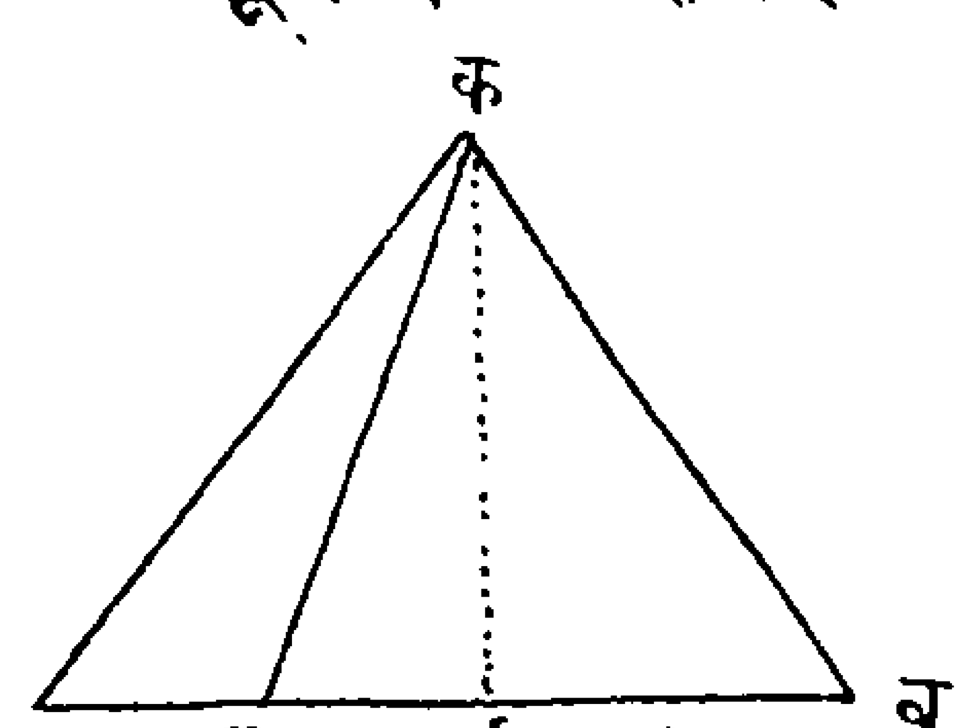
आणि **बक**$^{२}$ = **बड**$^{२}$ + **कड**$^{२}$ − २ **बड**॰**डई** (३७ सि॰प्र॰)

बेरीज **अक**$^{२}$ + **बक**$^{२}$ = २**बड**$^{२}$ + २ **कड**$^{२}$. हें सिद्ध.

---

# एकुणचाळिसावा सिद्धांत.

समद्विबाजू त्रिकोणांत कोणती एक रेघ शिरापासून पायावर कोणत्येही स्थळापर्यंत केली तीचा वर्ग आणि पायाचे दोन खंडांचा काटकोन चौकोन मिळून जें होतें तें त्याचे एक समबाजूचे वर्गाबरोबर आहे.




**अबक** एक समद्विबाजू त्रिकोण असेल. आणि त्यांत शिरापासून पायावर कोणत्येही स्थळीं **कड** रेघ केली आहे. तर **अक** बाजूचा वर्ग **कड**

चा वर्ग आणि अड, डब यांचा काटकोन चौकोन एकत्र मिळोन जें होतें. त्याचे बराबर आहे. ह्मणजे अक² = कड² + अड॰ डब

ह्मणोन कई रेघ कर अशी कीं शिरकोन दुभागील. तर ही रेघ (३ सि॰ १ कु॰ प्र॰) पायास दुभागित्ये. आणि त्याजवर लंब आहे. याजकरितां अई बराबर ईब झाला. परंतु अकड त्रिकोणांत जांत ड विशाळ कोन आहे. (३६ सि॰ प्रमाणें) अक² याबरोबर = कड² + अड² + २ अड॰ डई

अथवा = कड² + अड॰ $\overline{\text{अड + २ डई}}$ (३० सि॰ प्र॰)

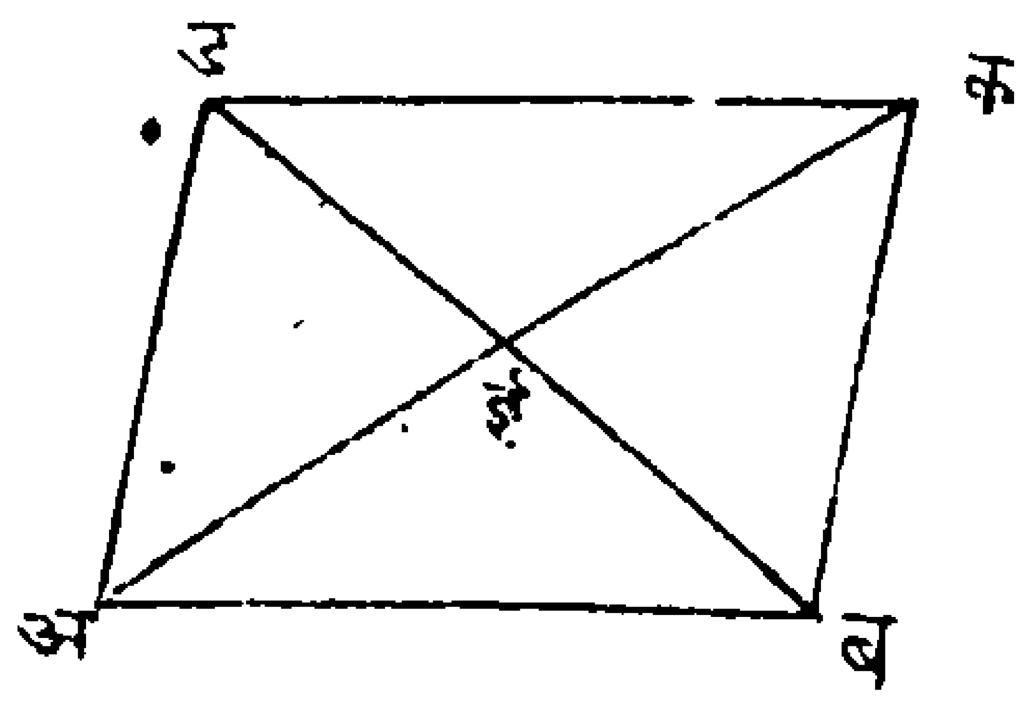
अथवा = कड² + अड॰ $\overline{\text{अई + डई}}$

अथवा = कड² + अड॰ $\overline{\text{बई + डई}}$

अथवा = कड² + अड॰ डब हें सिद्ध.

## चाळिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही समांतर बाजू चौकोनांत कर्ण रेषा परस्परांस दुभागितात. आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज त्यांचे चार बाजूंचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे.




अबकड एक समांतर बाजू चौकोन असेल. जांतील कर्ण रेषा ईस्थळावर परस्परांस दुभागितात. तर अई, ईक बराबर आणि बई ईड बराबर होतील. आणि अक डक यांचे वर्गांची बेरीज अब, बक, डक, डअ यांचे वर्गांचे बेरिजे बराबर होईल. ह्मणजे अई = ईक आणि बई = ईड.

आणि अक² + बड² = अब² + बक² + कड² + डअ²

ह्मणोन **अईब, डईक** हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत. कारण समोरासमोरचे कोन **ई** स्थळावर (७ सि०प्र०) बरोबर आणि **अक, बड** या दोन रेघा **अब, डक** या रेघांस मिळतात. याजकरितां **बअई** कोन **डकई** कोना बराबर आणि **अबई** कोन **कडई** कोना बराबर आहे. आणि (२२ सि०प्र०) **अब** बाजू **डक** बाजूचे बराबर आहे. याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि (२ सि०प्र०) त्यांचा राहिल्या बाजू अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. ह्मणजे. **अई=ईक** आणि **बई= ईड**

पुनः **ई** स्थळावर **अक** दुभागिला याजकरितां (३८ सि०प्र०) **अड**$^{2}$+ **डक**$^{2}$=२ **अई**$^{2}$+२ **डई**$^{2}$

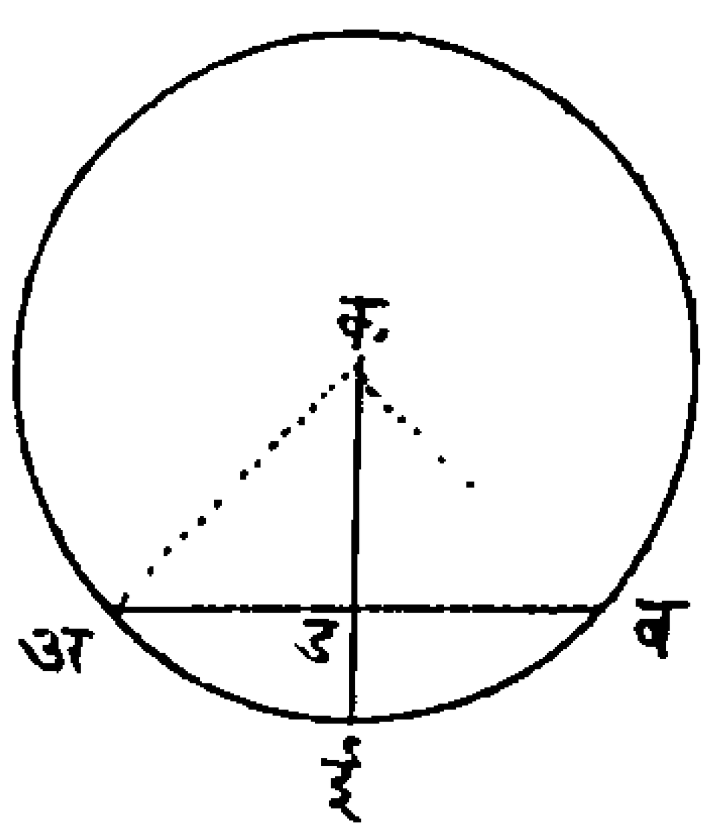
याच रीतीनें **अब**$^{2}$+ **बक**$^{2}$=२ **अई**$^{2}$+२ **बई**$^{2}$ (अथवा) २ **डई**$^{2}$ याजकरितां **अब**$^{2}$ + **बक**$^{2}$ + **कड**$^{2}$+ **डअ**$^{2}$=४ **अई**$^{2}$+४ **डई**$^{2}$ (२प्र०प्र०)

परंतु (३१ सि०कु०प्र०) एक अखंड रेघेचा वर्ग तिचे अर्धाचे वर्गाचें चौपट आहे. ह्मणोन **अक**$^{2}$ = ४ **अई**$^{2}$ आणि **बई**$^{2}$=४ **डई**$^{2}$ याजकरितां **अब**$^{2}$+ **बक**$^{2}$+ **डक**$^{2}$+ **डअ**$^{2}$=**अक**$^{2}$+ **बड**$^{2}$ (१म०प्र०) हें सिद्ध.

---

## एकेचाळिसावा सिद्धांत.

जर एक रेघ वर्तुळ मध्याचे पार जाऊन अथवा त्यापासून केली ती त्या वर्तुळांतील कोणत्येही ज्यास दुभागित्ये तेव्हां ती रेघ त्या ज्याजवर लंब होईल. अथवा जर ती रेघ ज्या वर लंब असेल. तर ज्या आणि ज्याकोंस यांस दुभागील.




कोणत्येही वर्तुळांत **अब** ज्या असेल आणि **कड** रेघ **क** वर्तुळ मध्यापासून त्या ज्यावर केली ती **ड** स्थळावर ज्यास दुभागित्ये तर **अब** रेघेवर ती **कड** रेघ लंब होईल.

म्हणोन **कअ. कब** ऐशा दोन त्रिज्याकर. **अकड** आणि **बकड** या दोन त्रिकोणांत **कअ** (४४ व्याख्येप्र०) **कब**चे बराबर आहे. **कड** बाजू दोहोंत साधारण आणि (वरसांगितल्याप्र०) **अड**, **डब**चे बराबर आहे. या प्रमाणें दोनी त्रिकोणांचा तीनही बाजू अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां (५ सि०प्र०) त्यांचे तीनही कोन अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. यापासून निघतें कीं. **अडक** कोन **बडक** कोना बराबर आहे. म्हणोन (११ व्या०प्र०) हे दोनही कोन कारकोन आहेत. आणि **कड** रेघ **अब** रेघेवर लंब आहे.

पुनः जर **कड**, **अब** वर लंब असेल. तर **अब** ज्या **ड** स्थळावर दुभागिली जाईल. अथवा **अड डब**चे बराबर होईल. आणि **अईब** कौंस **ई** स्थळावर दुभागिला जाईल. अथवा **अई ईब** चे बराबर होईल.

म्हणोन (वरसांगीतल्याप्र०) **कअ, कब** त्रिज्याकर. तेव्हां **अकब** त्रिकोणांत **कअ** बाजू **कब**चे बराबर आहे. याजकरितां (३ सि०प्र०) त्यांचे समोरासमोरचे **अ** कोन आणि **ब** कोन हे परस्पर बराबर आहेत. आतां **अकड** आणि **बकड** या दोन त्रिकोणांत **अ** कोन **ब** कोना बराबर आहे. आणि (११ व्या०प्र०) **ड** स्थळावरील दोनीं कोन परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां (१७ सि०१ कु०प्र०) त्यांचे राहिले तिसरे कोन परस्पर बराबर आहेत. आणि दोन त्रिकोणांत **कड** बाजू साधारण आहे. याजकरितां (२ सि०प्र०) **अड**

बाजू **बड** बाजूचे बरावर आहे.

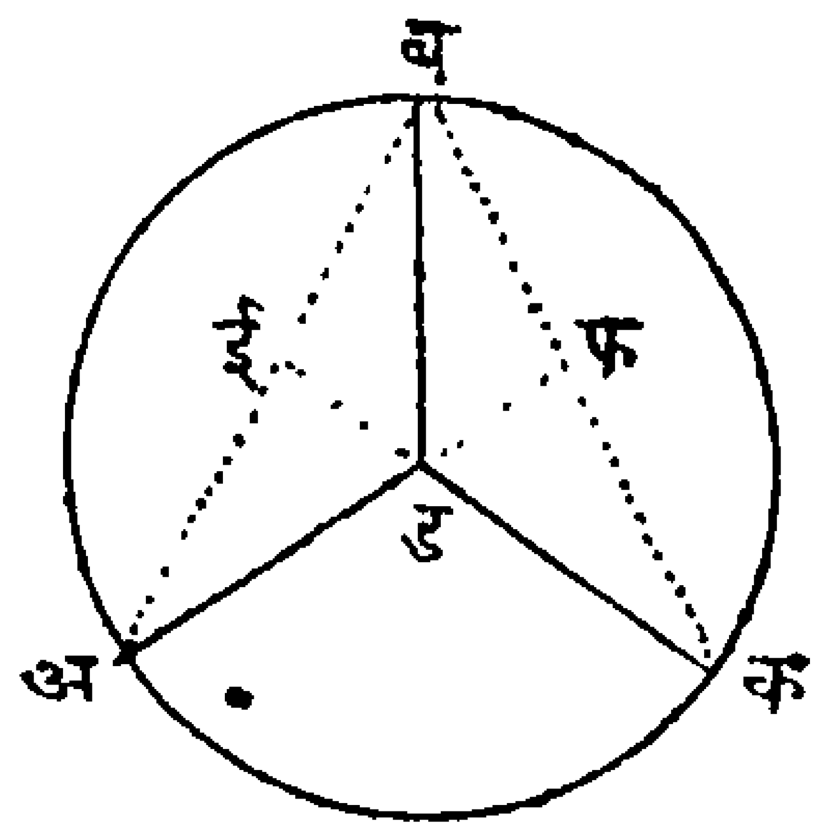
आणि पुनः **अकई** कोन **बकई** कोना बरावर आहे ह्मणोन (५७ व्या॰ प्र॰) **अई** कोंस पूर्व दोन कोनांतून प्रथमास मापितो तो **बई** कोंसा बराव र आहे. जो **बई** कोंस दुसऱ्ये कोनास मापितो कारण बरोबर कोंसास बरो बर माप पाहिजे हें सिद्ध.

कुरलरी. यातून निघतें कीं. कोणतीही रेघ जी कोणत्येही ज्यायर लंब असोन त्ये ज्यास दुभागित्ये ती रेघ त्या वर्तुळ मध्याचे पार जाईल.

---

# बेताळिसावा सिद्धांत

एके वर्तुळांत जा एक बिंदूपासून परिघपर्यंत दोहोंपेक्षां अधिक ब राबर रेघा कर्ता येतात तो बिंदू वर्तुळामध्य होईल.




**अबक** एक वर्तुळ असेल. त्यां तील कोणताही **ड** बिंदू असेल त्यापा सून परिघ पर्यंत **डअ डब डक** या तीन रेघा केल्या त्या बराबर असतील तर तो **ड** बिंदू वर्तुळाचा मध्य होईल.

ह्मणोन त्यांत **अब, बक** या दोन ज्याकर आणि त्यांस **ई** आणि **फ** स्थळांवर अनुक्रमें दुभाग नंतर **डई, डफ** सांध.

आतां **डअई. डबई** या दोन त्रिकोणांत (वरसांगीतल्याप्र॰) **डअ** बाजू **डब** बाजू बराबर आणि सांगीतल्या प्रमाणें **अई** बाजू **ईब**चे ब राबर आणि **डई** बाजू दोनही त्रिकोणांस साधारण आहे. याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि (५ सि॰प्र॰) त्यांचे दोन **ई** कोन परस्पर

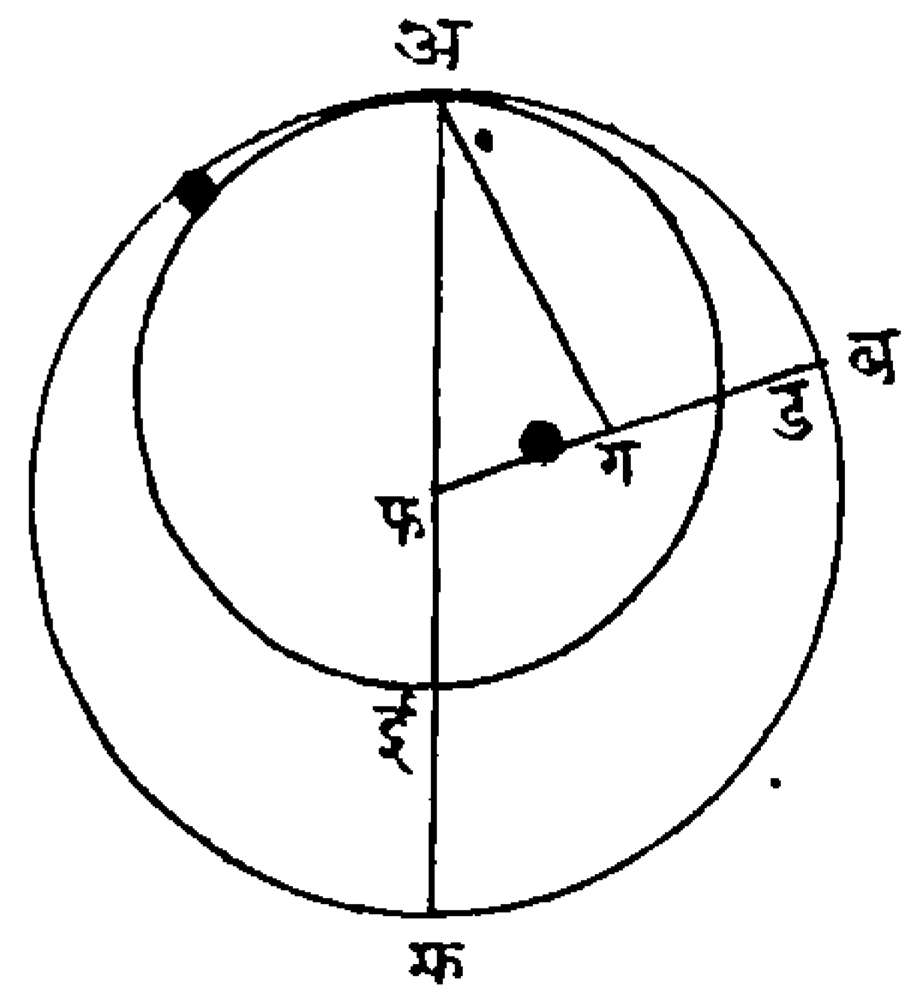
बराबर ह्मणोन (११ व्या० प्र०) डई, अब ज्याचे मध्यावर लंब आहे: याजक रितां (४१ सि० कु० प्र०) डई रेघ वर्तुळमध्याचे पार जात्ये.

याच रीतीनें दाखवितां येतें कीं. डफ रेघ ही मध्याचेपार जात्ये याजक रितां ड विंदू वर्तुळाचा मध्य आहे आणि डअ, डब, डक या तीन बराब र रेघा त्या वर्तुळाचा त्रिज्या आहेत. हें. सिद्ध.

---

## त्रेताळिसावा सिद्धांत.

जर दोन वर्तुळें आंतोन परस्पर स्पर्शतात. तर तें स्पर्श स्थळ व त्या दोन वर्तुळांचे मध्य ऐशीं तीन स्थळें एकच सरळ रेघेंत येतील.




अबक आणि अडई हीं दोन वर्तुळें जर आंतोन अ स्थळावर परस्पर स्पर्शतील. तर अ बिंदू आणि दोन वर्तुळांचे मध्यबिंदू ऐशीं- तीन स्थळें एके सरळ रेघेंत येतील.

ह्मणोन अबक वर्तुळाचा मध्य बिंदू फ असेल आणि त्याचे पार अफक व्यास कर; जर दुसऱ्या वर्तुळाचा मध्य बिंदू अक रेघेंत येण्यास अशक्य, तर मनांत आण कीं तो वर्तुळ मध्य दुसऱ्ये ग स्थळावर आहे, नंतर त्याचे पार फग रेघ कर अशी कीं दोनही वर्तुळांचे परिघांस ड आणि ब या स्थळांवर छेदील आणि अग सांध.

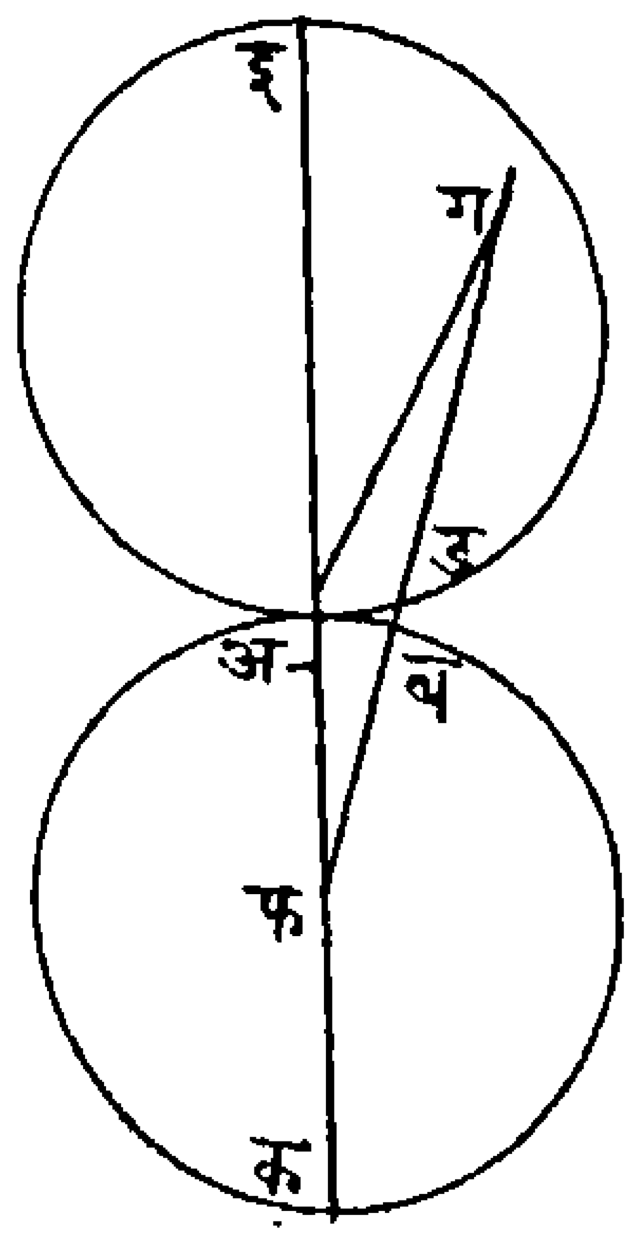
आतां अफग त्रिकोणांत (१० सि० प्र०) फग, गअ या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्ये अफ बाजूहून अधिक आहे. अथवा तिचे बरा

वरीचे **फब** त्रिज्येहून अधिक आहे. साधारण अवयव **फग** तो या दोहोंतून वजाकर. ह्मणजे बाकी राहिला **गअ** तुकडा बाकी राहिल्ये **गब** तुकड्याहून अधिक होईल. परंतु **ग** बिंदू आंतील वर्तुळाचा मध्य मनांत आणिला यास्तव त्याचा दोन त्रिज्या **गअ** आणि **गड** परस्पर बराबर आहेत, याजकरितां **गड** ही **गब** हून अधिक होईल. परंतु **अडई** आंतील वर्तुळ आहे ह्मणोन **गड गब** हून अवश्य लाहान आहे. अशाने **गड गब** हून अधिक आणि उणी ही गोष्ट परम अशक्य याजकरितां **ग** मध्य बिंदू **अफक** रेघेचे बाहेर कदापि होत नाहीं. हें सिद्ध.

---

## चोवेताळिसावा सिद्धांत.

जर दोन वर्तुळें परस्पर बाहेर स्पर्शतात. तर त्यांचा स्पर्शबिंदू व त्यांचे मध्य बिंदू ऐशीं तीन स्थळें एके सरळ रेघेंत येतील.




**अबक** आणि **अडई** हीं दोन वर्तुळें जर बाहेर **अ** स्थळावर परस्पर स्पर्शतील तर **अ** स्पर्श बिंदू आणि दोन वर्तुळांचे मध्य बिंदू ऐशी तीनस्थळें एक सरळ रेघेंत येतील.

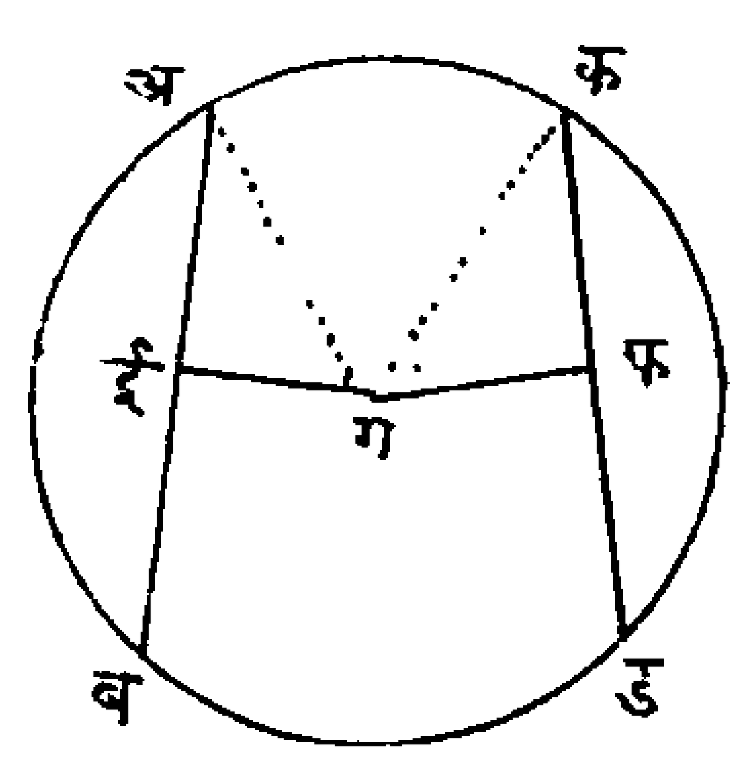
ह्मणोन **अबक** वर्तुळाचा मध्ये बिंदू **फ** असेल. त्याचे पार **अफक** व्यास कर. आणि त्यास दुसऱ्ये वर्तुळाचे **ई** स्थळापर्यंत वाढीव. जर दुसऱ्ये वर्तुळाचा मध्य बिंदू **ईफ** रेघेंत येण्यास अशक्य, तर मनात आणकीं. तो स्थळांतरीं **ग** बिंदूवर आहे: तेव्हां **अग** आणि **फग** रेघा

कर अशाकीं दोनीं वर्तुळांस **ब** आणि **ड** या स्थळांवर छेदितील.

आतां **अ फ ग** त्रिकोणांत (१० सि॰ प्र॰) **अ फ** आणि **अ ग** या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्ये **फ ग** बाजूहून अधिक आहे. परंतु **फ** आणि **ग** हे दोन बिंदू दोन वर्तुळांचे मध्य आहेत. यास्तव **ग अ** आणि **ग ड** या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर, आणि **अ फ, फ ब** या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर यापासून **ग अ** आणि **अ फ** यांची बेरीज, **ग ड** आणि **ब फ** यांचे बेरिजे बराबर आहे. यावरून **ग ड** आणि **ब फ** यांची बेरीज **ग फ** हून अधिक होत्ये हें परम अशक्य याजकरितां **ग** मध्यबिंदू **ई फ** रेषेचे बाहेर कदापि होत नाहीं. हें सिद्ध.

## पंचेतालिसावा सिद्धांत.

कोणत्याही वर्तुळांत ज्याज्या मध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत त्या सर्व परस्पर बराबर; आणि ज्याज्या परस्पर बराबर आहेत त्या सर्व वर्तुळ मध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत.




**अ ब** आणि **क ड** कोणत्याही दोन ज्या असतील. अशाकीं **ग** मध्य बिंदूपासून बराबर अंतरानें; तर त्या दोनही परस्पर बराबर आहेत.

ह्मणोन **ग अ** आणि **ग क** या दोन त्रिज्या कर. आणि **ग ई ग फ** हे दोन लंब कर; जे **ग** मध्यबिंदूपासून बराबर अंतर दाखवितात.

आतां **ग अ ई** आणि **ग क फ** या दोन काटकोन त्रिकोणांत **ग अ** बाजू **ग क** बाजू बराबर आणि **ग ई ग फ** चे बराबर, आणि **ई** काटकोन **फ**

काटकोना बराबर; याजकरितां हे दोन त्रिकोण (३४ सि०२कु०प्र०) एकरू प आहेत; आणि एकाची तिसरी **अई** बाजू दुसऱ्याचे तिसऱ्ये **कफ** बाजू बराबर आहे. परंतु (४१सि०प्र०) **अब** रेघ **अई** चे दुपट आहे आणि **कड** रेघ **कफ** चे दुपट आहे. याजकरितां (६प्र०प्र०) **अब** रेघ **कड** चे बरोबर आहे हें सिद्ध.

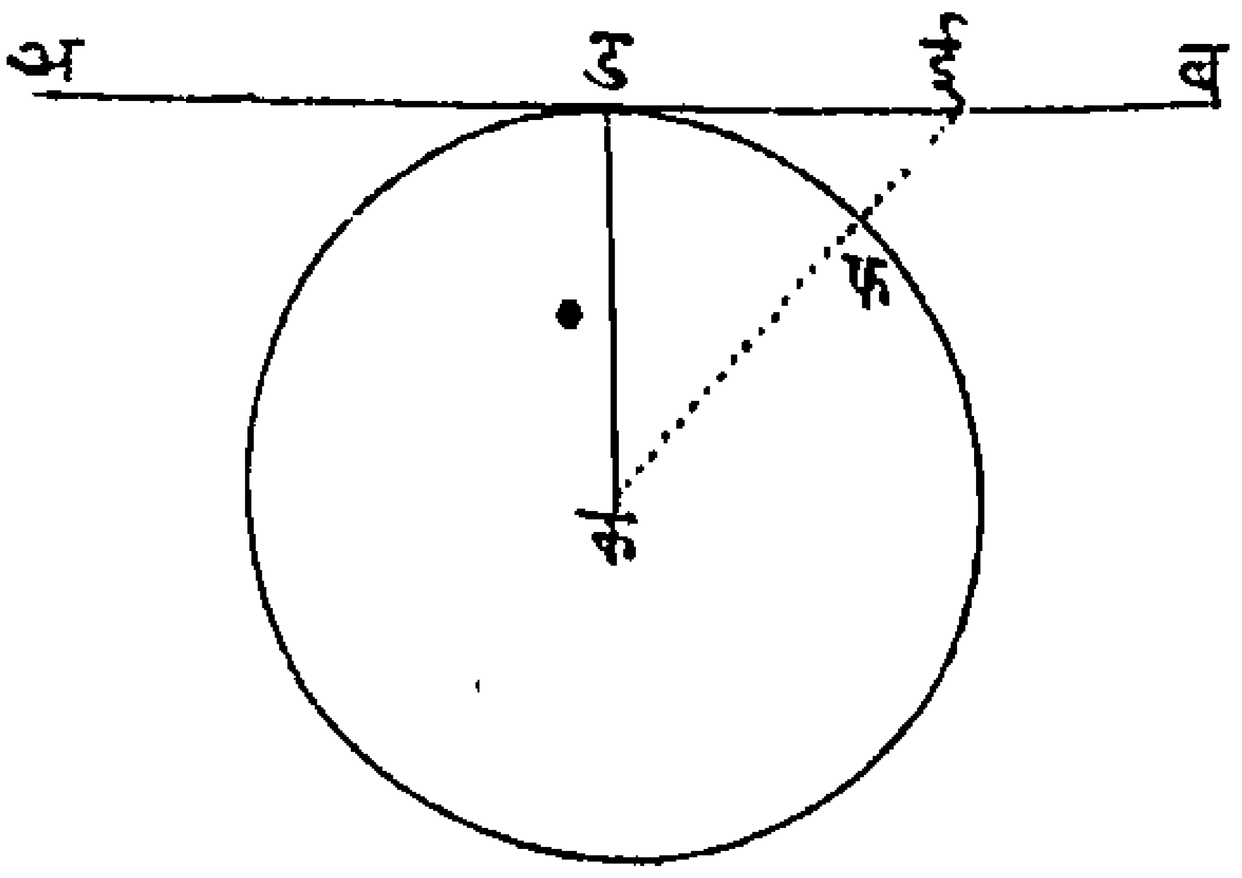
पुनः जर **अब** ज्या **कड** ज्याचे बराबर असेल. तर त्या दोन ज्यांचीं वर्तुळ मध्यापासून अंतरें **गई** आणि **गफ** हीं बराबर होतील.

ह्मणोन (सांगीतल्याप्र०) **अब** रेघ **कड** चे बराबर आहे. तेव्हां एकीचें **अई** अर्ध दुसरीचे **कफ** अर्धाचे बराबर आहे. आणि **गअ गक** या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर; आणि **ई** काटकोन **फ** काटकोना बराबर आहे. याजकरितां **गअई** आणि **गकफ** या दोन त्रिकोणांत (३४ सि० कु०प्र०, एकाची राहिली तिसरी बाजू दुसऱ्याचे राहिल्ये. तिसऱ्ये बाजू बराबर आहे ह्मणजे **गई** अंतर **गफ** अंतराचे बराबर आहे हें सिद्ध

---

# शेताळिसावा सिद्धांत.

जी रेघ त्रिज्याचे बाहेरील शेवटावर लंब आहे ती त्या वर्तुळास स्पर्श रेघ आहे.




जर **अडब** सरळरेघ **कड** वर्तुळ त्रिज्याचे बाहेरील शेवटावर लंब असेल तर **अब** रेघ वर्तुळास **ड** स्थळावर स्पर्शमात्र करील.

ह्मणोन दुसऱ्ये कोणत्येही **ई** बिंदूपासून **अब** रेघेंत वर्तुळमध्यापर्यंत

ईफक रेघ कर अशीकीं वर्तुळ परिघास फ स्थळावर छेदील. आतां कडई त्रिकोणांत (वर सांगीतल्याप्र०) ड काटकोन आहे. याजकरितां (१७ सि०३कु० प्र०) ई लघुकोन आहे. ह्मणोन ड कोनाहून उणा आहे. परंतु (९ सि०प्र०) अति मोठी बाजू अतिमोठ्ये कोना समोर आहे. यांजकरितां कई बाजू कड बाजू हून मोठी आहे. अथवा त्याचे बरोबरीचे कफ हून मोठी आहे. यापासून निघतें कीं ई बिंदू वर्तुळाचे बाहेर आहे आणि याप्रमाणें सर्व दुसरे बिंदू जे अब रेघेवर आहेत ते वर्तुळाचे बाहेर आहेत; याजकरितां सगळी रेघ वर्तुळाचे बाहेर आहे. वर्तुळास ड स्थळावर मात्र स्पर्शकरित्ये.

---

## सत्येताळिसावा सिद्धांत.

जेव्हां एक रेघ वर्तुळास स्पर्शमात्र करित्ये तेव्हां त्या स्पर्श बिंदूपासून वर्तुळमध्यपर्यंत एक त्रिज्या केली ती त्या स्पर्शरेघेवर लंब आहे.

जर अब रेघ वर्तुळपरिघास ड बिंदूवर स्पर्श करील. तर कड त्रिज्या अब रेघेवर लंब होईल.

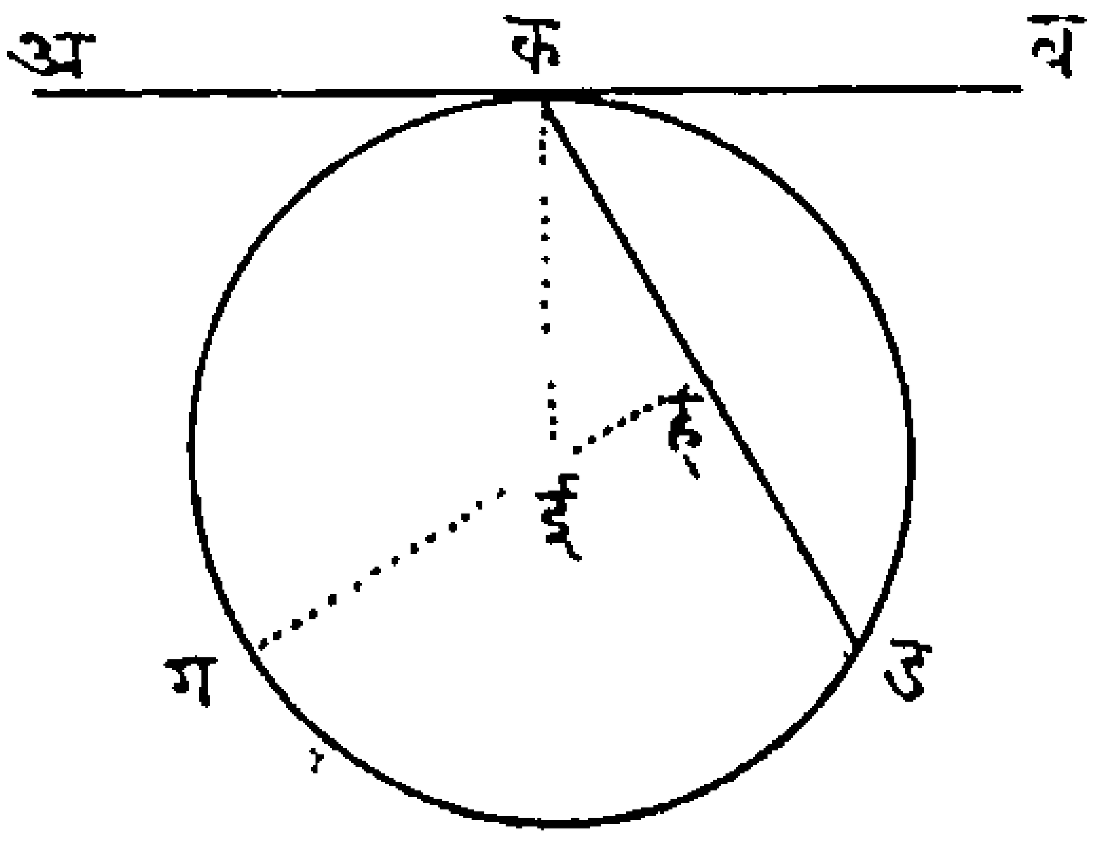
ह्मणोन अब रेघ सर्वांशीं ड बिंदू शिवाय वर्तुळ परिघाचे बाहेर आहे. आणि जशी कई रेघ क मध्य बिंदूपासून अब रेघेवर केली तशा दुसऱ्या सर्व रेघा अब रेघेस लागायास वर्तुळ परिघाचे बाहेर गेल्या पाहिजेत. याजकरितां कड रेघ सर्वांहून लाहान आहे जा क बिंदूपासून अब रेघेवर होतात त्या सर्वांहून. याजकरितां (२१ सि० प्र०) कड रेघ अब रेघवर लंब आहे. हें सिद्ध.

कुरलरी. यांतोन उलट निघतें कीं जी रेघ वर्तुळ परिघाचे स्पर्श स्थळापासून केली ती वर्तुळमध्य छेदून पार जाईल.

# अठ्येताळिसावा सिद्धांत.

वर्तुळाची स्पर्शरेघ आणि ज्या या दोन एकत्र मिळून जो आंत कोन होतो तो त्या ज्या कोंसाचे अर्धानें मापिला जातो

जर **अब** रेघ वर्तुळाची स्पर्श रेघ असेल आणि कोणती ही **कड** ज्या **क** स्पर्शबिंदूपासून केली आहे; तर **बकड** कोन **कफड** कोंसाचे अर्धानें मापिला जातो. आणि **अकड** कोन **कगड** कोंसाचे आर्धानें मापिला जातो.




ह्मणोन **ईक** त्रिज्या स्पर्शबिंदूपर्यंत कर आणि ज्या रेघेवर **ह** स्थळीं **ईफ** त्रिज्या लंब कर.

आतां **ईफ** त्रिज्या **कड** ज्यावर लंब आहे. ह्मणोन (४१ सि० प्र०) ती **कफड** कोंसास दुभागित्ये; याजकरितां **कफ** कोंस **कफड** कोंसाचें अर्ध आहे.

नंतर **कईह** या त्रिकोणांत **ह** काटकोन आहे. तेव्हां (१७ सि० ३ कु० प्र०) बाकी राहिले दुसरे दोन कोन **ई** आणि **क** यांची बेरीज एक काटकोनाबराबर आहे; आणि हे दोन मिळून **बकई** कोनाबराबर आहेत. कारण **कई** त्रिज्या स्पर्शरेघेवर लंब आहे. आतां या दोन बरोबऱ्यांतून साधारण अवयव अथवा कोन वजा कर तर **ई** कोन **बकड** कोनाबराबर बाकी राहातो. परंतु **ई** कोन (५७ व्या० प्र०) **कफ** कोंसानें मापिला जातो. आणि हा कोंस **कफड** कोंसाचे अर्धाबराबर आहे याजकरितां त्याचे व

रावर **बकड** कोन आहे त्यास निश्चय तेंच माप आहे; ह्मणजे **कड** ज्याचे **कफड** कौंसाचें अर्ध हें सिद्ध.

पुनः **गईफ** रेघ **कड** ज्यावर लंब आहे. आणि (४९ सि॰ प्र॰) **कगड** कौंसास दुभागित्ये याजकरितां **कग** कौंस **कगड** कौंसाचे अर्धा आहे. आता **कई** रेघ **फग** रेघेस मिळत्ये आणि (६ सि॰ प्र॰) **ई** स्थळाचे त्याबाजूचे दोन कोन मिळोन दोन काटकोनाबराबर आहेत. आणि **कड** रेघ **अब** रेघेस मिळोन **क** स्थळावर दोन कोन होतात ते दोन काटकोनां बराबर आहेत. जर या दोन बरोबर बेरिजांतोन हे दोन अवयव अथवा कोन **कईह** आणि **बकह** जे पूर्वी बराबर सिद्ध केले ते वजा केले तर बाकी राहिला **कईग** कोन बाकी राहिल्ये **अकह** कोना बराबर होईल. परंतु **कईग** कोन (५७ व्या॰ प्र॰) **कग** कौंसाने मापिला; याजकरितां त्याचे बराबरीचे **अकड** कोनास निश्चित तेंच माप आहे. आणि **कग** कौंस **कड** ज्याचे **कगड** कौंसाचें अर्ध आहे हें सिद्ध.

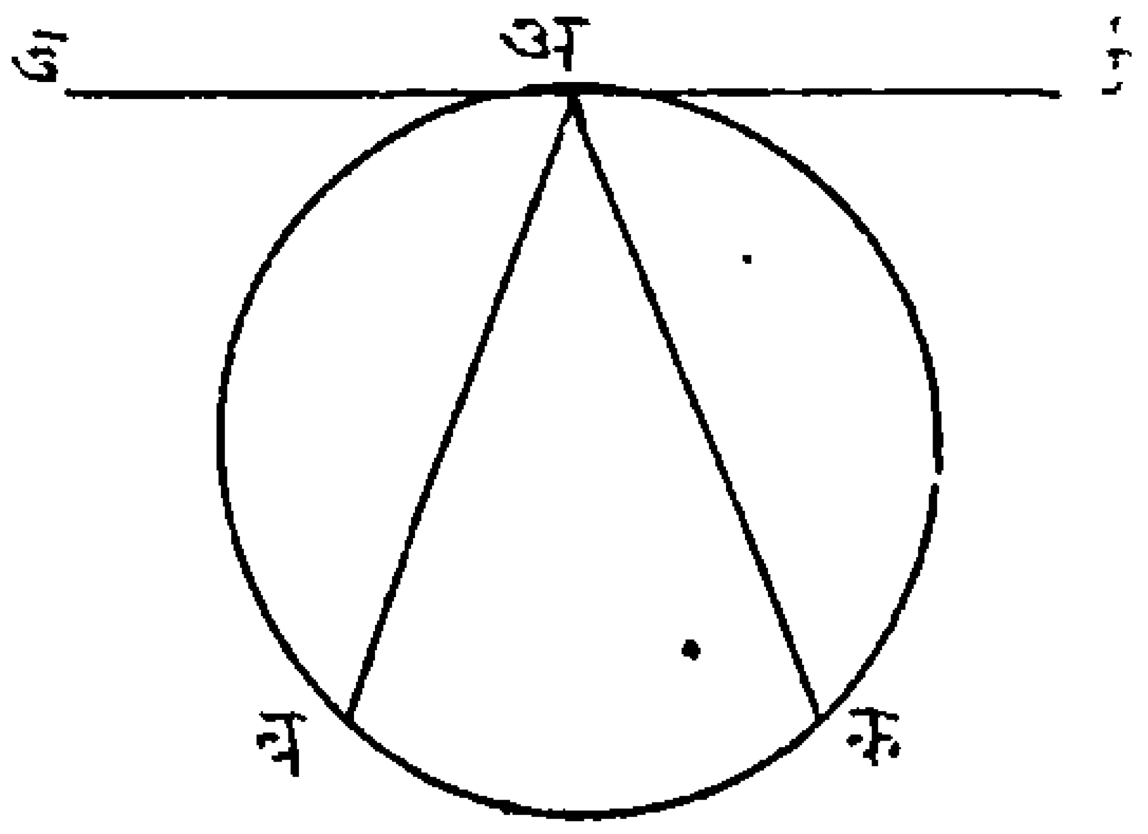
प्रथम कुरलरी. दोन काटकोनाचें माप अर्धावर्तुळपरिघ आहे. कारण **बकड** आणि **अकड** हे दोन कोन मिळोन दोन काटकोन आहेत. आणि त्यांचें माप **कफ** आणि **कग** हे दोन कौंस आहेत त्यास हे दोन कौंस मिळोन **फग** व्यासावर अर्धा वर्तुळपरिघ होतो

दुसरी कुरलरी. यापासून कळतें कीं एक काटकोनाचें माप वर्तुळपरिघपाद अथवा ९० अंश आहेत.

---

## एकुणपंनासावा सिद्धांत.

परिघ कोनाचें माप कौंसाचें अर्ध आहे जो कौंस कोन रेघांचे आंत




सांपडला आहे.

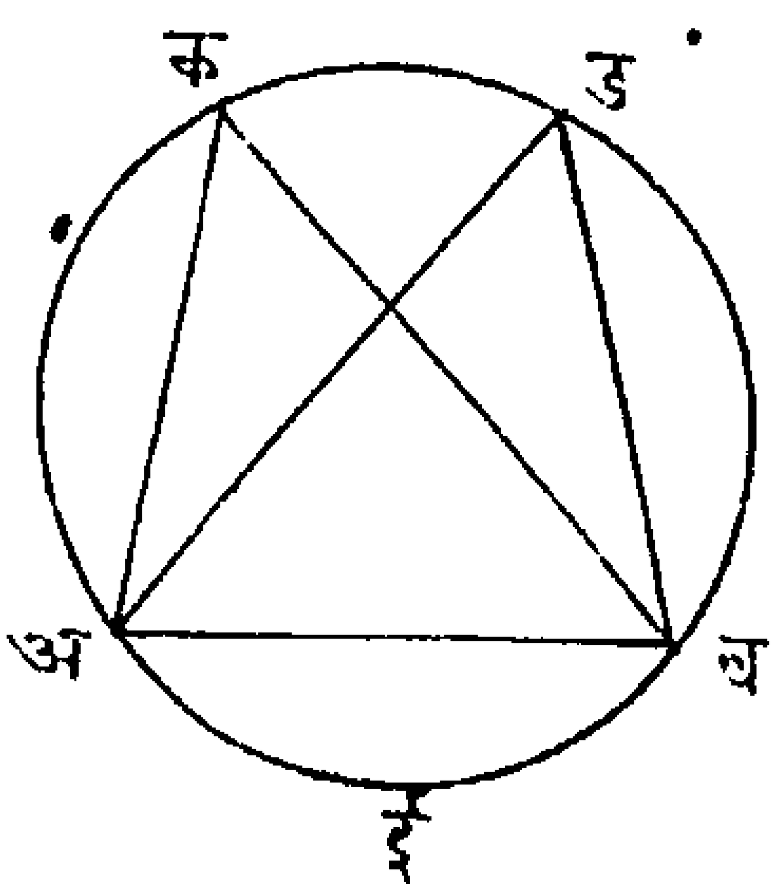
जर **बअक** परिघ कोन असेल तर त्याचें माप **बक** कोंसाचें अर्ध आहे जो **बक** कोंस त्याचे आंत आला आहे.

ह्मणोन मनांत आण कीं **डई** स्पर्शरेघ अस्पर्श बिंदूपार केली तर (४८ सि०प्र०) **डअक** कोनाचें माप **अबक** कोंसाचें अर्ध आहे; आणि **डअब** कोनाचें माप **अक** कोंसाचें अर्ध आहे; आणि यांतोन निघतें कीं बरोबरींत वजाकरून बाकी राहिला **बअक** कोन बाकी राहिल्ये **बक** कोंसाचे अर्धानें निश्चय मापतो हें सिद्ध.

---

# पंनासावा सिद्धांत.

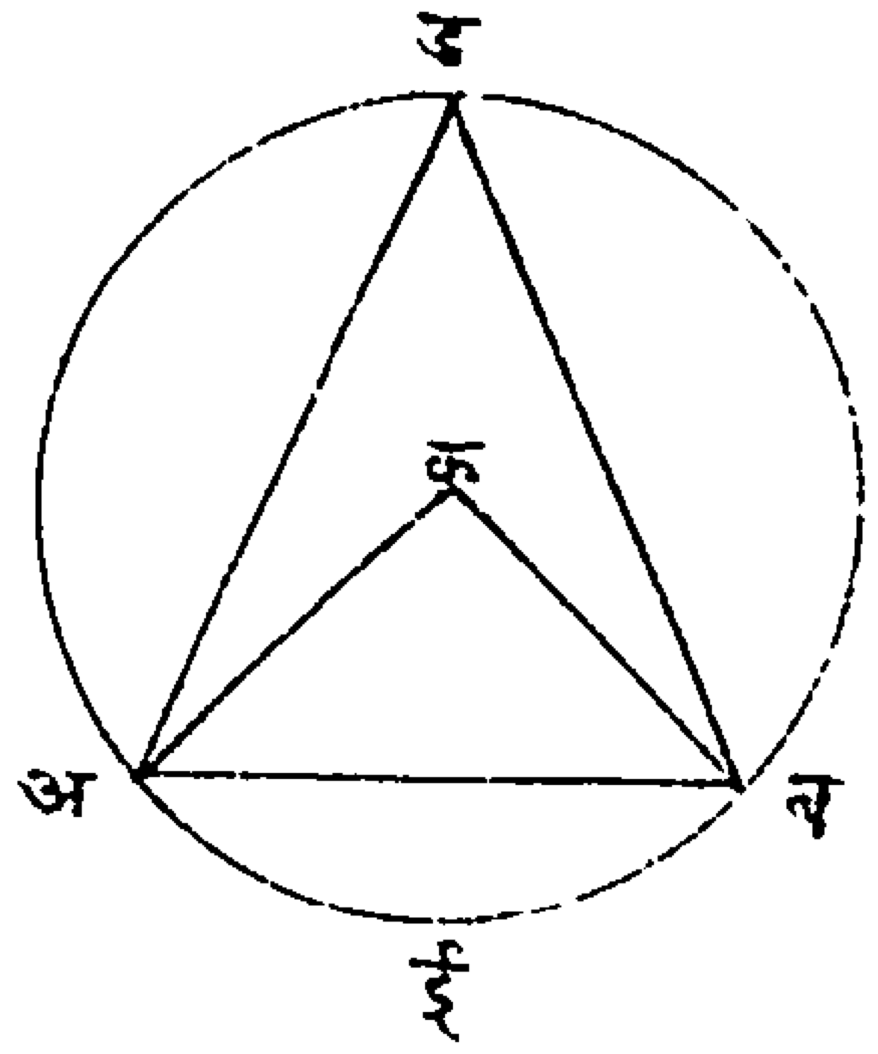
एक वर्तुळखंडांत अथवा वर्तुळाचे एक कोंसांत जे कोन आहेत ते सर्व परस्पर बराबर आहेत.




**अबडक** एक वर्तुळखंड असेल जांत **क** आणि **ड** हे दोन कोन केले अथवा तसेंच **अ** कोन आणि **ब** कोन जे **अईब** सप्लुमेंट कोंसांत केले तर **क** कोन **ड** कोना बराबर होईल. कारण या दोन कोनांचें माप (४९ सि०प्र०) **अईब** कोंसाचें अर्ध आहे; आणि त्याचें माप बराबर आहे. ह्मणोन (११ म०प्र०) ते दोनही बराबर आहेत हें सिद्ध.

## एकावंनावा सिद्धांत.

जर एक वर्तुळांत मध्य कोन आणि परिघ कोन ऐसे दोन एकाच कौसावर आहेत तर मध्य कोन परिघ कोनाचे दुपट आहे.



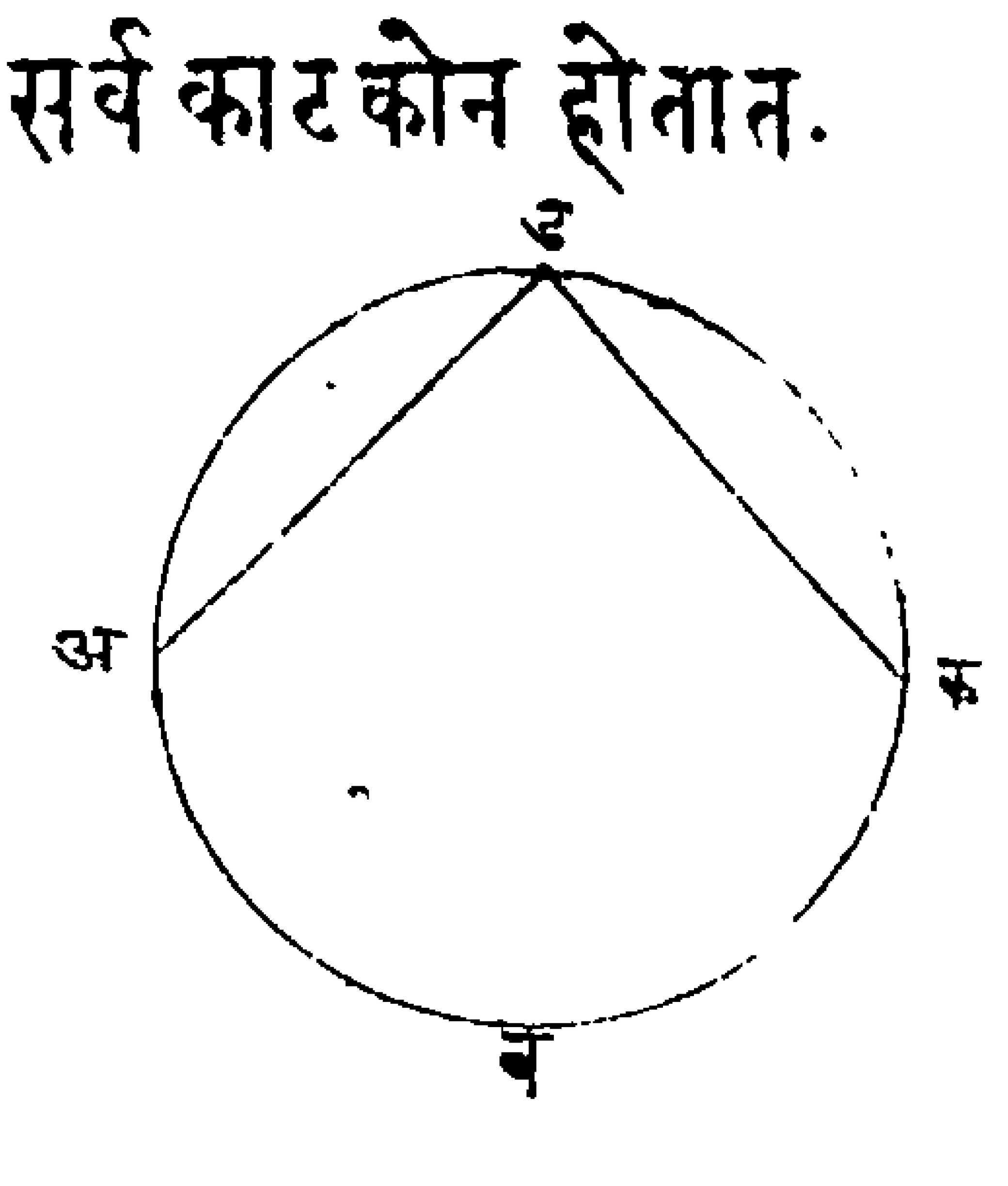

जर कोण त्येही वर्तुळांत **क** कोन मध्य बिंदूवर असेल आणि **ड** कोन परिघावर असेल आणि ते दोनही एकच **अईब** कौसावर अथवा एकच **अब** ज्यावर असनील, तर **क** कोन **ड** कोनाचे दुपट होईल. अथवा **ड** कोन **क** कोनाचे अर्धा होईल.

ह्मणोन मध्यस्थळींचा **क** कोन (५७ व्या० प्र०) सगळ्ये **अईब** कौसानें मापिला आणि परिघस्थळींचा **ड** कोन (४९ सि० प्र०) त्याच **अईब** कौसाचे अर्धानें मापिला याजकरितां **ड** कोन **क** कोनाचे अर्धा अथवा **क** कोन **ड** कोनाचे दुपट आहे. हें सिद्ध.

---

## बावंनावा सिद्धांत.

अर्ध वर्तुळांत जे कोन होतात ते सर्व काटकोन होतात.

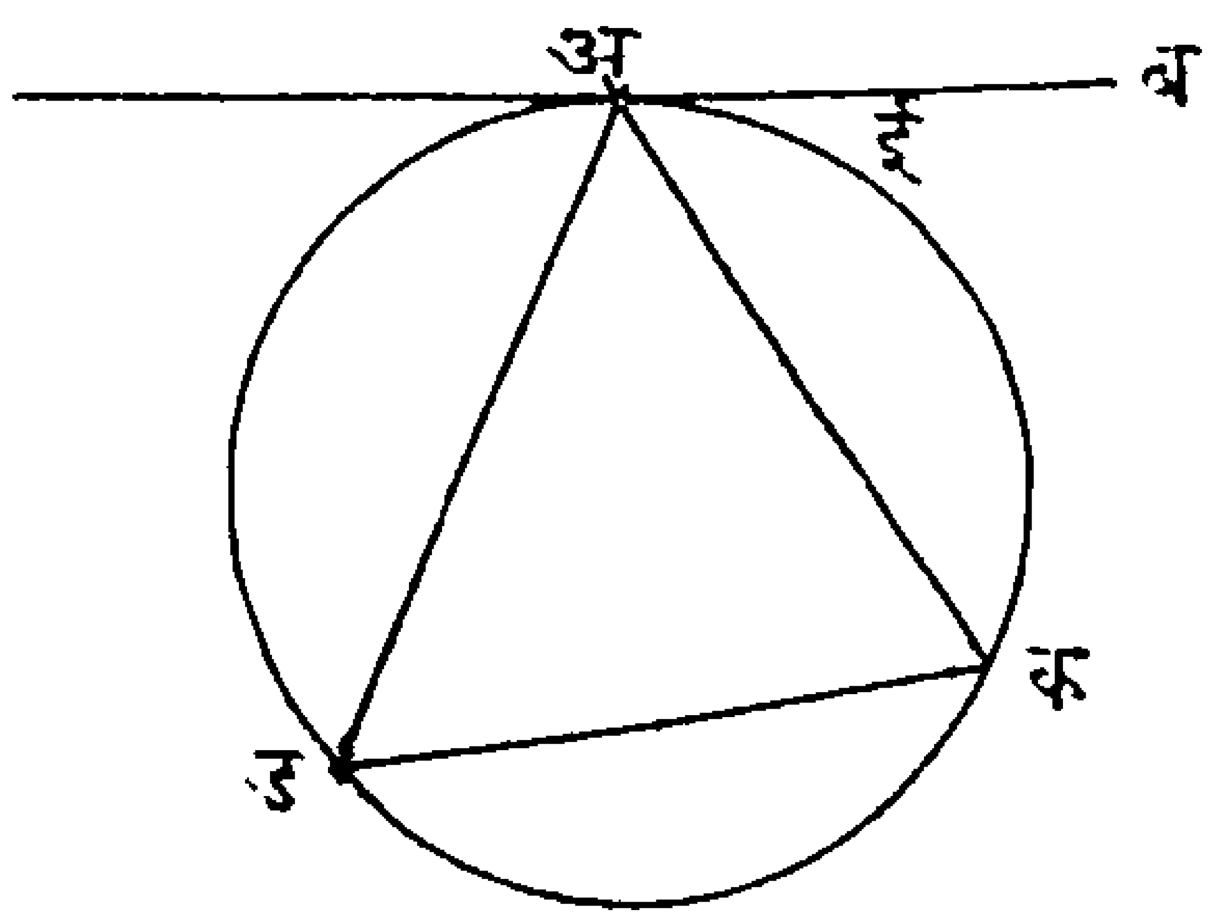



जर **अबक** अथवा **अडक** अर्ध वर्तुळ असेल तर त्यांतील कोणताही कोन जसा या अर्ध वर्तुळांत **ड** कोन आहे, तो काटकोन होईल.

ह्मणोन परिघ स्थळींचा ड (५९सि०प्र०) अबक कोसाचे अर्धानें मापिला आणि हें अर्धपरिघ पाद आहे. परंतु (६सि०४कु०प्र०) अथवा (४८सि०२कु०प्र०) परिघ पाद काटकोनाचें माप आहे याजकरितां ड कोन काटकोन आहे हें सिद्ध.

## त्रेपंनावा सिद्धांत.

एक वर्तुळ स्पर्शरेघ आणि स्पर्शस्थळा पासून केलेली ज्या यां पासून जो कोन झाला तो व्युत्क्रमखंडांतील कोनाबराबर आहे.



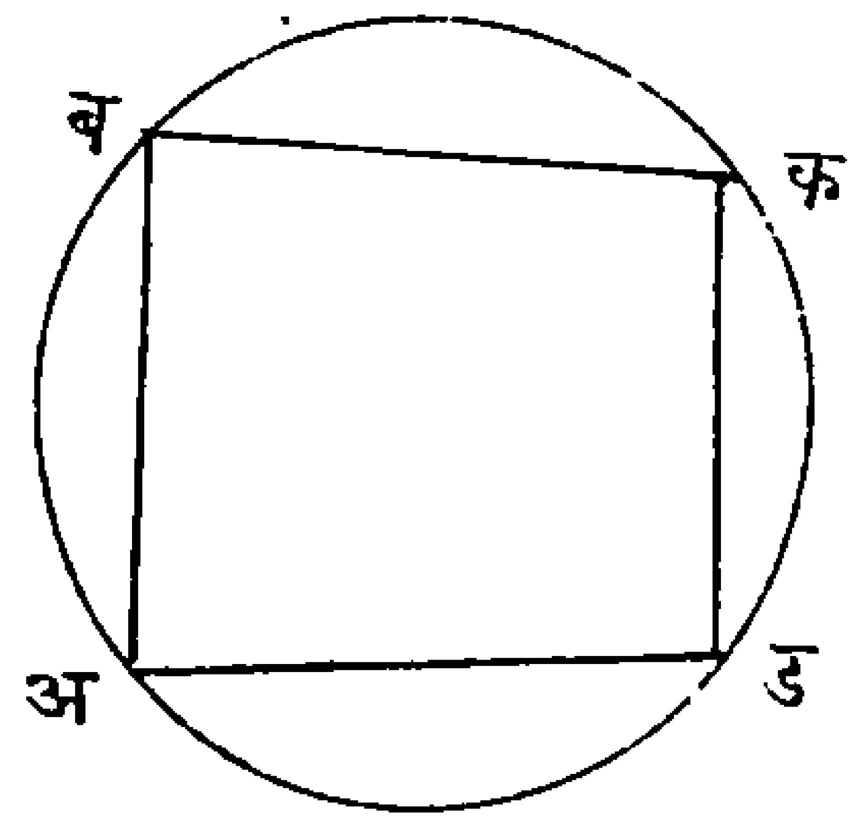

जर अब स्पर्शरेघ असेल आणि अक ज्या स्पर्शस्थळापासून केली असेल आणि अडक या व्युत्क्रम खंडांत कोणता ही ड कोन असेल तर ड कोन बअक कोनाबराबर होईल.

ह्मणोन परिघस्थळींचा ड कोन (५९सि०प्र०) अईक कोसाचे अर्धानें मापिला, आणि बअक कोन जो स्पर्शरेघ आणि स्पर्शस्थळापासून केलेली ज्या यांत होतो तो (५८सि०प्र०) त्याच अईक कोसाचे अर्धानें मापिला; याजकरितां (११प्र०प्र०) हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत हें सिद्ध.

## चौपंनावा सिद्धांत

वर्तुळांतील कोणत्ये ही चौबाजूचे समोरासमोरचे दोन कोनांची बे-

रीज दोन काटकोनां बराबर आहे.



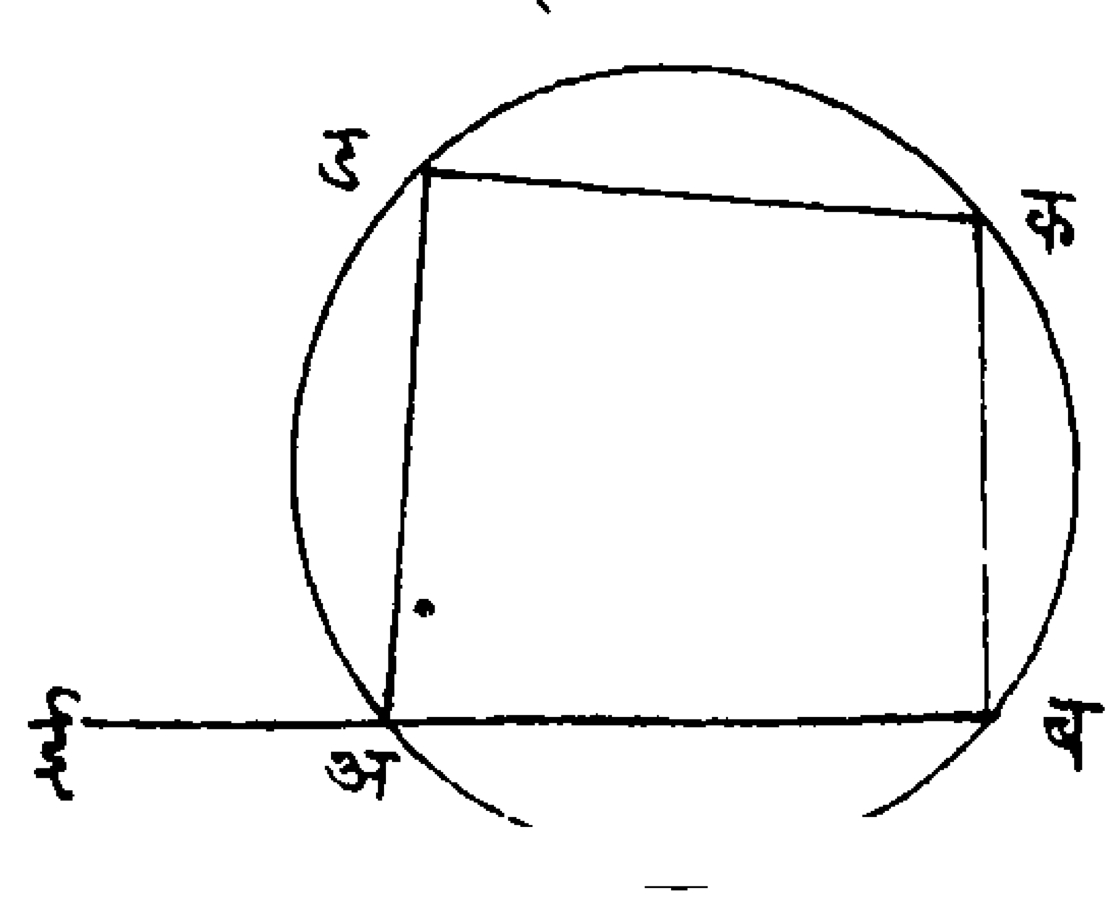

**अबकड** एक चौबाजू वर्तुळांत केलें असेल. तर **अ** आणि **क** अथवा **ब** आणि **ड** या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर होईल.

ह्मणोन **अ** कोन (४९सि०प्र०) **डकब** कोसाचे अर्धानें मापिला आणि **क** कोन **डअब** कोसाचे अर्धानें मापिला याजकरितां **अ** कोन आणि **क** कोन यांची बेरीज या दोन कोसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिली जात्ये; हें बेरिजेचें अर्ध अर्धापरिघ आहे: परंतु (६सि०५कु०प्र०) अर्धापरिघ दोन काटकोनांचें माप आहे याजकरितां **अ** आणि **क** या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे. याच प्रमाणें दाखविलें जातें कीं **ड** आणि **ब** या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबराबर आहे. हें सिद्ध.

---

## पंचावनावा सिद्धांत.

वर्तुळांत एक चौबाजू असेल आणि त्याची कोणती ही एक बाजू वाटविली असतां बाहेर कोन होईल तो चौबाजूचे आंतिलाचे समोरचे कोना बराबर होईल.




जर **अबकड** चौबाजू एक वर्तुळांत असेल ज्याची एक बाजू **अब**. **ई** पर्यंत वाटविली तर बाहेरील

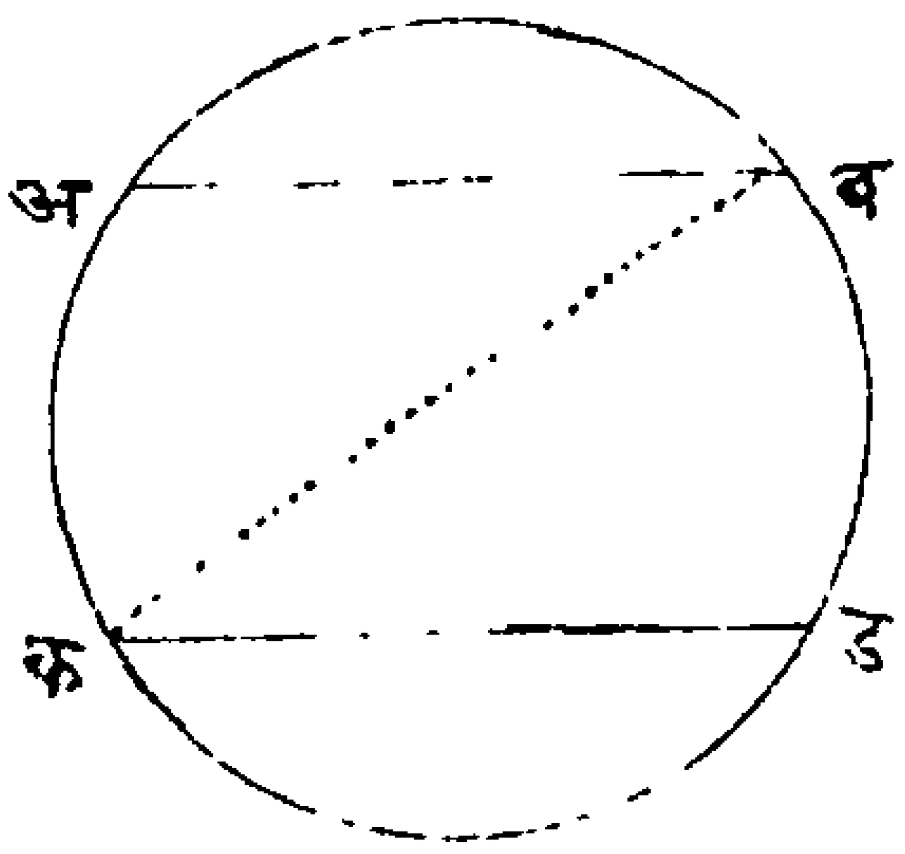
ड अ ई कोन आं तिलाचे समोरचे क कोनाबरोबर होईल.

ह्मणोन (६ सि० प्र०) ड अ ई आणि ड अ ब याजवळचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे. आणि (५४ सि० प्र०) क आणि ड अ ब या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे. याजकरितां या दोन बरोबऱ्यांतून साधारण ड अ ब कोन वजा केला तर बाकी राहिला क कोन बाकी राहिल्ये ड अ ई कोना बरोबर आहे हें सिद्ध.

---

## छप्पंनावा सिद्धांत.

एक वर्तुळांत कोणत्याही दोन समांतर ज्या केल्या तर त्यांचे अंतरांतील कौंस बरोबर आहेत.




अ ब आणि क ड या दोन समांतर ज्या असतील तर अ क, ब ड हे दोन कौंस परस्पर बराबर होतील ह्मणजे अ क = ब ड

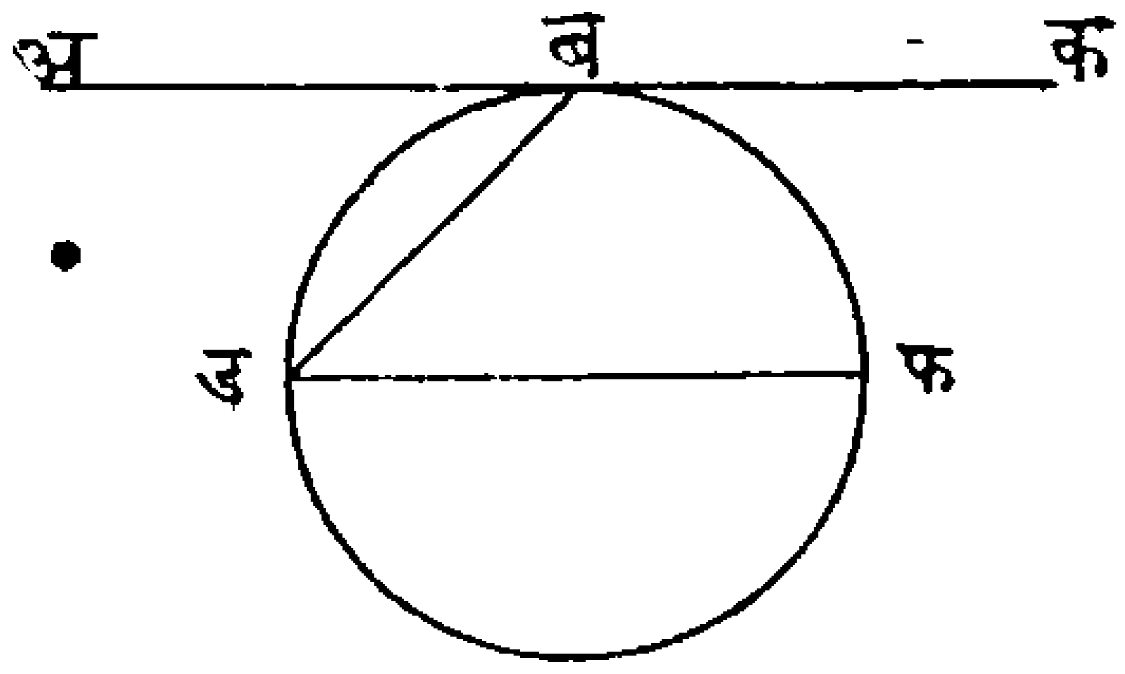
ह्मणोन ब क रेघ कर, आतां अ ब . क ड रेघा परस्पर समांतर आहेत. याजकरितां (१२ सि० प्र०) दोन व्युत्क्रम कोन ब आणि क हे परस्पर बराबर आहेत; परंतु परिघ स्थळींचा ब कोन (४९ सि० प्र०) अ क कौंसाचे अर्धानें मापिला जातो. तसें परिघ स्थळींचा दुसरा क कोन ब ड कौंसाचे अर्धानें मापिला जातो ह्मणोन अर्धा अ क कौंस ब ड कौंसाचे अर्धा बरोबर आहे तेव्हां, सगळा अ क सगळ्या ब ड चे बराबर आहे हें सिद्ध.

---

## सत्तावनावासिद्धांत.

जेव्हां स्पर्शरेघ आणि त्याच वर्तुळांतील ज्या त्या परस्पर समांतर आहेत तेव्हां त्यांचे अंतरांतील कोस परस्पर बराबर आहेत.

**अबक** स्पर्शरेघ त्याच वर्तुळांतील **डफ** ज्याशीं समांतर असेल तर **बड**, **बफ** हे दोन कोस परस्पर बरोबर होतील. ह्मणजे **बड** = **बफ**

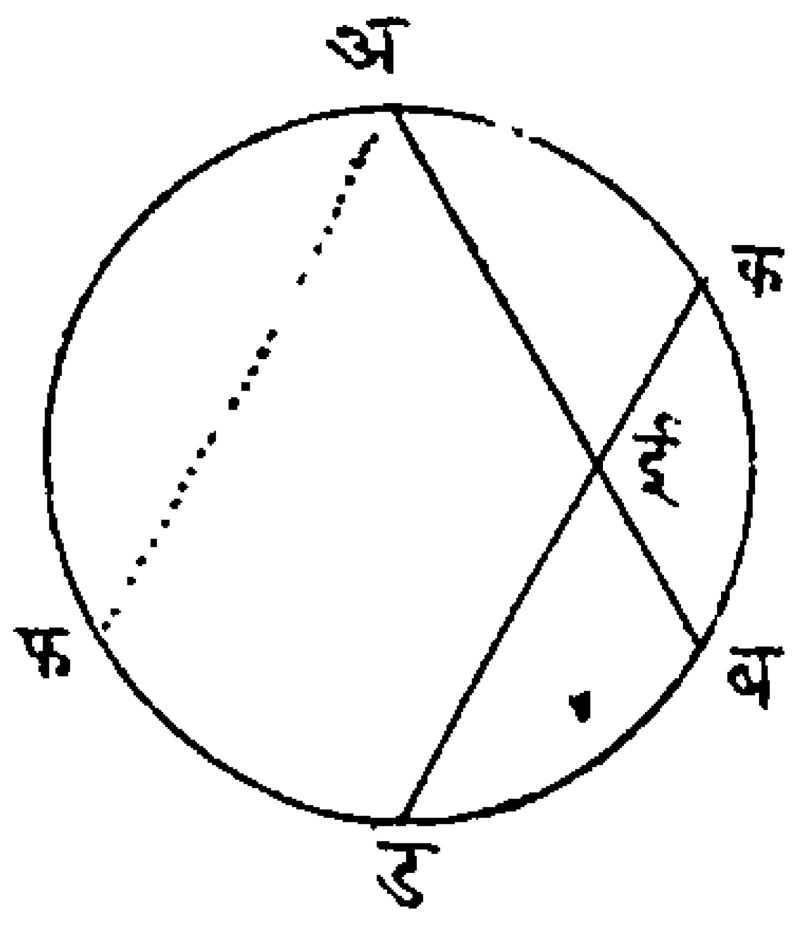



ह्मणोन स्पर्शस्थळापासून ज्याचे शेवटापर्यंत दुसरी **बड** ज्या कर. आतां **अक**, **डफ** या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत, तेव्हां (१२सि०प्र०) **ड** आणि **इ** हे दोन व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर आहेत परंतु स्पर्शरेघ आणि ज्या यांपासून झालेला **ब** कोन (५८ सि०प्र०) **बड** कोसाचे अर्धानें मापिला जातो. आणि तसा परिघस्थळींचाच दुसरा **ड** कोन (५९सि०प्र०) **बफ** कोसाचे अर्धानें मापिला जातो, ह्मणोन अर्धा **बड** अर्ध्ये **बफ** चे बरोबर आहे. याजकरितां सगळा **बड** सगळ्ये **बफ** चे बराबर आहे हें सिद्ध.

---

## अठ्ठावनावासिद्धांत.

एक वर्तुळांत दोन ज्या परस्पर छेदितात त्यांपासून जो कोन होतो तो त्या दोन ज्यांचे अंतर कोसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिला जातो.




**अब, कड** या दोन ज्या वर्तुळांत **ई** स्थळावर परस्पर छेदितात. तर **अईक** कोन अथवा **डईब** कोन **अक, डब** या दोन कोसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिला जातो.

ह्मणोन **अफ** ज्या **कड** ज्याशीं समांतर कर आतां **अफ, कड** या दोन ज्या समांतर आहेत; आणि **अब** रेघ या दोन समांतर रेघांस छेदित्ये. याजकरितां (१४ सि० प्र०) **अ** आणि **डईब** हे दोन कोन एक बाजूवर आहेत ते परस्पर बराबर परंतु परिघस्थळींचा **अ** कोन (५९ सि० प्र०) **बफ** कोस ह्मणजे **फड** आणि **बड** यांची बेरीज त्याचे अर्धानें मापिला जातो. ह्मणोन याचे बराबरीचा **ई** कोन ही **फड** आणि **बड** यांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिला जातो.

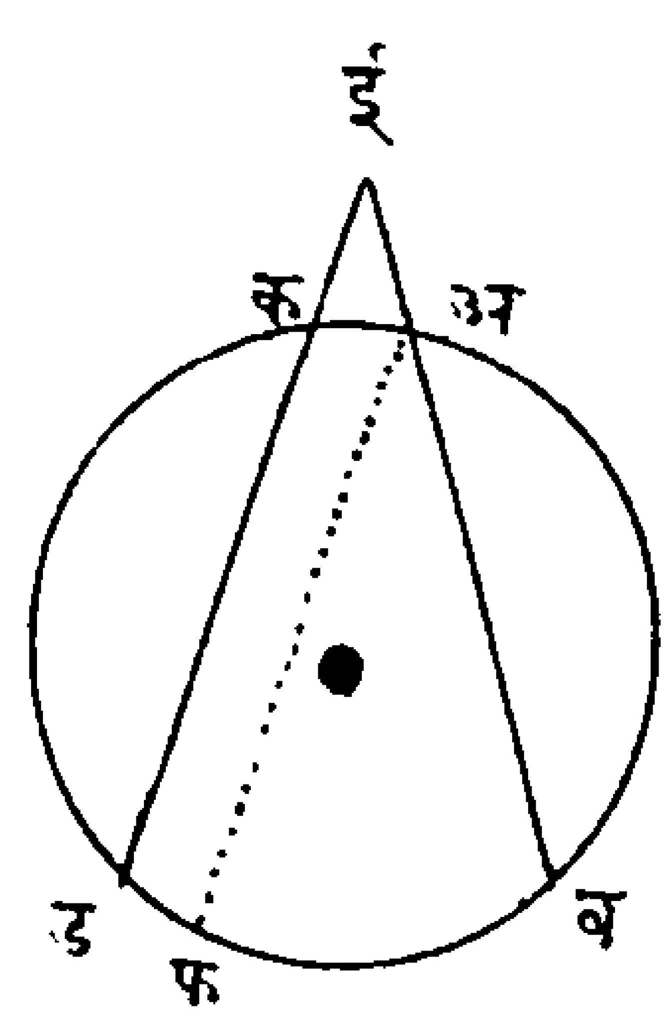
पुनः **अफ, कड** या दोन ज्या परस्पर समांतर आहेत याजकरितां (५६ सि० प्र०) **अक, फड** हे कोस परस्पर बराबर आहेत. ह्मणोन **अक, डब** या दोन कोसांची बेरीज **फड, डब** या दोन कोसांचे बेरिजेचे बराबर आहे. याजकरितां जेव्हां **ई** कोन शेवटील बेरिजेचे अर्धा बराबर आहे तेव्हां प्रथम बेरिजेचे अर्धा बराबर आहे हें सिद्ध.

---

# एकुणसाठावा सिद्धांत.

जो कोन दोन छेदन रेघांपासून वर्तुळाचे बाहेर होतो तो दोन अंतर कोसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो.

कोणताही ई कोन ईअब आणि ईकड या दोन छेदन रेघांपासून वर्तुळाचे बाहेर झाला असेल तर तो कोन अक, डब हे दोन कौस जे दोन छेदन रेघांचे आंत आहेत त्यांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो.




ह्मणोन ईकड रेघेशीं समांतर अफ ज्या कर आतां ईड, अफ या दोन रेघा समांतर आहेत आणि ईब रेघ त्यांस छेदित्ये याजकरितां (१४ सि॰प्र॰) अ कोन आणि बईड कोन हे एक बाजूचे दोन ही परस्पर बराबर आहेत. परंतु परिघ स्थळींचा अ कोन (४९ सि॰प्र॰) बफ अथवा डब. डफ यांची वजाबाकी याचे अर्धानें मापिला जातो; ह्मणोन ई कोन ही डब, डफ यांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो.

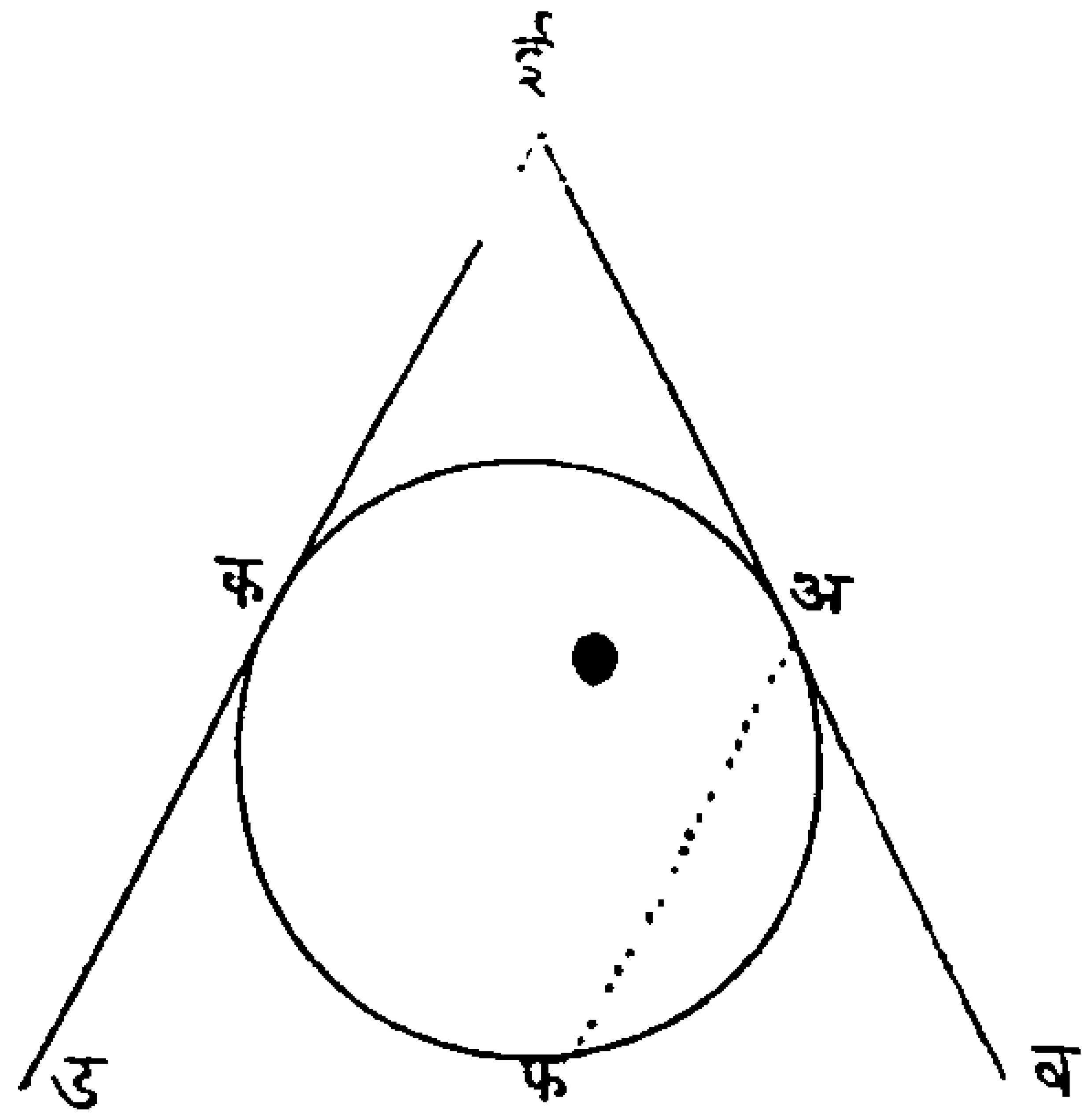
पुनः अफ, कड या दोन ज्या परस्पर समांतर आहेत, याजकरितां (५६ सि॰प्र॰) कअ, डफ हे दोन कौस परस्पर बराबर आहेत ह्मणोन कअ, डब यांची वजाबाकी डब, डफ यांचे वजाबाकीचे बराबर आहे, याजकरितां जेव्हां ई कोन शेवटील वजाबाकीचे अर्धा बराबर आहे तेव्हां प्रथम वजाबाकीचे अर्धा बराबर आहेच हें सिद्ध.

---

## साठावा सिद्धांत.

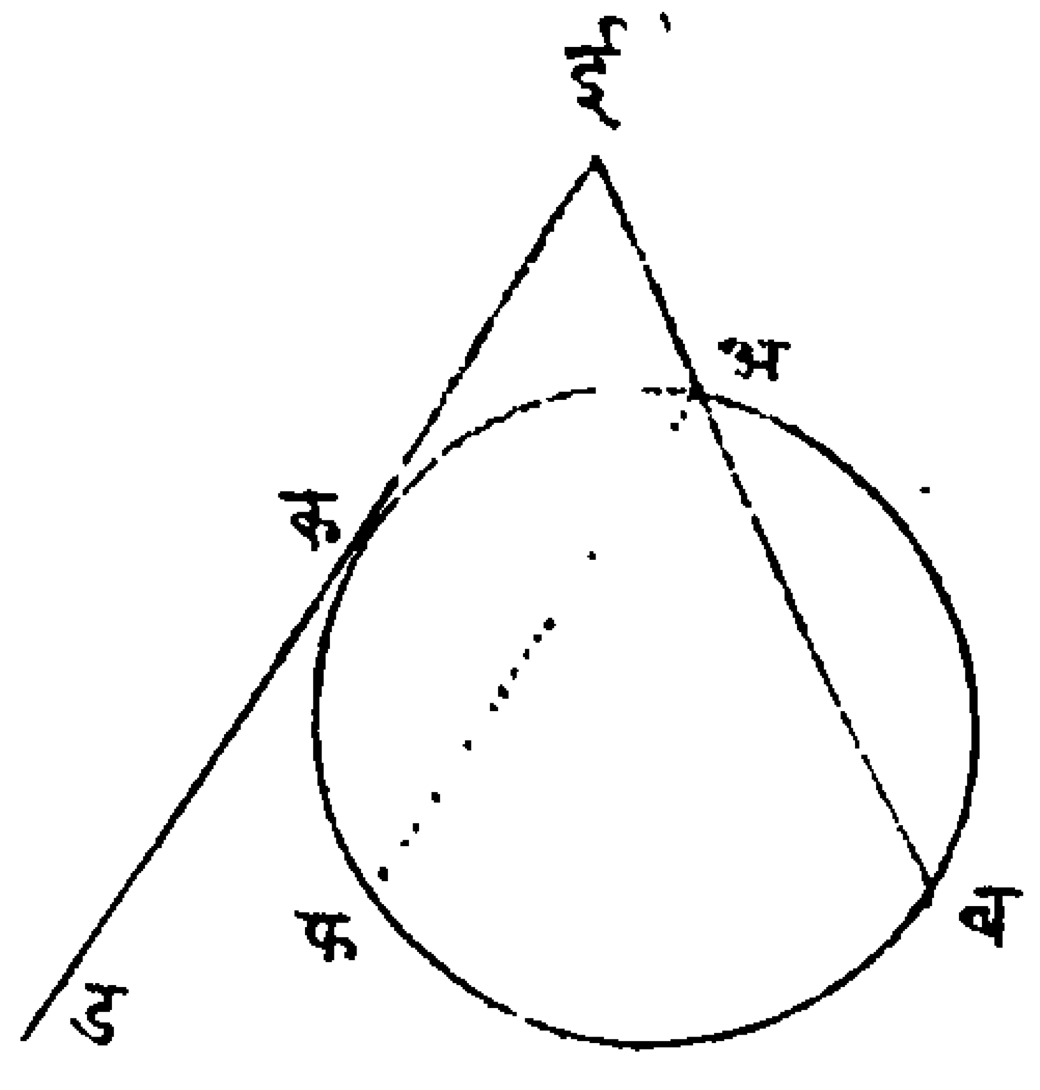
जो कोन दोन स्पर्श रेघांनीं होतो तो त्यांचे दोन अंतर कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो.

कोण त्येही वर्तुळास अ आणि क या बिंदूवर ईब आणि ईड या दोन स्पर्श रेघा असतील तर ई कोन जो या स्पर्श रेघां पासून झाला तो कफअ, कगअ या दोन कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो.



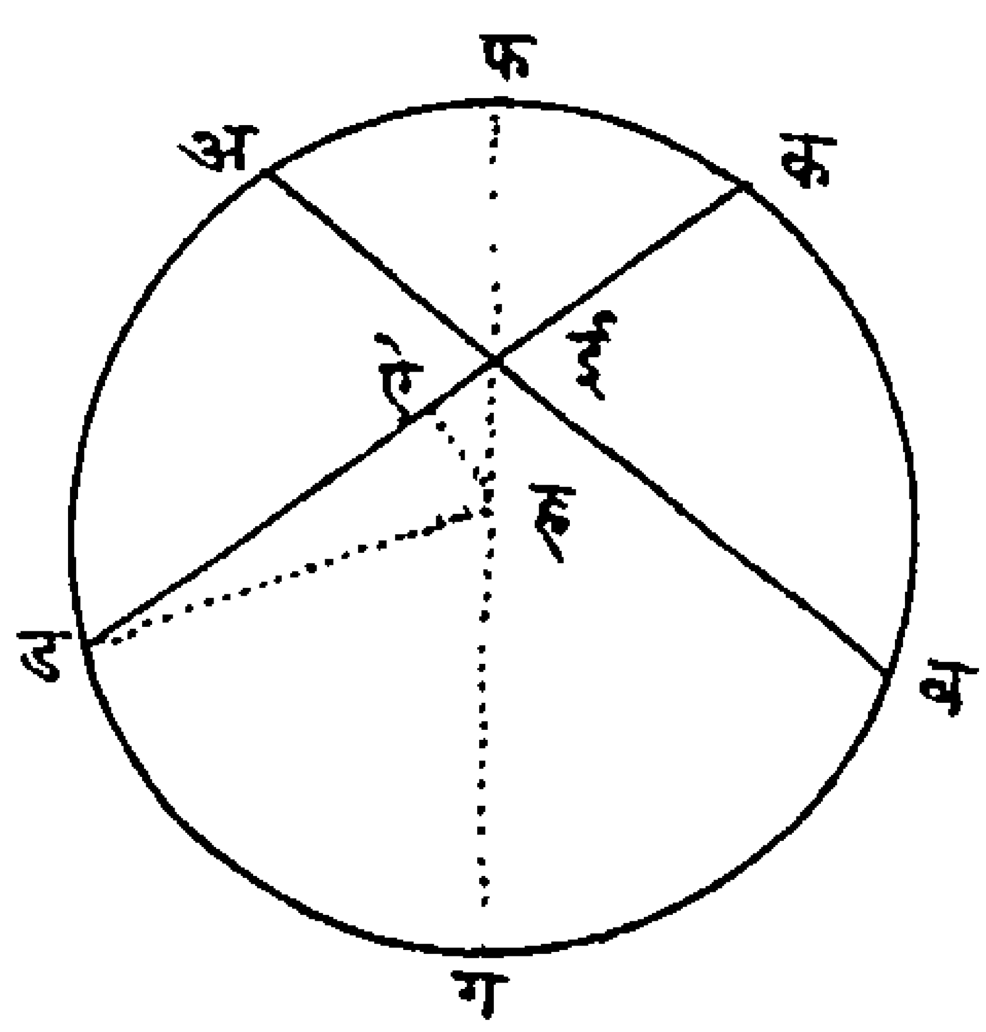

ह्मणोन अफ ज्या ईड शीं समांतर कर आतां अफ, ईड या दोन समांतर रेघा आहेत. आणि ईब त्यांस छेदित्ये याजकरितां (१४ सि०प्र०) एक बाजूचे अ आणि ई हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत. परंतु अ कोन जो अफ ज्या आणि अब स्पर्शरेघ यां पासून होतो तो (५८ सि०प्र०) अफ कौसाचे अर्धानें मापिला जातो. याजकरितां त्याचे बराबर जो ई कोन तोही त्या अफ कौसाचे अर्धानेंच मापिला जातो; ह्मणोन अफ कौस कफअ आणि कफ अथवा (५७ सि०प्र०) त्याचे बराबरीचा कगअ यांचे वजाबाकीचे बराबर आहे. याजकरितां ई कोन कफअ आणि कगअ या दोन कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो हें सिद्ध.

कुरलरी. या रीतीकरून सिद्ध होतें कीं ई कोन जो ईकड स्पर्श रेघ आणि ईअब छेदन रेघ यां पासून होतो तो कअ आणि कफब या दोन अंतर कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो.

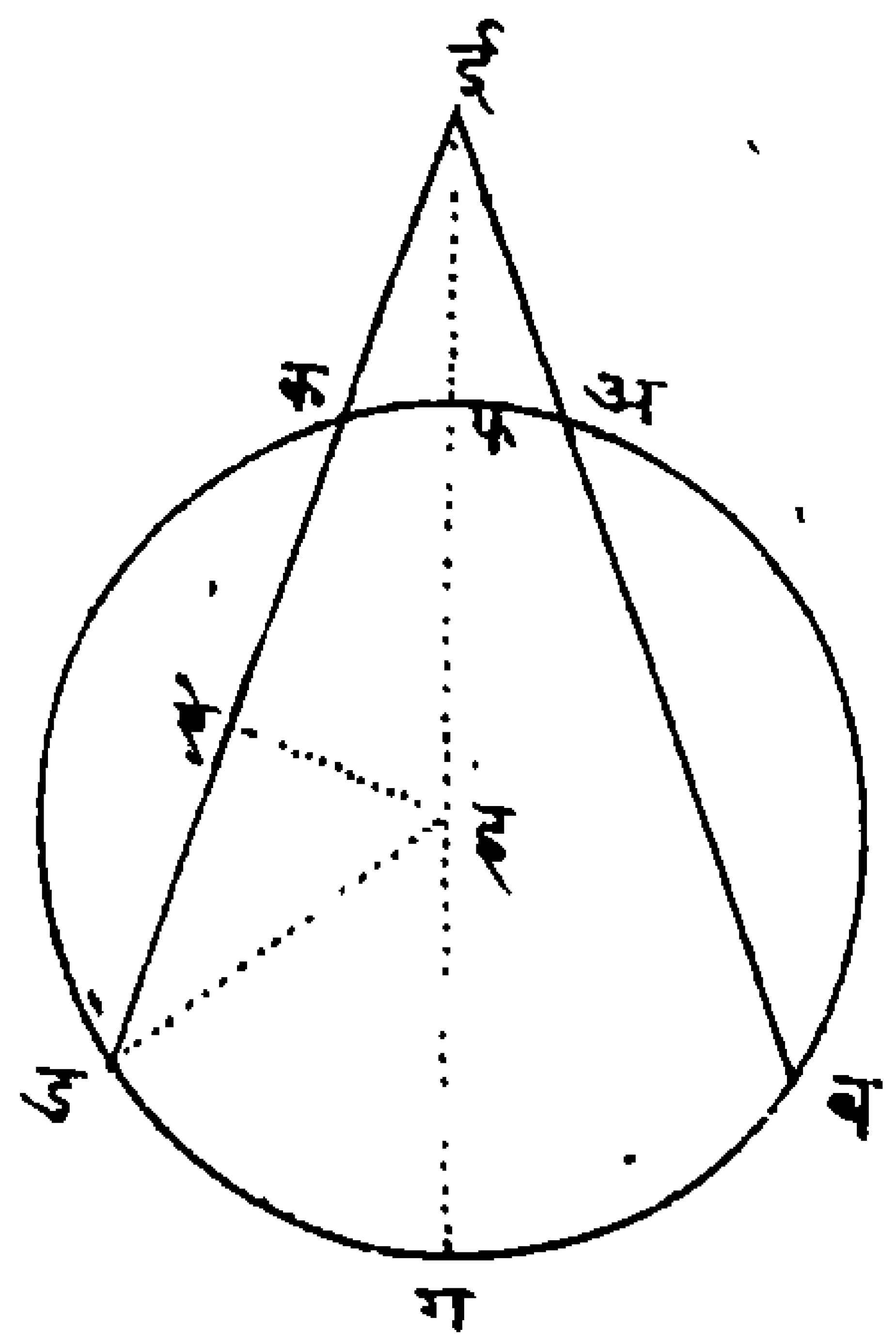


# एकसष्टावा सिद्धांत.

जेव्हां दोन रेघा वर्तुळपरिघास प्रत्येकीं दोन स्थळांवर मिळतात, आणि याच दोन रेघा वर्तुळाचे आंत अथवा बाहेर परस्पर छेदितात, तर एकीचे अवयवांचा काटकोन चौकोन दुसरीचे अवयवांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे. आणि हे अवयव रेघांचे संयोग बिंदूपासून परिघस्थळ बिंदू पर्यंत मोजितात.



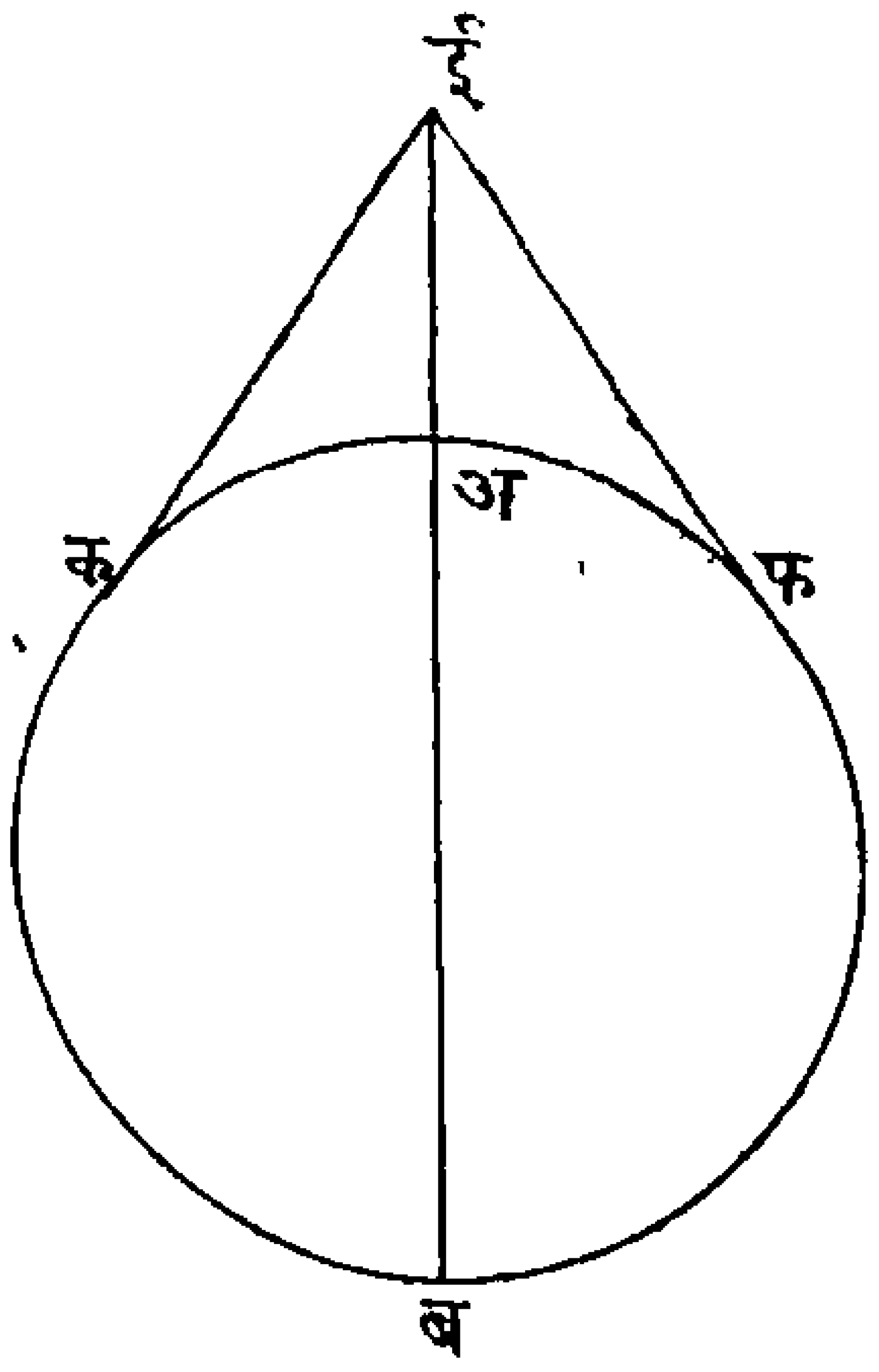

अब, कड या दोन रेघा असतील त्या ई स्थळावर परस्पर छेदितात, आणि प्रत्येकीं वर्तुळपरिघास दोन स्थळांवर मिळतात, तर अई, ईब यांचा काटकोन चौकोन कई, ईड यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे. ह्मणजे अई॰ईब= कई॰ ईड.




ह्मणोन ई बिंदू छेदून फग व्यास कर, आणि ह वर्तुळ मध्यापासून डह त्रिज्या कर. आणि कड वर हऐ लंब कर. आतां डईह त्रिकोण आहे आणि (४१ सि॰प्र॰) हऐ लंब कड ज्यास दुभागितो याजकरितां कई रेघ डऐ, ईऐ या दोन खंडांचे वजाबाकी बराबर आहे. आणि या दोन खंडांची बेरीज डई रेघ आहे पुनः ह वर्तुळ मध्य आहे, आणि डह. फह. गह

या सर्व त्रिज्या परस्पर बराबर आहेत, याजकरितां ईग रेघ डह, हई या दोन बाजूंचे बेरिजे बराबर आहे; आणि ईफ रेघ त्या दोन बाजूंचे वजाबाकीचे बराबर आहे.

परंतु (३५सि०कु०प्र०) काटकोन चौकोन कोणत्येही त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजाबाकी यांत होतो तो पायाचे खंडांची बेरीज आणि वजाबाकी यांत जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे बराबर आहे. याजकरितां फई, ईग यांत जो काटकोन चौकोन होतो तो. कई, ईड यांत जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे बराबर आहे, यारीतीनें ही सिद्ध होतें कीं फई, ईग यांत जो काटकोन चौकोन होतो तो अई, ईब यांत जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे बराबर आहे. याजकरितां (१ प०प्र०) अई, ईब यांचा काटकोन चौकोन कई, ईड यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे हें सिद्ध.



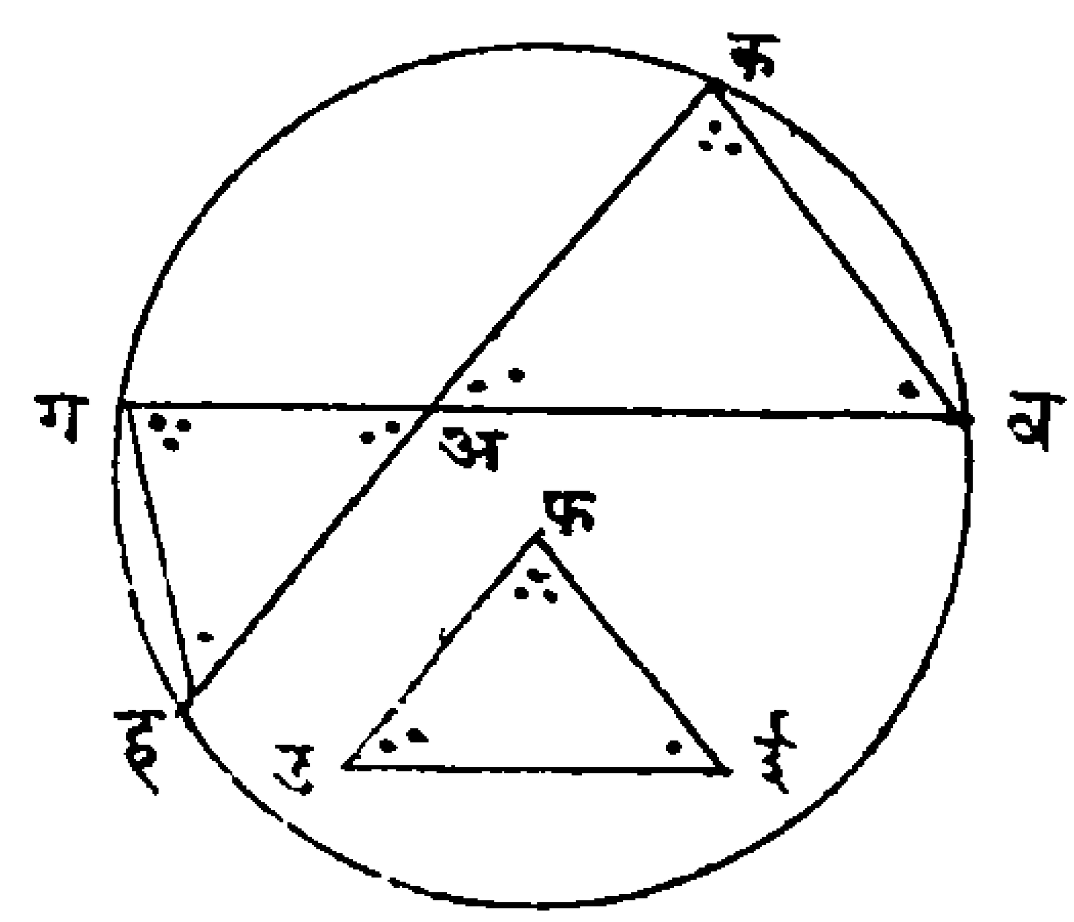

प्रथम कुरलरी. जेव्हां जसें दुसरें आकृतींत डई ही एक रेघ ई बिंदूवर फिरून ईक अथवा ईड स्पर्शरेघ स्थळीं येत्ये अशी कीं क आणि ड हे दोन ही बिंदू एकत्र होतात; तर कई, ईड काटकोन चौकोन कईचा वर्ग होतो; कारण कई आणि डई बराबर झाल्या याजकरितां छेदन रेघेचे अवयवांतील काटकोनचौकोन अई, ईब हा स्पर्श रेघेचे वर्गाबराबर आहे. म्हणजे कई².

दुसरी कुरलरी. यांतून निघतें कीं ईक, ईफ या दोन स्पर्शरेघा एकच ई बिंदूपासून वर्तुळास केल्या त्या परस्पर बराबर आहेत कारण या दो

होंचे वर्गप्रत्येकीं अई, ईब यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहेत.

## बासष्टावा सिद्धांत.

समकोन त्रिकोणांत समप्रमाण बाजूंचे अनुक्रमें जे काटकोन चौकोन होतात ते परस्पर बराबर आहेत.




अबक डईफ हे दोन समत्रिकोण असतील जांत अ कोन ड कोना बराबर आणि ब कोन ई कोना बराबर आणि क कोन फ कोना बराबर आहे; आणि याचा समप्रमाण बाजू अब, डई या क,फ या समकोना समोर आहेत. आणि अक डफ या समप्रमाण बाजू ब, ई या समकोनां समोर आहेत तर अब डफ यांचा काटकोन चौकोन अक डई यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल.

आतां अब रेघ वाढीव आणि अग डफ चे बराबर कर आणि ब, क, ग हे तीन बिंदू छेदून पार एक बकगह वर्तुळ कर. असें कीं कअ रेघ वाढवून ह बिंदू परिघावर येईल. असें कर नंतर गह सांध.

आतां ग कोन आणि क कोन जे दोनही बह कौसावर आहेत ते (५० सि॰प्र॰) परस्पर बराबर तसें ह कोन आणि ब कोन जे दोनही एकच कौसावर आहेत तेही याच प्रमाणें परस्पर बराबर आणि (७ सि॰प्र॰) अ स्थळावरील समोरा समोरचे कोन परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां अगह त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं समकोन आणि याजवरूनच डफई त्रिकोणाशीं ही समकोन आहे परंतु अग, डफ या दोन बाजू (वर

सांगितल्या प्र०) परस्पर बराबर आहेत याजकरितां (२ सि० प्र०) अगह डफई हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि एकाचा दोन बाजू अग अह दुसऱ्याचे डफ डई या दोन बाजूंचे बराबर आहेत.

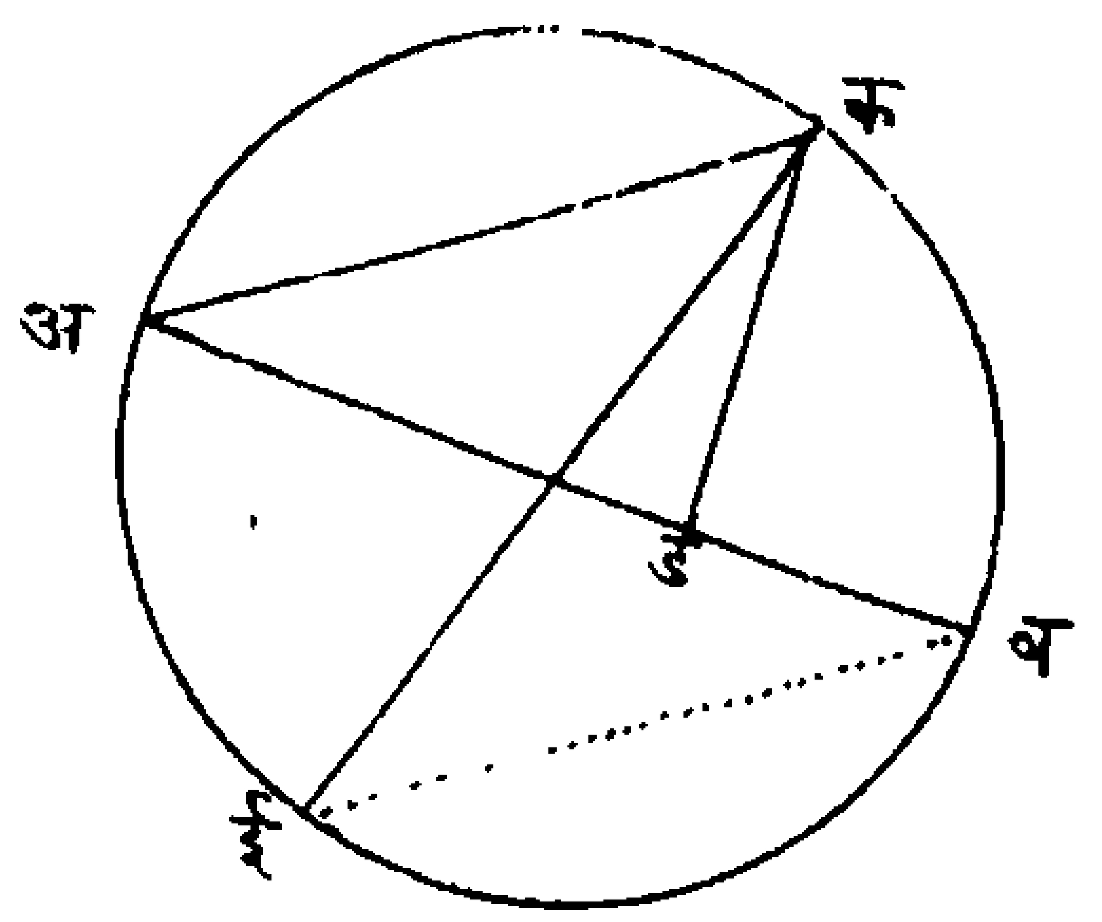
परंतु (६१ सि०प्र०) गअ०अब हा काटकोन चौकोन हअ०अक या काटकोन चौकानाचे बराबर याजकरितां डफ०अब हा काटकोन चौकोन डई०अक या काटकोन चौकोना बराबर आहे हें सिद्ध.

---

## त्रेसष्टावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणाचे दोन बाजूंचा काटकोन चौकोन त्याच त्रिकोणाचे बाहेरील वर्तुळाचा व्यास आणि तिसऱ्ये बाजूवर समोरील कोनापासून लंब यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

कोणत्येही अबक त्रिकोणाचे बाहेर वर्तुळ असेल ज्याचा व्यास कई आहे आणि त्या त्रिकोणांत अब बाजूवर तिचे समोरचे क कोनापासून कड लंब असेल तर अक० कब या काटकोन चौकोनाचे= कड० कई हा काटकोन चौकोन आहे.

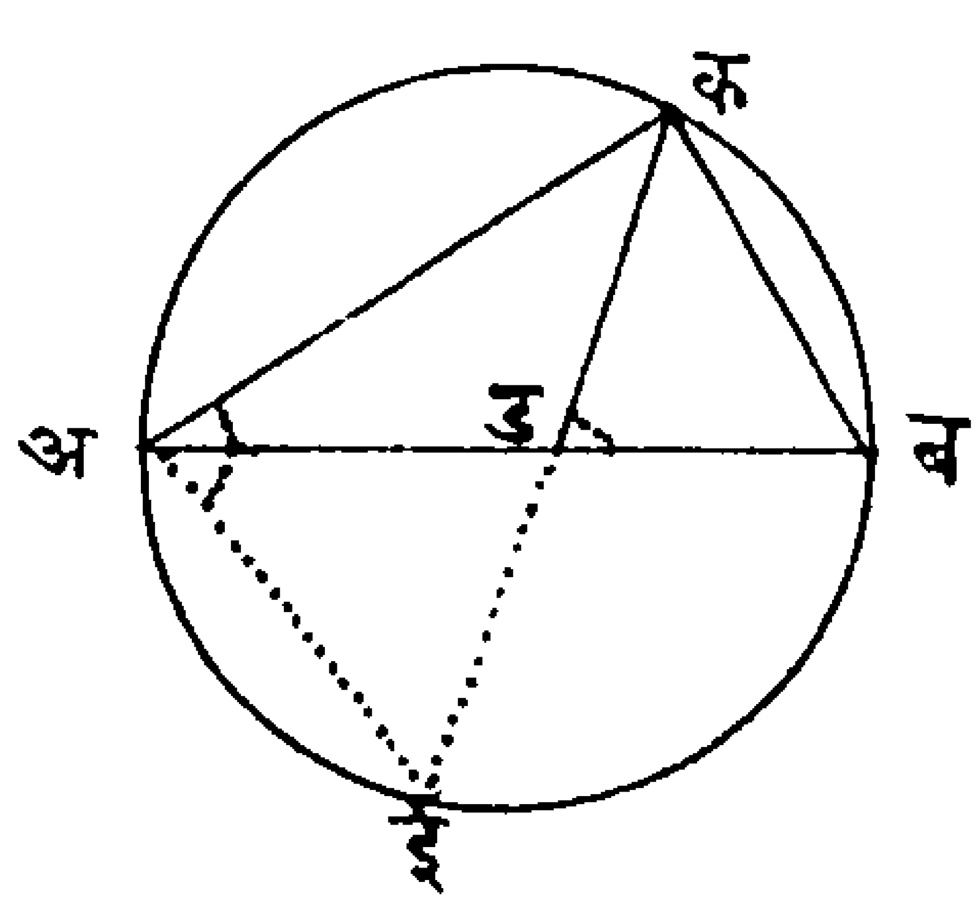



ह्मणोन बई सांध तर अकड आणि ईकब या दोन त्रिकोणांत अ आणि ई हे दोन कोन बक कोसावर आहेत ते (५० सि०प्र०) परस्पर बराबर आणि अडक काटकोन ईबक कोना बराबर आहे. कारण हाही (५२ सि०प्र०) काटकोनच आहे; याजकरितां या दोन त्रिकोणांचे तिसरे ही कोन बराबर आहेत; तेव्हां हे दोनही त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत. यांतोन

निघतें कीं अक आणि कई या बाजू जा ड आणि ब या बरोबर कोनांचे समोर आहेत आणि कड कब या बाजू जा अ आणि ई यांचे समोर आहेत त्या सर्व सम प्रमाण बाजू आहेत. याजकरितां (६२ सि० प्र०) अक. कब हा प्रथम आणि शेवट यांचा काटकोन चौकोन कई० कड या बाकी राहिल्ये दोहोंचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे हें सिद्ध.

# चौसष्टावा सिद्धांत.

जी रेघ त्रिकोणाचा कोणताही कोन दुभागित्ये त्या रेघेचा वर्ग आणि त्या रेघेनें दुभागिल्ये बाजूचे दोन खंडांचा काटकोन चौकोन यांची बेरीज दुभागिल्ये कोनाचे दोहोंकडील राहिल्ये दोन बाजूंचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.




अबक त्रिकोण असेल जाचा क कोन कड रेघेनें दुभागिला आहे तर; कड + अड० डब हा काटकोन चौकोन = अक० कब हा काटकोन चौकोन आहे.

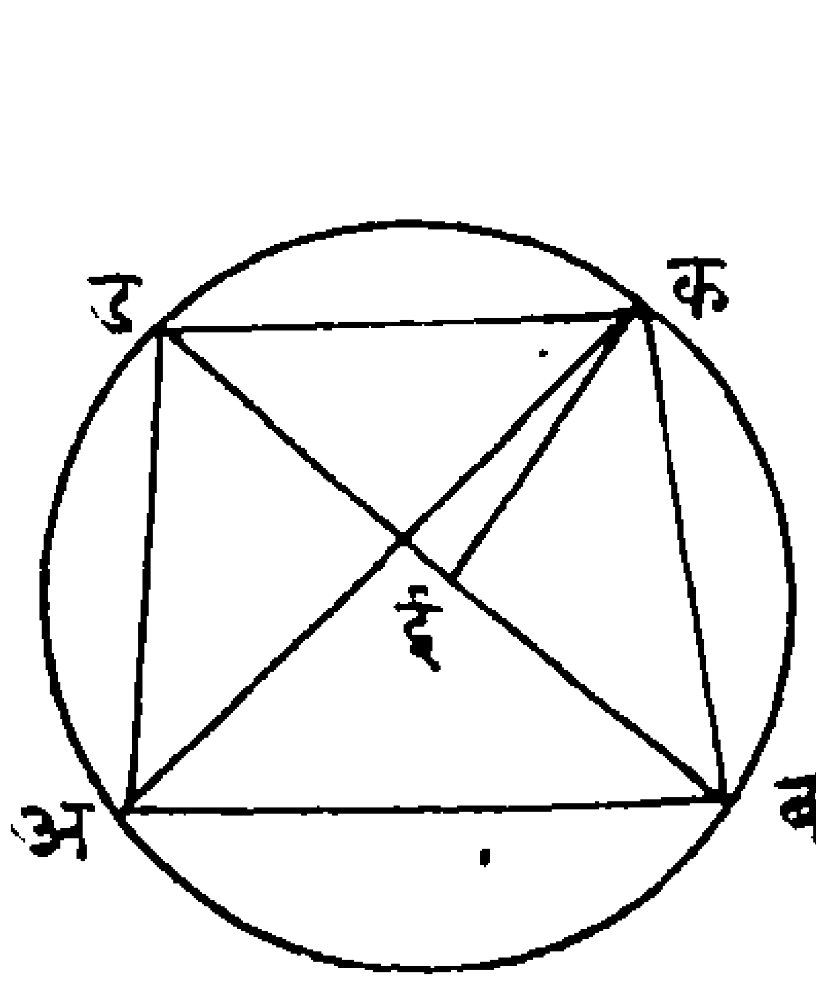
ह्मणोन त्रिकोणाचा बाहेर वर्तुळ करून कड रेघ परिघावर ई पर्यंत वाढीव आणि अई सांध.

आतां अकई, बकड या दोन त्रिकोणांत अकड, बकड हे दोन कोन (वरसांगीतले प्र०) बराबर; आणि अबक, अईक हे दोन कोन जे अक कौसावर आहेत. ते (५० सि० प्र०) परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां कअई, कडब हे तिसरेही दोन कोन (१७ सि० १ कु० प्र०) बराबर आणि

अक, कड आणि कई, कब या सम प्रमाण बाजू आहेत. कारण बरो-बर कोनाचे समोर आहेत याजकरितां (६२ सि० प्र०) अक० कब याकाटकोन चौकोनाचे = कड० कई हा काटकोन चौकोन आहे परंतु (३० सि० प्र०) कड० कई याचे = कड² + कड० डई हा काटकोन चौकोन आहे, याजकरितां अक० कब या काटकोन चौकोनाचे ही = कड² + कड० डई अथवा कड² + अड० डब हा आहे. कारण (६१ सि० प्र०) कड० डई याचे = अड० डब हा आहे हें सिद्ध.

## पांसष्टावा सिद्धांत.

वर्तुळांतील चौकोनाचे दोन कर्णाचा काटकोन चौकोन समोरा समोरचे दोन दोन बाजूंचे दोन काटकोन चौकोनांचा बेरिजे बराबर आहे.




वर्तुळांत एक अबकड चौबाजू असेल त्याचा कर्ण रेघा अक आणि बड यांचा अक० बड या काटकोन चौकोनाचे = अब० डक हा काटकोन चौकोन + अड० बक हा काटकोन चौकोन आहे.

ह्मणोन कई रेघ कर अशी कीं बकई कोन डकअ कोना बराबर होईल.

आतां अकड आणि बकई हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत; कारण अ आणि ब हे दोन कोन डक कोसावर आहेत ते परस्पर बराबर, आणि डकअ, बकई हे दोन कोन (वर सांगीतल्याप्र०) बराबर; याजकरितां त्यांचे तिसरे अडक, बईक हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत. आ-

णि **अक, बक** आणि **अड, बई** या सम प्रमाण बाजू आहेत. कारण सम कोनांचे समोर आहेत याजकरितां (६२ सि० प्र०) **अक० बई** या काटकोन चौकोनाचे = **अड० बक** हा काटकोन चौकोन आहे.

पुनः **अबक, डईक** हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत कारण **बअक, बडक** हे दोन कोन **बक** कोसावर आहेत. ते परस्पर बराबर, आणि **डकई, बकअ** हे दोन कोन साधारण **अकई** कोन मिळविल्यामुळें परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां यांचे तिसरे हीं **ई** आणि **अबक** हे दोन कोन परस्पर बराबर, परंतु **अक, डक** आणि **अब, डई** या सम प्रमाण बाजू आहेत याजकरितां **अक, डई** हा काटकोन चौकोन (६२ सि० प्र०) **अब० डक** या काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

यांतून निघतें कीं बरोबर मिळवणीनें या काटकोन चौकोनांची बेरीज **अक० बई + अक० डई** याचे = **अड० बक + अब० डक** हाही आहे; परंतु (३० सि० प्र०) पूर्व दोन काटकोन चौकोनांचा = **अक० बई + अक० डई = अक० बड** याजकरितां **अक० बड** हा काटकोन चौकोन (१ प्र० प्र०) **अड० बक + अब० डक** या शेवटील बेरिजे बराबर आहे हें सिद्ध.

---

# गुणोत्तर आणि प्रमाण

## व्याख्या.

७९ जें एक पद त्याच जातीचा दुसऱ्या पदास वेळा संख्येकरून प्रमाण आहे त्या वेळा संख्यांकास गुणोत्तर ह्मणतात.

**टीप** दोन संख्यांचा युग्मांत अग्रसराचा बराबरीचे उपाग्रसराचे

जितके भाग होतात तें गुणोत्तराचें माप आहे. जसें कोणतेंही पद दोन या संख्येनें दाखविलें याचें गुणोत्तर त्याच जातीचें दुसरें पद ६ साहा या संख्येनें दाखविलें याचा संगातीं जें होतें तें या प्रमाणें दाखविलें जातें कीं ६ भागिले २ दोहोंनीं अथवा $\frac{६}{२}=३$ ह्मणजे २ साहामध्यें तीन वेळा जातात. अथवा त्यांचा तिसरा भाग आहे यासारिखें ३ या पदाचें ६ या समजातिपदा संगातीं गुणोत्तर या रीतीनें मापिलें जातें कीं $\frac{६}{३}=२$. ४ या पदाचें ६ या समजाती पदा संगातीं गुणोत्तर $\frac{६}{४}=१\frac{१}{२}$

६ याचें ४ या समजाती संगातीं गुणोत्तर $\frac{४}{६}=\frac{२}{३}$ या प्रमाणें पुढें हीजाणावें.

७७ जांचें गुणोत्तर बराबर आहे तीं पदें प्रमाणांत आहेत.

७८ तीन पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत जेव्हां प्रथमाचें गुणोत्तर दुसऱ्या संगातीं आहे त्याचें बरोबर दुसऱ्याचे गुणोत्तर तिसऱ्या संगातीं आहे जसें या तीन पदांमध्यें **अ** (२), **ब** (४), **क** (८), यांत $\frac{४}{२}=\frac{८}{४}=२$ ह्मणजे या दोन ही युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे.

७९ चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत, जेव्हां प्रथमाचें गुणोत्तर दुसऱ्या संगातीं आहे त्याचे बरोबर तिसऱ्याचें गुणोत्तर चौथ्या संगातीं आहे. जसें या चार पदांमध्यें **अ** (२), **ब** (४), **क** (५), **ड** (१०), यांत $\frac{४}{२}=\frac{१०}{५}=२$ या दोनही युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे.

**टीप** चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत जसें **अ, ब, क, ड** तर त्यांस या प्रमाणें लिहितात जसा **अ : ब :: क : ड** आणि या प्रमाणें उच्चारितात जसें **अ : ब** यास होतो तसा **क : ड** यास होतो परंतु जेव्हां तीन पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत तेव्हां मधील पद लिहिण्याचे व उच्चारण्याचे रीतींत दोन वेळ येतें जसा **अ : ब :: ब : क** जसा **अ : ब** तसा **ब : क** यास होतो.

८० प्रमाणांत तीनपदें असतील तर मधलें पद आद्यंत पदांचें मध्य प्रमाण आहे आणि अंत पद प्रथम आणि दुसरें यांचें तिसरें प्रमाण ह्मणतात.

८१ प्रमाणांत चारपदें असतील तर अंत पद अनुक्रमानें दुसऱ्या तीनपदांचें चतुःप्रमाण ह्मणतात.

८२ कित्येकपदें आहेत त्यांत जर जवळ जवळचे पदांचें गुणोत्तर बरोबर आहे, तर तीं पदें अखंड प्रमाणांत आहेत असें ह्मणतात. जसें पहिलें दुसऱ्यास, तसें दुसरें तिसऱ्यास, तिसरें चौथ्यास, याप्रमाणें पुढेंही या सर्वांचें गुणोत्तर बराबर आहे.

आणि जसें या संख्यांमध्यें १:२·४·८·१६ इत्यादि यांत गुणोत्तर २ आहेत. याजकरितां हीं सर्वपदें अखंड प्रमाणांत आहेत.

८३ जीं कित्येक पदें आहेत त्यांत आद्यंतांचें गुणोत्तर त्या पदांचे गुणोत्तरांचे गुणाकारा बराबर आहे; त्यास संयुक्त गुणोत्तर ह्मणतात. जसें, अ, ब, क, ड यांत आदि अ याचें अंत ड याचे संगातीं जें गुणोत्तर आहे तें अ आणि ब यांचे गुणोत्तरानें गुणिलें ब.क यांचें गुणोत्तर तें पुनः क, ड यांचे गुणोत्तरानें गुणिलें या गुणाकाराचे बराबर आहे. जसें १. २. ४. ८ यांत ८ हें संयुक्त गुणोत्तर आहे.

८४ जेव्हां प्रमाण पदांत अग्रसरास उपाग्रसर केला आणि उपाग्रसरास अग्रसर केला तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास व्यस्त गुणोत्तर ह्मणतात. जसें जर

१:२::३:६ तर व्यस्तानें २:१::६:३

८५ जेव्हां अग्रसरा संगातीं अग्रसर आणि उपाग्रसरा संगातीं उपाग्रसर अशा रीतीनें पदें मिळवितात तेव्हां त्यास परावृत्त प्रमाण ह्मणतात. जर १:२::३:६ तर परावर्तानें १:३::२:६

८६ जेव्हां अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची बेरीज अग्रसरासंगातीं अथवा उपाग्रसरासंगातीं मिळवितात. तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास मिश्रगुणोत्तर ह्मणतात. जसें जर १: २: : ३: ६ तर मिश्रणानें १+२: १: : ३+६: ३ आणि १+२:२:: ३+६: ६

८७ जेव्हां अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची वजाबाकी अग्रसरासंगातीं अथवा उपाग्रसरासंगातीं मिळवितात. तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास भक्तगुणोतर ह्मणतात. जसें जर १: २: : ३: ६ तर भागाकारानें २-१: १:: ६-३: ३ आणि २-१: २:: ६-३: ६

**टीप** या व्याख्येंत भक्त आणि भागाकार या शब्दांचा अर्थ हा आहे कीं वजाबाकी किंवा भागणें. ज्ञायशाब्ये व्याख्येंत मिळविण्याचा प्रकार आहे त्याची उलट वजाबाकी एथें अर्थ होय.

---

## सारसष्ठावा सिद्धांत.

कोणत्याही दोन संख्या आणि त्या संख्यांचे समगुणाकार यांचें गुणोत्तर बराबर आहे.

अ आणि ब या दोन संख्या आणि त्यांचे समगुणाकार मअ आणि मब असतील ह्मणजे म कोणतीही संख्या असेल तर मअ आणि मब यांचें गुणोत्तर अ आणि ब यांचे गुणोत्तरा बराबर होईल. अथवा अ: ब:: मअ: मब कारण $\frac{मब}{मअ}=\frac{ब}{अ}$ या दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे हें. सिद्ध.

कुरलरी. यांतून निघतें कीं कोणत्येही संख्यांचे सारिख्ये अवयवांचें आणि त्या अवयवां रहित पूर्ण संख्यांचें गुणोत्तर बराबर आहे. कारण पूर्ण संख्या त्यासारिख्ये अवयवांचा समगुणाकार आहे ह्मणोन अ

आणि ब हे मअ आणि मब यांचे सारिखे अवयव आहेत.

## सतसष्टावा सिद्धांत.

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं परावर्तानें ही प्रमाणांत होती ल. अथवा दोन अग्रसरांचें गुणोत्तर दोन उपाग्रसरांचे गुणोत्तरा बराबर होईल.

जर अ: ब: : मअ: मब असेल तर अ: मअ: : ब: मब होईल

कारण $\frac{मअ}{अ}$ = म आणि $\frac{मब}{ब}$ = म हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे.

## अडसष्टावा सिद्धांत.

जेव्हां चारपदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं व्यस्तानें ही प्रमाणांत होतील.

जर अ: ब: : मअ: मब होईल; तर ब:अ: : मब: मअ होईल.

कारण $\frac{मअ}{मब} = \frac{अ}{ब}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे.

## एकुणहत्तरावा सिद्धांत.

जेव्हां चारपदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं मिश्रणानें आणि भागाकारानें ही प्रमाणांत होतील.

जर अ: ब: : मअ: मब

तर ब±अ: अ: : मब±मअ: मअ

ब±अ: ब: : मब± मअ: मब

कारण $\frac{मअ}{मब \pm मअ} = \frac{अ}{ब \pm अ}$ आणि $\frac{मब}{मब \pm मअ} = \frac{ब}{ब \pm अ}$

कुरलरी. यांतून दिसतेकी जेव्हां एक जातीचीं चारपदें प्रमाणांत आहेत ते व्हां अतिमोठें आणि अतिलाहान या दोन पदांचे बेरिजेहून अधिक आहे. ह्मणो न अ:अ+ब::मअ: मअ+मब या पदांत अति लाहान पद अ आ णि अति मोठें मअ+मब आहे, तेव्हां अ+मअ+मब=१+म०अ+मब ही बेरीज अति लाहान आणि अति मोठें या दोन पदांची अ+ब+म—अ=१+म०अ+ब या दोन मध्यपदांचे बेरिजेहून अधिक आहे हें सिद्ध.

---

## सत्तरावा सिद्धांत.

जर पदें प्रमाणांत आहेत तर त्यांचे अग्रसरांचे कोण ते ही समगुणा कार आणि उपाग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार केले तर तेही प्रमाणांत होतील

जर अ:ब::मअ:मब. असेल आणि पअ, पमअ हे दोन अग्रस रांचे कोणतेही समगुणाकार असतील तसे क्व ब, क्वमब हे उपाग्रसरांचे को णतेही समगुणाकार असतील

तर पअ:क्वब::पमअ:क्वमब.

कारण $\frac{\text{क्वमब}}{\text{पमअ}}=\frac{\text{क्वब}}{\text{पअ}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

---

## एकाहत्तरावा सिद्धांत.

जर चार पदें प्रमाणांत आहेत आणि त्यांचे दोन उपाग्रसरांत कोणतीही दोन पदें मिळविलीं अथवा वजा केलीं परंतु त्या दोन पदांचें गुणोत्तर अग्रस रांचे गुणोत्तराबराबर असावें तरी हीतीं प्रमाणांत होतील.

जर अ:ब::मअ:मब असेल आणि नअ, नमअ हीं कोणतीही

दोन पदें असतील ज्यांचें गुणोत्तर दोन अग्रसरांचे गुणोत्तरा बराबर आहे.

तर अ: ब ± नअ :: मअ: मब ± नमअ

कारण $\frac{\text{मब} \pm \text{नमअ}}{\text{मअ}} = \frac{\text{ब} \pm \text{नअ}}{\text{अ}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

---

## बाह्योत्तराचा सिद्धांत.

जर कोणतीं कितीही पदें प्रमाणांत आहेत तर त्यांतील कोणत्येही युग्मांचा अग्रसर त्याच युग्मांतील उपाग्रसरास होतो तशी त्या पदांतील सर्व अग्रसरांची बेरीज त्यांतील सर्व उपाग्रसरांचे बेरिजेस होईल.

जर अ: ब :: मअ: मब :: नअ: नब इत्यादि

तर अ: ब :: अ + मअ + नअ: ब + मब + नब

कारण $\frac{\text{ब}+\text{मब}+\text{मब}}{\text{अ}+\text{मअ}+\text{नअ}} = \frac{\text{१}+\text{म}+\text{न}\cdot\text{ब}}{\text{१}+\text{म}+\text{न}\cdot\text{अ}} = \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

---

## व्याह्योत्तराचा सिद्धांत.

जर दोन अखंड पदें आणि त्यांचे दोन तुकडे यांचें गुणोत्तर बराबर आहेत तर त्या अखंडांशीं त्यांच्या तुकड्यांची वजा बाकी ही प्रमाणांत होईल जशीं अखंड पदें आहेत.

जर अ: ब :: $\frac{\text{म}}{\text{न}}$अ: $\frac{\text{म}}{\text{न}}$ब

तर अ: ब :: अ $\frac{\text{म}}{\text{न}}$अ: ब $\frac{\text{म}}{\text{न}}$ब

कारण $\frac{\text{ब}-\frac{\text{म}}{\text{न}}\text{ब}}{\text{अ}-\frac{\text{म}}{\text{न}}\text{अ}} = \frac{\text{१}-\frac{\text{म}}{\text{न}}\cdot\text{ब}}{\text{१}-\frac{\text{म}}{\text{न}}\cdot\text{अ}} = \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

---

## चौऱ्याहात्तरावा सिद्धांत.

जर कोणतींही पदें प्रमाणांत आहेत तर त्यांचे वर्ग घनादिक अथवा वर्गघनादि मूळही प्रमाणांत होईल.

जर $अ : ब :: मअ : मब$ तर $अ^{न} : ब^{न} :: म^{न}अ^{न} : म^{न}ब^{न}$

कारण $\frac{म^{न}ब^{न}}{म^{न}अ^{न}} = \frac{ब^{न}}{अ^{न}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

## पंचाहात्तरावा सिद्धांत.

जर दोन संच प्रमाणांत आहेत. तर क्रमानें समोरासमोरचे पदांचे गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन ही प्रमाणांत होतील.

जर $अ : ब :: मअ : मब$

आणि $क : ड :: नक : नड$

तर $अक : बड :: मनअक : मनबड$

कारण $\frac{मनबड}{मनअक} = \frac{बड}{अक}$ हें दोहोंचे गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

## शाहात्तरावा सिद्धांत.

जर चार पदें प्रमाणांत आहेत तर आद्यंत पदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन दोन मध्य पदांचे गुणाकाराचे अथवा काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

जर $अ : ब :: मअ : मब$

तर $अ \times मब = ब \times मअ = अमब$ आहे हें सिद्ध.

## सत्याहात्तरावा सिद्धांत.

जर तीन पदें अखंड प्रमाणांत असतील तर आद्यंत पदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गाबरोबर होईल.

जर अ, मअ, मेअ, हीं तीन पदें अखंड प्रमाणांत असतील. अथवा अ: मअ : : मअ: मेअ

तर अ × मेअ = मेअे बरोबर हें सिद्ध.

---

## अठ्याहात्तरावा सिद्धांत

जर कितीएक पदें अखंड प्रमाणांत आहेत. तर पहिलें आणि तिसरें यांचें गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबराबर होईल. आणि पहिलें आणि चौथें यांचे गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचे गुणोत्तराचे घनाबराबर होईल या प्रमाणें पुढें ही.

जर अ, मअ, मेअ, मैअ इत्यादिक पदें अखंड प्रमाणांत असतील.

तर $\frac{\text{मअ}}{\text{अ}}$ = म परंतु $\frac{\text{मेअ}}{\text{अ}}$ = मे आणि $\frac{\text{मैअ}}{\text{अ}}$ = मै इत्यादिक.

---

## एकुणऐंशिवा सिद्धांत.

त्रिकोण आणि समांतर बाजू चौकोन, ज्यांची उंची बराबर आहे, ते परस्परांस प्रमाण आहेत. जसे त्यांचे पाये.

## चौऱ्याहात्तरावा सिद्धांत.

जर कोणतीही पदें प्रमाणांत आहेत तर त्यांचे वर्ग घनादिक अथवा वर्गघनादि मूळही प्रमाणांत होईल.

जर अ : ब :: मअ : मब तर $\text{अ}^{\text{न}} : \text{ब}^{\text{न}} :: \text{म}^{\text{न}}\text{अ}^{\text{न}} : \text{म}^{\text{न}}\text{ब}^{\text{न}}$

कारण $\frac{\text{म}^{\text{न}}\text{ब}^{\text{न}}}{\text{म}^{\text{न}}\text{अ}^{\text{न}}} = \frac{\text{ब}^{\text{न}}}{\text{अ}^{\text{न}}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

---

## पंचाहात्तरावा सिद्धांत.

जर दोन संच प्रमाणांत आहेत. तर क्रमानें समोरासमोरचे पदांचे गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन ही प्रमाणांत होतील.

जर अ : ब :: मअ : मब

आणि क : ड :: नक : नड

तर अक : बड :: मनअक : मनबड

कारण $\frac{\text{मनबड}}{\text{मनअक}} = \frac{\text{बड}}{\text{अक}}$ हें दोहोंचे गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध.

---

## शाहात्तरावा सिद्धांत.

जर चार पदें प्रमाणांत आहेत तर आद्यंत पदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन दोन मध्य पदांचे गुणाकाराचे अथवा काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

जर अ : ब :: मअ : मब

तर $\text{अ}\times\text{मब}=\text{ब}\times\text{मअ}=\text{अमब}$ आहे हें सिद्ध.

---

## सत्याहात्तरावा सिद्धांत.

जर तीन पदें अखंड प्रमाणांत असतील तर आद्यंत पदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गाबरोबर होईल.

जर अ, मअ, मैअ, हीं तीन पदें अखंड प्रमाणांत असतील. अथवा अ: मअ: : मअ: मैअ

तर अ × मैअ = मैअै बरोबर हें सिद्ध.

---

## अठ्याहात्तरावा सिद्धांत

जर कितीएक पदें अखंड प्रमाणांत आहेत. तर पहिलें आणि तिसरें यांचें गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबराबर होईल. आणि पहिलें आणि चौथें यांचे गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचे गुणोत्तराचे घनाबराबर होईल या प्रमाणें पुढें ही.

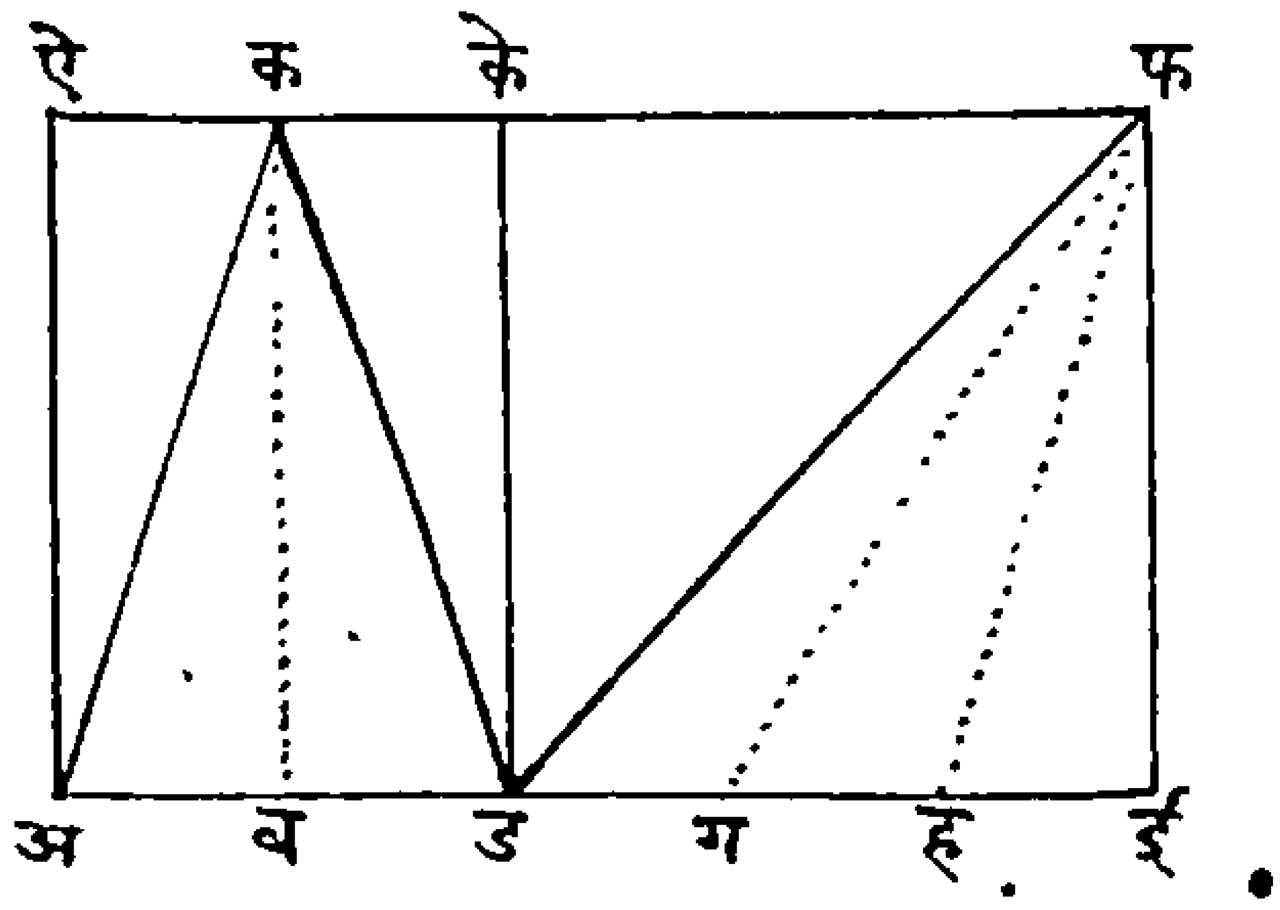
जर अ, मअ, मैअ, मैअ इत्यादिक पदें अखंड प्रमाणांत असतील.

तर $\frac{\text{मअ}}{\text{अ}}$ = म परंतु $\frac{\text{मैअ}}{\text{अ}}$ = मै आणि $\frac{\text{मैअ}}{\text{अ}}$ = मै इत्यादिक.

---

## एकुणऐंशिवा सिद्धांत.

त्रिकोण आणि समांतर बाजू चौकोन, जांची उंची बराबर आहे, ते परस्परांस प्रमाण आहेत. जसे त्यांचे पाये.




अडक, डईफ हे दोन त्रिकोण बराबर उंचीचे अथवा अई, ऐफ या दोन समांतर रेघांमध्यें असतील तर अडक या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ डईफ या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळास तसें प्रमाण होईल. जसें अड पाया डई पायास आहे अथवा. जसा अड: डई:: अडक त्रिकोण: डईफ त्रिकोणास.

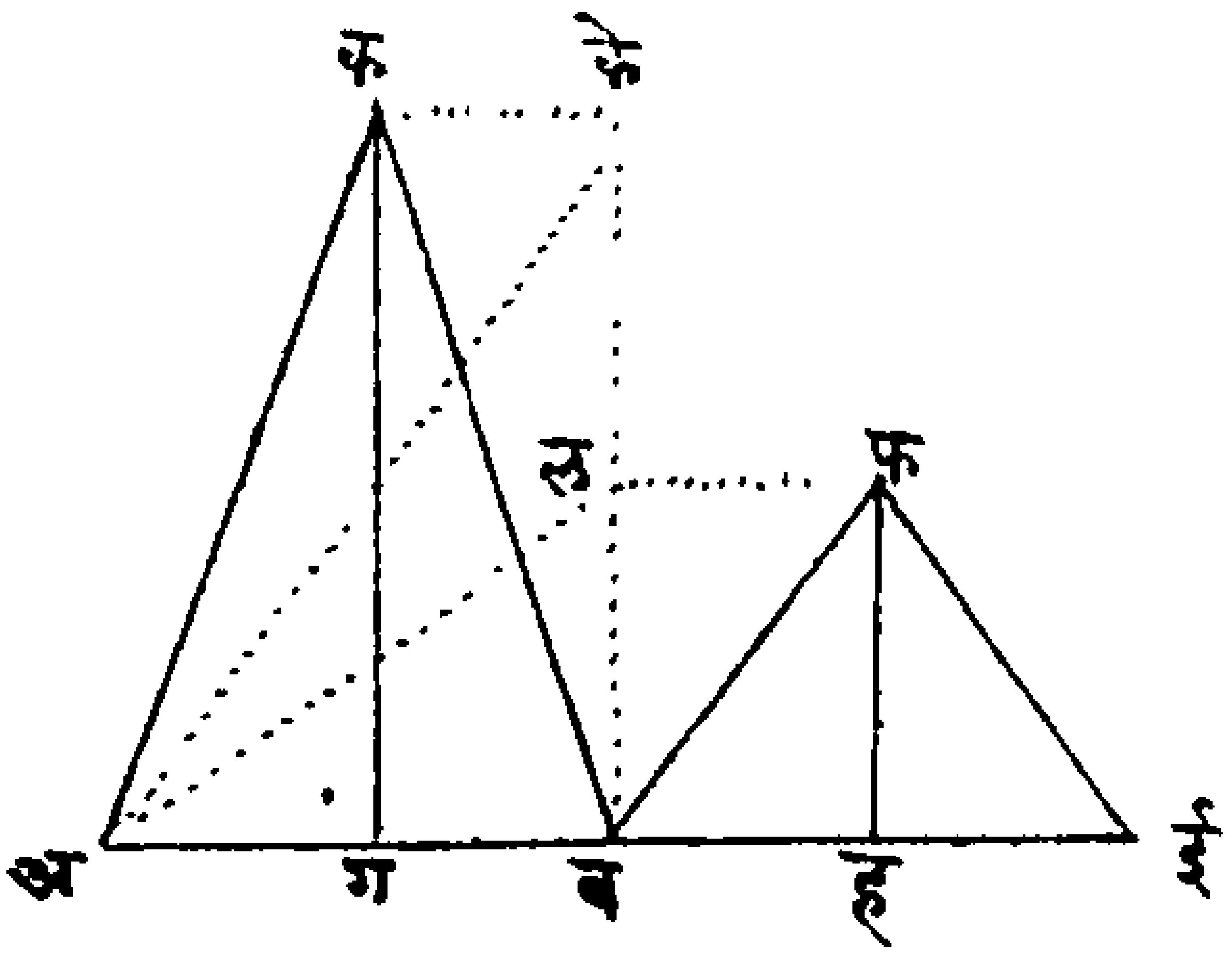
ह्मणोन या आकृतींत अड पाया डई पायास असावा जशी भलती संख्या म (२) दुसऱ्ये भलत्ये न (३) या संख्येस होत्ये आणि त्या संख्येप्रमाणें पायास बराबर तुकड्यांनीं भाग ह्मणजे या प्रमाणें कीं अब, बड, डग, गह, हई हे सर्व परस्पर बराबर कर; आणि त्यांचे भाग बिंदूपासून दोन त्रिकोणांचे क आणि फ या शिरोबिंदूपर्यंत बक, गफ, हफ ऐशा तीन रेघा कर ह्मणजे या रेघा अडक, डईफ या दोन त्रिकोणांचे तितके भाग करितात जितके भाग यांचे पायांत आणि हे सर्व भाग त्रिकोण अबक त्रिकोणाचे बराबर आहेत कारण (२५ सि० २ कु० प्र०) त्या सर्व त्रिकोणाकृति तुकड्यांचे पाये आणि उंची बराबर आहे. ह्मणोन अबक त्रिकोण बडक. डगफ. गहफ. हईफ यांचे प्रत्येकीं बराबर आहे, यास्तव अडक त्रिकोण डईफ त्रिकोणास प्रमाण आहे जसे अडक त्रिकोणाचे तुकडे म (२) डईफ त्रिकोणाचे तुकडे न (३) यांस आहेत ह्मणोन (७९ व्या० प्र०) जसा अड पाया डई पायास.

या रीतीनें ही अडकऐ हा समांतर बाजूचौकोन डईफके या समांतर बाजूचौकोनास आहे, जसा अड पाया डई पायास आहे कारण या

यांचें गुणोत्तर भागाचे बराबर आहे, जसा म (२) न (३) ला आहे हें सिद्ध.

# ऐंशीवा सिद्धांत.

समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण ज्यांचा पाया बराबर आहे ते परस्पर प्रमाणांत आहेत जशी त्यांची उंची.




**अबक** **बईफ** हे दोन त्रिकोण असतील, ज्यांचे पाये **अब, बई** हे दोन बराबर आहेत आणि ज्यांची उंची **कग, फह** हे दोन लंब आहेत. तर **अबक** त्रिकोण: **बईफ** त्रिकोण :: **कग** : **फह**

ह्मणोन **बके** रेघ **अब** रेघेवर **कग** चे बराबर लंब कर, यांत **फह** चे बराबर **बल** कर, नंतर **अके, अल** सांध.

आतां (२५ सि० २ कु० प्र०) ते त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत. ज्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे याजकरितां **अबके** त्रिकोण **अबक** त्रिकोणाचे बराबर आहे, आणि **अबल** त्रिकोण **बईफ** त्रिकोणाचे बराबर आहे परंतु **अबके** आणि **अबल** हे दोन त्रिकोण **बके** आणि **बल** या दोन पायांवर आहेत आणि त्यांची उंची बराबर **अब** आहे अशा विचारानें पाहा तर (७९ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर प्रमाणांत आहेत, जसें त्यांचे पाये; ह्मणोन **अबके** त्रिकोण: **अबल** त्रिकोण :: **बके** : **बल**.

परंतु **अबके** त्रिकोण = **अबक** त्रिकोण आणि **अबल** त्रिकोण

ण= बईफ त्रिकोण आहे. आणि बके=कग आणि बल=फह आहे.

याजकरितां अबक त्रिकोण: बईफ त्रिकोण:: कग:फह आहे.

आणि (२६ सि० प्र०) समांतर बाजू चौकोन त्या त्रिकोणाचे दुपट आहे ज्यांचा पाया आणि उंची याचे बराबर आहे.

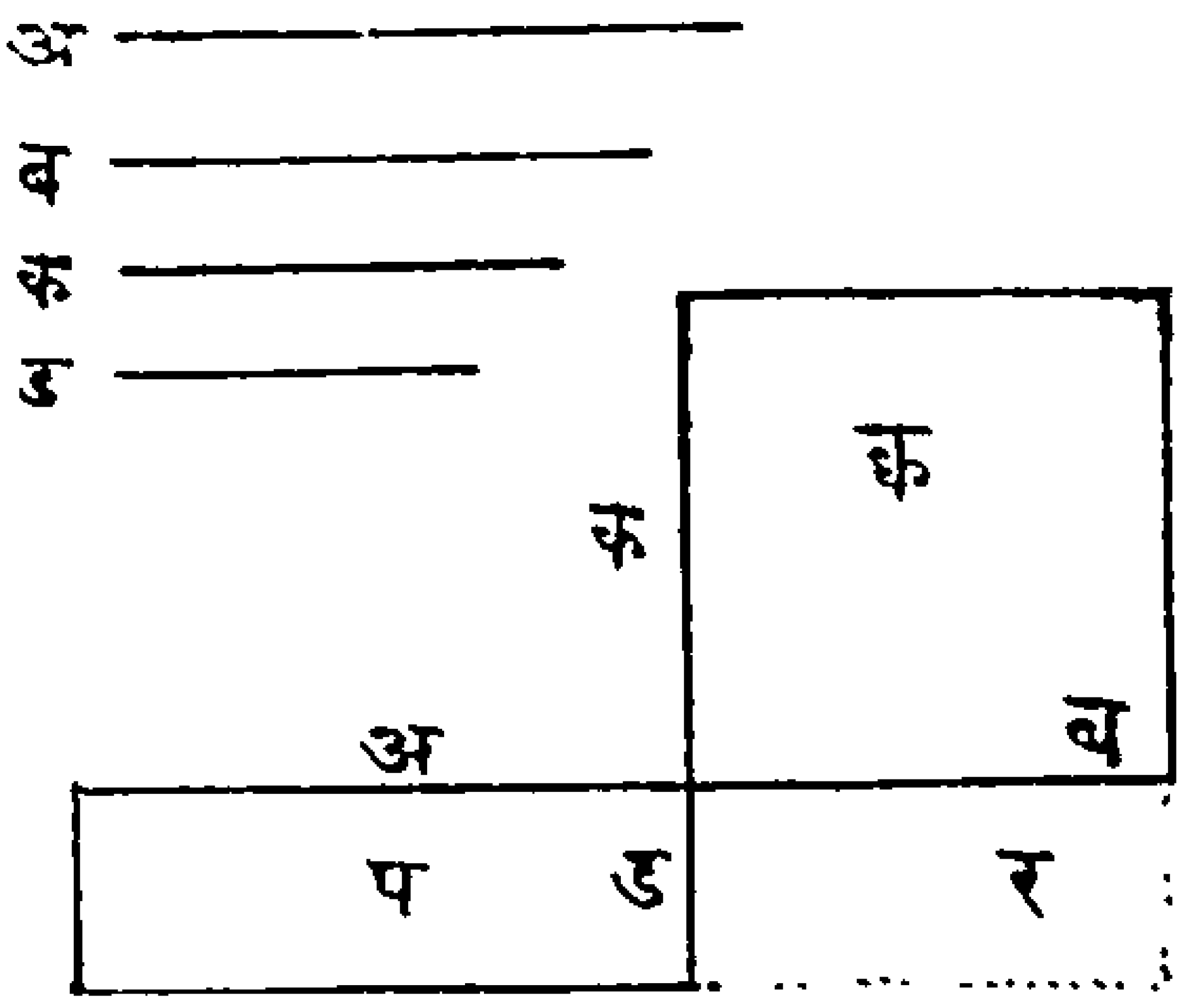
याजकरितां समांतर बाजू चौकोन ज्यांचा पाया बराबर आहे ते परस्पर प्रमाणांत आहेत, जशी त्यांची उंची हें सिद्ध.

कुरलरी. यापासून सिद्ध झालें कीं त्रिकोण आणि समांतर बाजू चौकोन ज्यांचा पाया बराबर आहे. ते परस्पर प्रमाणांत आहेत, जशी त्यांची उंची आणि (७९ सि० प्र०) जेव्हां त्यांची उंची बराबर आहे तेव्हां ते प्रमाणांत आहेत, जसा त्यांचा पाया. याजकरितां सर्वत्र उंची आणि पाया हीं दोन ज्यांची बराबर नाहींत ते परस्पर प्रमाणांत आहेत, जसा पाया आणि उंची न्चे प्रत्येक काटकोन चौकोन अथवा गुणाकार

---

## एक्यायशीवा सिद्धांत.

जर चार रेघा प्रमाणांत असतील तर प्रथम आणि शेवटील या दोन रेघांचा काटकोन चौकोन दोन मध्य रेघांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल. आणि यांचे उलटें जर प्रथम आणि शेवटील या दोन रेघांचा काटकोन चौकोन दोन मध्य रेघांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर असेल. तर त्या चार रेघा प्रमाणांत आहेत.




अ,ब, क,ड या चार रेघा प्रमाणांत असतील अथवा अ:ब::क:ड तर अ आणि ड यांचा काटकोन चौकोन ब आणि क यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल. ह्मणजे अ॰ड=ब॰क

ह्मणोन या चार रेघा अशा कर कीं त्यांचे शेवट एक बिंदूवर मिळून त्या बिंदुस्थळीं चार काटकोन होतील. आणि त्या रेघांशीं दुसऱ्या समांतर रेघा कर अशा कीं त्यां पासून प,क्ष आणि र असे तीन काटकोन चौकोन होतील.

आतां प आणि र या दोन काटकोन चौकोनांची उंची बराबर ह्मणजे ते समांतर रेघांचे एक जोडा मध्यें आहेत याजकरितां (७९ सि॰प्र॰) परस्पर-प्रमाणांत आहेत. जसे त्यांचे पाये अ आणि ब तसे क्ष आणि र हे दोन काटकोन चौकोन समांतर रेघांचे एक जोडामध्यें आहेत. अथवा त्यांची उंची बराबर याजकरितां ते परस्परांस प्रमाण आहेत, जसे त्यांचे पाये क आणि ड; परंतु (वर सांगीतल्या प्र॰) अ आणि ब यांचें गुणोत्तर क आणि ड यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे. ह्मणोन प आणि र या काटकोन चौकोनांचें गुणोत्तर; क्ष आणि र या काटकोन चौकोनाचें गुणोत्तरा बराबर आहे याजकरिता प आणि क्ष हे दोन काटकोन चौकोन बराबर आहेत हें सिद्ध.

पुनः जर अ आणि ड यांचा काटकोन चौकोन, ब आणि क यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर असेल, तर अ, ब, क, ड या चार रेघा प्रमाणांत आहेत, अथवा अ: ब:: क: ड.

ह्मणोन पूर्वप्रमाणें रेघा करून काटकोन चौकोन करावे, आतां हे स-

मांतर बाजू चौकोन समांतर रेषांचे एक जोडामध्यें होऊन, परस्पर प्रमाणांत आहेत, जसे त्यांचे पाये याजकरितां

प : र : : अ : ब आणि क : र : : क : ड परंतु पूर्वी सांगीतल्या प्रमाणें प आणि क हे परस्पर बराबर, आणि र चे संगातीं या दोहोंचें गुणोत्तर बराबर, याजकरितां अ आणि ब यांचें गुणोत्तर क आणि ड यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे ह्मणजे अ : ब : : क : ड हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. जर दोन मध्यपदें, ह्मणजे दुसरें आणि तिसरें हीं बरोबर आहेत, तर यांचा काटकोन चौकोन दुसऱ्ये पदांचा वर्ग होतो, ह्मणजे हा वर्ग दुसरें आणि तिसरें या पदांचे ठिकाणीं होतो. यांतून निघतें कीं जेव्हां तीन रेघा प्रमाणांत आहेत, तेव्हां दोन शेवट पदांचा काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गाबराबर आहे. आणि याचे उलटें, जेव्हां दोन शेवट पदांचा काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गाबराबर आहे, तेव्हां त्या तीन रेघा प्रमाणांत आहेत.

दुसरी कुरलरी. अंकगणित आणि बीजगणित या दोहोंतील प्रमाण रीतीवरून कळतें, कीं जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां त्यांचे दोन शेवट पदांचा गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकारा बराबर आहे आणि भूमितींतील या सिद्धांतावरून कळतें कीं दोन शेवट पदांवर केलेला काटकोन चौकोन, दोन मध्यपदांवर केलेले काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे. यापासून निघतें कीं काटकोन चौकोनाचें क्षेत्र ह्मणजे पातळी, त्याचे लांबी रुंदीचे गुणाकारानें दाखविली जात्ये आणि सामान्यतः भूमितीमध्यें काटकोन चौकोन या सारिखा आहे जो लांबी आणि रुंदी या दोन मापांचा गुणाकार, अथवा पाया आणि उंची या दोन मापांचा गुणाकार, आणि चौरस या सारिखा आहे, जो एक बाजूचे मापाचा वर्ग, ह्मणजे त्याणें

तेंच गुणिलें यांचें नांव वर्ग, यावरून मनांत आणावें कीं काटकोन चौकोन आणि चौरस हे गुणाकारा बराबर आहेत.

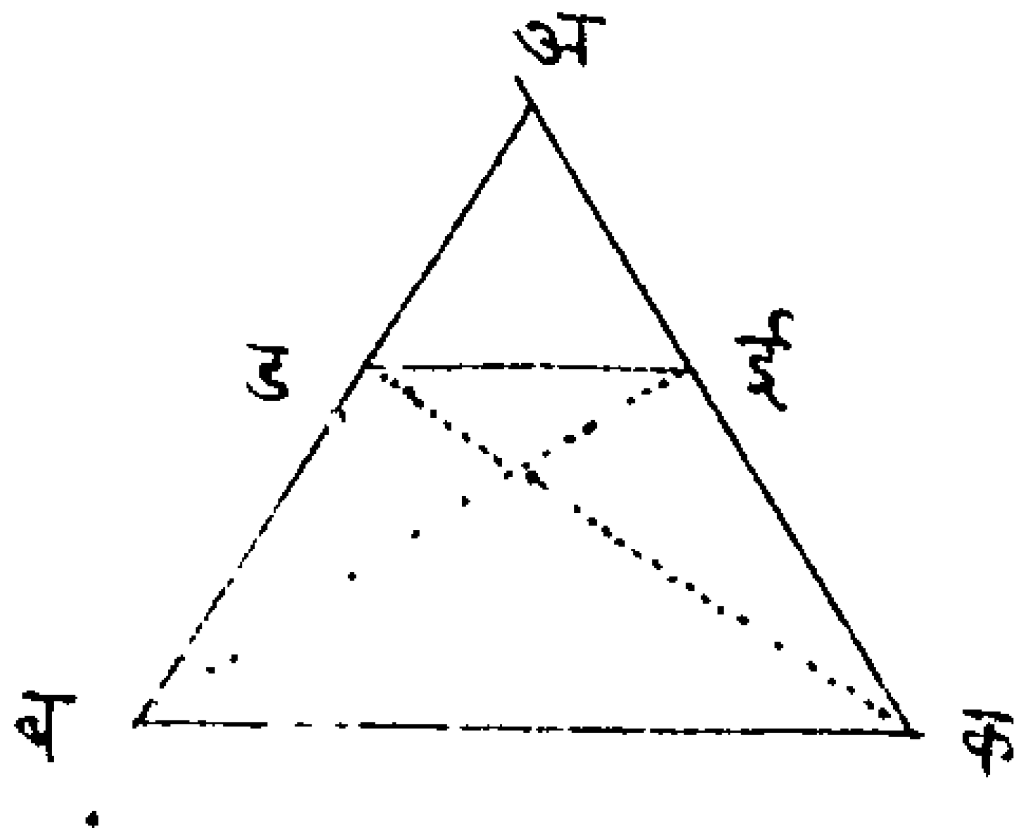
तिसरी कुरलरी. जसा या सिध्धांतांतील कारण विस्तार काटकोन चौकोनावर लागतो, तसाच समांतर बाजू चौकोनावर ही लागतो, याजकरितां एकच गुण सर्व समांतर बाजू चौकोनांवर लागतो, जांचे कोन परस्पर बराबर आहेत. आणि त्रिकोण समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा आहे. ह्मणोन जा त्रिकोणांचे कोन परस्पर बराबर आहेत त्यांजवर ही लागतो, एकच गुण ह्मणजे जर समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण यांचे बरोबर कोनांचा बाजू अनुक्रमानें प्रमाणांत असतील, तर ते सामांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत, आणि याचे उलटें जर समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत, तर त्यांचे बराबर कोनांकडील बाजू अनुक्रमें प्रमाणांत आहेत.

चौथी कुरलरी. समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण जांचा प्रत्येकीं एक कोन बराबर आहे, ते परस्पर प्रमाणांत आहेत. जसे त्या बरोबर कोनाचे दोहोंकडील बाजूंचे अनुक्रमें काटकोन चौकोन.

---

## च्यायशीवा सिद्धांत

कोणत्येही त्रिकोणांत एक बाजूशीं समांतर रेघ केली, तर ती त्या त्रिकोणाचे दुसऱ्ये दोन बाजूंस प्रमाणानें छेदील.




अबक त्रिकोण असेल, जांत डई रेघ बकशीं समांतर केली. तर अड : डब :: अई : ईक

ह्मणोन बई आणि कड सांध, आतां डबई, डकई हे दोन त्रिकोण (२५ सि॰ प्र॰) परस्पर बराबर आहेत, कारण त्यांस डई पाया आहे आणि डई, बक या समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें आहेत, परंतु अडई, बडई हे दोन त्रिकोण अड, डब पायांवर आहेत, त्यांची उंची बराबर आहे आणि अडई, कडई हे दोन त्रिकोण अई, ईक या पायांवर आहेत, त्यांची ही उंची बराबर आहे आणि (७९ सि॰प्र॰) जांची उंची बराबर ते त्रिकोण परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे पाये. याजकरितां

अडई त्रिकोण: बडई त्रिकोण:: अड: डब. आणि अडई त्रिकोण: कडई त्रिकोण:: अई: ईक.

परंतु बडई त्रिकोण (वरचा सिद्ध झाल्यावरून) कडई त्रिकोणा बराबर आहे, आणि बराबरांचे बराबरांशीं गुणोत्तर निश्चय एकच आहे याजकरितां अड: डब:: अई: ईक हें सिद्ध.

कुरलरी. यांतून निघतें कीं (६६ सि॰ कु॰ प्र॰) अब, अक या दोन अखंडरेघा प्रमाणांत आहेत जसे त्यांचे खंड अनुक्रमानें ह्मणजे

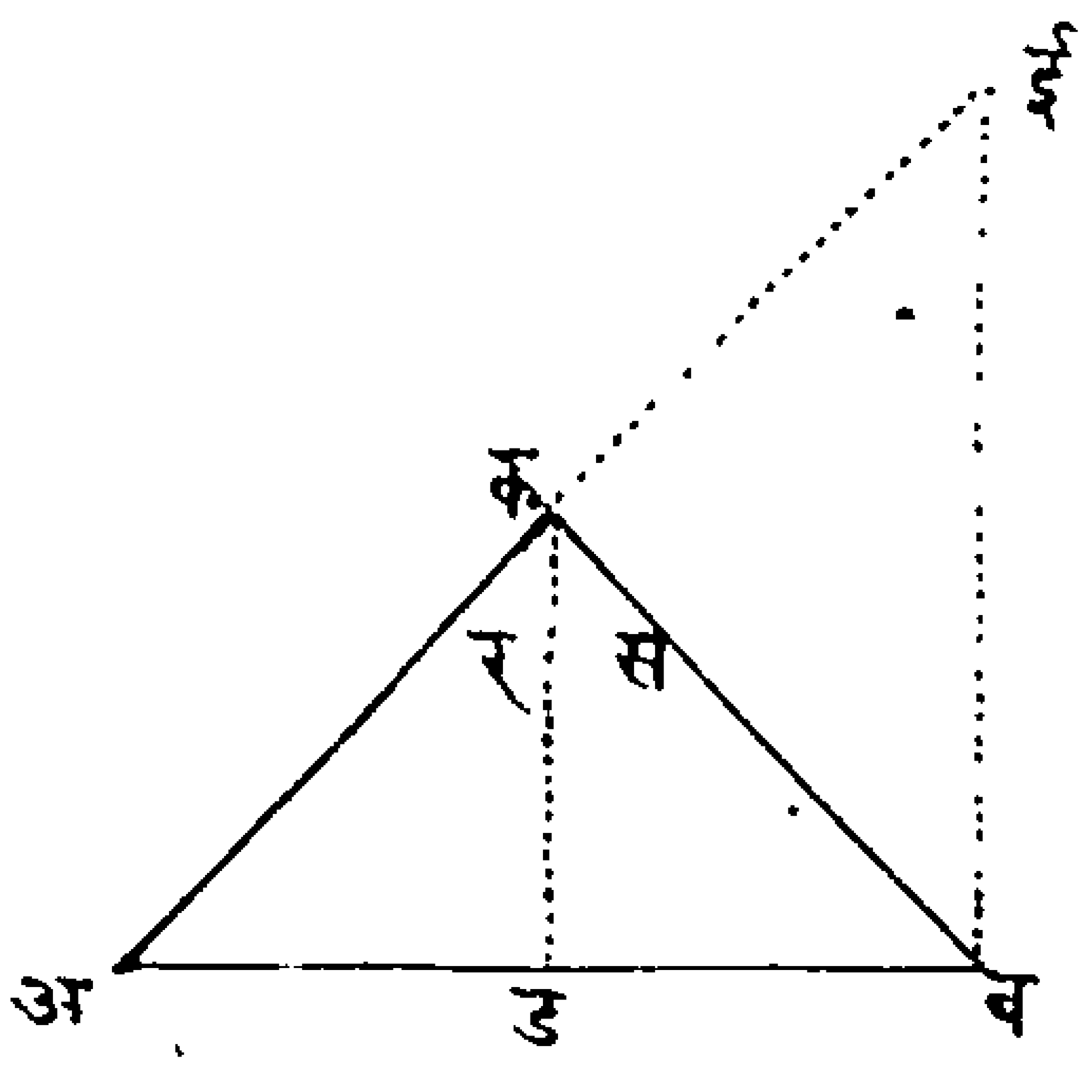
अब: अक:: अड: अई

आणि अब: अक:: बड: कई

---

## ऱ्यायशीवा सिद्धांत.

जी रेघ त्रिकोणाच्या कोणताही कोन दुभागिल्ये. ती त्याचे समोरचे बाजूचे दोन खंड करिल्ये, हे खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत.




अबक त्रिकोण असेल ज्याचा अकब कोन कड रेषेनें दुभागिला, असा कीं र कोन स कोनाबरोबर झाला तर अड खंड डब खंडास होईल. जशी अक बाजू कब बाजूस आहे अथवा अड: डब:: अक: कब.

म्हणोन कड शीं बई समांतर रेघ करून अक वाढीव अशी कीं ई स्थळावर मिळेल.

आतां बक रेघ कड, बई या दोन समांतर रेघांस मिळत्ये याजकरितां (१२ सि०प्र०) कबई कोन त्याचेच व्युत्क्रम स कोनाबराबर आहे म्हणोन (वर सांगीतल्या प्रमाणें) त्याचे बराबरीचा र कोनाबराबर ही आहे.

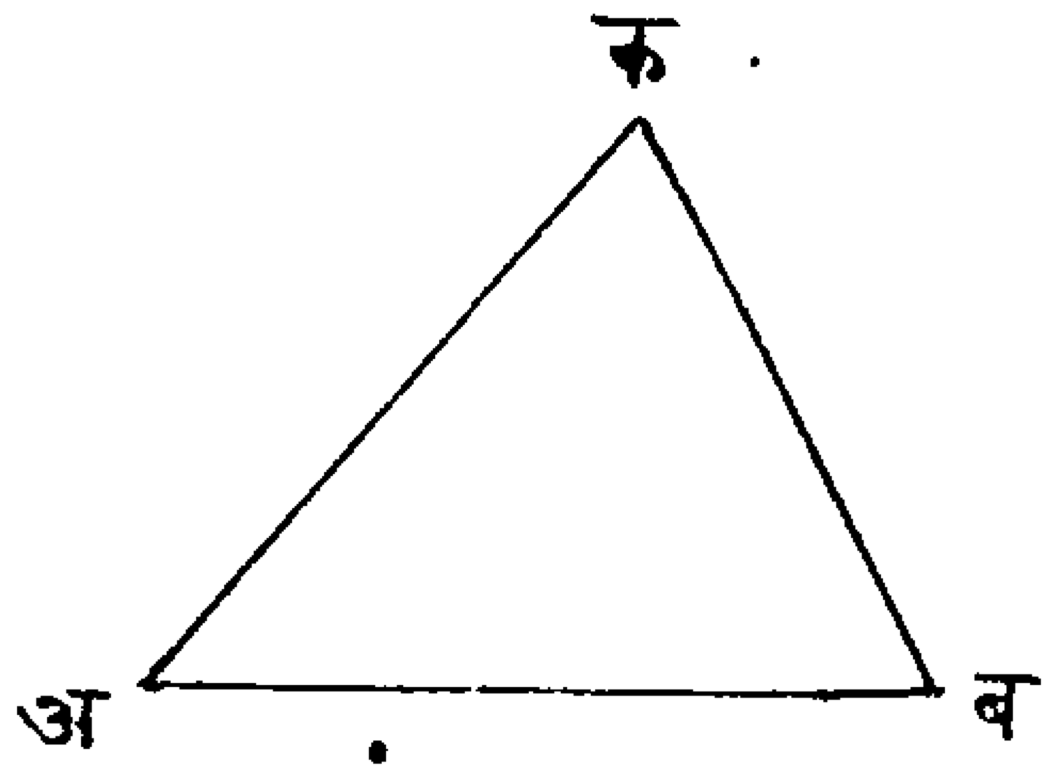
पुनः अई रेघ डक, बई या दोन समांतर रेघांस छेदित्ये, याजकरितां (१४ सि०प्र०) ई कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचा त्याच बाजूचे र कोनाबराबर आहे. याजवरून बकई त्रिकोणांत ब आणि ई हे दोन कोन प्रत्येक र कोनाबराबर आहेत. याजकरितां परस्पर बराबर आहेत. आणि (३ सि०प्र०) त्यांचे समोरचा कब, कई या बाजू ही बराबर.

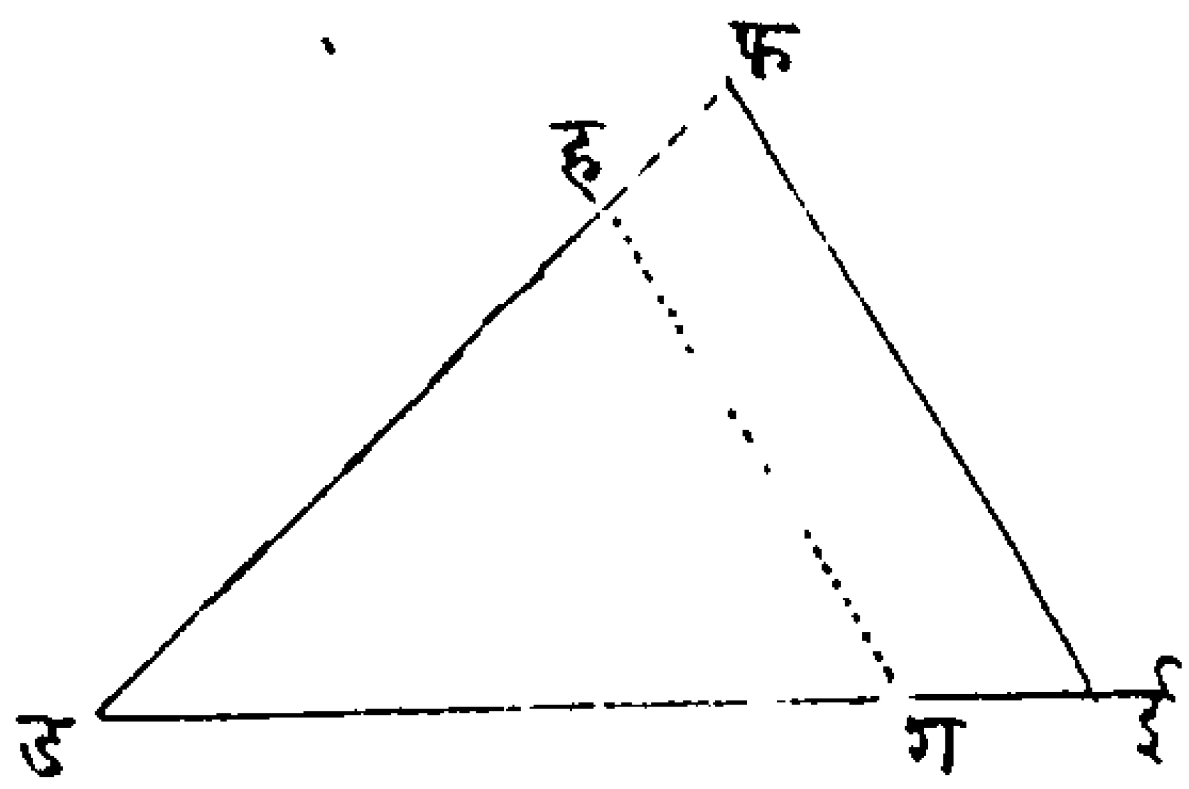
परंतु अबई त्रिकोणांत कड रेघ बई रेघेशीं समांतर आहे. याजकरितां (८२ सि०प्र०) ही रेघ अब, अई या दुसऱ्या दोन बाजूंस प्रमाणानीं म्हणजे अड: डब:: अक: कई अथवा कब (वर सांगीतल्या प्रमाणें) कब बाजू कई बराबर आहे.

# चौऱ्यायशीवा सिद्धांत.

समकोन त्रिकोण परस्पर सरूप आहेत, अथवा त्यांचा सजाती बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक परस्पर प्रमाणांत आहेत.

अबक, डईफ हे दोन समकोन त्रिकोण असतील. ह्मणजे अ कोन ड कोनाबराबर आणि ब कोन ई कोना बराबर आणि यास्तवच क कोन फ कोनाबराबर तर अब : अक :: डई : डफ



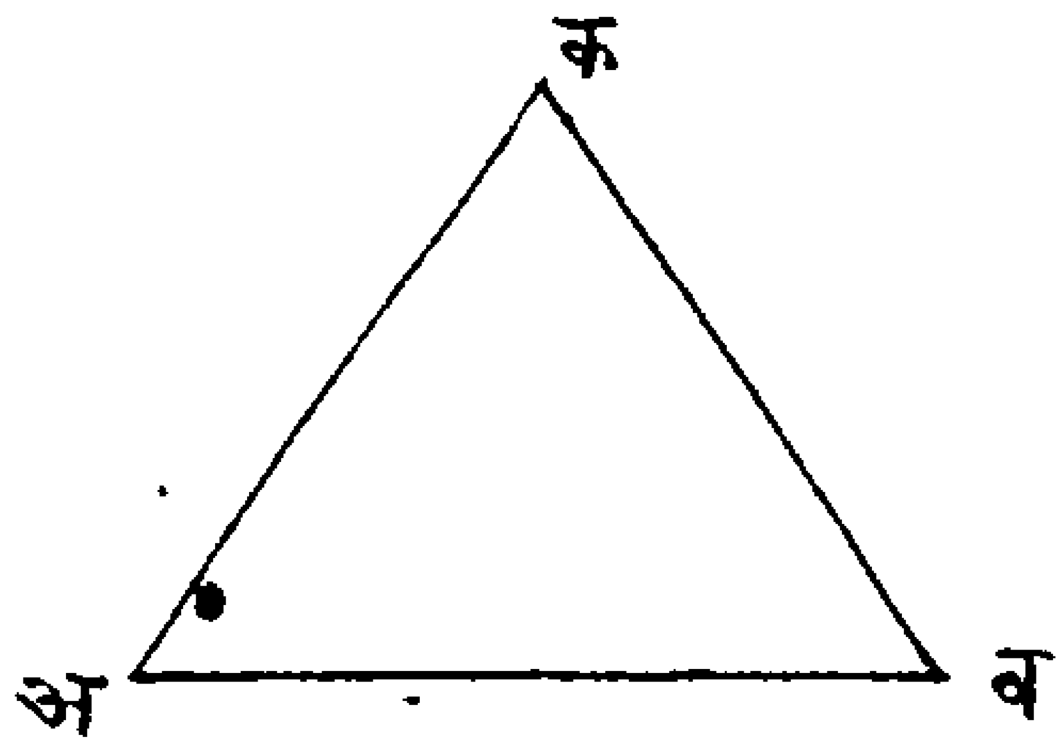

ह्मणोन डग, अबचे बराबर कर आणि डह, अकचे बराबर कर नंतर गह सांध. आतां अबक, डगह या दोन त्रिकोणांत एकाचा अब, अक या दोन बाजू दुसऱ्याचा डग, डह या दोन बाजूं बराबर आहेत, आणि (वरसांगीतल्या प्र०) एकाचा या बाजूंचे आंतील कोन दुसऱ्याचा त्या बाजूंचे आंतील कोनाबराबर आहे. याजकरितां (१ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम आहेत. ह्मणजे एकाचे ग आणि ह हे दोन कोन दुसऱ्याचे ब आणि क या दोन कोनांबराबर आहेत, परंतु (वर सांगीतल्या प्र०) ब आणि क हे दोन कोन अनुक्रमानें ई आणि फ या दोन कोनांबराबर आहेत. याजकरितां (१० प्र० प्र०) ग आणि ह हे दोन कोन ई आणि फ या दोन कोनांबराबर आहेत, आणि यापासून निघतें कीं (१४ सि० प्र० १ कु० प्र०) गह रेघ ईफ रेघेशीं समांत

र आहे

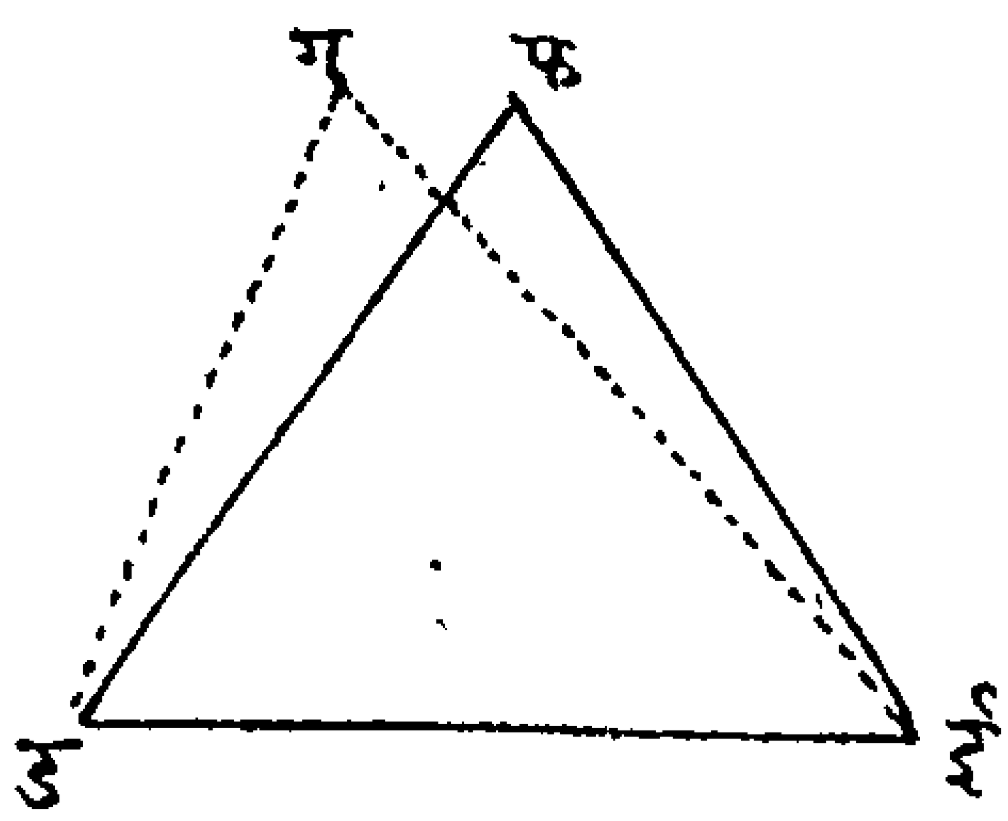
आतां यावरून **डईफ** या त्रिकोणांत **गह** रेघ **ईफ** रेघेशीं समांतर आहे, याजकरितां **डई, डफ** या दोन बाजूंस प्रमाणानें छेदिते, ह्मणोन (८२ सि॰कु॰प्र॰) **डग: डह:: डई: डफ** परंतु **डग** आणि **डह** अनुक्रमानें **अब** आणि **अक** यांचे बराबर आहेत, याजकरितांही **अब: अक:: डई: डफ** हें सिद्ध.

## पंचायशीवा सिद्धांत.

जा त्रिकोणांचा बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक परस्पर प्रमाणांत आहेत, ते त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत.




**अबक, डईफ** या दोन त्रिकोणांत जर **अब: डई:: अक: डफ:: बक: ईफ** तर हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत.



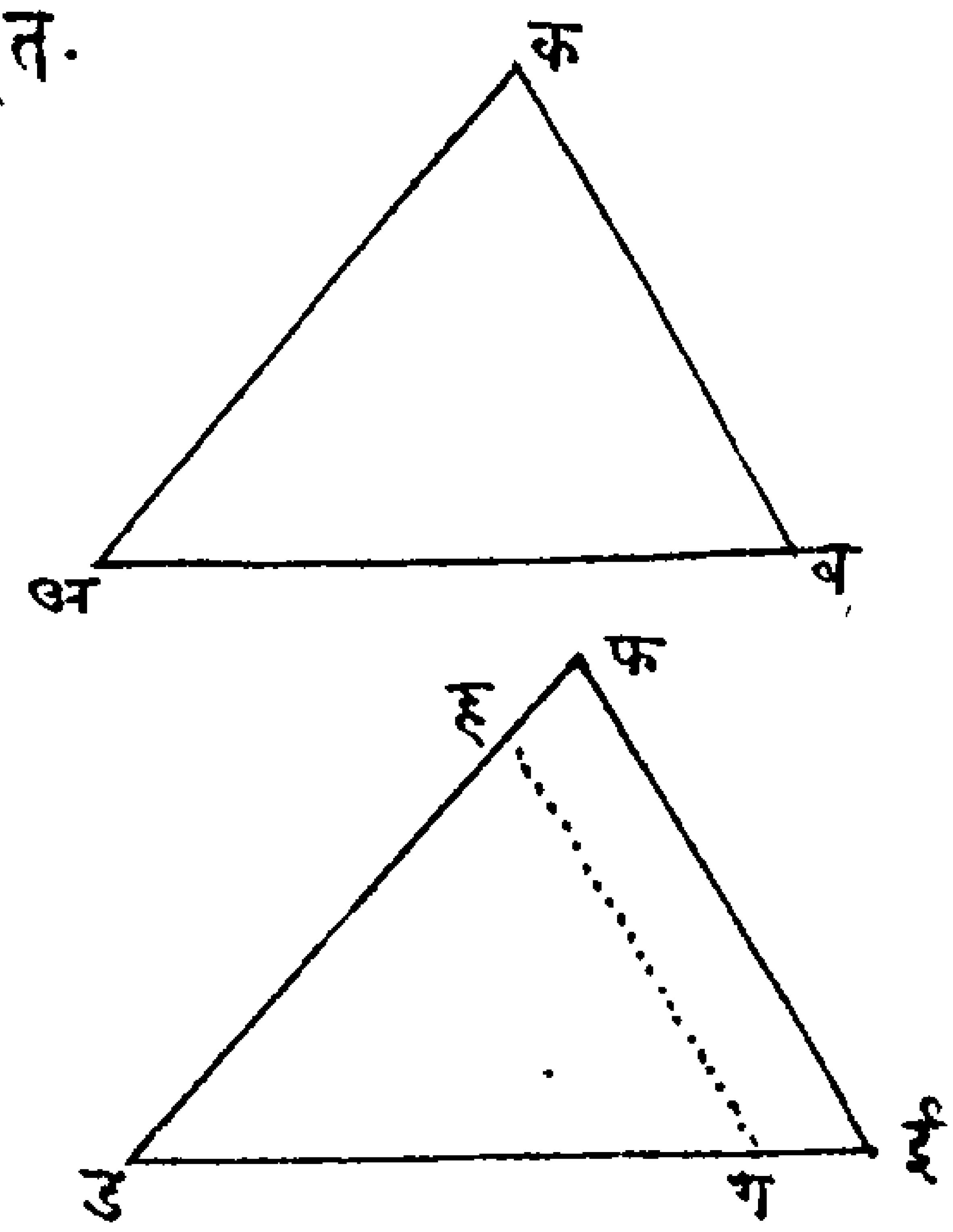

ह्मणोन जर **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाशीं समकोन नसेल, तर मनांत कल्पना कर कीं **डईग** त्रिकोण त्याशीं समकोन आहे, परंतु हें अशक्य कारण जर **अबक, डईग** हे दोन त्रिकोण समकोन असतील, तर (८४ सि॰प्र॰) त्यांचा बाजू प्रमाणांत असतील. अशा कीं **अब: डई:: अक: डग** आणि **अब: डई:: बक: ईग** या पासून निघतें कीं **डग** हें **अब, डई, अक** या तीन पदांचें चतुःप्रमाण निघालें परंतु (वरसांगीत त्या प्र॰) या तीन पदांचें चतुःप्रमाण **डफ** आहे, तसें **ईग** हें **अब,**

**डई, बक** या तीन पदांचें चतुः प्रमाण निघालें परंतु (वरसांगीतल्या प्र०) यांचें चतुः प्रमाण **ईफ** आहे. या रीतीनें **डग, डफ** चे बराबर झाली आणि **ईग, ईफ** चे बराबर या प्रमाणें **डईफ**, आणि **डईग** या दोन त्रिकोणांचा तीन ही बाजू अनुक्रमें बराबर झाल्या तेव्हां हे दोन त्रिकोण (५सि०प्र०) एकरूप असावे ते आकृती पाहतां परस्पर विषम कोन आहेत. तेव्हां हे समकोन हें ह्मणणें परम अशक्य. हें सिद्ध.

---

## शायशीवा सिद्धांत.

जर कोणत्ये एक त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाचे एक कोना बराबर आहे. आणि त्या बरोबर कोनाचे दोहोंकडील बाजू प्रमाणांत आहेत, तर ते दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत.




**अबक, डईफ** हे दोन त्रिकोण असतील, जांत **अ** कोन **ड** कोना बराबर आहे, आणि या बरोबर कोनांचे दोहोंकडील **अब, अक** या बाजू **डई, ईफ** या दोन बाजूंचे संगातीं प्रमाणांत असतील, तर **अबक** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाशीं समकोन होईल.

ह्मणोन **डग, अब** चे बराबर कर आणि **डह, अक** चे बराबर कर. नंतर **हग** सांध.

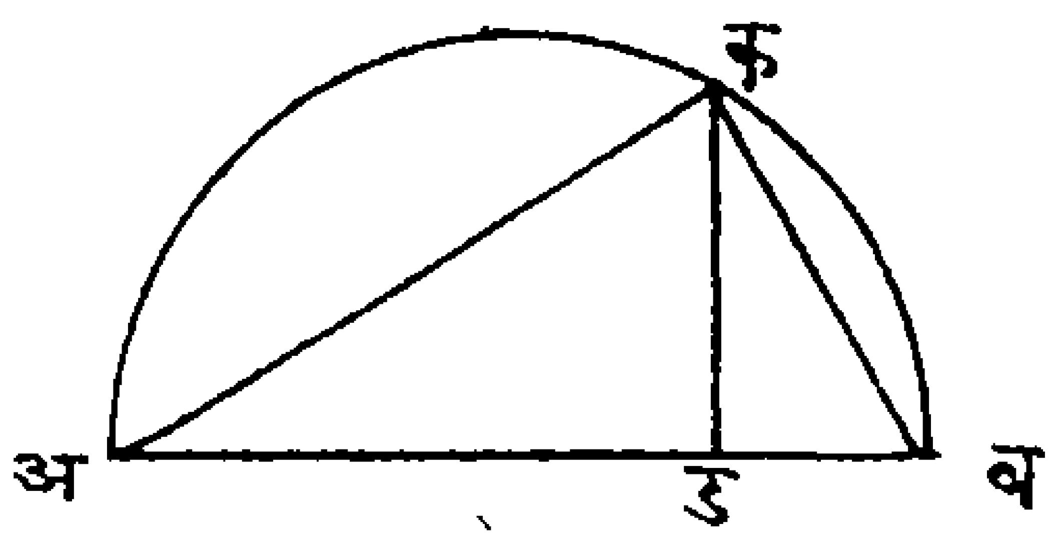
आतां **अबक, डगह** या दोन त्रिकोणांत प्रत्येकाचा दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील कोन बराबर आहेत. याजकरितां (१सि०प्र०) हे दोन ही

त्रिकोण एकरूप आहेत. यास्तव **ग** आणि **ह** हे दोन कोन **ब** आणि **क** या दोन कोनांचे बरोबर आहेत. परंतु (वर सांगीतल्या प्र०) **अब, अक** या दोन बाजू अथवा त्यांचे बरोबर **डग, डह** या दोन बाजू **डई, डफ** या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, या पासून (८२सि०प्र०) निघतें कीं, **गह** रेघ **ईफ** शीं समांतर रेघ आहे. याजकरितां (१४ सि०प्र०) **ई** आणि **फ** हे दोन कोन **ग** आणि **ह** या दोन कोनांचे बराबर आहेत, अथवा त्याचे बरोबरीचे **ब** आणि **क** या दोन कोनांचे बरोबर आहेत हें सिद्ध.

## सत्यायशीवा सिद्धांत.

काटकोन त्रिकोणांत काटकोना पासून कर्णावर लंब केला तर तो लंब त्या कर्णाचे दोन खंडांचें मध्य प्रमाण आहे; आणि काटकोनाचे दोहोंकडील बाजू प्रत्येकीं कर्ण आणि त्या बाजूकडील कर्णाचा खंड यांचें मध्य प्रमाण आहेत.

**अबक** काटकोन त्रिकोण असेल, जांत **क** काटकोना पासून **अब** कर्णावर **कड** लंब केला तर




**कड** हें **अड** आणि **बड** यांचें मध्य प्रमाण आहे.
**अक** हें **अब** आणि **अड** यांचें मध्य प्रमाण आहे.
**बक** हें **अब** आणि **बड** यांचें मध्य प्रमाण आहे.

अथवा.

**अड : कड :: कड : बड**
**अब : अक :: अक : अड**
**अब : बक :: बक : बड**

ह्मणोन **अबक, अडक** या दोन त्रिकोणांत **क** आणि **ड** हे दोन काटकोन बराबर आहेत, आणि **अ** कोन त्या दोन ही त्रिकोणांस साधारण आहे, याजकरितां (१७ सि० १ कु० प्र०) त्यांचे तिसरे ही कोन बराबर आहेत, ह्मणोन हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत. या रीती वरून **अबक, बडक** या दोन त्रिकोणांचे **क** आणि **ड** हे दोन काटकोन बराबर आहेत, आणि **ब** कोन दोहोंस साधारण आहे, याजकरितां वरचे रीतीनें यांचे तिसरे ही कोन बराबर आहेत. ह्मणोन हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत.

यापासून कळलें कीं **अबक, अडक** आणि **बडक** हे तीन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत, याजकरितां (८५ सि० प्र०) यांचा बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे.

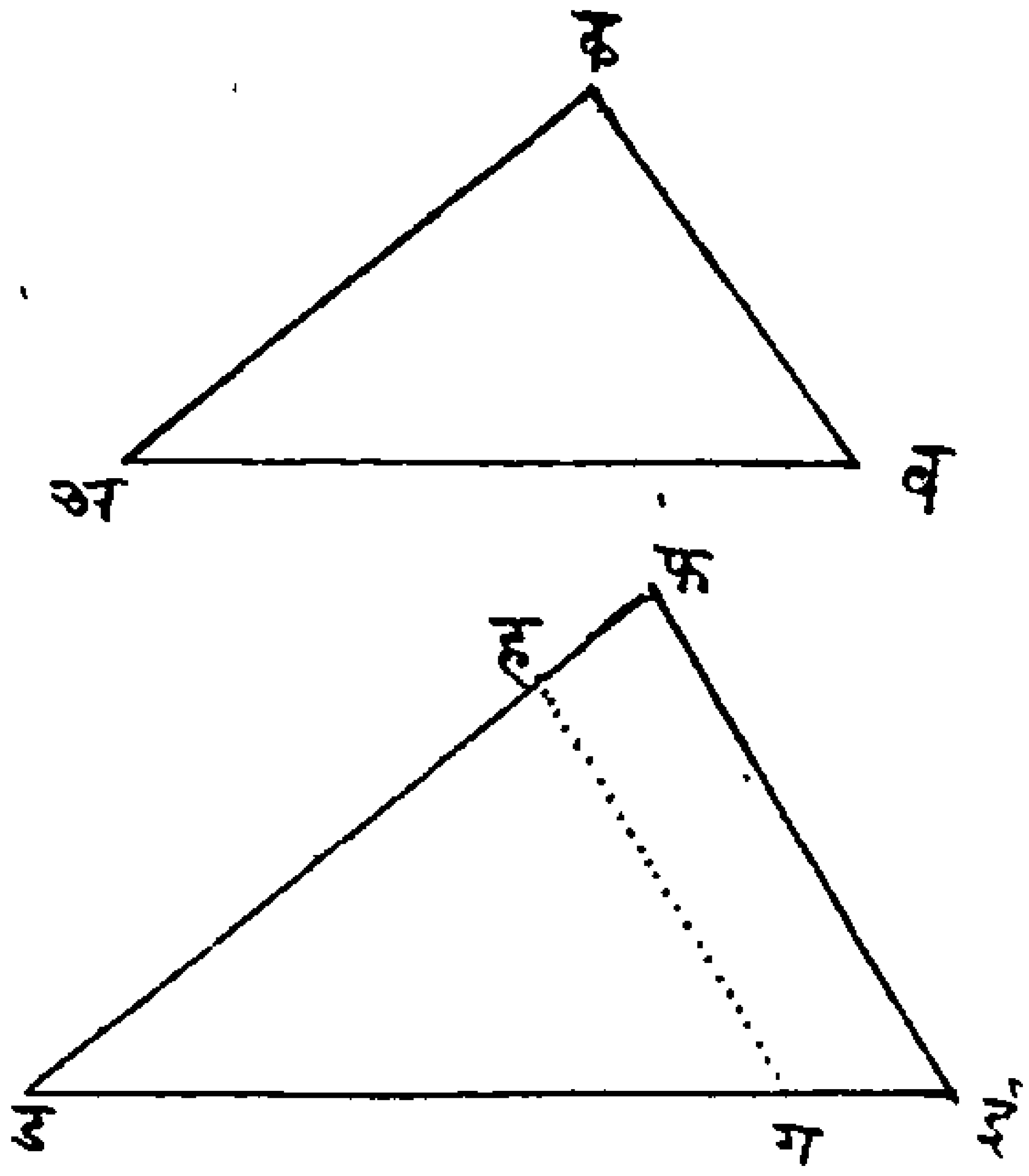
**अड : डक :: डक : बड**
**अब : अक :: अक : अड**
**अब : बक :: बक : बड**

हें सिद्ध.

कुरलरी. (५२ सि० प्र०) अर्ध वर्तुळांत जे कोन आहेत. ते काटकोन आहेत. यापासून निघतें कीं जर अर्धपरिघांत कोणतें ही स्थळ जसें एथें **क** यापासून **अब** व्यासावर लंब केला आणि त्या **क** पासून व्यासाचे दोन शेवटां पर्यंत दोन ज्या केल्या नर **अक, बक, कड** या तीन रेषा त्या सिद्धांता प्रमाणें मध्य प्रमाणें आहेत, अथवा (७७ सि० प्र०) **कड² = अड० बड** आणि **अक² = अब० अड** आणि **बक² = अब० बड**.

# अठ्यायशींवा सिद्धांत.

समकोन अथवा सरूप जे त्रिकोण ते परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे प्रत्येक सजाती बाजूंचे वर्ग.




**अबक, डईफ** हे दोन समकोन अथवा सरूप त्रिकोण असतील जांत **अब, डई** या दोन सजाती बाजू आहेत, तर **अबक** हा त्रिकोण **डईफ** या त्रिकोणास आहे, जसा **अब** चा वर्ग **डई** चे वर्गास अथवा जर **अब**² : **डई**².

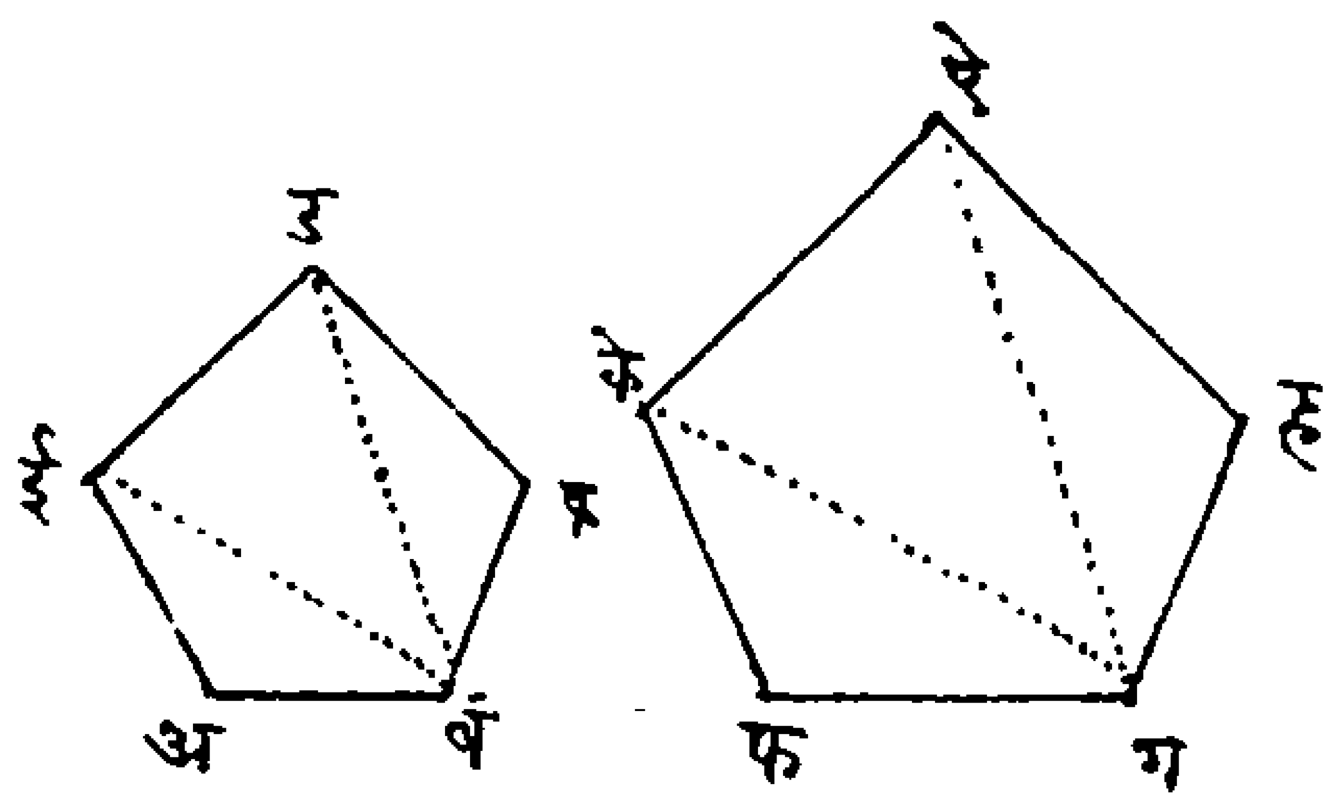
ह्मणोन (वर सांगीतल्याप्र०) हे दोन त्रिकोण समकोन अथवा सरूप आहेत, याजकरितां (८४ सि० प्र०) त्यांचा सजाति बाजू प्रत्येकीं प्रमाणांत आहेत, आणि (८१ सि० ४ कु० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्परांस आहेत, जसे त्या समान कोनांचे दोहोंकडील सजाति बाजूंचे काटकोन चौकोन. याजकरितां (८४ सि० प्र०) **अब : डई : : अक : डफ**.

आणि **अब : डई : : अब : डई** ह्मणजे हीं दोन युग्में एकच आहेत. यास्तव प्रमाण एकच आहे याजकरितां (७५ सि० प्र०) **अब**² : **डई**² : : **अब० अक : डई० डफ** परंतु (८१ सि० ४ कु० प्र०) **अबक : डईफ : : अब० अक : डई० डफ** याजकरितां **अबक : डईफ : : अब**² : **डई**² हें सिद्ध

# न्यायशीवासिद्धांत.

सर्व सरूपाकृती परस्परांस आहेत. जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग

**अबकडई, फगहऐके**




या दोन सरूपाकृती असतील. जांत **अब, फग** या दोन सजाति सरूप बाजू आणि **बक. गह** या दोन सजाति सरूप बाजू या प्रमाणें पुढेंही तर **अबकडई** ही आकृति **फगहऐके** या आकृतीस होईल, जसा **अब : फग**

ह्मणोन **ब** आणि **ग** या बरोबर कोनांपासून रेषा करून **बई, बड, गके, गऐ** सांधु अशाकीं दोनही आकृतींत तीन तीन त्रिकोण होतील.

(वर सांगीतल्याप्र०) या दोन आकृती सरूप आहेत, याजकरितां - (७० व्या०प्र०) समकोन आहेत, आणि त्यांचे कोनांचा दोहोंकडील सजाति सरूप बाजू अनुक्रमानें प्रमाणांत आहेत.

आतां **अ** कोन **फ** कोनाबरोबर आहे, आणि त्या दोन कोनांचे दोहोंकडील **अब, अई** या बाजू **फग. फके** या बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत.

याजकरितां **अबई, फगके** हे दोन त्रिकोण (८६सि०प्र०) समकोन आहेत. या रीतीनें **बकड, गहऐ** हे दोन त्रिकोणही समकोन आहेत, कारण **क** कोन **ह** कोनाबरोबर आहे; आणि **बक, कड** या **क** कोनाचे दोहोंकडील बाजू **गह, हऐ** या **ह** कोनाचे दोहोंकडील बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत; पुनः जर **अईड, फकेऐ** या दोन बराबर कोनांतून **अईब, फकेग** हे दोन बराबर कोन वजा केले तर **बईड** कोन **गकेऐ** कोनाबराबर राहील, आ

णि जर कडई, हऐके या दोन बरोबर कोनांतून कडब, हऐग हे दोन बरोबर कोन वजा केले तर बडई कोन गऐके कोनाबरोबर राहील; यापासून बडई, गऐके या दोन त्रिकोणांत दोन कोन बराबर आहेत; यास्तव ते समकोन आहेत; यांतून निघतें कीं एक आकृतीचे सर्व त्रिकोण दुसऱ्ये आकृतीचे सर्व त्रिकोणांशीं अनुक्रमें प्रत्येक सरूप आहेत.

परंतु समकोन त्रिकोण सरूप आहेत, आणि (८८ सि॰प्र॰) ते परस्परांस प्रमाण आहेत, जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग.

याजकरितां **अबई**▷ : **हगके**▷ :: **अब**$^2$ : **फग**$^2$

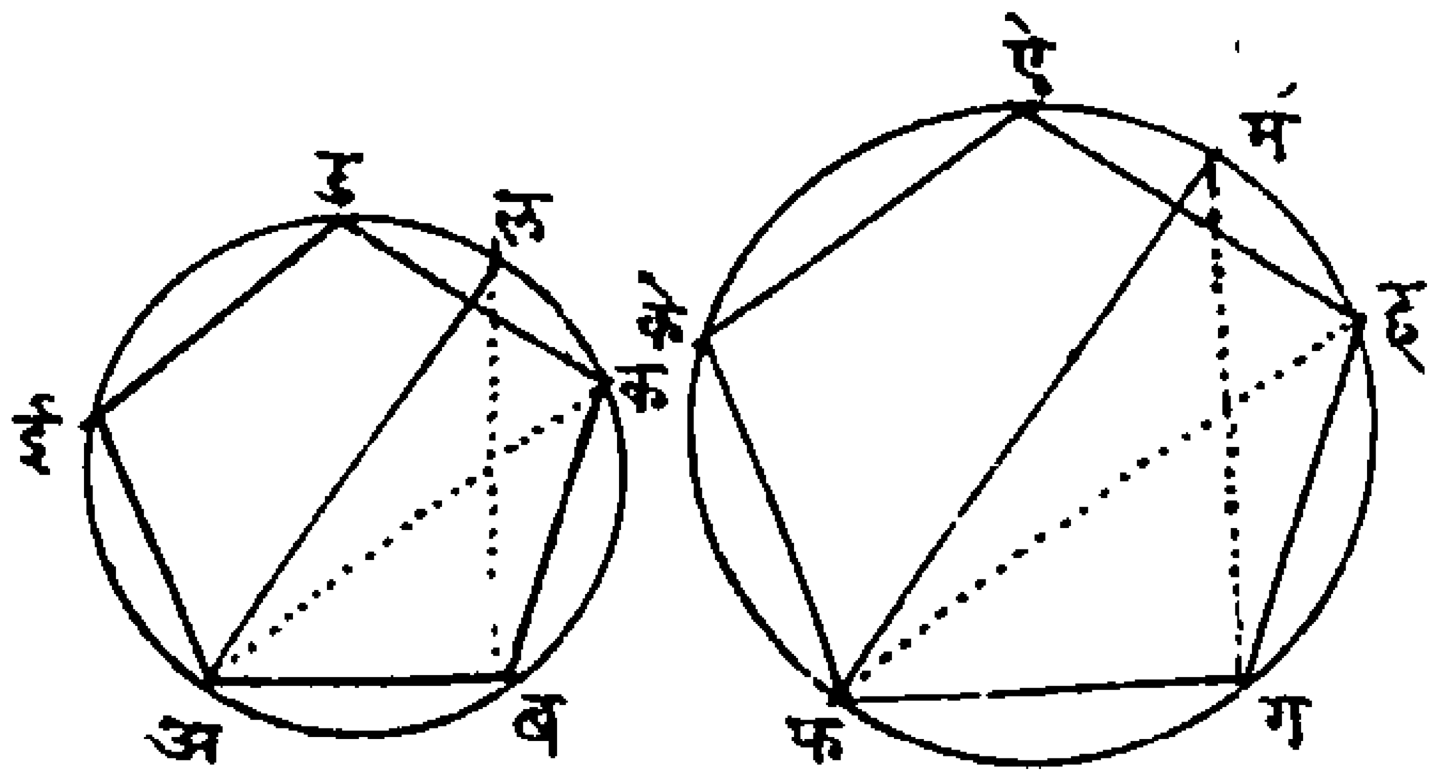
आणि **बकड**▷ : **गहऐ**▷ :: **बक**$^2$ : **गह**$^2$

आणि **बडई**▷ : **गऐके**▷ :: **डई**$^2$ : **ऐके**$^2$

परंतु या बहुकोन आकृति (वरसांगीतल्या प्र॰) सरूप आहेत, यास्तव यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत, आणि त्या सजाति बाजूंचे वर्गही (७४ सि॰प्र॰) प्रमाणांत आहेत; यापासून या सर्व युग्मांचें गुणोत्तरबराबर ह्मणजे **अब**$^2$:**फग**$^2$, **बक**$^2$:**गह**$^2$ आणि **डई**$^2$:**ऐके**$^2$ याजकरितां त्यात्या युग्मांचे त्रिकोणांचें गुणोत्तर ही बराबर, ह्मणजे **अबई**:**फगके**, **बकड**:**गहऐ** आणि **बडई**:**गऐके** आणि या त्रिकोणांचें गुणोत्तर हेंच आहे, जसें **अब**$^2$:**फग**$^2$ यांतून निघतें कीं (७२ सि॰प्र॰) सर्व अग्रसरांची बेरीज ह्मणजे **अबकडई** ही आकृती सर्व उपाग्रसरांचे बेरिजेस ह्मणजे **फगहऐके** या आकृतीस आहे जसा **अब**$^2$ : **फग**$^2$ हें सिद्ध.

# नवदावा सिद्धांत.

वर्तुळांतील सरूपाकृतींचा सजाति बाजू आणि त्या आकृतींचा परिमिती यांचें गुणोत्तर त्या दोन वर्तुळांचे व्यासांचे गुणोत्तरा बराबर आहे.




**अबकडई, फगहऐके** या दोन सरूपाकृती वर्तुळांत असतील जा वर्तुळांचे व्यास **अल, फम** आहेत. तर एक आकृतीचा **अब, बक** इत्यादिक बाजू अनुक्रमानें दुसऱ्या आकृतीचे **फग, गह** इत्यादिक सजाति बाजूंस होतील, अथवा एकआकृतीची परिमिती ह्मणजे **अब + बक + कड** इत्यादिकती दुसऱ्ये-आकृतीचे परिमितीस ह्मणजे **फग + गह + हऐ** इत्यादिकांस होत्ये, जसा **अल** व्यास **फम** व्यासास.

ह्मणोन **अक, फह** या दोन सजाति कर्णरेघा कर. आणि **बल, गम** सांध.

आतां (वरसांगीतल्या प्र०) या दोन बहुकोन आकृतीसरूप आहेत, याजकरितां (७० व्या० प्र०) समकोन ही आहेत, आणि त्यांचे सजाति बाजूंचें गुणोत्तर एकच आहे याजकरितां **अबक, फगह** या दोन त्रिकोणांत **ब** कोन **ग** कोना बराबर आहे, आणि **अब, बक** या दोन बाजू **फग, गह** या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, याजकरितां (८६ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत यास्तव **अकब** कोन **फहग** कोना बराबर आहे, परंतु **अकब** कोन **अलब** कोना बराबर आहे,

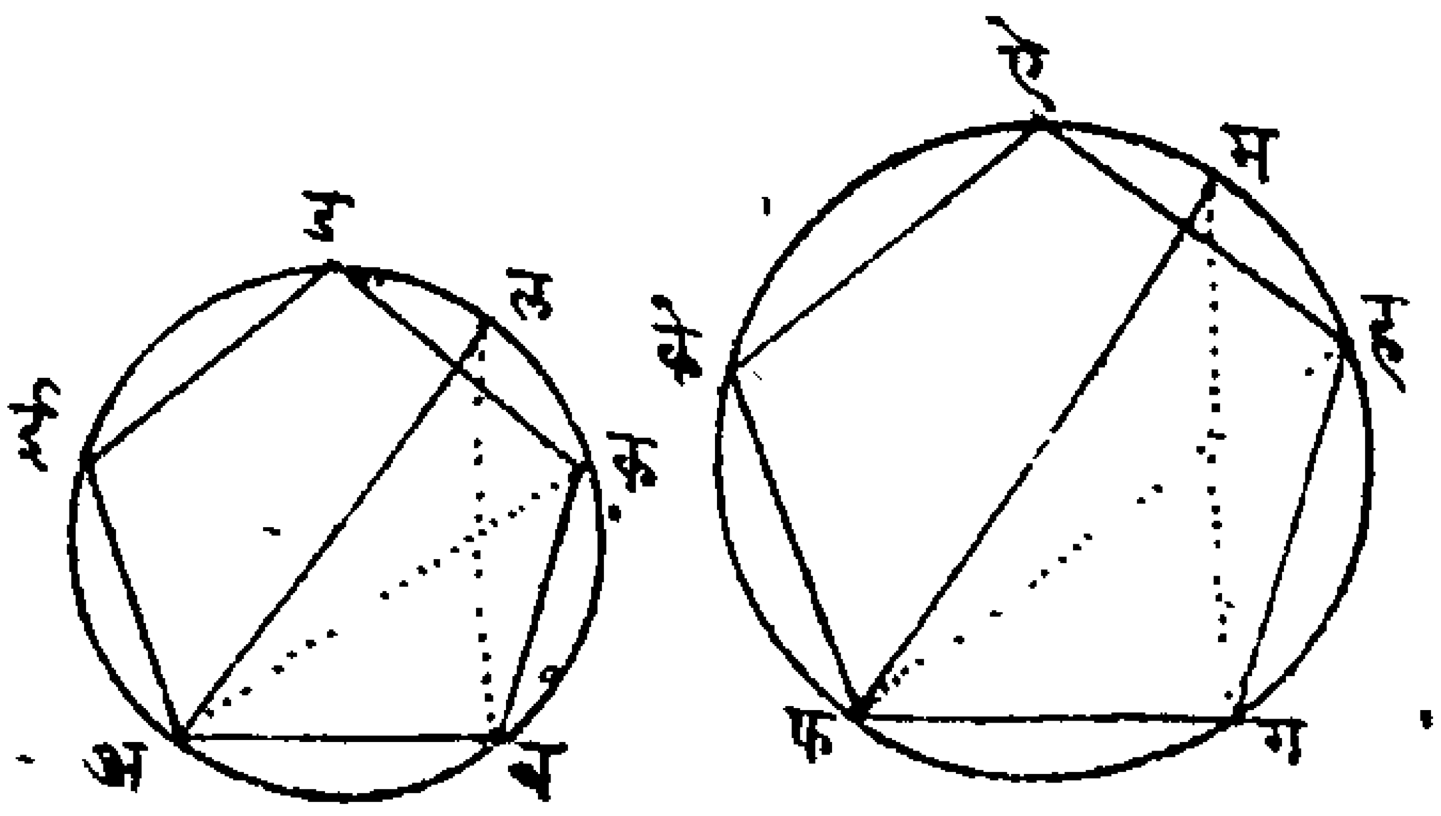
कारण हे दोनही कोन एकच **अब** कोसावर आहेत. आणि **फहग** कोन **फमग** कोनाबराबर आहे, कारण हे दोन कोन एकच **फग** कोसावर आहेत, याजकरितां (प्र० प्र० प्र०) **अलब** कोन **फमग** कोना बराबर आहे, आणि पुनः **अबल** आणि **फगम** हे दोन काट कोन आहेत, कारण अर्धवर्तुळांत आहेत. याजकरितां **अबल, फगम** या दोन त्रिकोणांत दोन कोन बराबर ह्मणोन हे समकोन आणि (८५ सि० प्र०) यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे **अब : फग :: अल** ह्मणजे एक वर्तुळाचा व्यास: **फम** ह्मणजे दुसऱ्ये वर्तुळाचे व्यासाला.

या रीतीनें दाखविलें जानें कीं एका आकृतीचा प्रत्येक बाजू **बक. कड** इत्यादिक यांचें दुसऱ्ये आकृतीचे **गह, हऐ** इत्यादिक प्रत्येक सजाति बाजूंशीं गुणोत्तर **अल, फम** यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे, आणि (७२ सि० प्र०) या बाजूंचे बेरिजांचें गुणोत्तर ही **अल, फम** यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे, ह्मणजे **अब + बक + कड** इत्यादिक. **फग + गह + हऐ** इत्यादिक :: **अल** व्यास : **फम** व्यासास हें सिद्ध.

---

## एक्यांणवावा सिद्धांत.

वर्तुळांतील सरूपाकृती परस्परांस आहेत, जसे त्या दोन वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग.




**अबकडई. फगहऐके** या दोन सरूपाकृति दोन वर्तुळांत असतील, जा वर्तुळांचे व्यास **अल, फम** आहेत, तर **अबकडई** या

बहुकोनाचें क्षेत्र **फगहऐके** या बहुकोनाचे क्षेत्रास आहे, जसा **अल²**: **फम²**.

म्हणोन या दोन आकृती सरूप आहेत, याजकरितां (८९ सि॰प्र॰) परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग **अब²**: **फग²** इत्यादिक, परंतु (९० सि॰प्र॰) **अब**, **फग** या बाजू परस्परांस आहेत, जसे त्या वर्तुळांचे दोन व्यास **अल**: **फम** याजकरितां (७४ सि॰प्र॰) या बाजूंचे वर्ग म्हणजे **अब**: **फग**:: वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग म्हणजे **अल²**: **फम²** याजकरितां ही (प्र॰प्र॰प्र॰) **अबकडई** ही बहुकोन आकृतिः **फगहऐके** या बहुकोन आकृति:: **अल²**: **फम²** हें सिद्ध.

## व्याणवावा सिद्धांत

सर्व वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत. जसे त्यांचे व्यास, **द** आणि **ध** हे दोन वर्तुळांचे व्यास आहेत. अशी कल्पना कर तसेंच **क** आणि **ख** हे दोन त्याच वर्तुळांचे परिघ आहेत तर

**दः धः: कःख**

अथवा

(८५ व्या॰प्र॰) **दः कः: धःख**

म्हणोन (९० सि॰प्र॰) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृतीचे परिमितींचें गुणोत्तर आणि त्या वर्तुळांचे व्यासांचें गुणोत्तर एकच आहे.

आतां हा गुणप्रकार सर्वसरूप बहुकोन आकृतींवर लागतो, त्या बहुकोन आकृतींस कितीही बाजू असोत, मनांत आणकीं बाजूंची संख्या अति बहुत आणि त्या बाजूंची प्रत्येक लांबी अतिच लाहान अशी कीं त्या बा

केवळ लाहान यामुळें ती बहुकोन आकृति केवळ वर्तुळपरिघाकारच होऊन गेली आहे. तर तशो बहुकोन आकृतीचे बाजूंची परिमिती आणि वर्तुळांच्या परिघ एकच आहे; यांतून निघतें कीं वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यास हें सिद्ध.

## त्र्यांणवावा सिद्धांत.

वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यासांचे अथवा त्रिज्यांचे वर्ग

**अ** आणि **आ** हीं दोन वर्तुळांची क्षेत्रफळें आहेत, असें मनांत धर, तसे **द** आणि **ध** हे दोन त्या वर्तुळांचे व्यास असें ही तर

**अ : आ :: दे : धे.**

ह्मणोन (९१ सि॰ प्र॰) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृति परस्परांस आहेत, जसे त्या वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग.

आतां मनांत आण कीं बहुकोनाचे बाजूंची संख्या वाढविल्यामुळें त्या बाजू अतिच लाहान झाल्या या पासून ती बाजूंची परिमिती केवळ परिघाचेंच माप झाली ह्मणून ती परिघाचे बरोबर झाली तर या पासून निघतें कीं वर्तुळाचें आणि बहुकोनाचें क्षेत्रफळ एकच झालें याजकरितां वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यासांचे वर्ग हें सिद्ध.

कुरलरी.(९२ सि॰ प्र॰) वर्तुळ परिघांचें आणि त्यांचे व्यासांचें गुणोत्तर एकच याजकरितांही वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे परिघांचे वर्ग.

बहुकोनाचें क्षेत्र **फगहऐके** या बहुकोनाचे क्षेत्रास आहे, जसा **अल२ :**
**फम२**.

ह्मणोन या दोन आकृती सरूप आहेत, याजकरितां (८९ सि॰प्र॰) परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग **अब२ : फग२** इत्यादिक, परंतु (९० सि॰प्र॰) **अब, फग** या बाजू परस्परांस आहेत, जसे त्या वर्तुळांचे दोन व्यास **अल : फम** याजकरितां (७४ सि॰प्र॰) या बाजूंचे वर्ग ह्मणजे **अब : फग : :** वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग ह्मणजे **अल२ :**
**फम२** याजकरितां ही (प्र॰प्र॰प्र॰) **अबकडई** ही बहुकोन आकृति : **फगहऐके** या बहुकोन आकृति : : **अल२ : फम२** हें सिद्ध.

---

## व्यांणवावा सिद्धांत

सर्व वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत. जसे त्यांचे व्यास, **द** आणि **ध** हे दोन वर्तुळांचे व्यास आहेत. अशी कल्पना कर तसेंच **क** आणि **ख** हे दोन त्याच वर्तुळांचे परिघ आहेत तर

**द : ध : : क : ख**

अथवा

(८५ व्या॰प्र॰) **द : क : : ध : ख**

ह्मणोन (९० सि॰प्र॰) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृतीचे परिमितींचें गुणोत्तर आणि त्या वर्तुळांचे व्यासांचें गुणोत्तर एकच आहे.

आतां हा गुणप्रकार सर्वसरूप बहुकोन आकृतींवर लागतो, त्या बहुकोन आकृतींस किती ही बाजू असोत, मनांत आणकीं बाजूंची संख्या अति बहुत आणि त्या बाजूंची प्रत्येक लांबी अतिच लाहान अशी कीं त्या बाजू

केवळ लाहान यामुळें ती बहुकोन आकृति केवळ वर्तुळपरिघाकारच होऊन गेली आहे. तर तशी बहुकोन आकृतीचे बाजूंची परिमिती आणि वर्तुळांचा परिघ एकच आहे; यांतून निघतें कीं वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यास हें सिद्ध.

---

## त्र्यांणवावा सिद्धांत.

वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यासांचे अथवा त्रिज्यांचे वर्ग

**अ** आणि **आ** हीं दोन वर्तुळांची क्षेत्रफळें आहेत, असें मनांत धर, तसे **द** आणि **ध** हे दोन त्या वर्तुळांचे व्यास असें ही तर

अ: आ:: द²: ध².

म्हणोन (९१ सि॰ प्र॰) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृति परस्परांस आहेत, जसे त्या वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग.

आतां मनांत आण कीं बहुकोनाचे बाजूंची संख्या वाढविल्यामुळें त्या बाजू अतिच लाहान झाल्या यापासून ती बाजूंची परिमिती केवळ परिघाचेंच माप झाली म्हणून ती परिघाचे बरोबर झाली तर यापासून निघतें कीं वर्तुळाचें आणि बहुकोनाचें क्षेत्रफळ एकच झालें याजकरितां वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यासांचे वर्ग हें सिद्ध.

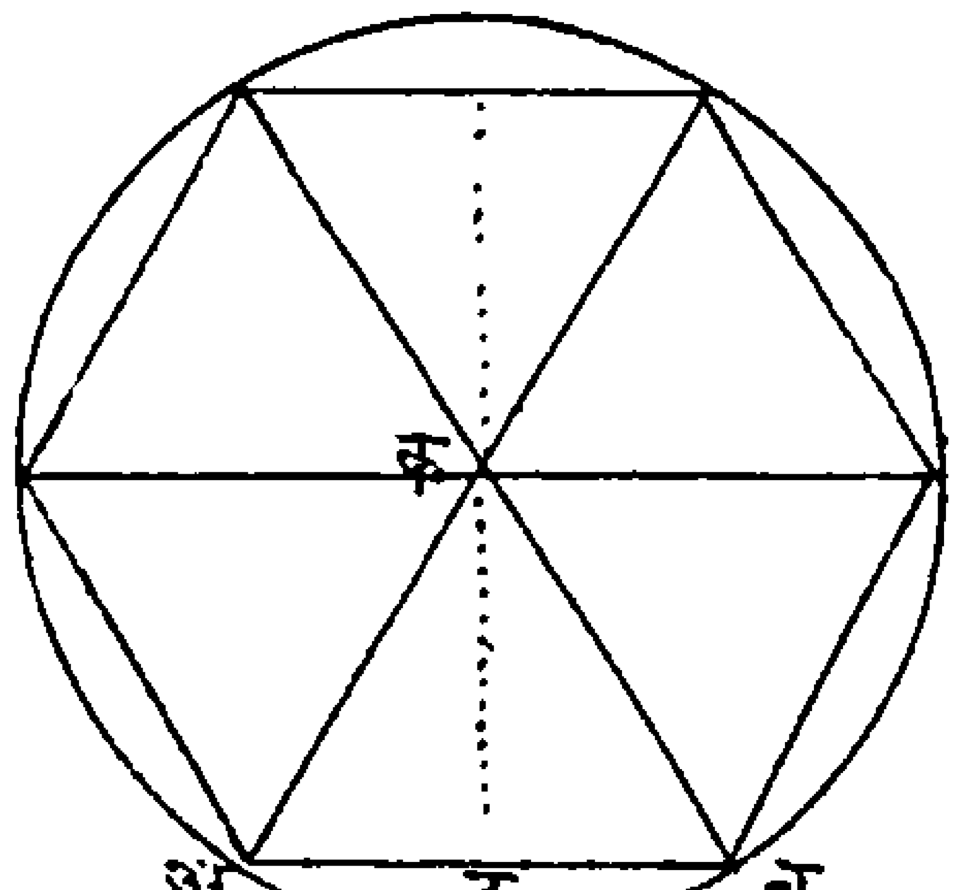
कुरलरी. (९२ सि॰ प्र॰) वर्तुळपरिघांचें आणि त्यांचे व्यासांचें गुणोत्तर एकच याजकरितांही वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे परिघांचे वर्ग.

---

# चौऱ्यांणवावा सिद्धांत.

कोणत्येही वर्तुळांचे क्षेत्रफळ त्या वर्तुळाचा अर्धाव्यास आणि अर्धपरिघ यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

मनांत आणकीं एक वर्तुळांत समबाजू बहुकोन आकृति केली. आणि वर्तुळ मध्यापासून त्या बहुकोन आकृतीचे कोनापर्यंत त्रिज्या केल्या; अशाकीं त्या आकृतीस जितक्या बाजू आहेत, तितके त्रिकोण होतील. नंतर त्यांतील एक **अबक** त्रिकोणांत **अब** बाजूचे **ड** मध्यावर **क** शिरापासून **कड** लंब केला आहे.




आतां (२६ सि० २ कु० प्र०) **अबक** त्रिकोण एक काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे, जो काटकोन चौकोन त्या त्रिकोणाचा अर्धा पाया आणि उंची यांत होतो; ह्मणोन **अबक** त्रिकोण **अड** आणि **कड** या रेषांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे, याजकरितां सगळें बहुकोन अथवा त्यांतील सर्व त्रिकोणाची बेरीज, साधारण उंची **कड** आणि त्या आकृतीचे सर्व बाजूंचे अर्धांची बेरीज अथवा अर्धपरिमिती यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

आतां मनांत आणकीं त्या बाजूंची संख्या अतिच वाढविली यामुळें त्या बाजू अतिशयेंच लाहान होऊन केवळ परिघरूपच झाल्या, यास्तव परिमिती परिघाशीं मिळाली, याजकरितां वर्तुळांचें क्षेत्रफळ अथवा वर सांगितल्या या परिघरूप बहु कोनांचें क्षेत्रफळ त्रिजा, आणि अर्धा

परिघ यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे हें सिद्ध.

## पातळी आणि भरिवांचा व्याख्या

८८ दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्नरेघ होये, त्या दोनही जेथें मिळून परस्पर छेदितात.

८९. पातळीवर लंब ती रेघ होय, जी रेघ त्या पातळींतील सर्व रेघांवर लंब आहे.

९० एक पातळी दुसऱ्ये पातळीवर लंब आहे. जर त्या दोन पातळ्यांचे साधारण छिन्नावर केलेले लंब परस्परांवर लंब होतील.

९१. एक पातळीचा दुसऱ्ये पातळीवर झोंक अथवा कोन तो होय ह्मणजे दोन पातळ्यांचे छिन्न रेघेवर जे दोन पातळ्यांवरील लंब एकत्र मिळतात. त्या लंब रेघांचें अंतरांचें माप होय.

९२. समांतर पातळ्या त्याच होत, जा कितीही वाढविल्या तरीं परस्परांस मिळतनाहींत, अथवा जांचे मध्यें लंबांतर सर्वत्र बराबर राहातें.

९३ भरींव कोन तोच होय जो बहुत पातळ्या एक बिंदूवर मिळाल्या यांपासून होतो त्या अति थोडया असातीन.

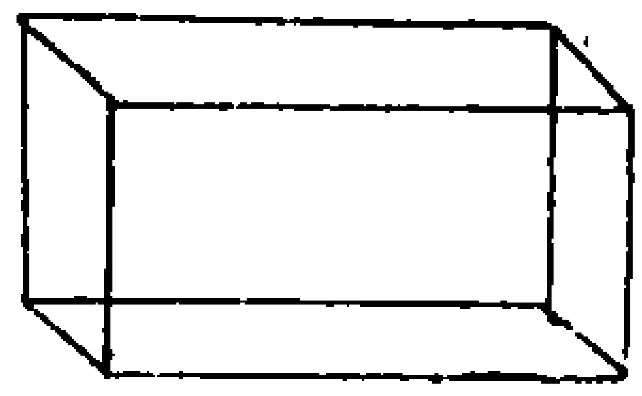
९४ सरूप भरींवें तींच होत जांचे सर्व भरींव कोन अनुक्रमें प्रत्येकांशीं बराबर आहेत, आणि त्यांचा मर्यादा सर्व पातळ्यां बरोबर सरूपाकृति सारख्या आहेत.

९५ पृजंम ह्मणजे एक भरींव आहे जाचे दोनी शेवट समांतर पातळी बराबर सरूपाकृति आहेत, आणि त्याचा बाजू या शेवटांस संलग्न असोन समांतर बाजू चौकोन आहेत,

९६ पृजंमास त्याचे शेवटांचे आकृतीवरून नांवें अनेक आहेत, जसें त्रिकोण पृजंम, चौकोन पृजंम, पंचकोन पृजंम इत्यादिक.

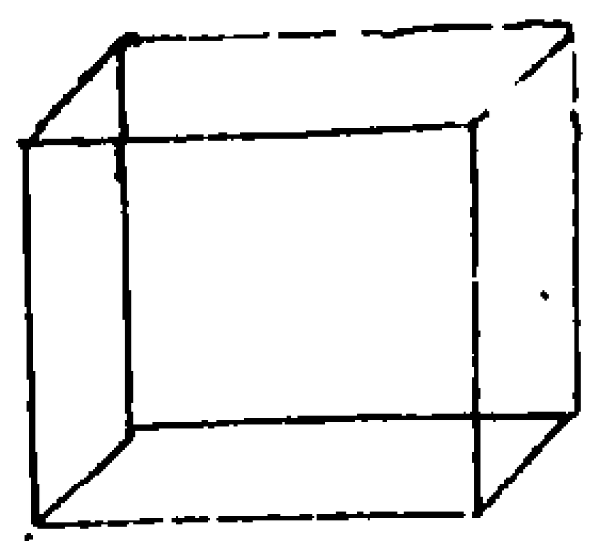
९७ काटकोन पृजंम तेंच होय, कीं ज्यांचे बाजूंचीपातळी त्याचे पायाचे अथवा शेवटाचे पातळीवर लंब आहे.

९८ समांतर भरीव एक पृजंम आहे जाचा मर्यादा साहा समांतर बाजूचौकोन पातळी आहेत, आणि बाजूंचे जोड समांतर आणि सारिखे आहेत.

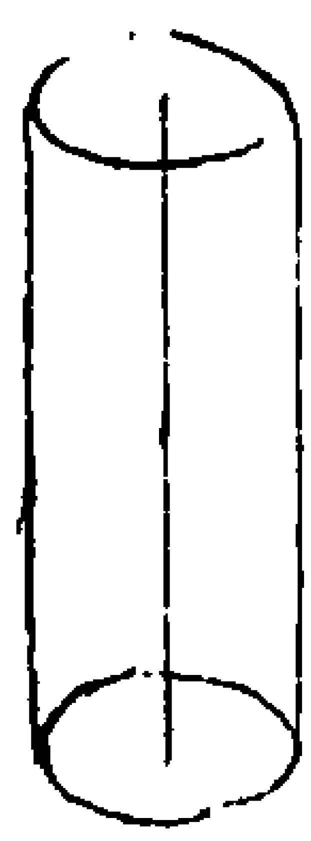


९९. काटकोन समांतर भरीव तेंच होय जाची मर्यादा पातळी सर्व काटकोन चौकोन आहे, आणि हे काटकोन चौकोन परस्परांवर लंब आहेत.

१०० घन ह्मणजे चौरस पृजंम होय, जाचा मर्यादा साहा बरोबर चौरस पातळी आहेत, आणि हे चौरस परस्परांवर लंब आहेत.

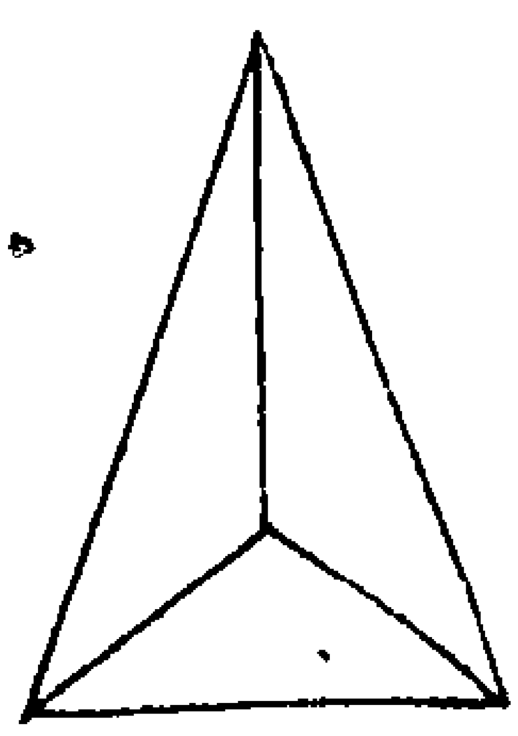


१०१ शिलिंदर ह्मणजे वर्तुळ पृजंम होय. जाचे दोन शेवट वर्तुळ आहेत. आणि मनांत येतें कीं या दोन शेवटांचे परिघां बरोबर आंसाशीं समांतर त्याचे भोंवती एक रेघ केल्या पासून बनलें आहे.



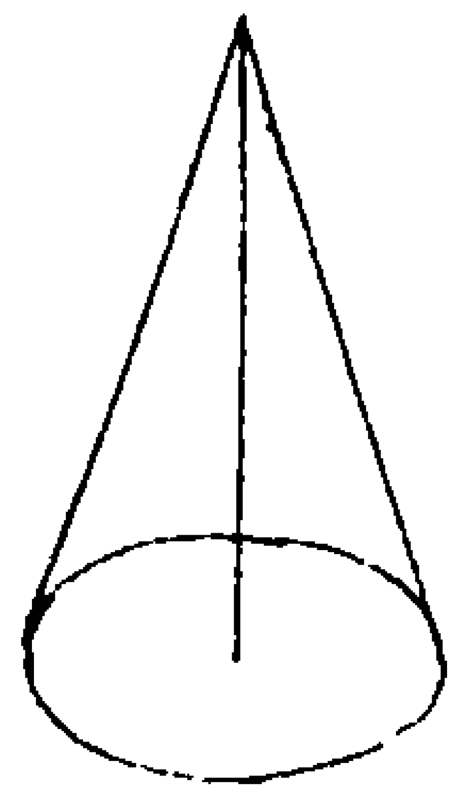
१०२ शिलिंदराचा आंस तीच रेघ होय, जी शिलिंदराचे समांतर वर्तुळ शेवटांचे मध्यबिंद सांधित्ये.

१०३ शंकु ह्मणजे एक भरीव आहे जाचा पाया कोणतीही सरळरेघाकृति पातळी आहे, आणि जाचा सर्व बाजू त्रिकोण आहेत. आणि त्या बाजूचे शिरोबिंदू पायाचे वर एक बिंदूंत मिळतात, त्या बिंदूस शंकूचें शिर ह्मणतात.



१०४ शंकूचीं नावें पृजंमासारिखीं अनेक आहेत, जशी त्यांचे पायांची आकृति ह्मणजे त्रिकोण शंकू, चौकोन शंकू, पंचकोन शंकू इत्यादिक.

१०५ वर्तुळ शंकू तोच होय ज्याचा पाया वर्तुळ आहे आणि ज्याचे आंसाचे वरल्ये शेवटावर निश्चळ रेषेचें एक टोंक आणि दुसरें टोंक पायाचे वर्तुळ परिघावर बरोबर; त्या आंसा भोंवतें फिरविल्यापासून उत्पन्न झाला असें मनांत आण.



१०६ शंकूचा आंस तीच रेघ होय, जी रेघ शंकूचे वर्तुळ पायाचा मध्यबिंदू आणि शंकूचा शिरोबिंदू यांतें सांधित्ये.

१०७ सरूप शंकू आणि सरूप शिलिंदर तेच होत ज्यांची उंची आणि पायाचा व्यास हीं परस्पर प्रमाणांत आहेत.

१०८ गोल एक भरींव आहे, ज्याची मर्यादा वांकडी पातळी, त्या गोलांतील एक बिंदूपासून सर्वत्र सारिख्ये अंतरानें आहे, आणि त्या आंतील बिंदूस गोलमध्य ह्मणतात. मनांत आणिलें कीं अर्ध वर्तुळ त्याचेच व्यासा भोंवतें फिरलें यापासून हें गोल उत्पन्न झालें.

१०९ गोलाचा आंस तीच सरळ रेघ होय, कीं जीचेवर अर्धवर्तुळ फिरतें आणि गोलाचा मध्य तोच होय, जो अर्धवर्तुळाचा मध्य ह्मणजे गोल आणि अर्धवर्तुळ यांचा मध्य एकच आहे कीं ज्यापासून त्यांची मर्यादा वांकडी पातळी सर्वत्र बरोबर अंतरानें आहे.

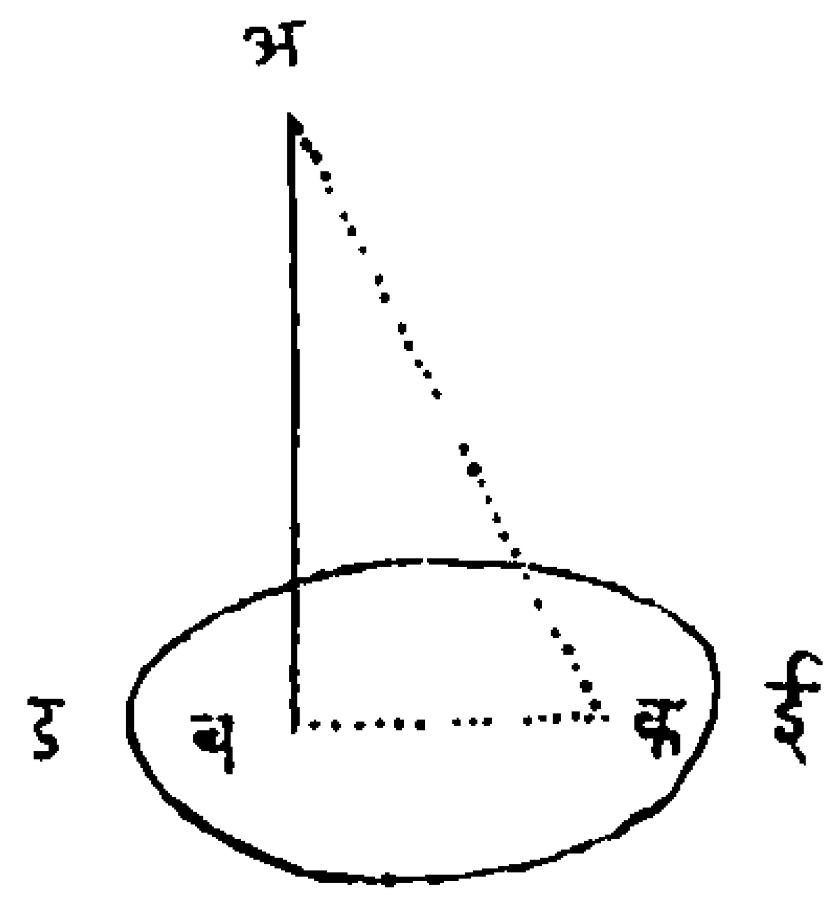
११० गोलाचा व्यास कोणती ही सरळ रेघ आहे, जी रेघ एकीकडील मर्यादा वांकडी पातळीपासून गोलमध्य बिंदू छेदून पार दुसऱ्येकडील मर्यादा वांकडी पातळी पर्यंत आहे.

१११ भरींवांची उंची तीच रेघ होय, जी रेघ भरींवांचे शिरापासून पायाव-

र लंब आहे.

## पंचांणवावा सिद्धांत.

कोण त्येही बिंदूपासून पातळीवर जी रेघ सर्वांहून लाहान करितां येत्ये ती रेघ त्या पातळीवर लंब आहे.




**इई** कोणती ही पातळी असेल, आणि तिजवर कोण त्येही **अ** बिंदूपासून **अब** रेघ लंब असेल. तर दुसरी कोणती ही रेघ जशी एथे **अक** त्याच **अ** बिंदू पासून पातळी पर्यंत केली, ती **अब** रेघेहून लांब होईल.

ह्मणोन पातळीवर **ब** आणि **क** हे दोन बिंदू रेघें करून सांध.

आतां **अब** रेघ **इई** पातळीवर (८९ व्या० प्र०) लंब आहे, याजकरितां **ब** कोन काटकोन आहे; या स्तव **क** कोनाहून मोठा आहे, याजकरितां (२१ सि० प्र०) **अब** रेघ लाहान **क** कोना समोर आहे. ती दुसऱ्या कोणत्याही रेघेहून ह्मणजे एथें जशी **अक** रेघ मोठे कोनासमोरची, तिच्येहून लाहान आहे. हें सिद्ध.

## शाहांणवावा सिद्धांत.

कोण त्येही बिंदूपासून कोण त्येही पातळी पर्यंत अंतर मापितात, तें लंब आहे.

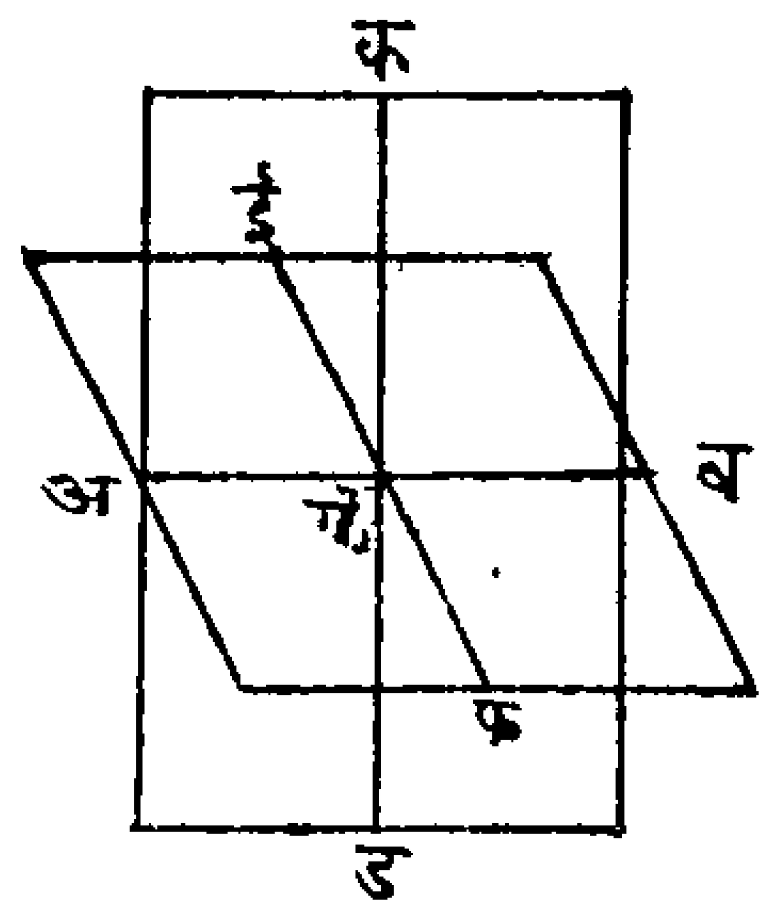
एक बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदू पर्यंत अंतर सरळ रेघेनें मापिलें

जातें, जी रेघ दोन बिंदू सांधित्ये, (६०या०प्र०) जी रेघ सर्वाहून लाहान एक बिंदू पासून दुसऱ्या बिंदू पर्यंत करितां येत्ये, अशा रीतीनें कोण त्याही बिंदू पासून कोण त्याही रेघेपर्यंत अंतर त्याच रेघेवर त्या बिंदूपासून केलेले लंबानें मापितां येईल; कारण त्या बिंदूपासून त्या रेघेवर जा रेघा करितां येतात, त्यांत (२१सि०प्र०) लंब अति लाहान रेघ आहे; या रीतीनें कोण त्येही बिंदूपासून पातळी पर्यंत जें अंतर आहे, तें त्या बिंदूपासुन त्या पातळी पर्यंत केलेले लंबानें मापितां येतें, (कारण (९५सि०प्र०) ही लंब रेघ सर्वाहून लाहान आहे, जा रेघा बिंदूपासून पातळी पर्यंत करितां येतात, त्या सर्वांहून हें सिद्ध.

---

## सत्यांणवावा सिद्धांत.

दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्न सरळ रेघ आहे.



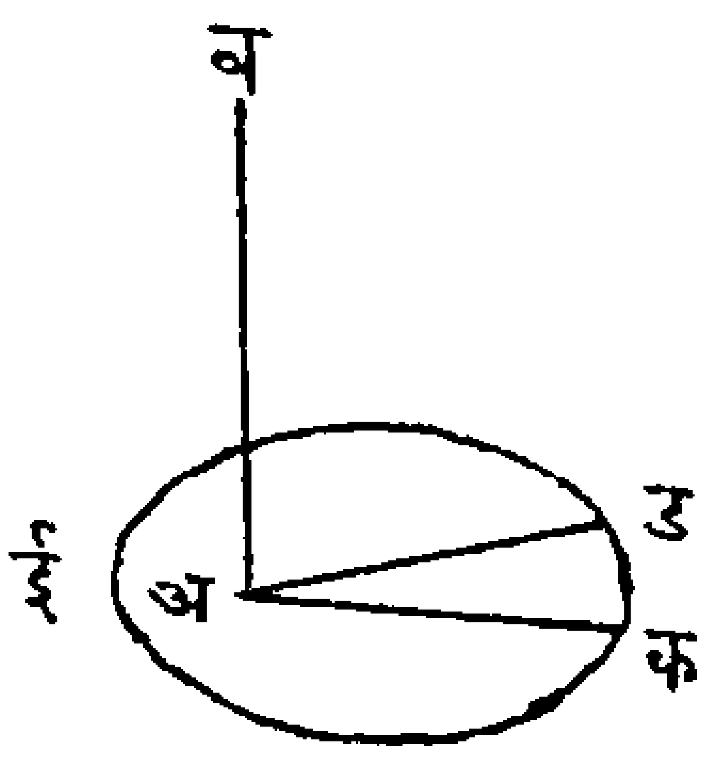

**अकबडअ, अईबफअ** या दोन पातळ्या असतील, जा परस्पर छेदितात, आणि **अ, ब** हे दोन बिंदू असतील कीं जांत दोन पातळ्या परस्पर मिळाल्या आहेत, आणि हे दोन बिंदू **अब** सरळ रेघेनें सांधिले तर ही सरळ रेघ त्या दोनही पातळ्यांचें साधारण छिन्न होईल.

ह्मणोन ही सरळ रेघ **अ** आणि **ब** या दोन बिंदूंवर दोन पातळ्यांस स्पर्श करित्ये, याजकरितां (२००या०प्र०) ही सरळ रेघ दोन पातळ्यांस **अ, ब** या दोन बिंदूंवर स्पर्श करित्ये, त्या प्रमाणें सर्व बिंदूंवर स्पर्श

करित्ये, यास्तव ही रेघ दोनही पातळ्यांस साधारण आहे, ह्मणोन दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्न सरळ रेघ आहे हें सिद्ध.

## अठ्यांणवावा सिद्धांत.

जर एक रेघ दोन रेघांचे संयोग बिंदूवर लंब असेल तर ती रेघ त्या दोन रेघांचे पातळीवर लंब होईल.



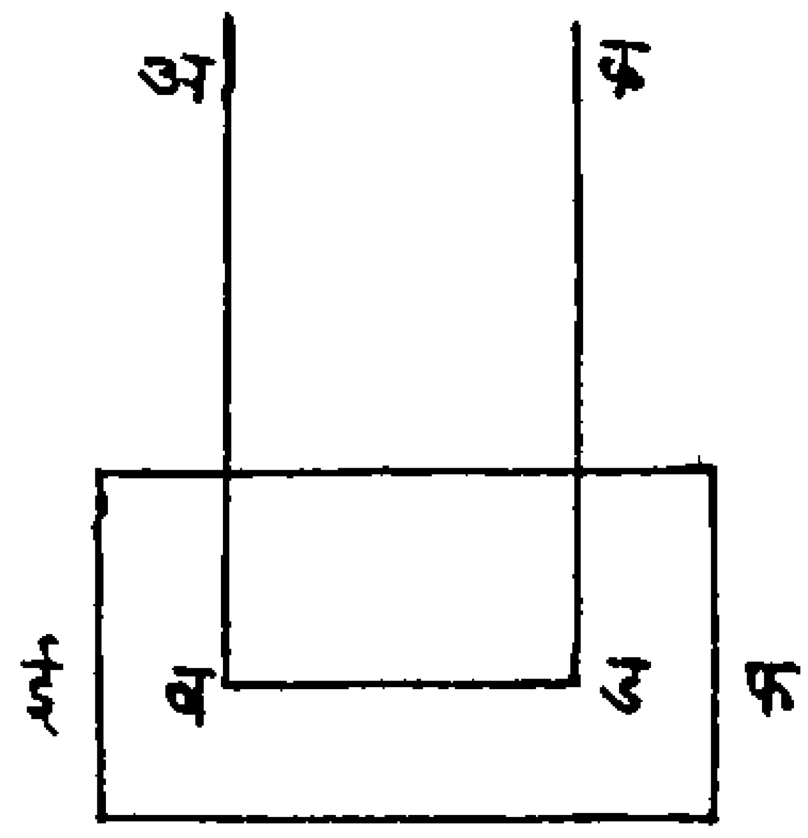

जर **अब** रेघ **अड, अक** या दोन रेघांशीं काटकोन करित्ये, तर ती **अब** रेघ **अड, अक** या दोन रेघांचे पार जी **कडई** पातळी आहे तीचे वर ही लंब होईल.

जर **अब** रेघ **कडई** पातळीवर लंब नसेल. तर दुसरी कोणतीही पातळी **अ** बिंदू पार असावी कीं जीचेवर **अब** रेघ लंब होईल, परंतु हें अशक्य, कारण (वरसागीतल्या प्र०) **बअड, बअक** हे दोन काटकोन आहेत, तेव्हां दुसरी पातळी **क** आणि **ड** या दोन बिंदूपार निश्चित असली पाहिजे, यावरून ही पातळी **अ, क** या दोन बिंदूचे, तसे **अ, ड** या दोन बिंदूचे पार गेली आहे, तेव्हां **अक, अड** या दोन रेघांचे ही पार गेली, याजकरितां या दोन रेघांची पातळी आहे हें सिद्ध.

## नव्यांणवावा सिद्धांत.

जर दोन रेघा एकच पातळीवर लंब असतील, तर त्या दोन रेघा परस्परांशीं समांतर रेघा होतील.

**अब**, **कड** या दोन रेघा **ईबडफ** पातळीवर लंब असतील तर **अब** रेघ **कड** शीं समांतर रेघ होईल.



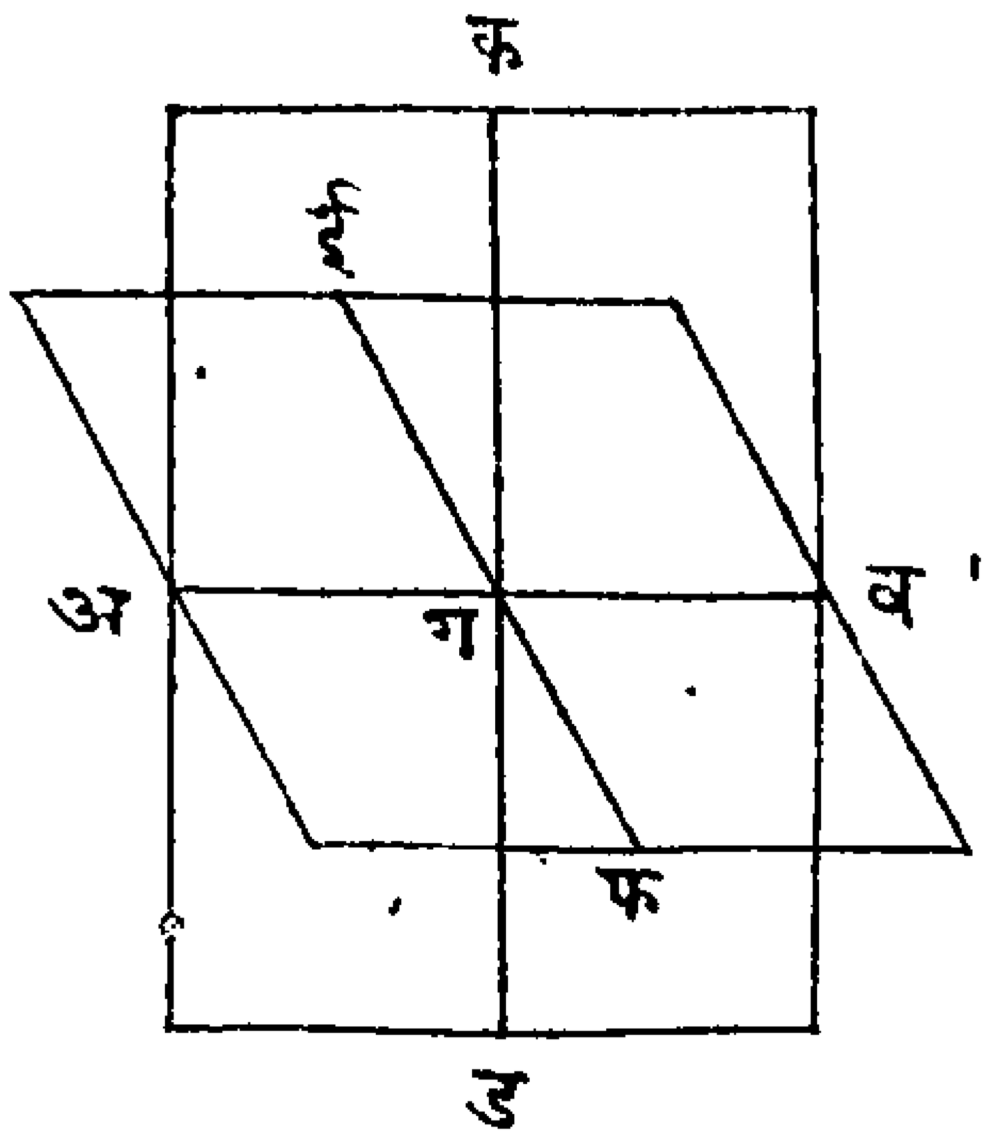

ह्मणोन पातळीवरील **ब**, **ड** बिंदू **बड** रेघेंकरून सांध.

आतां **अब**, **कड** या दोन रेघा (वरसांगीतल्या प्र०) **ईफ** पातळीवर लंब आहेत. याजकरितां (८९ व्या०प्र०) **ईफ** पातळीवरील **बड** रेघेवरही लंब आहेत आणि ह्मणोनच (१२ सि०कु०प्र०) या दोन रेघा परस्पर समांतर रेघा आहेत हें सिद्ध.

कुरलरी दोन रेघा परस्पर समांतर असतील, आणि त्यांतून एक रेघ कोणत्येही पातळीवर लंब असेल, तर त्याच पातळीवर दुसरी रेघही लंब होईल.

## शंभरावा सिद्धांत.

जर दोन पातळ्या परस्पर छेदितात. यापासून काटकोन झाला; आणि एक पातळीवर रेघ केली ती त्यांचे साधारण छिन्नावर लंब असेल; तर तीच रेघ दुसऱ्ये पातळीवर ही लंब होईल.




**अकबड**, **अईबफ** या दोन पातळ्या असतील, अशा कीं त्या परस्पर छेदितातात त्यापासून काटकोन झाला आहे; आणि **अकबड** पातळींत त्या दोन पातळ्यांचे साधारण छिन्नावर **कग** रेघ लंब असेल,

तर **अईबफ** या दुसऱ्ये पातळीवर ही ती **कड** रेघ लंब होईल.

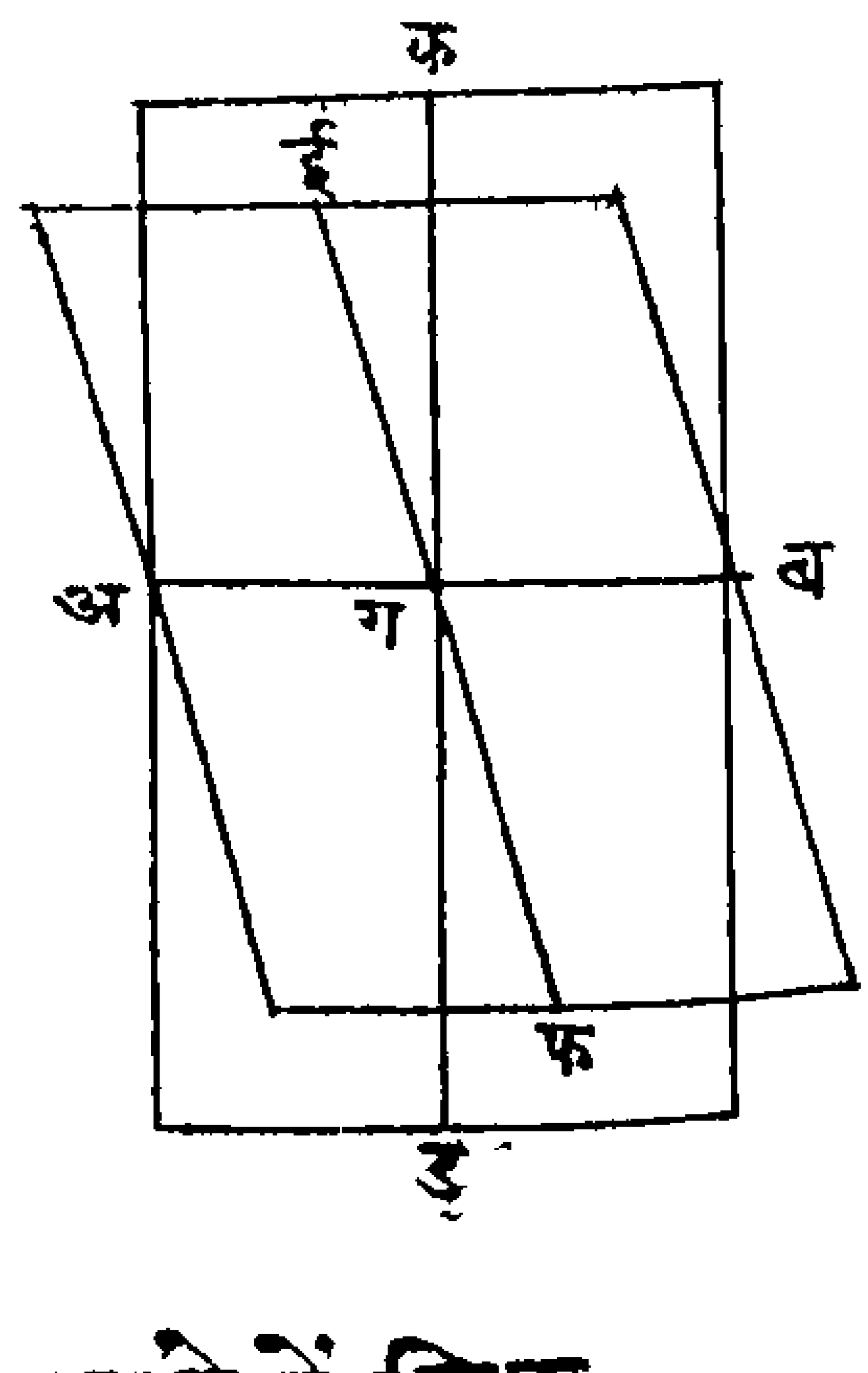
ह्मणोन **अईबफ** पातळींत **अब** साधारण छिन्नावर **ईग** लंब कर; आतां **गक**, **गई** या दोन रेघा **अब** साधारण छिन्नावर लंब आहेत, याजकरितां (११ व्या॰ प्र॰) त्या दोन पातळ्यांचा झोंक कोन **कगई** आहे याजकरितां हा **कगई** झोंक कोन काटकोन आहे आणि यावरून **गअ**, **गई** या दोन रेघा **अईबफ** पातळींत आहेत, याजकरितां (९८ सि॰ १॰) **कग** रेघ **अईबफ** पातळीवर लंब आहे. हें सिद्ध.

## १०१ सिद्धांत.

एक पातळी दुसऱ्ये पातळीवर मिळाली असतां तेथें दोन कोन होतात, ते दोन कोन दोन काटकोनांबरोबर आहेत.

**अकबड** पातळी **अईबफ** पातळीवर मिळेल तर तेथें दोन कोन होतील, त्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे.

ह्मणोन त्यांचे साधारण **अब** छिन्नावर **ग** स्थळाचे पार **कड**, **ईफ** या दोन रेघा लंब कर; यापासून **कग** रेघ **ईफ** रेघेवर मिळाली, ती तेथें दोन कोन करित्ये, ते (६ सि॰ प्र॰) दोन काटकोनांबरोबर आहेत. परंतु (१२ व्या॰ प्र॰) हे दोन कोन दोन पातळ्यांचे झोंक कोन आहेत, याजकरितां या दोन पातळ्या दोन कोन करितात; त्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे हें सिद्ध.



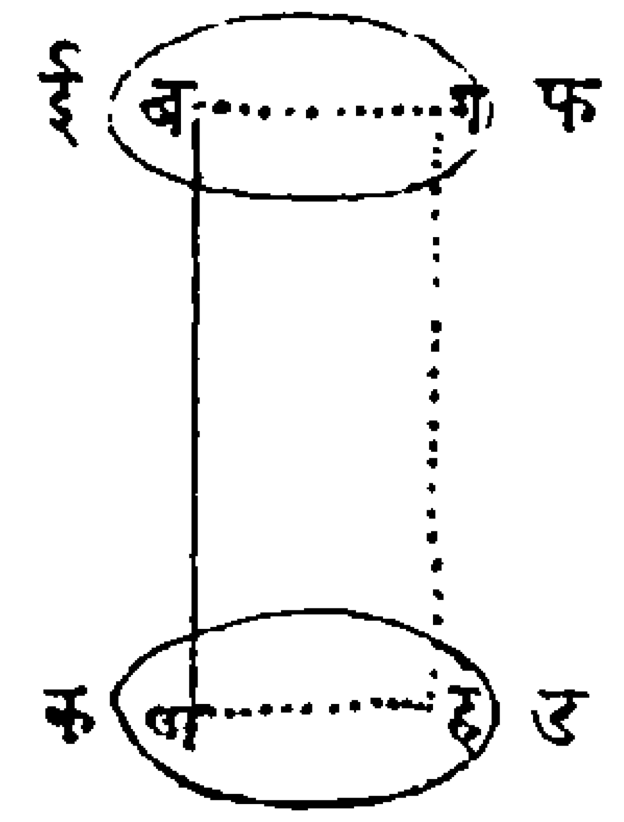

कुरलरी. यारीतीवरून सिद्ध होतें कीं, जेव्हां दोन पातळ्या परस्पर

छेदितात, तेव्हां त्यांचे समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर होतात, आणि जेव्हां एक पातळी दुसऱ्या दोन समांतर पातळ्यांस छेदित्ये तेव्हां त्यांचे व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर होतात, जसे समांतर रेषांत.

---

## १०२ सिद्धांत.

दोन पातळ्या परस्पर समांतर आहेत त्यांत एक पातळीवर जी रेघ लंब आहे ती दुसऱ्ये पातळीवर ही लंब होईल.




**ईफ, कड** या दोन समांतर पातळ्या असतील, आणि **अब** रेघ **कड** पातळीवर लंब असेल तर ही **अब** रेघ **ईफ** पातळीवर ही लंब होईल.

ह्मणोन **ईफ** पातळीतील कोणत्येही **ग** स्थळापासून **कड** पातळीवर **गह** रेघ लंब कर, नंतर **अह, बग** सांध.

आतां **बअ, गह** या दोन रेघा **कड** पातळीवर लंब आहेत, याजकरितां **अ** आणि **ह** हे दोन कोन काटकोन आहेत; आणि **कड. ईफ** या दोन समांतर पातळ्या आहेत, याजकरितां (९.२ व्या० प्र०) **बअ, गह** हे दोन लंब बराबर आहेत; यांतून निघतें कीं (९ व्या० प्र०) **बग, अह** या दोन रेघा समांतर आहेत, आणि **अब** रेघ **अह** रेघेवर लंब आहे, याजकरितां (१२ सि० कु० प्र०) तिसीं समांतर **बग** रेघेवर ही लंब आहे.

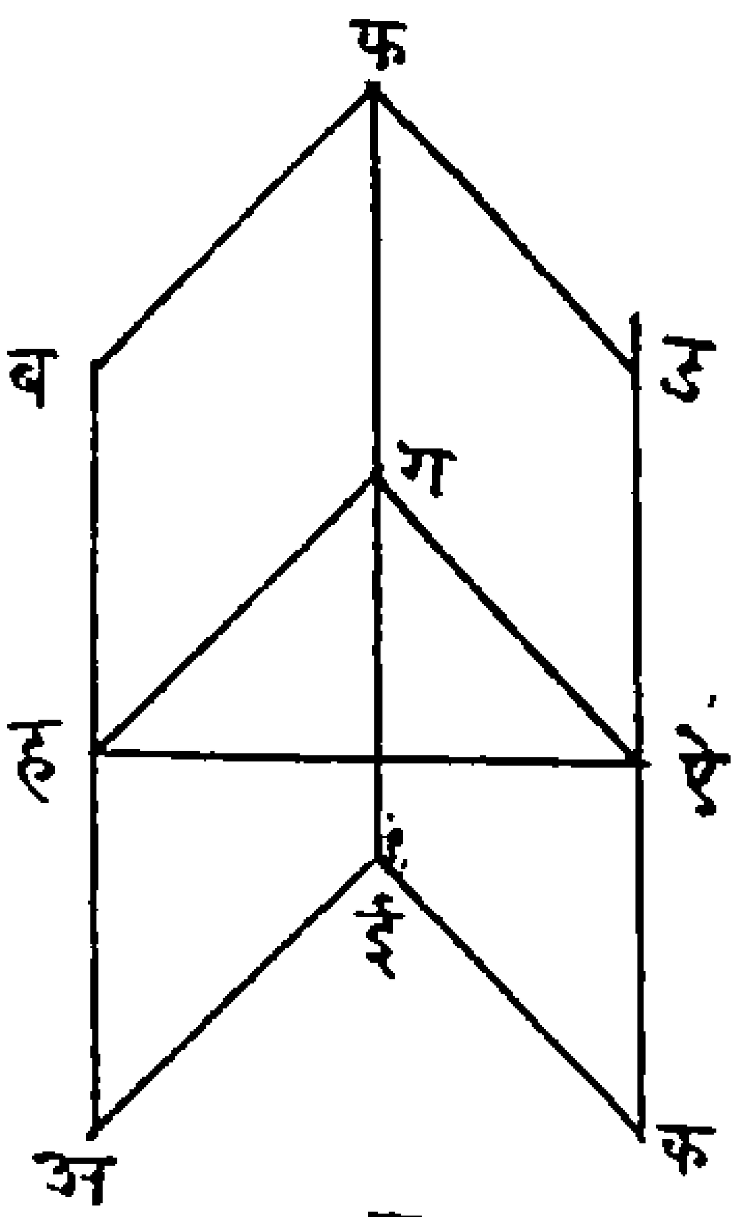
यारीतीवरून सिद्ध होतें कीं **अब** रेघ दुसऱ्या कोणत्या रेघांवर ही ह्मणजे जा **ईफ** पातळीवर **ब** स्थळापर्यंत करितां येतील, त्या सर्वांवर ही लंब आहे; याजकरितां (९० सि० प्र०) ही **अब** रेघ सर्व **ईफ** पातळीवर

लंब आहे हें सिद्ध.

---

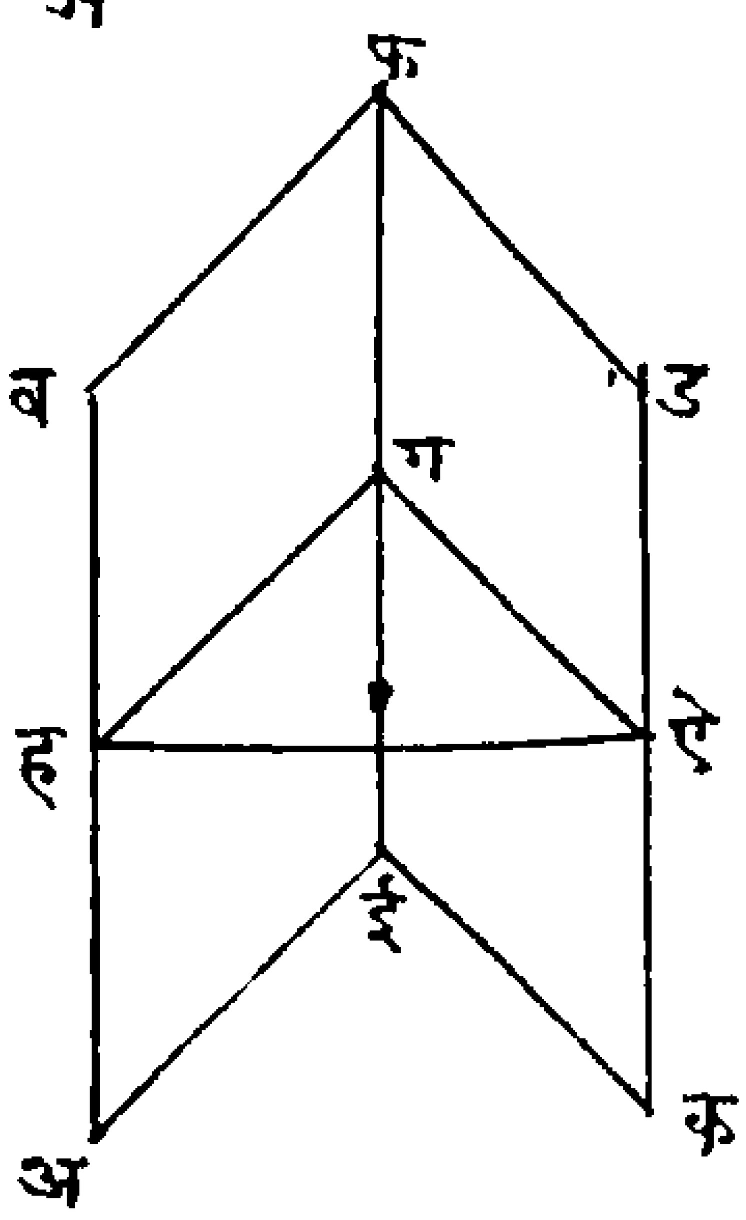
## १०३ सिद्धांत.

जर कोणत्याही दोन रेघा तिसऱ्ये एके रेघेशीं समांतर आहेत, आणि ती तिसरी रेघ जरीं या दोन रेघांचे पातळीवर नसेल तरी ही त्या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत.




**अब**, **कड** या दोन रेघा तिसऱ्ये **ईफ** रेघेशीं समांतर असतील, जरी **ईफ** रेघ **अब**, **कड** या दोन रेघांचे पातळीवर नसेल. तरी ही **अब**, **कड** शीं समांतर होईल.

ह्मणोन **ईफ** रेघेंत कोणत्याही स्थळापासून ह्मणजे जसें **ग** स्थळापासून **ईब**, **ईड** या दोन पातळ्यांत **गह**, **गऐ** हे दोन **ईफ** रेघेवर लंब कर



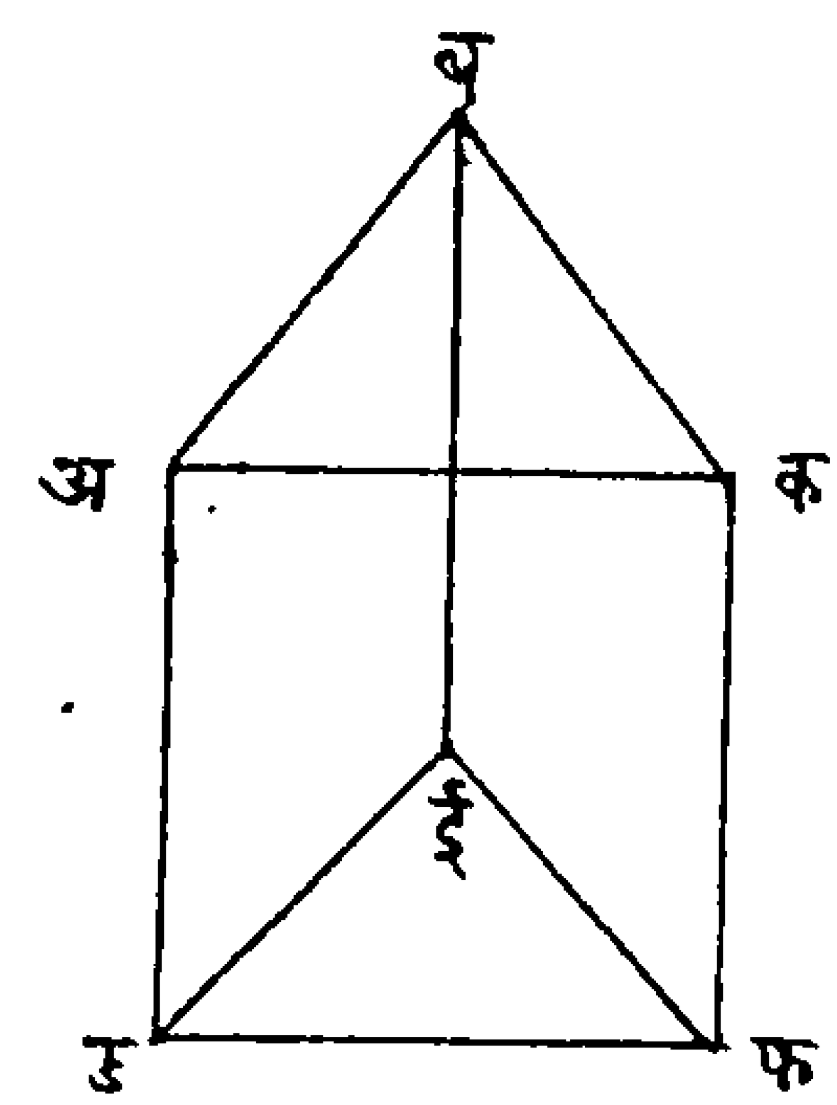

आतां **ईफ** रेघ **गह**, **गऐ** या दोन रेघांवर लंब आहे याजकरितां (९८ सि० प्र०) त्या रेघांचे **गहऐ** पातळीवर लंब आहे; यावरून **ईफ** रेघ **गहऐ** पातळीवर लंब आहे, याजकरितां **ईफ** शीं समांतर **अब** रेघ ही (९९ सि० कु० प्र०) **गहऐ** पातळीवर लंब आहे. याच कारणास्तव **कड** रेघ ही **गहऐ** पातळीवर लंब आहे. यांतून निघतें कीं **अब**, **कड** या दोन रेघा एकच **गहऐ** पातळीवर लंब आहेत, याजकरितां (९९ सि० प्र०) त्या दोन रेघा परस्परांशीं समांतर

आहेत, हें सिद्ध.

## १०४ सिद्धांत.

जर दोन रेघा परस्पर मिळतात, यांशीं अनुक्रमें समांतर दुसऱ्या दोन रेघा परस्पर मिळतात. कदाचित् त्या आणि या रेघा एक पातळीवर नसतील तरी ही या रेघांचे आंतील कोन परस्पर बराबर होतील.

**अब, बक** या रेघा अनुक्रमें **डई, ईफ** या रेघांशीं समांतर असतील, कदाचित् त्या आणि या एकच पातळीवर नसतील तरी ही **अबक** कोन **डईफ** कोनाबराबर होईल.



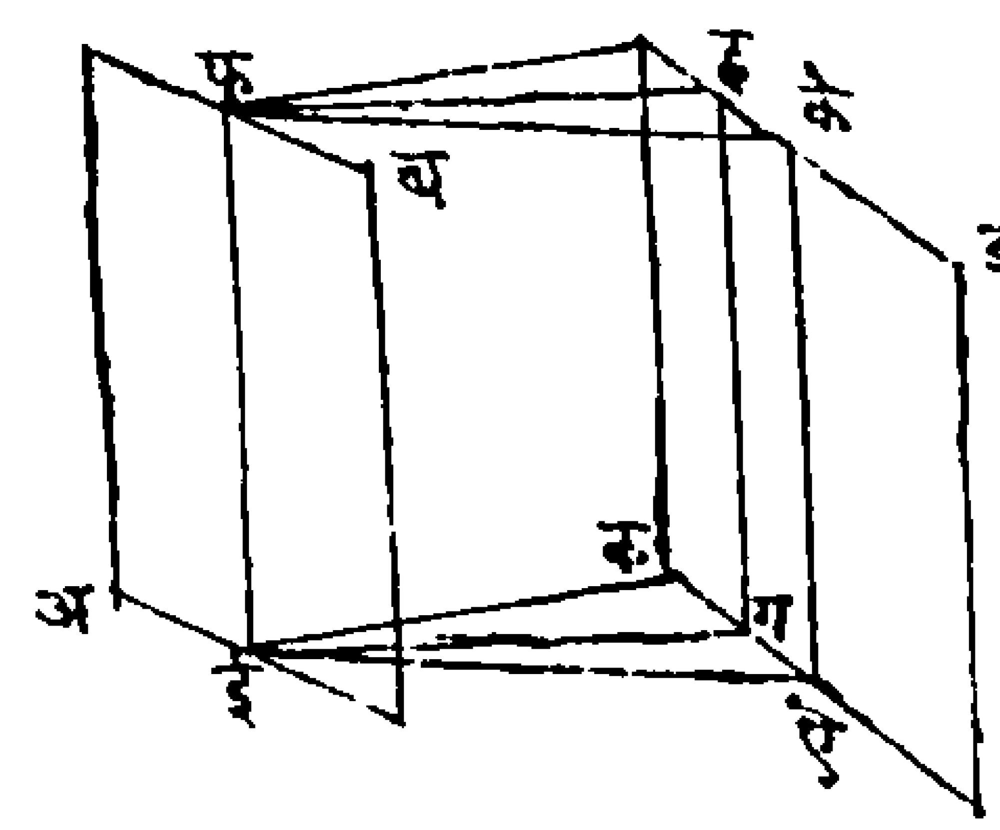

ह्मणोन **अब, बक, डई, ईफ** या सर्व रेघा परस्पर बराबर कर. आणि **अक, डफ, अड, बई, कफ** सांध.

आतां **अब, डई** या दोन रेघा समांतर आणि बरोबर आहेत; नंतर **अड, बई** या दोन रेघा त्या समांतर बरोबर रेघांस सांधितात, याजकरितां (२४ सि॰ प्र॰) याही परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत, याच कारणास्तव **कफ, बई** या दोन रेघा बरोबर आणि समांतर आहेत; याजकरितां (१५ सि॰ प्र॰) **अड, कफ** या परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत; आणि (२४ सि॰ प्र॰) **अक, डफ** या ही परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत; यांतून निघतें कीं **अबक, डईफ** या दोन त्रिकोणांच्या सर्व बाजू अनुक्रमें प्रत्येक बरोबर, याजकरितां यांचे कोनही अनुक्रमें बराबर; यास्त-

व **अबक** कोन **डईफ** कोनाबराबर आहे हें सिद्ध.

## १०५ सिद्धांत

एक पातळी दुसऱ्या दोन समांतर पातळ्यांस छेदिल्ये तर तीं छिन्नें परस्पर समांतर होतात.



**अब**, **कड** या समांतर पातळ्या असतील, जा **ईफहग** या तिसऱ्ये पातळीनें **ईफ**, **हग** रेघांचे स्थळीं छेदिल्या तर **ईफ**, **गह** हीं दोन छिन्नें समांतर होतील.

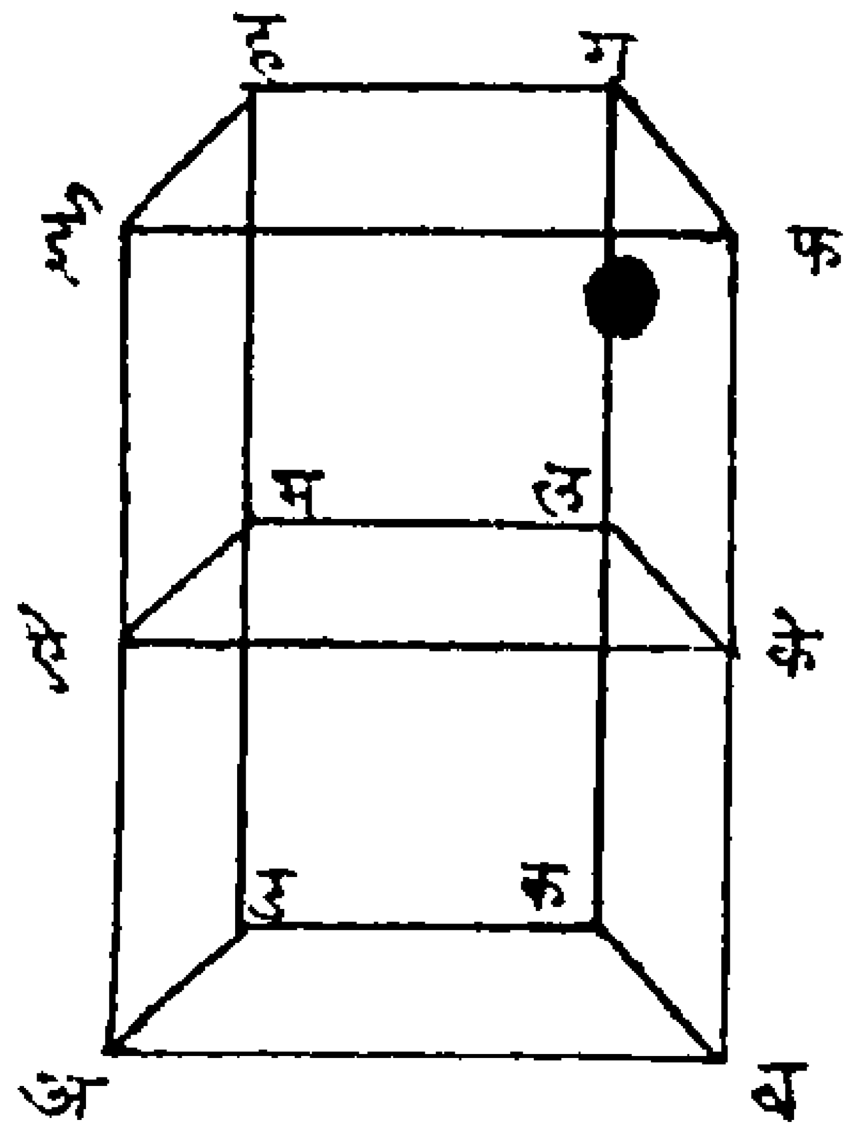
मनांत आणकीं **ईफहग** पातळीनें **ईग**, **फह** या दोन रेघा परस्पर समांतर केल्या आहेत, आणि **कड** पातळीवर **ईऐ**, **फके** हे दोन लंब कर. नंतर **ऐग**, **केह** सांध.

आतां **ईग**, **फह** या समांतर रेघा आहेत, आणि **ईऐ**, **फके** या दोन रेघा **कड** पातळीवर लंब आहेत, याजकरितां (९९ सि० प्र०) त्या परस्पर समांतर आहेत; याजकरितां (१०४ सि० प्र०) **हफके** कोन **गईऐ** कोनाबराबर आहे; परंतु **फकेह** कोन **ईऐग** कोनाबराबर आहे; कारण हे दोन कोन काटकोन आहेत यास्तव **फहके**, **ईगऐ** हे दोन त्रिकोण (१७ सि० १ कु० प्र०) समकोन आहेत, आणि (१२ व्या० प्र०) यांचा **फके**, **ईऐ** या दोन बाजू समांतर पातळ्यांचीं लंबांतरें आहेत; यास्तव परस्पर बराबर. यापासून निघतें कीं (२ सि० प्र०) **फह**, **ईग** बाजूही बराबर आहेत; परंतु या दोन बाजू (वरसांगीतल्या प्र०) समांतर आणि बरोबर, या-

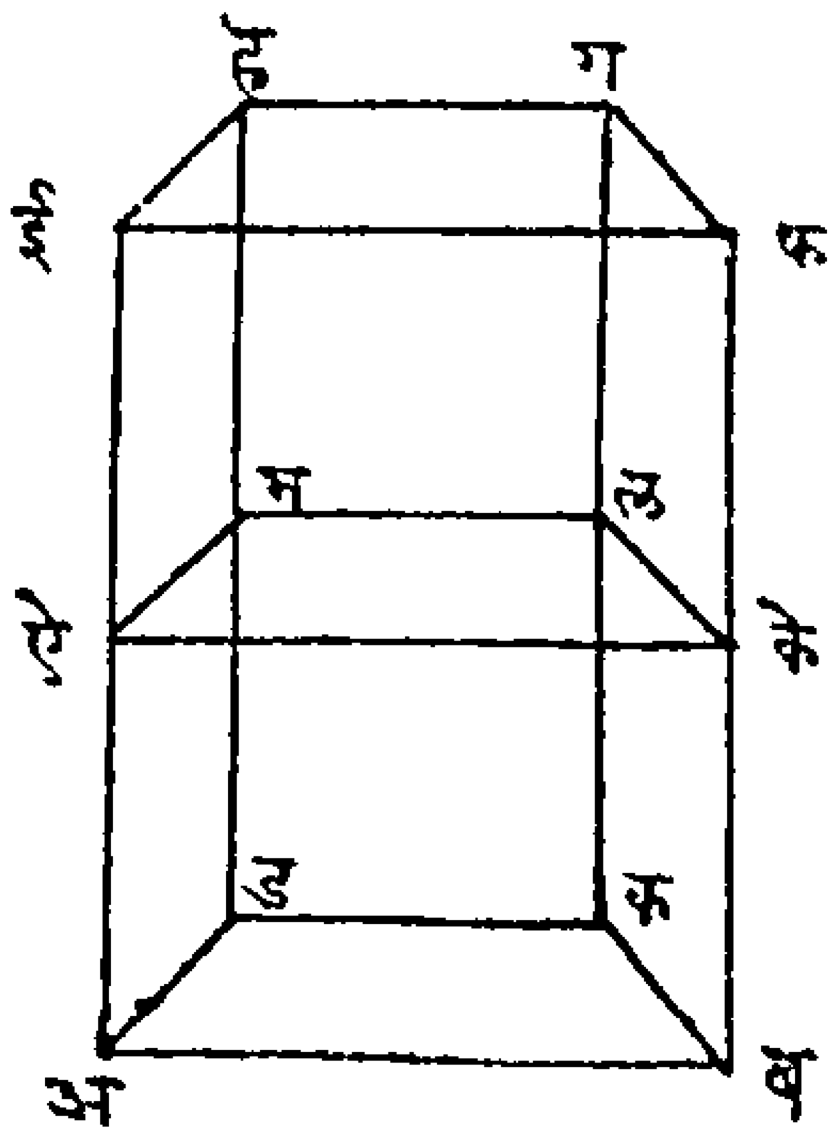
जकरितां ईफ, गह यारेषाजा फह, ईग यासमांतर बरोबर रेषांस सांधितात, त्याही (२४सि०प्र०) बरोबर आणि समांतर आहेत हें सिद्ध.

# १०६ सिद्धांत.

जर कोणतेंही पृजंम पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलें, तर तें छिन्न पायाशीं बरोबर एक रूप होईल.




अग एक पृजंम असेल, आणि त्यास अक पायाशीं समांतर ऐल पातळीनें छेदिलें तर ऐल पातळी अक पायाशीं बरोबर एकरूप होईल. अथवा या दोन पातळ्यांचा सर्व बाजू आणि सर्व कोन अनुक्रमें परस्पर बराबर आहेत.



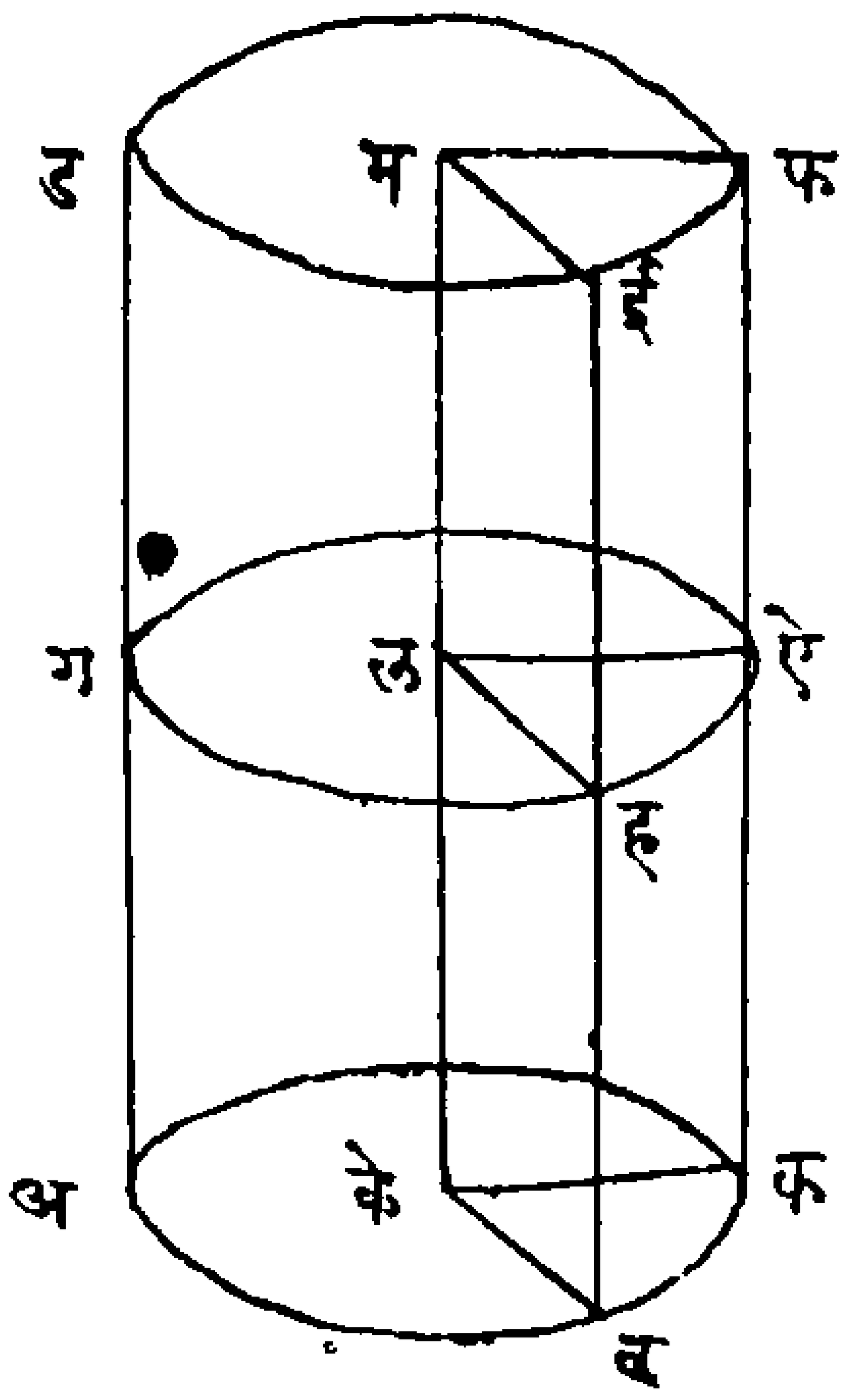

ह्मणोन (वर सांगीतल्या प्र०) अक, ऐल या दोन पातळ्या परस्पर समांतर आहेत, आणि (१०५सि०प्र०) एक पातळी दुसऱ्ये दोन समांतर पातळ्यांस छेदित्ये, तर तीं छिन्नें परस्पर समांतर आहेत, यास्तव ऐके, अब शीं समांतर आहे, आणि केल, बक शीं समांतर आहे, आणि लम, कड शीं समांतर आणि ऐम, अड शीं समांतर आहे; परंतु (९९व्या०प्र०) अऐ, बके या बाजू समांतर आहेत, याजकरितां अब, केऐ समांतर बाजू चौकोन आहे; याजकरितां (२२सि०प्र०)

समोरासमोरच्या बाजू **अब, ऐके** या बरोबर आहेत; या रीतीनें दाखविलें जातें कीं. **केल = बक** आणि **लम = कड** आणि **ऐम = अड** अथवा **अक, ऐल** या दोन पातळ्या परस्पर समबाजू आहेत, परंतु या दोन्ही पातळ्यांचा सजाति बाजू समांतर आहेत; याजकरितां (१०५ सि० प्र०) या बाजूंचे आंतील कोन परस्पर बराबर आहेत; ह्मणजे **अ** कोन = **ऐ** कोन, **ब** कोन = **के** कोन, **क** कोन = **ल** कोन, **ड** कोन = **म** कोन; यावरून **अक, ऐल** या दोन पातळ्यांचा सजाति बाजू आणि कोन परस्पर बरोबर आहेत; याजकरितां या दोन पातळ्या परस्परांशीं बराबर एकरूप आहेत. हें सिद्ध.

---

## १०७ सिद्धांत.

जर एक शिलिंदर पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलें, तर तें छिन्न, वर्तुळ आणि पायायांशीं बराबर होईल.




**अफ** एक शिलिंदर असेल आणि **गहऐ** कोणत्येहीं छिन्न **अबक** पायाशीं समांतर असेल, तर **गहऐ** वर्तुळ आणि **अबक** पाया यांचे बराबर होईल.

ह्मणोन **केई, केफ** या दोन पातळ्या असाव्या, जा **मके** या शिलिंदर आंसाचे पार जातात, आणि **गहऐ** छिन्नावर **ह, ऐ, ल** या तीन बिंदुस्थळांवर मिळतात.

आतां (१०१ व्या० प्र०) **केल, कऐ** समांतर आहेत. आणि **केऐ** ही पातळी **अबक, गहऐ** या दोन समांतर पातळ्यांस मिळत्ये. याजक-

रितां (१०५ सि०प्र०) **केक**, **लऐ** या दोन छिन्न रेघा समांतर आहेत, ह्मणोन **केलऐक** हें समांतर बाजू चौकोन आहे, याजकरितां त्याचा समोरासमोरचा **लऐ**, **केक** या बाजू बराबर आहेत, आणि **केक** ही पायाचे वर्तुळाची त्रिज्या आहे.

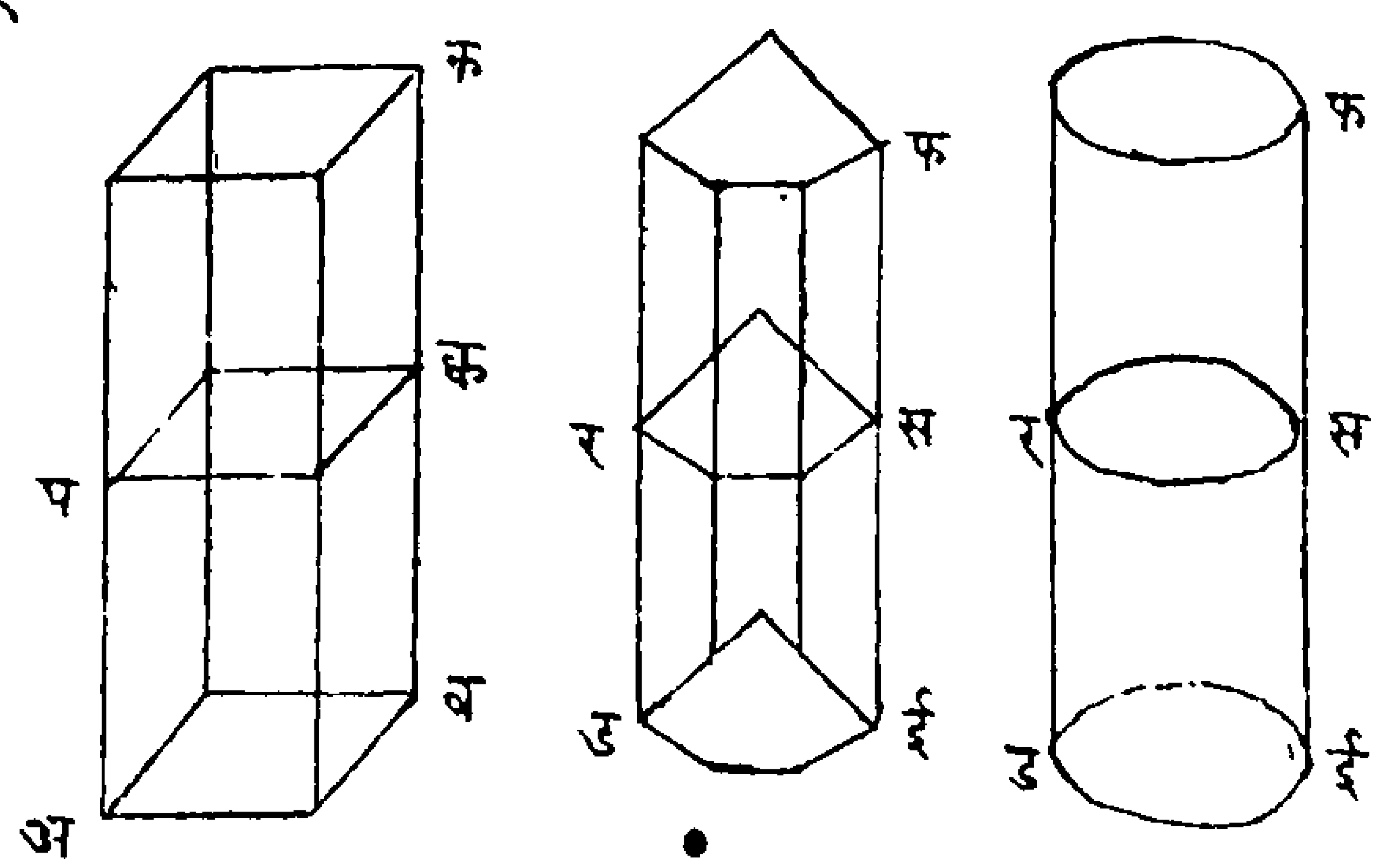
यारीतीनें दाखविलें जातें कीं, **लह** पायाचे वर्तुळाचे **केब** त्रिज्याचे बरोबर आहे, आणि **ल** स्थळापासून **गहऐ** पातळीचे परिघापर्यंत जा कोण त्याही रेघा केल्या त्या सर्व पायाचे त्रिज्याचे बरोबर आहेत; याजकरितां **गहऐ** ही पातळी वर्तुळ आणि **अबक** पायाचे बरोबर आहे हें सिद्ध.

---

## १०८ सिद्धांत.

सर्व पृजमें आणि सर्व शिलिंदरें जांचा पाया आणि उंची बरोबर तीं परस्पर बराबर आहेत.

**अक**, **डफ** दोन पृजमें आणि एक शिलिंदर असेल, जांचे पाये **अब**, **डई** बरोबर असतील, जांची उंची **बक**, **ईफ** बरोबर, तर **अक**, **डफ** हीं दोन भरीवें बराबर होतील.




ह्मणोन **पक**, **रस** हीं दोन छिन्नें बराबर अंतरानें पायांशीं समांतर असावीं; तर (पूर्व दोन सि०प्र०) **पक** छिन्न **अब** पायाचे बरोबर आहे;

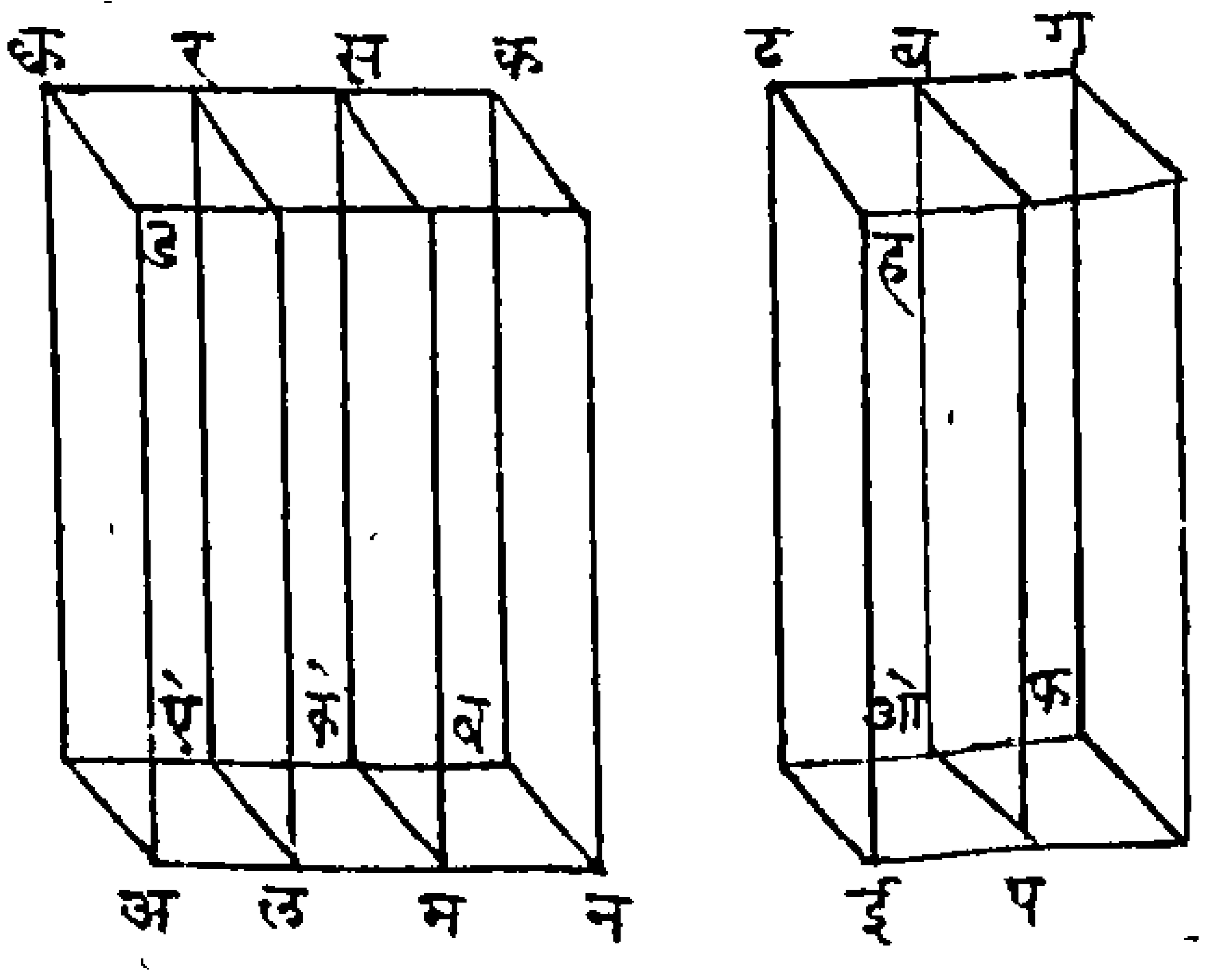
आणि **रस** छिन्न **टई** पायाचे बरोबर आहे; परंतु (वरसांगीतल्या प्र०) **अब, डई** हे पाये परस्पर बराबर आहेत, याजकरितां **पच, रस** हीं छिन्नें ही परस्पर बराबर आहेत; या रीतीनें दाखविलें जातें कीं, दुसरीं कोणतींही समान अंतराचीं छिन्नें ही परस्पर बराबर.

या पासून सिद्ध होतें कीं **अक** पृजंमाचीं प्रत्येक छिन्नें **टफ** दुसरें पृजंम अथवा शिलिंदर याचे त्या छिन्नांशीं समान अंतराचे प्रत्येक छिन्नाचे बराबर आहेत, आणि यावरून हीं पृजंमें आणि शिलिंदर बरोबर मानांचे अनेक छिन्नांचे बराबर संख्येनें बनलीं आहेत; ह्मणोन हीं भरींवें निश्चय परस्पर बरोबर आहेत; हें सिद्ध.

कुरळरी सर्व पृजंमें आणि शिलिंदरें काटकोन समांतर भरींवांचे बरोबर आहेत, जर त्यांचा पाया आणि उंची याचे बरोबर आहे.

## १०९ सिद्धांत.

बरोबर उंचीचीं काटकोन समांतर भरींवें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे पाये.




**अक, ईग** हीं दोन काटकोन समांतर भरींवें असतील जांची उंची **अड, ईह** बराबर आहे, तर **अक** भरींव: **ईग** भरींव :: **अब** पाया : **ईफ** पायास.

ह्मणोन **अब** पाया **ईफ** पायास प्रमाण असावा जशी भलती सं-

ख्या **म** (३) भलती संख्या **न** (२) यांस होते नंतर कल्पना करकीं, त्या संख्या प्रमाणानें **अब** पायास बराबर काटकोन चौकोन तुकडयांनीं भागिला ह्मणजे **अऐ, लके, मब** हे तीन तुकडे काटकोन चौकोन परस्पर बराबर झाले. तसें **ईफ** पायास त्या संख्याप्रमाणानें बराबर काटकोन चौकोन तुकडयांनीं भागिला; ह्मणजे **ईओ, पफ** हे दोन तुकडे काटकोन चौकोन झाले; ह्मणजे दोन ही पायांचे सर्व भाग (वरसांगीतल्या-प्र०) बराबर झाले, आणि पायांचे **ऐल, केम, ओप** या भागरेघांवरर-**ल, सम, वप** छिन्न पातळी **अक** आणि **ईट** यांशीं समांतर कर.

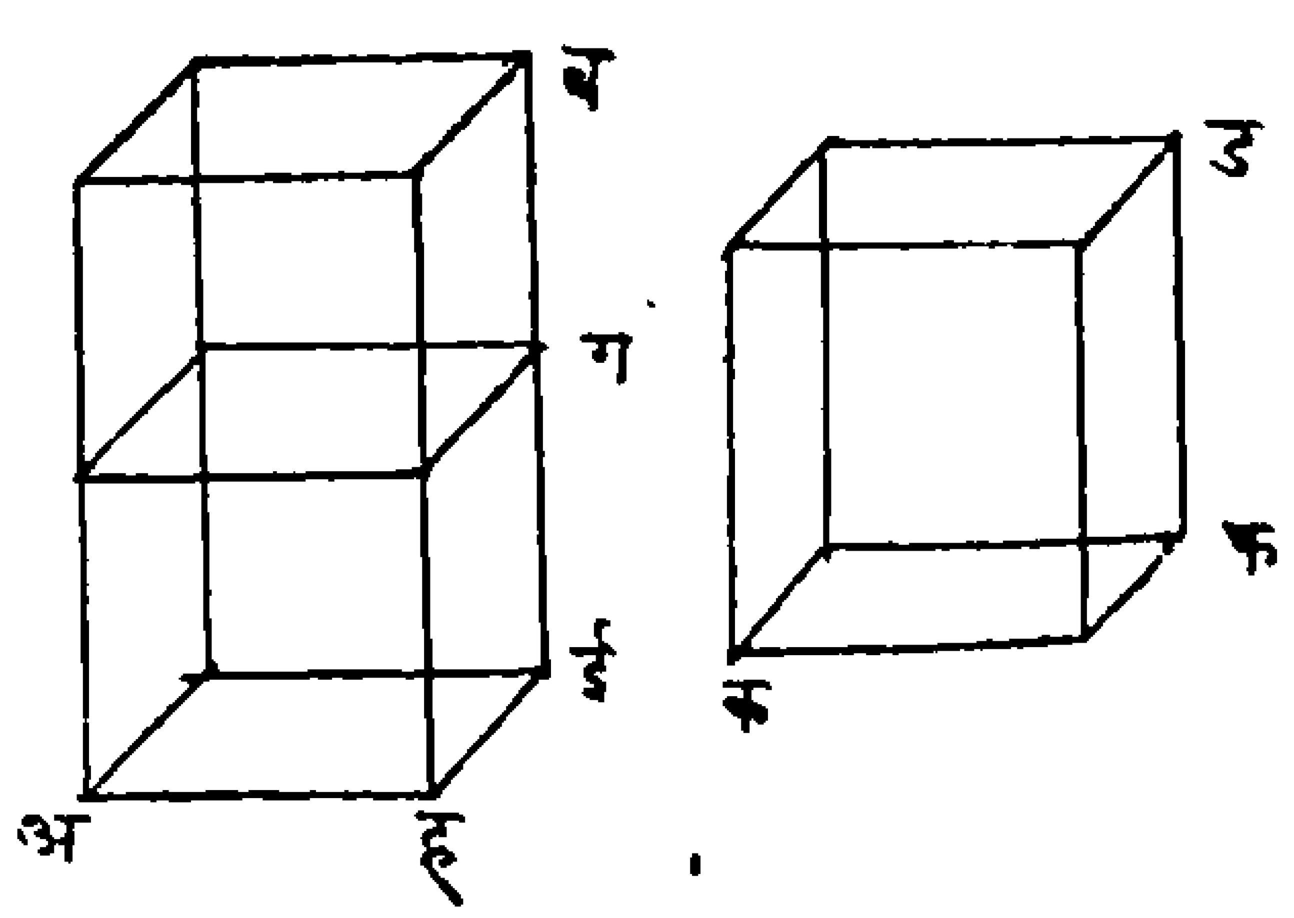
आतां **अर, लस, मक, ईब, पग** हीं सर्व काटकोन समांतर भरींवें परस्पर बराबर आहेत, कारण त्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे. याजकरितां **अक** भरींव **ईग** भरींवास आहे, जसें **अक** भरींवाचे **म** (३) बराबर तुकडे त्यांचे बराबर **ईग** भरींवांचे **न** (२) तुकडयांस होतात, अथवा जसे **अब** चे ३ तुकडे, **ईफ** चे २ तुकडयांस होतात, अथवा जसा **अब** सगळा पाया सगळ्ये **ईफ** पायास होतो, हें सिद्ध.

कुरलरी हा सिद्धांत आणि पूर्व सिद्धांताची कुरलरी यांपासून सिद्ध होतें कीं बराबर उंचीची सर्व पृजंमें आणि शिलिंद्रें परस्परांस आहेत; जसे त्यांचे पाये, कारण सर्व पृजंमें आणि शिलिंद्रें काटकोन समांतर भरींवांचे बरोबर आहेत. ज्यांचा पाया आणि उंची यांचे बरोबर आहे.

---

## ११० सिद्धांत.

बरोबर पायाचीं काटकोन समांतर भरींवें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची.




अब, कड हीं दोन काटकोन समांतर भरींवें असतील, अई, कफ या दोन बरोबर पायांवर; तर अब भरींव : कड भरींव : : ईब उंची : फड उंची.

ह्मणोन अग काटकोन समांतर भरींव अई पायावर असेल, जाची उंची ईग, कड काटकोन समांतर भरींवाचे फड उंची बरा बर आहे.

आतां अग, कड हीं दोन भरीवें बरोबर आहेत, कारण हीं दोन पृजमें आहेत जांचा पाया आणि उंची बराबर आहे, परंतु मनांत आणकीं अब, अग या दोन भरींवाचे पाये हब, हग आहेत, तर दोहोंची उंची अह आहे, याजकरितां (१०९ सि०प्र०) तीं परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे पाये हब, हग, परंतु हब, हग हे दोन पाये समांतर बाजू चौकोन आहेत, जांची उंची बरोबर हई रेघ आहे; याजकरितां ते परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे पाये ईब, ईग. परंतु अग भरींव कड भरींवाचे बरोबर आहे; आणि ईग रेघ फड चे बराबर आहे; याजकरितां अब, कड हीं पृजमें परस्परांस आहेत, जशी त्यांची उंची ईब, फड ह्मणजे अब : कड : : ईब : फड हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी ह्या सिद्धांत आणि एकशें आठव्ये सिद्धांताची कुरलरी यांपासून सिद्ध होतें कीं, बरोबर पायाचीं सर्व पृजमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत; जशी त्यांची उंची.

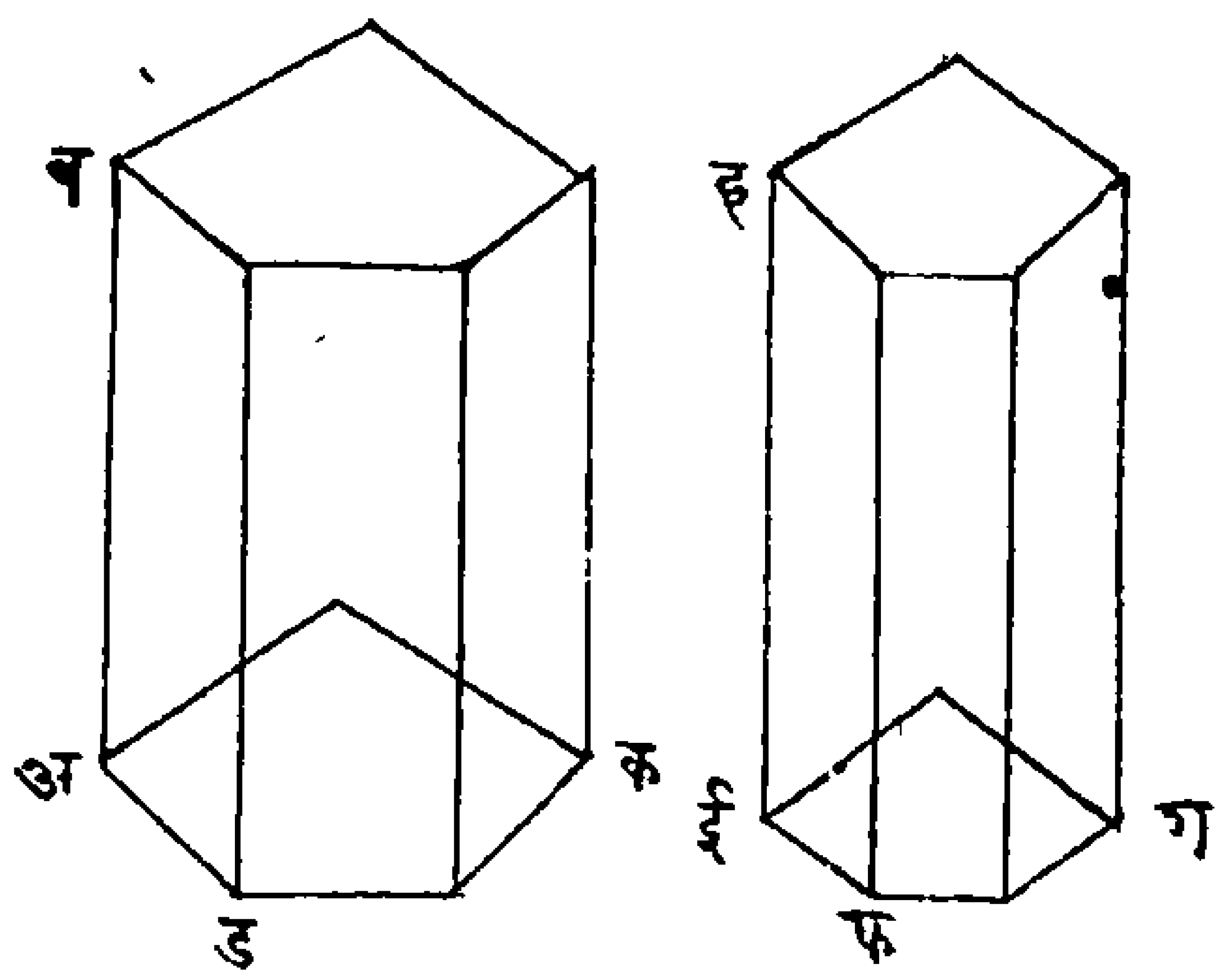
दुसरी कुरलरी या प्रथम कुरलरी पासून सिद्ध झालें कीं, बरोबर पायाचीं सर्व पृजमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत, जशी त्यांची उंची. आणि पूर्व सिद्धांताचे कुरलशी पासून सिद्ध झालें कीं, बरोबर उंचीचीं

सर्व पृजमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत; जसे त्यांचे पाये. याजकरितां जेव्हां पाया आणि उंची हीं दोनही बराबर नाहींत, तेव्हां सामान्यतः पृजमें आणि शिलिंदरें हीं सर्व परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे पाया आणि उंची यांचे गुणाकार. आणि या पासून निघतें कीं हे गुणाकार त्यांचे महत्वांचे मापांची संख्या आहेत.

---

## १११ सिद्धांत.

सरूप पृजमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे उंचीचे घन अथवा त्यांचे सजाति रेघांचे घन.




**अबकड, ईफगह** हीं दोन सरूप पृजमें असतील, तर **कड** पृजंम **गह** पृजंमास होईल; जसा **अब³ : ईफ³** अथवा जसा **अड³ : ईह³**.

ह्मणोन (११० सि॰ २ कु॰ प्र॰) हीं दोन भरींवें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे पाया आणि उंची यांचे गुणाकार; ह्मणजे जसा **अक॰ अड : ईग॰ ईह**. परंतु **अक, ईग** हे दोन पाये सरूप पातळी आहेत, याजकरितां (८९ सि॰ प्र॰) ते परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग, ह्मणजे **अक : ईग :: अब² : ईफ²**. याजकरितां **कड** भरींव : **गह** भरींव :: **अब²॰ अड : ईफ²॰ ईह**; परंतु **बड, फह** सरूप पातळ्या आहेत, याजकरितां त्यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत; ह्मणजे **अब : ईफ :: अड : ईह** अथवा **अब³ : ई-**

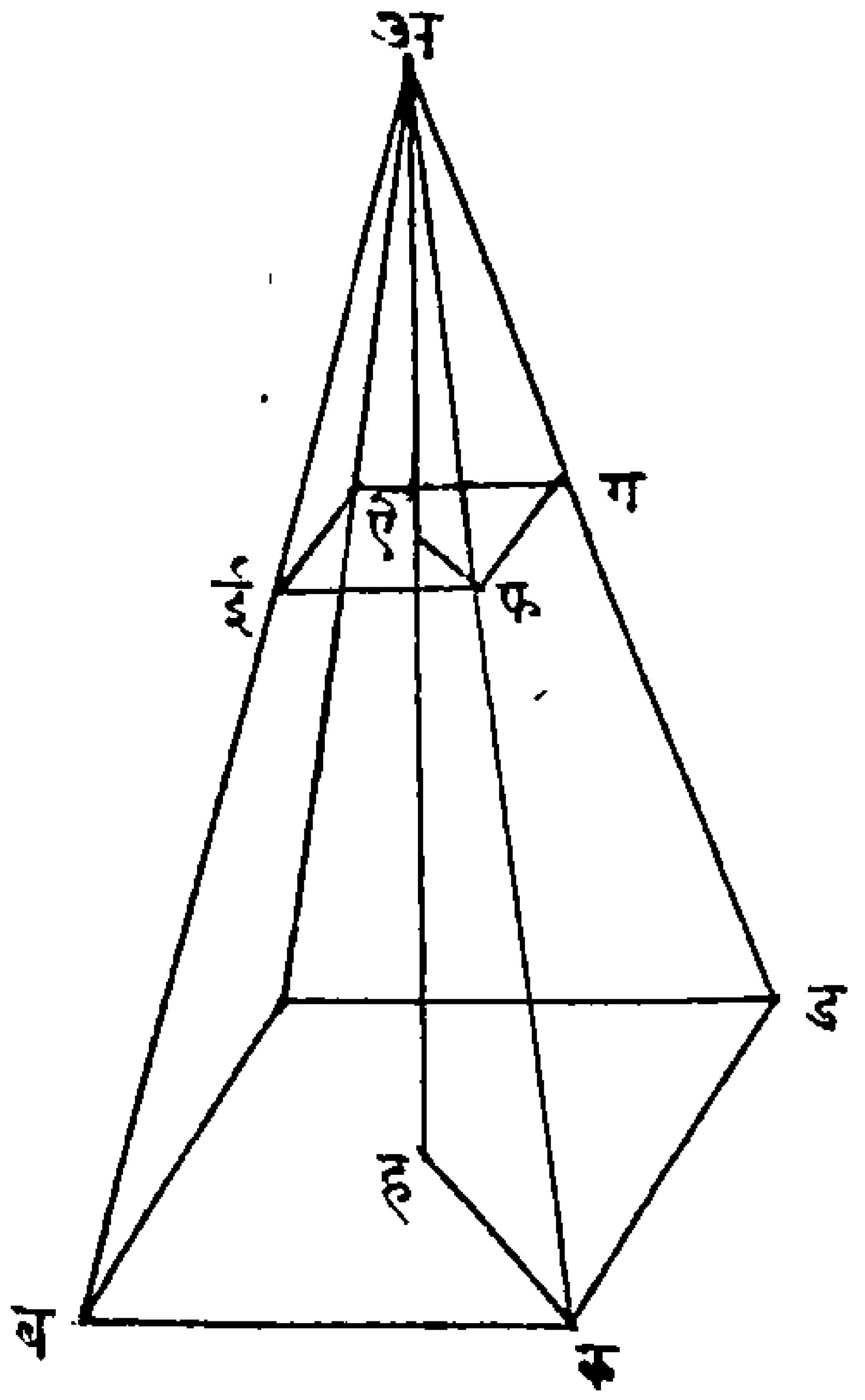
फे : : अडे : ईहे. याजकरितां अबे॰ अडे: ईफे॰ ईहे : : अबे: ईफे. अथवा जसा अडे : ईहे. याजकरितां कड भरींव गह भरींवास आहे, जसा अबे : ईफे अथवा अडे : ईहे हें सिद्ध (७०सि॰ री ती प्र॰) त्या दोहोंचे सम गुणाकार ही प्रमाणांत आहेत.

---

## ११२सिद्धांत.

कोणत्याही सरळ शंकूचे पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलें छिन्न पायाशीं सरूप आहे; आणि या दोन पातळ्या ह्मणजे छिन्न आणि पाया परस्परांस आहेत, जसे त्यांजवर शंकु शिरापासून केल्ये लंबांचे वर्ग.

**अबकड** कोणताही सरळरेघशंकु असेल, आणि **ईफग** छिन्न **बकड** पायाशीं समांतर असेल, आणि **अऐह** रेघ दोन पातळ्यांवर **ह**, **ऐ** स्थळीं लंब असेल, तर **बड**, **ईग** या दोन सरूप पातळ्या होतील; आणि **बड** पातळी **ईग** पातळीस होईल; जसा **अहे : अऐे**




ह्मणोन **कह**, **फऐ** सांध, आतां (१०५सि॰प्र॰) जेव्हां एक पातळी दोन समांतर पातळ्यांस छेदित्ये, तेव्हां छिन्नें समांतर होतात; याजकरितां **अबक** पातळी **बड**, **ईग** या दोन समांतर पातळ्यांस मिळत्ये तर **बक**, **ईफ** छिन्नें समांतर क-

रित्ये यारीतीनें अकड पातळी कड, फग हीं छिन्नें समांतर करित्ये-पुनः (१०४ सि०प्र०) रेघांचे दोन समांतर जोड दोन अंतर कोन करितात, याजकरितां ईफ, फग रेघांचे जोडांतील ईफग कोन त्या जोडाशीं समांतर बक, कड रेघांचे जोडांतील बकड कोना बराबर आहे, यारीतीनें दाखविलें जातें कीं ईग आकृतीचा प्रत्येक कोन वड आकृतीचे प्रत्येक कोनांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, याजकरितां (७० व्या०प्र०) या दोन आकृती परस्परांशीं समकोन आहेत.

पुनः (१४ सि०प्र०) अब, अक, अड या तीन रेघा बक, ईफ या दोन समांतर रेघांस आणि कड, फग या दोन समांतर रेघांस छेदितात, ह्मणोन बरोबर कोन करितात. आणि अ कोन साधारण आहे, याजकरितां अबक, अईफ हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत, आणि अकड, अफग हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत, याजकरितां (८४ सि०प्र०) त्यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे अक: अफ:: बक: ईफ:: कड: फग आणि यारीतीनें दाखविलें जातें कीं, ईग पातळींतील सर्व रेघा वड पायांतील सजाति सर्व रेघांशीं प्रमाणांत आहेत, यांतून निघतें कीं या दोन पातळींतील सर्व कोन परस्पर बराबर आणि त्या कोनाचे दोहोंकडील बाजू परस्पर प्रमाणांत आहेत, तेव्हां या दोन पातळ्या (७० व्या०प्र०) परस्परांशीं सरूप आहेत.

परंतु (८९ सि०प्र०) सरूप पातळ्या परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग-ह्मणजे बड: ईग:: बक²: ईफ² अथवा (वरलिहिल्या प्र०) जसा अक²: बफ² नंतर अहक आणि अऐफ या दोन त्रिकोणांत (९८ सि०प्र०) ह, ऐ हे दोन काटकोन आहेत; आणि अ कोन दोहोंस साधारण आहे; याजकरितां हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत; आणि त्यां-

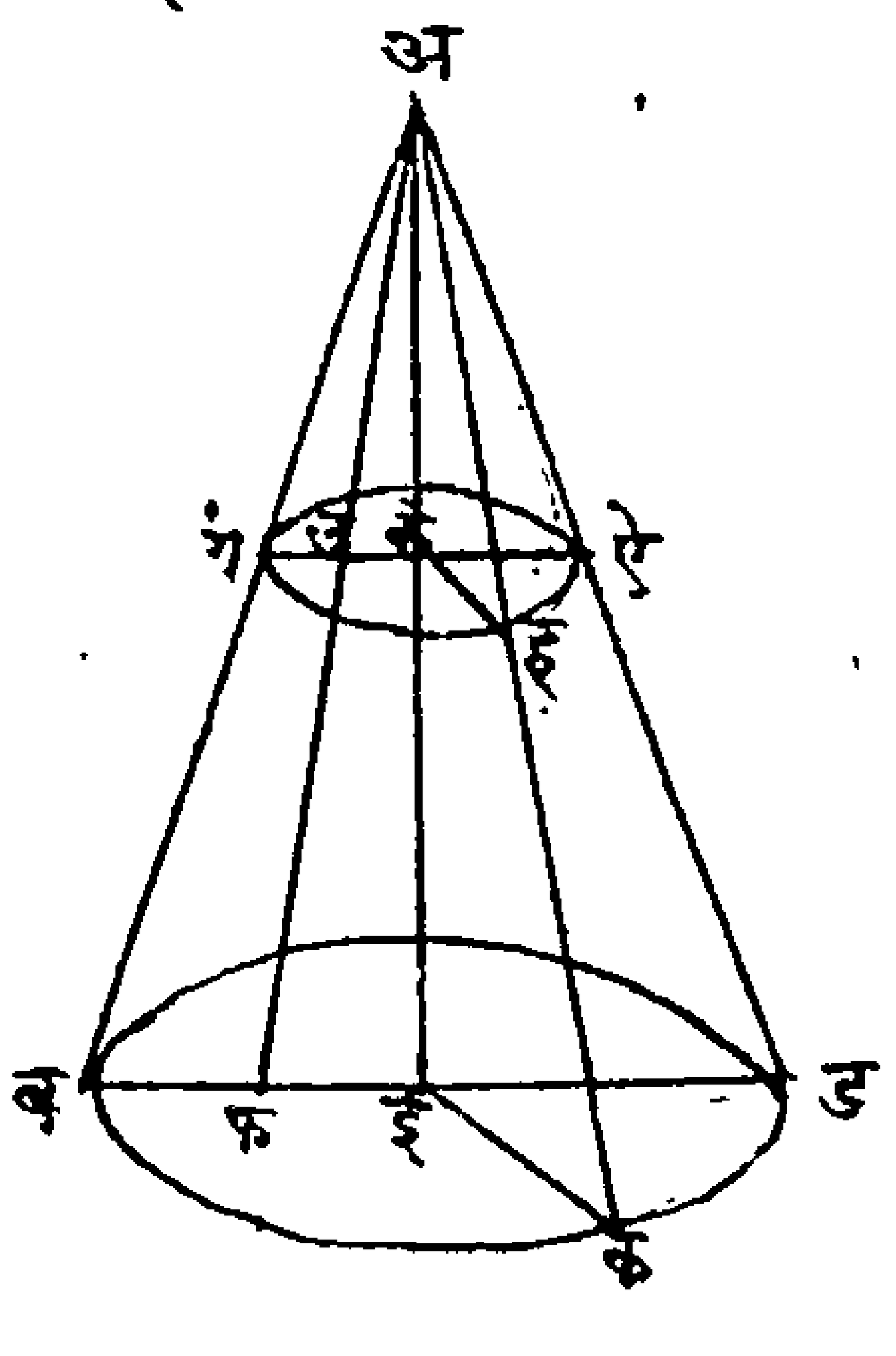
चा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे अक : अफ : : अह : अऐ अथवा अके : अफे : : अहे : अऐे. याजकरितां या दोन पातळ्या ह्मणजे पाया आणि छिन्न हीं दोन प्रथम युग्माशीं प्रमाणांत आहेत, तेव्हां दुसऱ्ये युग्माशींही प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे बड : ईग : : अहे अऐे हें सिद्ध.

---

## ११३ सिद्धांत.

कोणत्याही वर्तुळ शंकूचें, पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलेलें छिन्न, वर्तुळ आहे; आणि या दोन पातळ्या ह्मणजे छिन्न आणि पाया परस्परांस आहेत, जसे त्यांजवर शंकुशिरापासून केलेले लंबांचे वर्ग.

अबकड एक वर्तुळ शंकू असेल, आणि गहऐ हें त्याचें छिन्न बकड पायाशीं समांतर असेल, तर गहऐ वर्तुळ होईल; आणि बकड, गहऐ या दोन पातळ्या परस्परांस होतील; जसे यांजवर शंकुशिरापासून केलेल्ये लंबांचे वर्ग.




ह्मणोन या दोन समांतर पातळ्या ह्मणजे छिन्न आणि पाया यांजवर अलफ रेघ लंबकर, आणि अकई, अडई या दोन पातळ्या शंकूचे अकेई आंसापार होऊंदे; अशा कीं छिन्न पातळीस हऐके या बिंदूवर मिळतील.

आतां (वरसांगीतल्या प्र०) गहऐ छिन्न बकड पायाशीं समांतर आहे, आणि कके, डके या दोन पातळ्या त्या दोन समांतर पातळ्यांस मिळतात; याजकरितां (१०५ सि०प्र०) हके रेघ कई रेघेशीं समांतर आहे; आणि ऐके रेघ डई रेघेशीं समांतर आहे, पुनः अईक, अकेह हे दोन त्रिकोण परस्परांशीं समकोन, आणि अईड, अकेऐ हे दोन त्रिकोण परस्परांशीं समकोन आहेत याजकरितां.

केह : ईक :: अके : अई

आणि केऐ : ईड :: अके : अई

याजकरितां केह : ईक :: केऐ : ईड

परंतु ईक ईड या दोन रेघा बरोबर आहेत. कारण दोन ही एक वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत, याजकरितां केह केऐ याही परस्पर बराबर आहेत; या रीतीनें दाखविलें जातें कीं के स्थळापासून गहऐ पातळीवर मर्यादेपर्यंत जा रेघा केल्या त्या सर्वही परस्पर बराबर; याजकरितां (५५ व्या०प्र०) ही गहऐ पातळी वर्तुळ आहे.

पुनः सरूप त्रिकोणापासून अल : अफ :: अके : अई

आणि केऐ : ईड :: अके : अई

याजकरितां अल : अफ :: कऐ : ईड

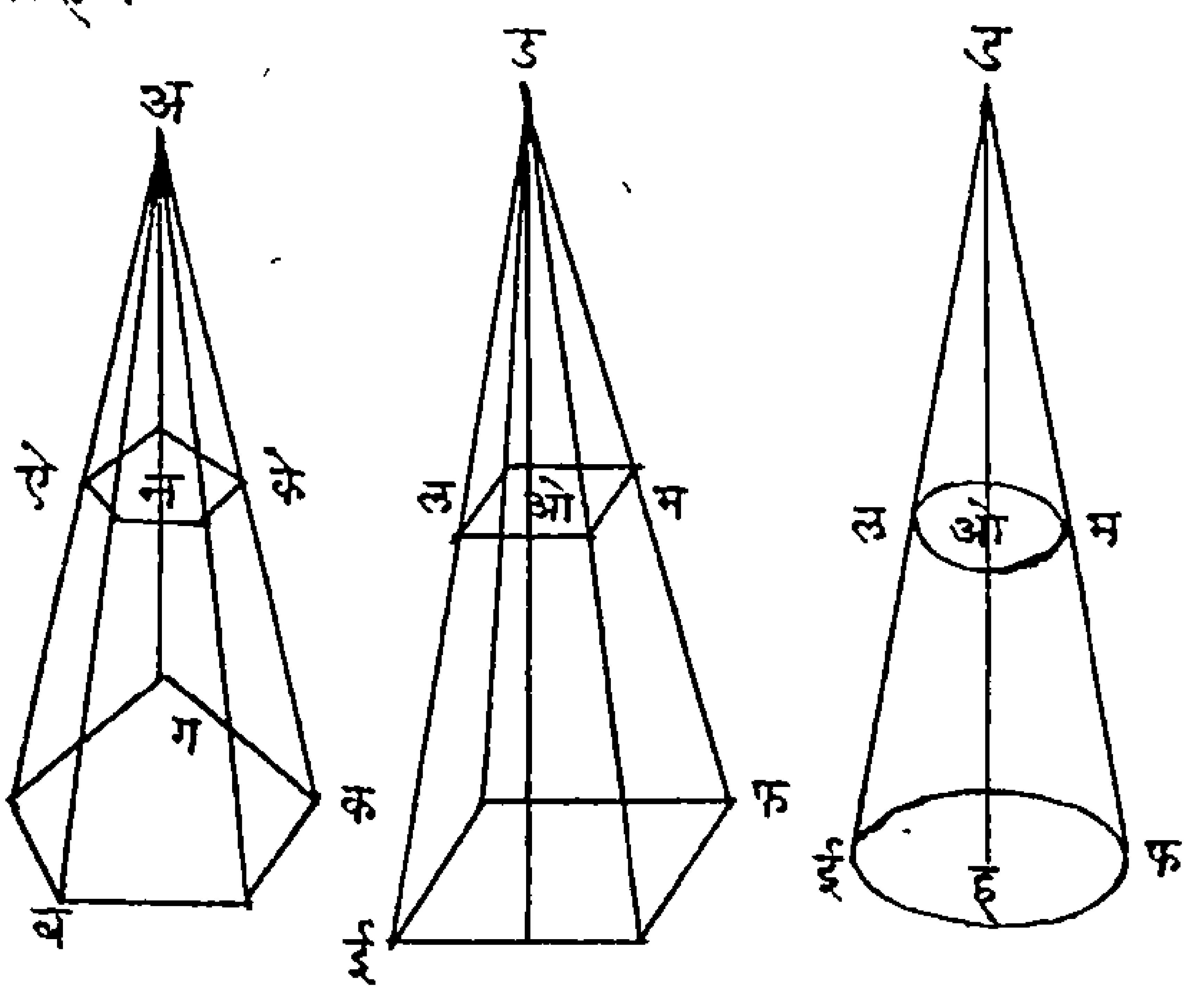
अथवा (७४ सि०प्र०) अल$^2$ : अफ$^2$ :: केऐ$^2$ : ईड$^2$

परंतु (९२ सि०प्र०) गहऐ वर्तुळ : बकड वर्तुळ :: कऐ$^2$ : ईड$^2$.

याजकरितां गहऐ वर्तुळ : बकड वर्तुळ :: अल$^2$ : अफ$^2$ हें सिद्ध.

## ११४ सिद्धांत.

बराबर पायाचे आणि बराबर उंचीचे सर्व सरळरेघ शंकू आणि वर्तुळ शंकू परस्पर बराबर आहेत.




**अबक, डईफ** हे कोणतेही सरळरेघ शंकू आणि वर्तुळ शंकू असतील ज्यांचे पाये **बक, ईफ** आणि उंची **अग, डह** बरोबर आहे, तर **अबक** सरळरेघ शंकू आणि **डईफ** वर्तुळ शंकू हे बरोबर होतील.

ह्मणोन मनांत आणकीं **ऐके, लम** या दोन पातळ्या पायाशीं समांतर आणि शिरापासून **अन, डओ** या बरोबर अंतरानें केल्या आहेत.

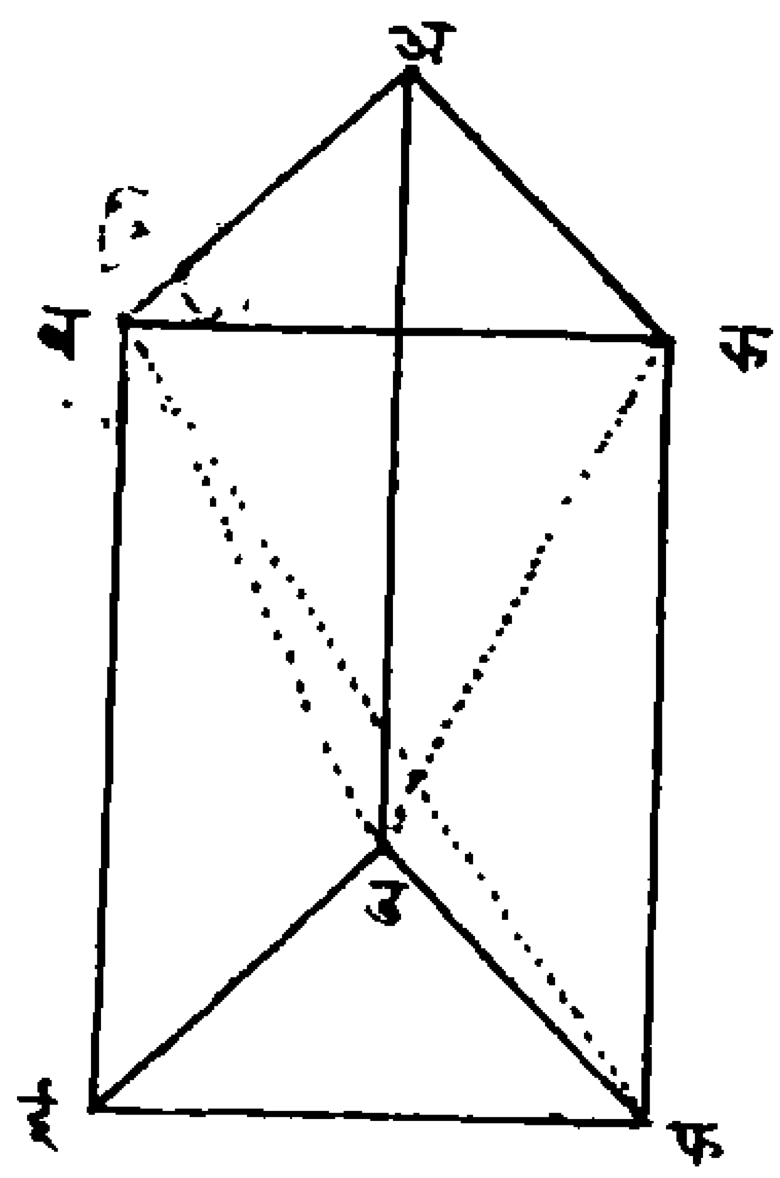
आतां (पूर्व दोन सि० पासून) **डओ : डह : : लम** पातळी : **ईफ** पातळी
आणि **अन : अग : : ऐके** पातळी : **बक** पातळी

परंतु (वर सांगितल्या प्र०) **अन** आणि **अग** हे अनुक्रमें **डओ** आणि **डह** यांचे बरोबर आहेत, याजकरितां **ऐके** पातळी : **बक** पातळी : : **लम** पातळी : **ईफ** पातळी; नंतर (वर सांगितल्या प्र०) **बक** पातळी. **ईफ** पातळी बरोबर आहे. याजकरितां **ऐके** पातळी **लम** पातळी बराबर आहे, यारीतीनें दाखविलें जातें कीं दुसरी कोणतीं ही छिन्नें, जीं शिरापासून बराबर अंतरानें केलीं, तीं सर्व परस्पर बराबर.

यांतून निघतें कीं, वर्तुळ शंकूचें प्रत्येक छिन्न या सरळ रेघ शंकूचे शिरापासून त्याशीं समान अंतरांचे प्रत्येक छिन्नाचे बरोबर आहे; आणि **अबक, डईफ** हीं दोन भरींवें अशा प्रकारचा बरोबर छिन्नांहींच बनलीं आहेत; याजकरितां हीं सर्व भरींवें निश्चयें परस्पर बराबर आहेत हें सिद्ध.

## ११५ सिद्धांत.

सर्व सरळरेघ शंकू पृजमाचे तृतीय भाग आहेत, ज्याचा पाया आणि उंची त्या सरळ रेघ शंकूंचे बराबर आहे.




**अबकडईफ** एक पृजम आणि **बडईफ** एक सरळ रेघ शंकू अशीं हीं दोन **डईफ** या त्रिकोण पायावर असतील ज्यांची उंची **ईब** आहे तर, **बडईफ** सरळरेघ शंकू **अबकडईफ** पृजमाचा तृतीय भाग होईल.

म्हणोन पृजमाचे तीन बाजूंचे पातळ्यांवर **बफ, बड, डक** अशा तीन कर्ण रेघा कर, आतां **बडफ, बकड** या दोन पातळ्या सर्व पृजमास छेदून त्याचे **बडईफ, डअबक, डबकफ** ऐसे तीन सरळ रेघ शंकू करितात, हे सर्व परस्पर बरोबर आहेत; ते कसे ते पुढें सांगतों.

आतां पृजमाचीं दोन शेवटें बराबर आहेत; याजकरितां (११४ सि॰ प्र॰) ज्याचा पाया **अबक** आणि शिर **ड** हा सरळरेघ शंकू त्याचे

बरोबर आहे; कीं जाचा पाया **डईफ** आणि शिर **ब** आहे, कारण या दोहोंचा पाया आणि उंची बराबर आहे.

परंतु जाचा पाया **डईफ** आणि शिर **ब**, तसें जांचा पाया **बईफ** आणि शिर **ड** हे दोनही सरळरेघ शंकू एकच भरींव आहे; आणि हा शेवटील सरळरेघ शंकू तिसऱ्या सरळरेघ शंकूचे बरोबर आहे; कारण त्यांची उंची शिर **ड** आणि पाये **बईफ. बकफ** बरोबर आहेत. याजकरितां हे सर्व सरळरेघशंकू कीं जांपासून पृजम बनलें आहे, ते परस्पर बराबर आहेत; आणि ते प्रत्येक त्या पृजमाचे तृतीय भाग आहेत, अथवा तें पृजम त्या प्रत्येक शंकूचे तिपट आहे हें सिद्ध.

यांतून निघतें कीं कोणत्याही आकृतीचे सर्व सरळरेघ शंकू त्या पृजमाचे तृतीय भाग आहेत. जाचा पाया आणि उंची त्या शंकूचे बराबर आहे. कारण पृजमाचा पाया कोणत्येही आकृतीचा असेल तो भागून त्याचे त्रिकोण करितां येतील. आणि ते सर्व भरींव त्रिकोण शंकूही भागतां येतील.

कुरलरी. कोणताही वर्तुळ शंकू शिलिंदर अथवा पृजम याचा तिसरा भाग आहे, जर शंकूचा पाया आणि उंची त्याचे बराबर असेल. कारण वर सिद्ध झालें आहे कीं सर्व शिलिंदरें पृजमाचे बराबर आहेत जेव्हां त्याचा पाया आणि उंची बराबर आहे. तसें वर्तुळ शंकू सरळरेघ शंकूंचे बराबर आहेत जेव्हां त्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे.

स्कोल्यम. पृजम आणि शिलिंदर यांज विषयीं जेंवर सिद्ध होऊन गेलें तें सर्व सरळरेघ शंकू आणि वर्तुळ शंकू यांजवर लागतें. कारण पृजमें आणि शिलिंदरें हीं सर्व सरळरेघ शंकू आणि वर्तुळ शंकू यांचे तिपट आहेत; ह्मणोन असे सरळरेघ शंकू अथवा वर्तुळ शंकू हे परस्प-

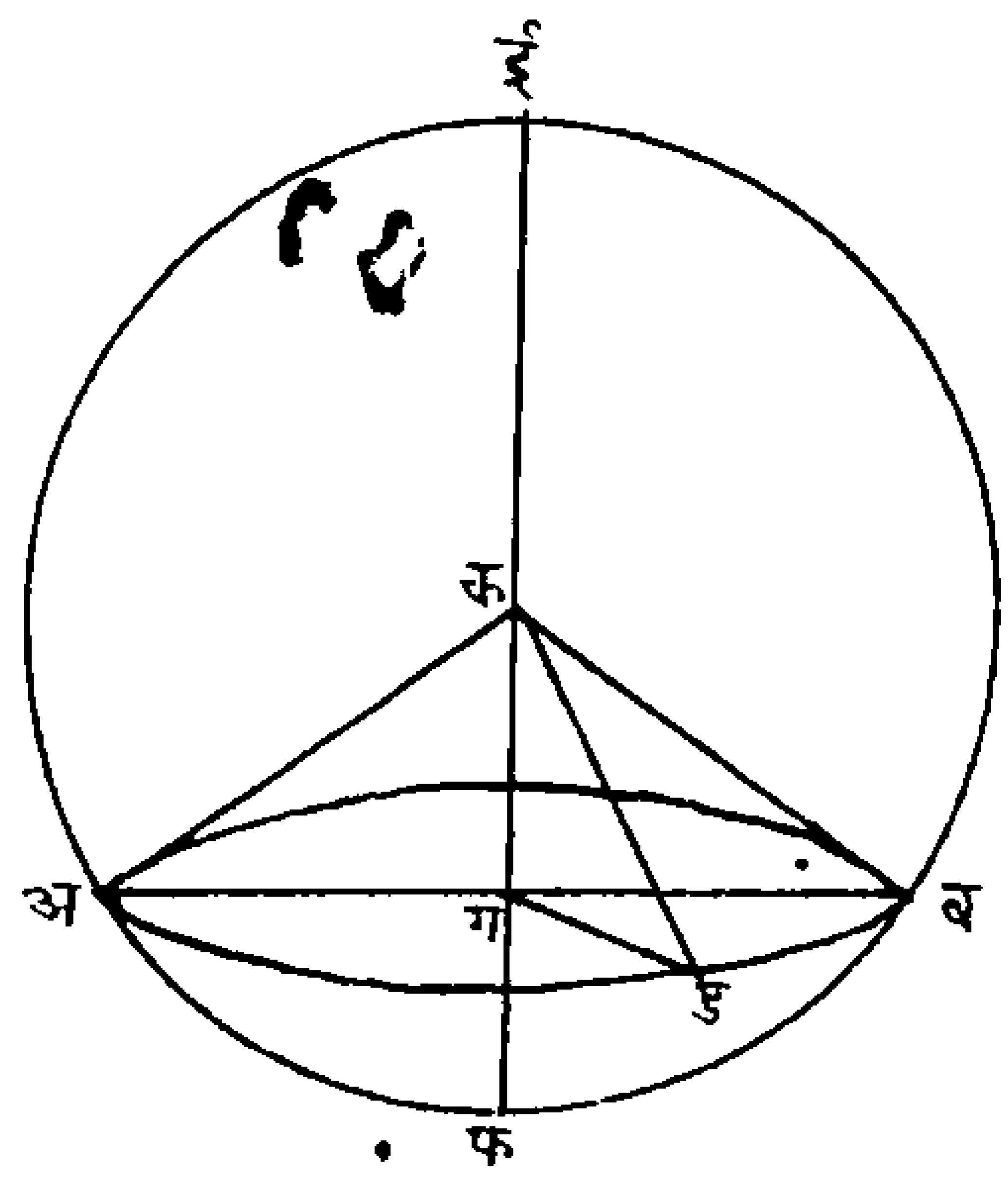
परांस आहेत, जशा त्यांचा सरळ रेघबाजू, अथवा व्यास, अथवा उंची ई-त्यादिक सरळ रेघांचा घन हेंच सर्व सरूप भरीवांवर ही लागतें, ह्मणजे सर्व सरूप भरीवें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे सजाति सरळरेघ बाजूंचे घन. कारण हीं सरूप भरीवें सरळरेघशंकू करूनच बनलीं आहेत जे शंकू परस्पर सरूप आहेत.

---

## ११६ सिद्धांत.

जर पातळीनें गोल छेदिलें तर छिन्न वर्तुळ होईल.

**अईबफ** एक गोल असेल जास **अडब** पातळीनें छेदिलें तर **अडब** छिन्न वर्तुळ होईल.




ह्मणोन **अब** ज्या छिन्नाचा व्यास कर, आणि या रेघेवर अथवा **अडब** छिन्नावर गोलाचा **ईकगफ** आंस गोलाचे **क** मध्यस्थळापार लंबकर, ह्मणजे हा आंस (४१सि० प्र०) **ग** स्थळीं **अब** ज्यास दुभागील; नंतर **कअ**, **कब** सांध आणि **अडब** छिन्नाचे परिमितीवर ह्मणजे कोणत्याही **ड** स्थळापर्यंत **कड**, **गड** रेघा कर.

आतां (वरसांगीतल्या प्र०) **कग** रेघ **अडब** पातळीवर लंब आहे. याजकरितां (९० व्या० प्र०) पातळींतील **गह**, **गड** या दोन रेघांवरही लंब आहे. यापासून कळतें कीं **कगअ**, **कगड** हे दोन काटकोन त्रिकोण आ-

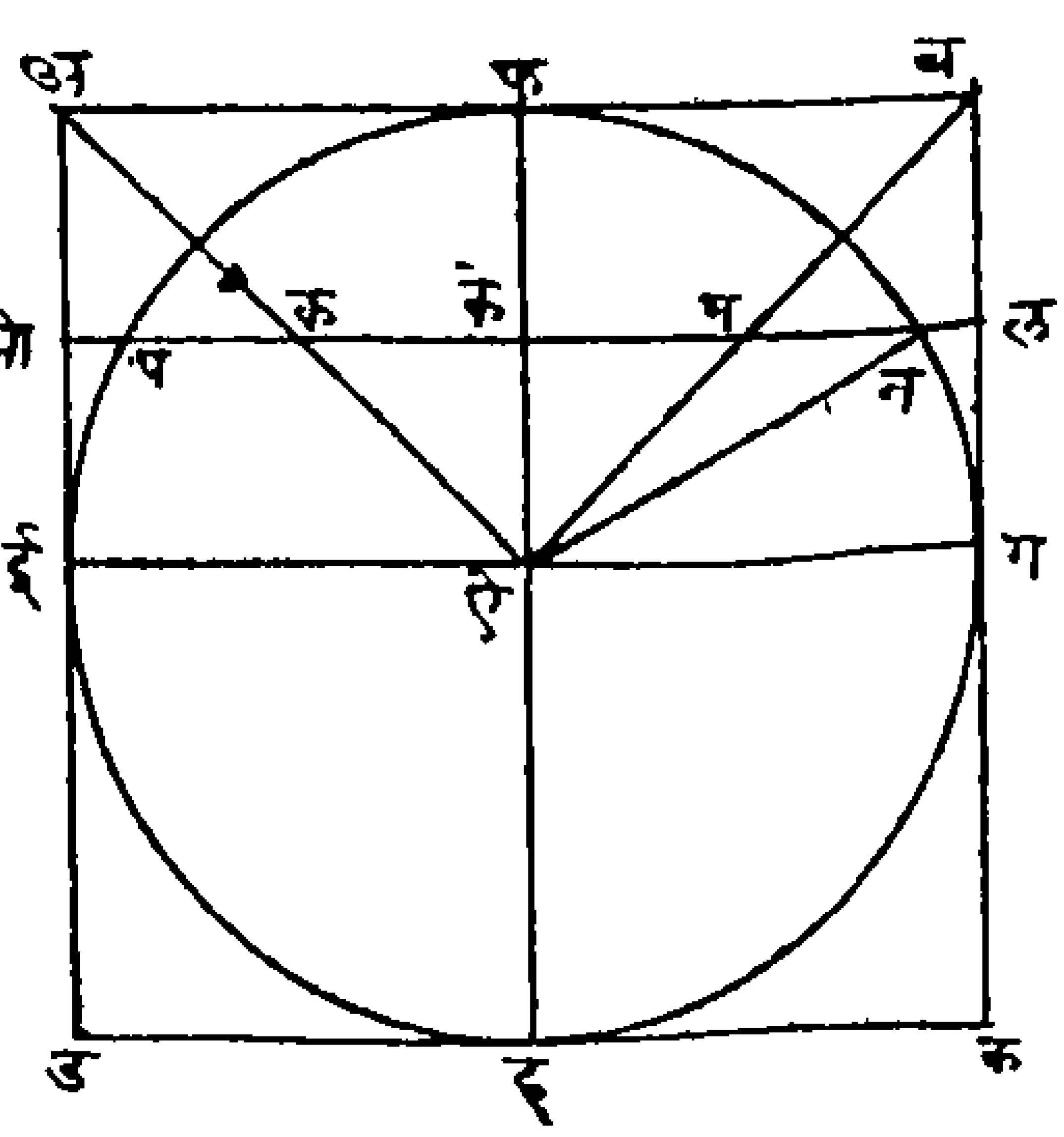
हेत, जांत **कग** रेघ साधारण आहे; आणि त्यांचा **कअ, कड** या दोन कर्ण रेघा परस्पर बराबर. कारण या दोनही आंसांचा त्रिज्या आहेत. याजकरितां (३४सि० २कु०प्र०) त्यांचा तिसऱ्याही बाजू **गअ, गड** बराबर आहेत. या रीतीनें दाखविलें जातें कीं **ग** मध्यस्थळापासून **अडब** छिन्नाचे पातळीवर मर्यादेपर्यंत दुसऱ्या कितीही रेघा केल्या तरीं त्या सर्व **गअ** चे अथवा **गड** चे बराबर आहेत; याजकरितां हें छिन्न वर्तुळ आहे हें सिद्ध.

कुरलरी. गोलाचे मध्यापार जें छिन्न केलें तें वर्तुळ आहे; ज्याचा मध्यबिंदु आणि व्यास गोलाचा मध्यबिंदु आणि व्यास यांचे बराबर आहे; आणि या छिन्नास गोलाचें मोठें वर्तुळ ह्मणतात; आणि गोलाचे दुसऱ्ये सर्व छिन्नांस गोलाचीं लाहान वर्तुळें ह्मणतात.

---

## ११७ सिद्धांत.

गोलाचे भोंवतीं गोलाचे चार अंगाबरोबर सलग्न जें शिलिंदर त्याचे दोन तृतीयांश तें गोल आहे.




**अबकड** शिलिंदर असेल, जें **ईफगह** गोला सभोंवतीं चारी आंगाबराबर स्पर्शलें आहे; तर **ईफगह** गोल **अबकड** शिलिंदराचे दोन तृतीयांश होईल.

ह्मणोन शिलिंदराची **अक** पातळी आणि गोल यांचे **ऐ** मध्यस्थळापार छिन्न असेल, आणि **अऐ, बऐ** सांध. नंतर **फऐह** रेघ **अड** शीं अ-

थवा **बक** शीं समांतर कर आणि **ईएग, ओकेल** या दोन **अब** शीं किंवा **डक** शीं समांतर रेघा कर, ह्मणजे **ओकेल** रेघ बएरेघेस **म** स्थळीं मिळेल, आणि गोल छिन्नास **न** स्थळीं मिळेल; नंतर **एन** सांध.

आतां कल्पना कर कीं **हफबक** पातळी **हफ** आंसांवर फिरविल्यास **फग** चौरसापासून **अग** शिलिंदर बनेल; तसें **एफग** वर्तुळपादापासून **ईफग** अर्धगोल बनेल; आणि **एफब** त्रिकोणापासून **एअब** वर्तुळ शंकू बनेल, या फिरविण्यापासून **केल, केन, केम** या तीन रेघा **अग** शिलिंदाराचें **ओल** छिन्न, **ईफग** अर्धगोलाचे **पन** छिन्न, आणि **एअब** शंकूचें **कम** छिन्न, या सर्व वर्तुळ छिन्नांचा अनुक्रमें त्रिज्या होतात.

आतां **फब, फए** अथवा **एग** याचे बरोबर आहे; आणि **केल, फब** शीं समांतर आहे; याजकरितां (८२ सि० प्र०) सरूप त्रिकोण मार्गानें **एके, केम** चे बराबर आहे; नंतर **एकेन** या काटकोन त्रिकोणांत (३४ सि० प्र०) **एन² = एके² + केन²** आहे. पुनः **केल, एग** त्रिज्येचे अथवा **एन** त्रिज्येचे बराबर आहे, आणि (वर सिद्ध झाल्यावरून) **केम = एके** याजकरिता **केल² = केम² + केन²** अथवा या तीन वर्तुळ छिन्नांचे सर्वाहून लांब त्रिज्येचा वर्ग दोन दुसऱ्ये छिन्नांचे त्रिज्यांचे वर्गांचे बेरिजेबराबर आहे; आणि (९२ सि० प्र०) वर्तुळें परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यासांचे अथवा त्रिज्यांचे वर्ग. याजकरितां जें वर्तुळ **केल** त्रिज्येचे फिरवण्यापासून होतें तें; **केन, केम** या त्रिज्यांचे फिरवण्यापासून जीं दोन वर्तुळें होतात; त्यांचे बेरिजे बरोबर आहे; अथवा **ओल** हें शिलिंदराचें छिन्न गोलाचें **पन** छिन्न आणि वर्तुळ शंकूचें **कम** छिन्न यांचे बेरिजेबराबर आहे. आणि **केल** रेघ **फब** किंवा **एग** यांशीं समांतर को-

ठेही ठेविली तरीं शिलिंदराचें छिन्न त्या दोन छिन्नांचे बेरिजे बराबर हो-ईल; यांतून निघतें कीं ईब शिलिंदर जें पूर्व सर्व छिन्नांपासून बनलें गेलें, तें ईफग अर्धगोल, आणि ऐअब वर्तुळ शंकू या दोहोंचे बेरिजे बराबर आहे.

परंतु (११५ सि० २ कु० प्र०) ऐअब वर्तुळ शंकू, त्याचे बराबर पायाचे आणि बरोबर उंचीचे ईब शिलिंदराचा तृतीय भाग आहे; याजकरितां ईफग अर्धगोल त्या शिलिंदराचे, बाकी राहिल्ये दोन तृतीय भागा बरोबर आहे; अथवा ईफगह हें सर्व गोल अबकड या सर्व शिलिंदराचे दोन तृतीय भाग आहेत हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी, वर्तुळ शंकू, अर्धगोल आणि शिलिंदर हीं सर्व बरोबर पायाचीं आणि बरोबर उंचीचीं परस्परांस आहेत. यापुढील संख्या १, २, ३ या प्रमाणें.

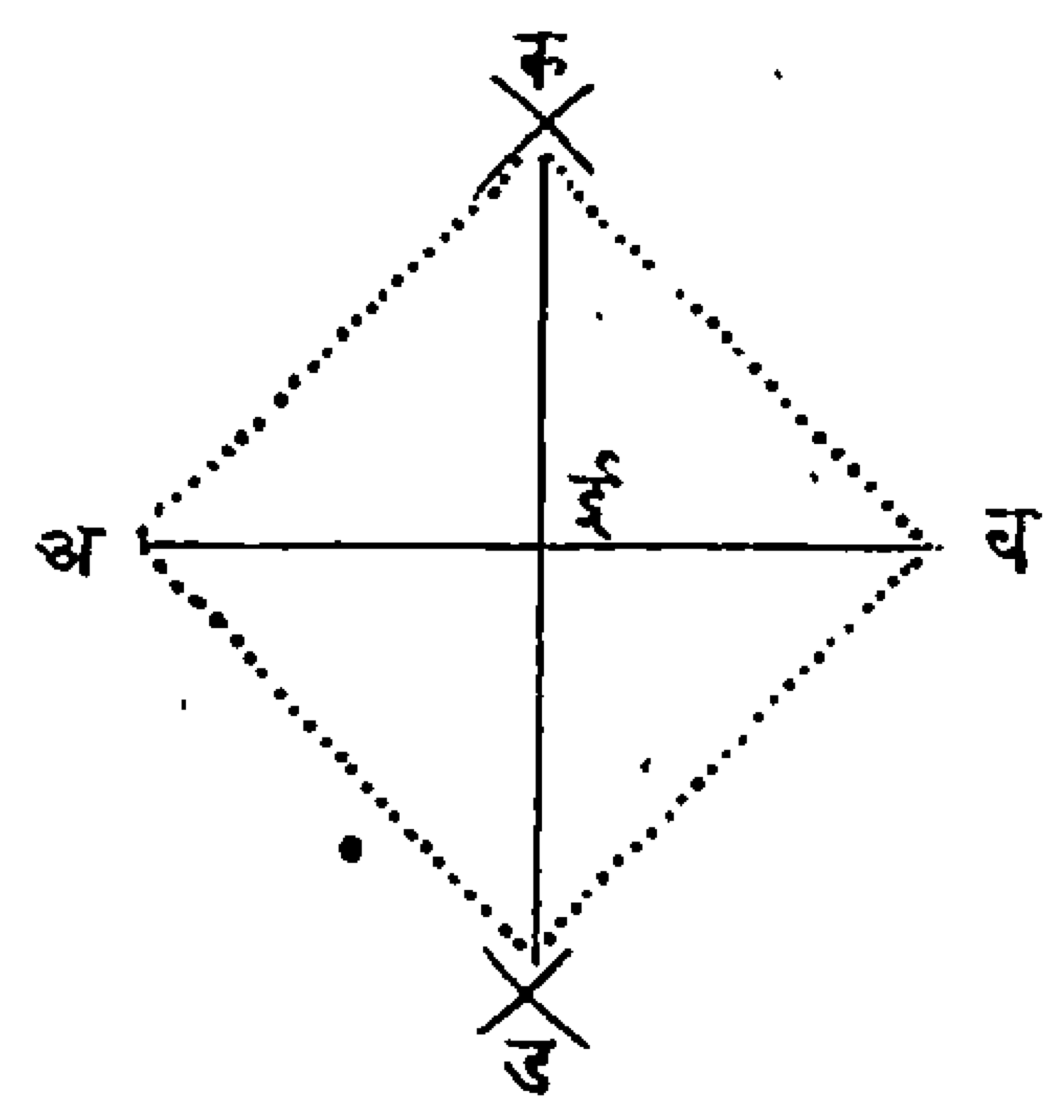
दुसरी कुरलरी, सर्व गोल परस्परांस आहेत, जसे त्यांचे व्यासांचे घन. कारण (११२ सि० प्र०) हे व्यास त्या गोलांचे सभोंवत्या शिलिंदराचा सजाति सरळ रेघा आहेत.

तिसरी कुरलरी, वर सांगीतल्ये सिद्धांता पासून कळतें कीं ईगनप गोल खंड, ईगलओ शिलिंदर आणि ऐमक वर्तुळ, यांचे वजाबाकीचे बरोबर आहे; ह्मणजे सर्वांची उंची ऐके बराबर आहे, आणि पफन गोल खंड, अबलओ शिलिंदर आणि अक्षमब वर्तुळ शंकू खंड यांचे वजाबाकी बराबर आहे, या सर्वांची उंची फके बराबर आहे.

# कृत्यें.

## प्रथम कृत्य.

कोणतीही अब सरळरेघ दुभागण्याचें, ह्मणजे तिचे बराबर दोन तुकडे करण्याचें.




अ आणि ब हीं दोन मध्यस्थळें जाणोन कोणत्याही बरोबर त्रिज्येनें दोन दोन कौंस कर, असे कीं क आणि ड या स्थळीं परस्पर छेदितील; नंतर कड रेघ कर, ह्मणजे ही रेघ सांगितल्ये अब रेघेस ई स्थळीं दुभागील.

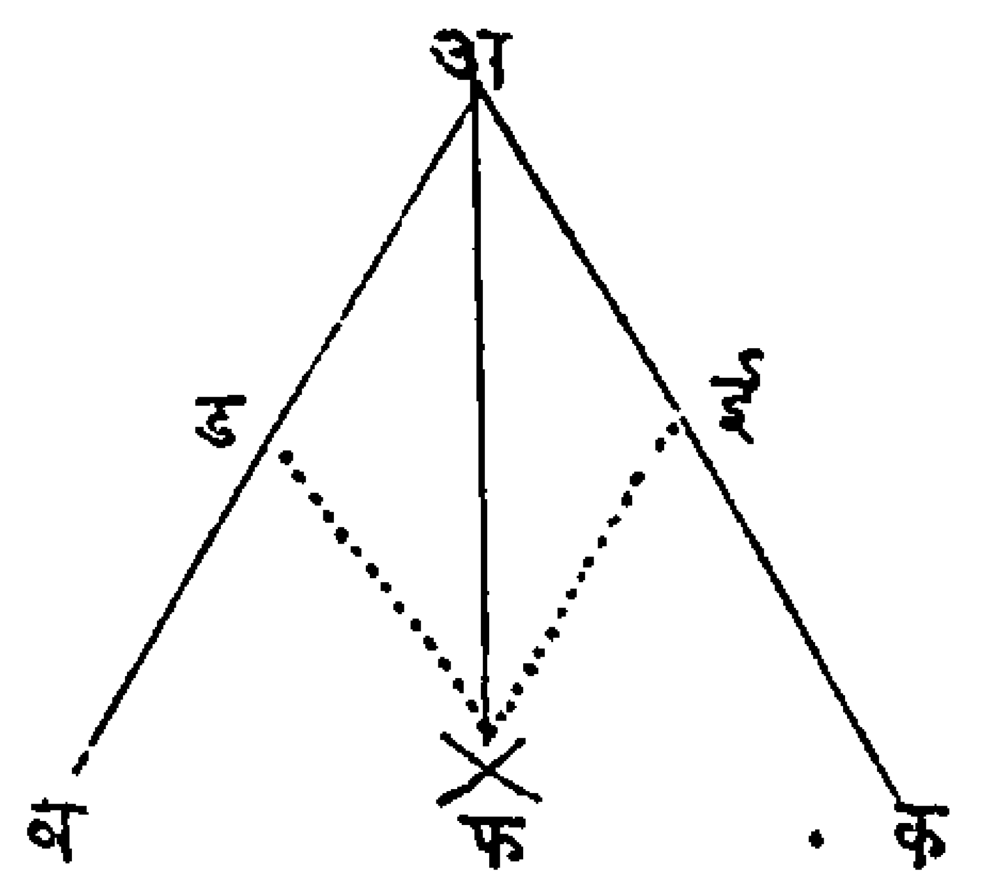
ह्मणोन अक, बक, अड, बड या चार त्रिज्या कर. आतां या चार त्रिज्या बरोबर आहेत; आणि अकड, बकड या दोन त्रिकोणांत कड बाजू साधारण आहे. याजकरितां हे दोन त्रिकोण समबाजू आहेत; ह्मणोन (५ सि॰ प्र॰) समकोनही आहेत; ह्मणजे अकई कोन बकई कोनाबराबर आहे.

नंतर अकई, बकई या दोन त्रिकोणांत एकाचा अक, कई या बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचे बक, कई या बाजूंचे बराबर आहेत; आणि त्यांचे आंतील अकई, बकई हे कोन (वर सिद्ध झाल्यापासून) बराबर आहेत, याजकरितां (१ सि॰ प्र॰) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम आहेत; यापासून अई बाजू बई बाजूचे बराबर आहे हें सिद्ध.

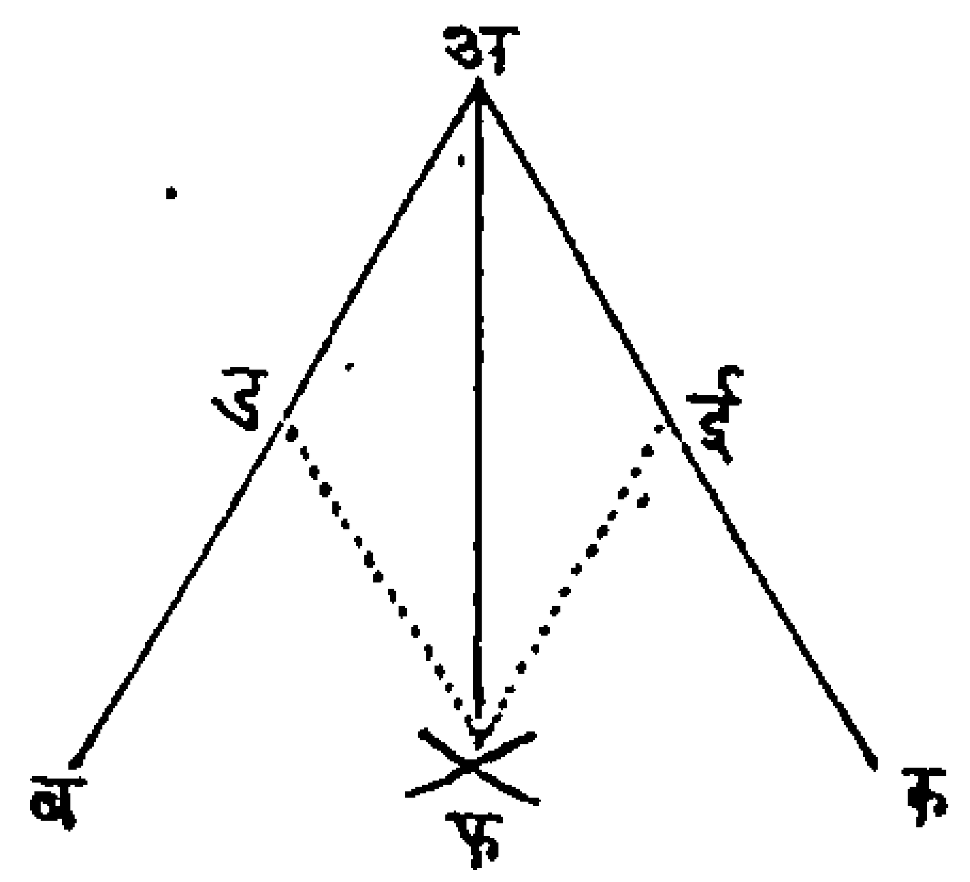
## दुसरें कृत्य.

कोणताही बअक कोन दुभागावयाचें.

कोणत्याही एक त्रिज्येनें अ मध्यस्थळ मानून अब, अक रेघांतून अड, अई बराबर भाग कर, आणि त्याच त्रिज्येनें ड, ई हीं दोन मध्यस्थळें करून दोन कौंस कर, असेकीं फ स्थळीं परस्परांस छेदितील. नंतर अफ रेघ कर, ह्मणजे ही रेघ बअक कोनास दुभागील



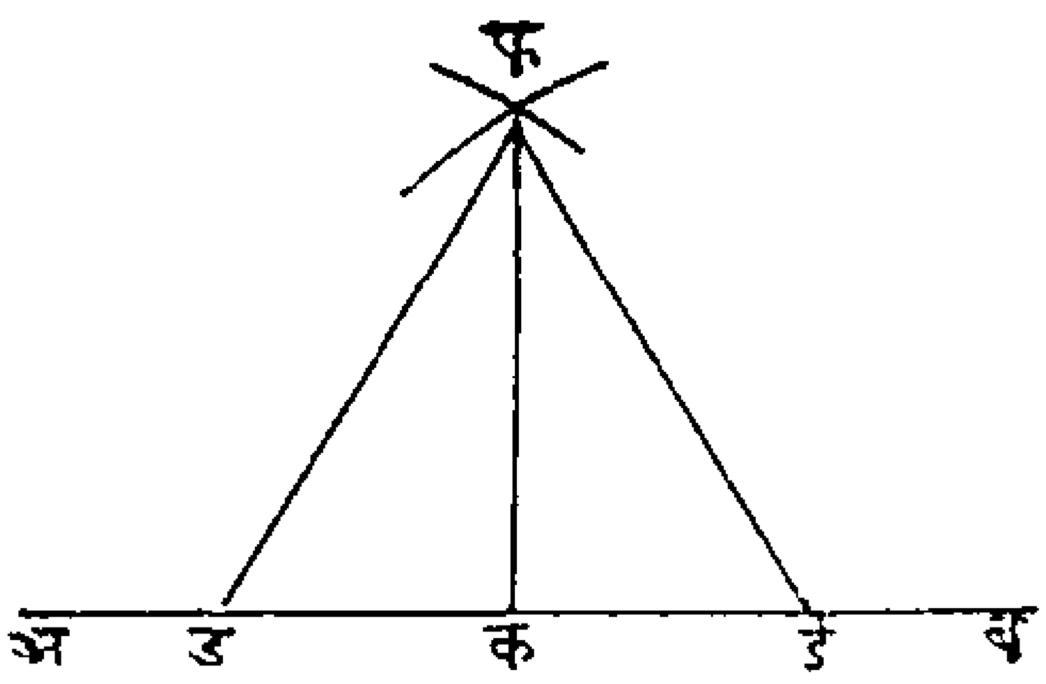

ह्मणोन डफ, ईफ सांध. आतां अडफ, अईफ या दोन त्रिकोणांत एकाचा अड, डफ या दोन बाजू दुसऱ्याचे अई, ईफ या दोन बाजूंचे बराबर आहेत; कारण या सर्व बरोबर त्रिज्या आहेत, आणि अफ बाजू दोहोंस ही साधारण आहे; याजकरितां हे दोन ही त्रिकोण समबाजू आणि ह्मणोनच (५ सि॰ प्र॰) समकोनही आहेत; ह्मणजे बअफ. कोन कअफ कोनाबराबर आहे हें सिद्ध




स्कोल्यम याच रीतीनें वर्तुळाचा कौंस दुभागिला जातो.

## तिसरें कृत्य.

कोणत्याही अब सरळ रेघेचे सांगीतल्ये क स्थळावर लंब करावयाचें.



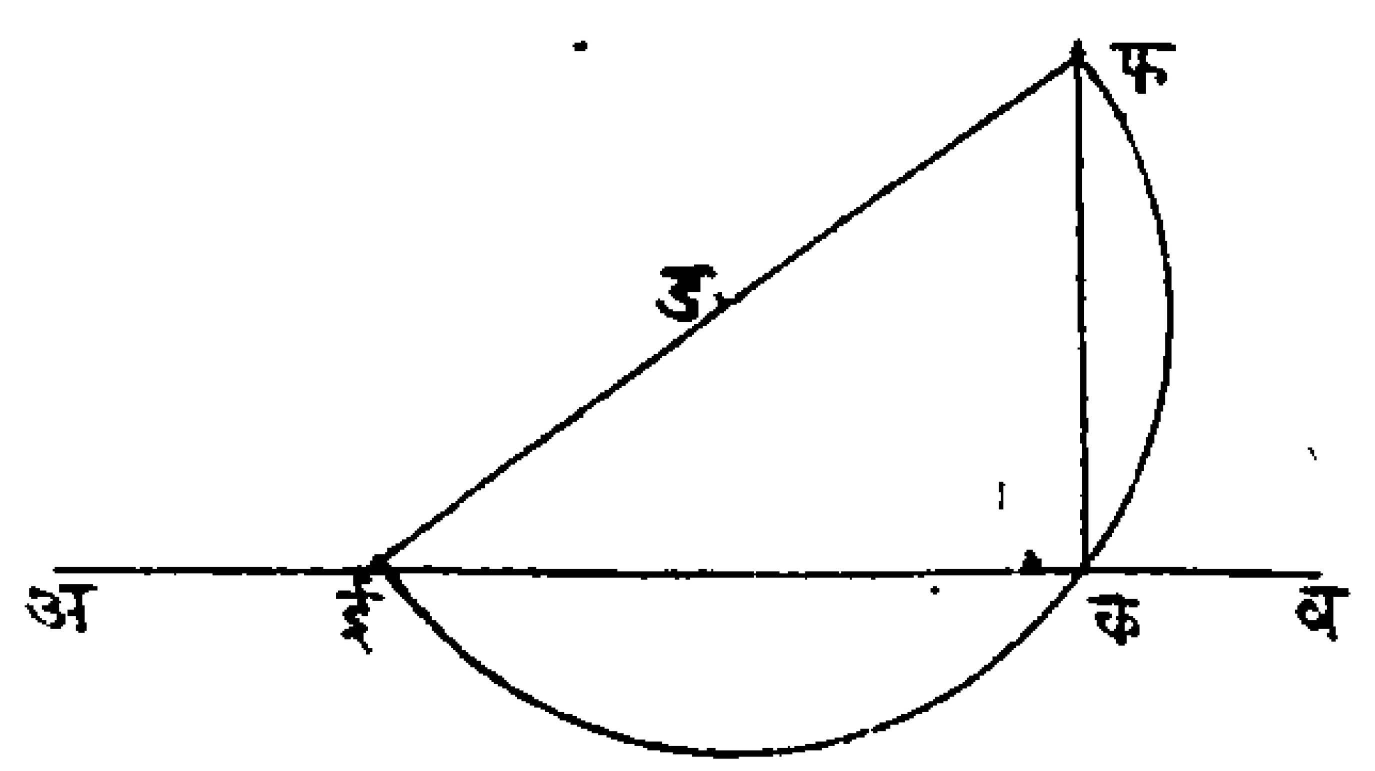

सांगीतलें क स्थळ मध्य करून कोणत्याही एक त्रिज्येनें अब रेघेवर कड आणिं कई हे बराबर भाग कर; आणि ड, ई हीं दोन मध्य स्थळें करून कोणत्याही त्रिज्येने दोन कौंस कर; असे कीं फ स्थळीं परस्पर छेदितील; नंतर कफ सांध, ह्मणजे ही रेघ इछिला लंब होईल.

ह्मणोन डफ, ईफ या दोन बरोबर त्रिज्या कर, आतां कडफ, कईफ या दोन त्रिकोणांत एकाचा कड, डफ या दोन बाजू दुसऱ्याचे कई, ईफ या दोन बाजूंचे बराबर आहेत; आणि कफ दोहोंस साधारण आहे; ह्मणोन हे दोन त्रिकोण समबाजू, आणि ह्मणोनच (५ सि०प्र०) समकोनही आहेत; तेव्हां क स्थळींचे दोनही कोन बराबर आहेत. याजकरितां (११ व्या०प्र०) कफ रेघ अब रेघेवर लंब आहे; हें सिद्ध.

---

## दुसऱ्या रीतीनें.

जेव्हां सांगीतला क बिंदु रेघेचे शेवटाजवळ आहे.



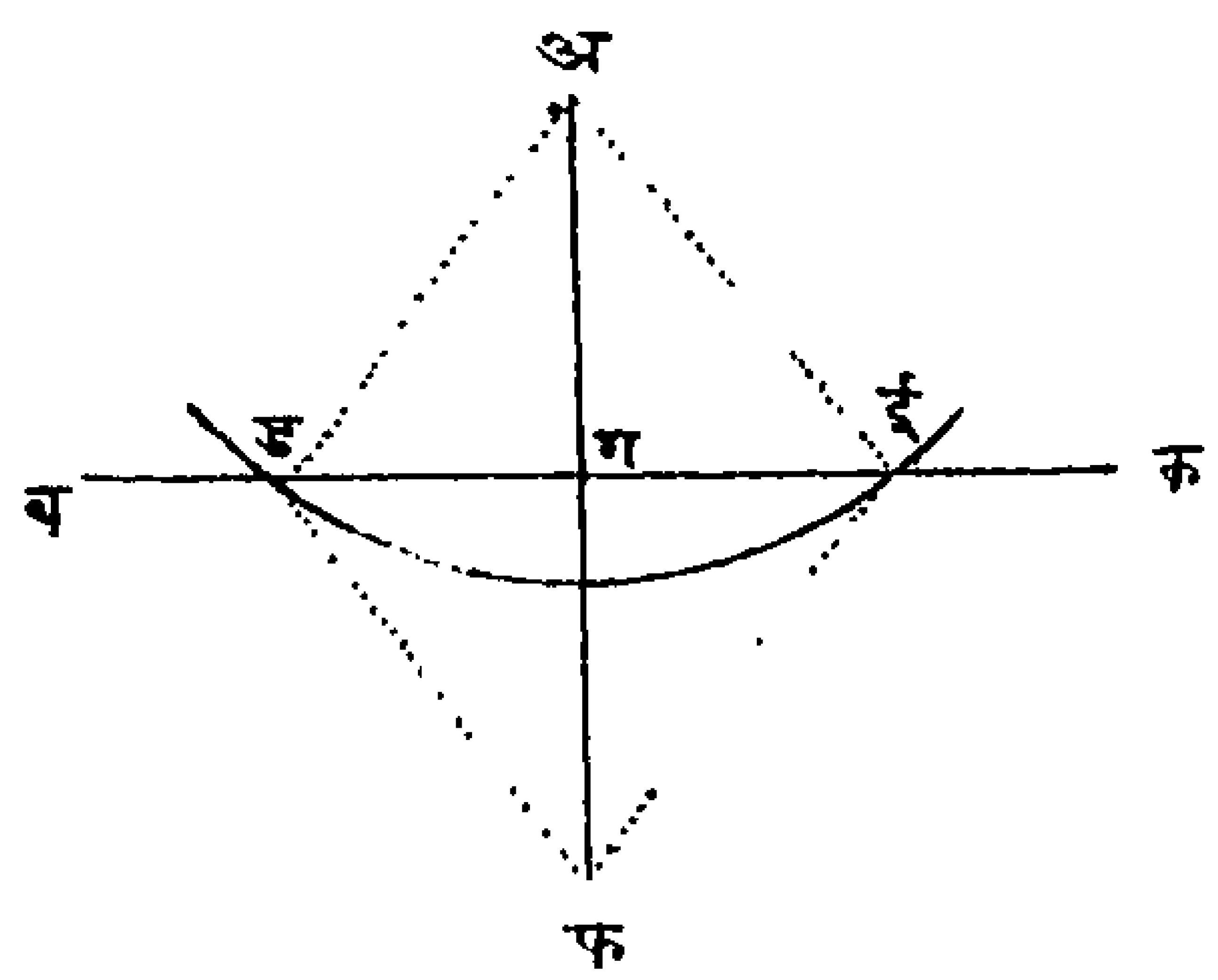

अब रेघेचे वरल्या अंगास कोणताही ड बिंदु मध्य करून क बिंदुपार एक वर्तुळ कोंस कर असा कीं अब रेघेस ई स्थळीं ही छेदील. नंतर ड बिंदूमध्यापार ईडफ व्यास करून कफ सांध, म्हणजे हा अब रेघेवर इच्छिला लंब होईल.

आतां क कोन अर्धवर्तुळांत आहे म्हणोन (५२सि॰प्र॰) काट कोन आहे, याजकरितां (१५.व्या॰प्र॰) कफ रेघ लंब आहे हें सिद्ध.

---

## चवथें कृत्य.

कोणत्याही अ बिंदूपासून सांगीतल्ये बक रेघेवर लंब उतरावयाचें.




सांगीतला अ बिंदु मध्य जाणून कोणत्याही त्रिज्येनें एक कोंस कर; असा कीं बक रेघेस ई आणि ड या दोन स्थळीं छेदील; नंतर ड आणि ई हीं दोन मध्यस्थळं जाणून दोन कोंस कर; असे कीं फ स्थळीं परस्पर छेदितील; आतां अगफ रेघ कर, म्हणजे ही रेघ बक रेघेवर लंब झाला.

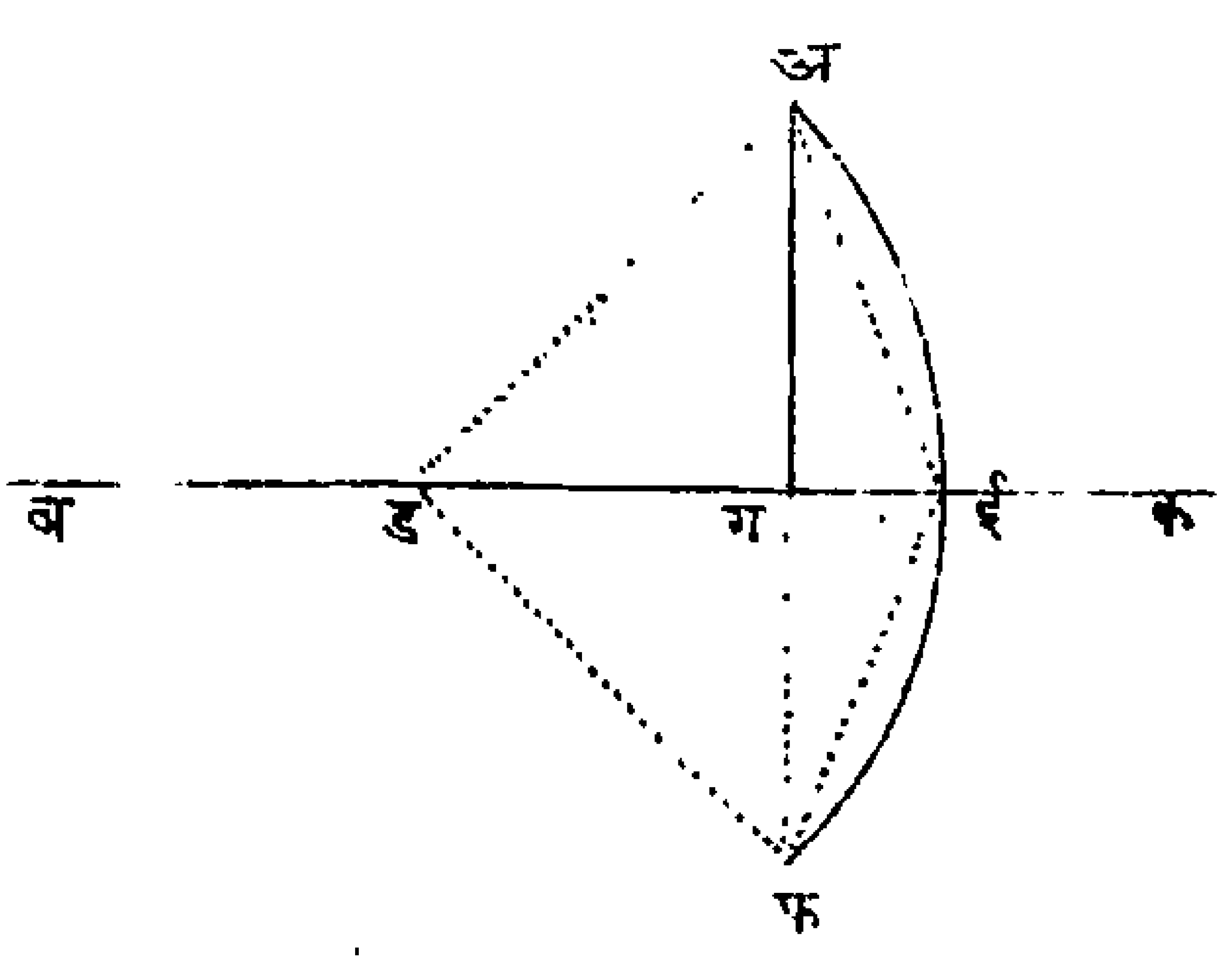
म्हणोन अड, अई या दोन बरोबर त्रिज्या कर; आणि तसाच

डफ. ईफ याही बरोबर त्रिज्या कर; आतां अडफ, अईफ या दोन त्रिकोणांत एकाचा अड, डफ या दोन बाजू दुसऱ्याचे अई, ईफ या दोन बाजूंचे बरावर आहेत; आणि अफ साधारण आहे; याजकरितां हे दोन त्रिकोण समबाजू आणि ह्मणोनच (५सि०प्र०) समकोनही आहेत. ह्मणोन डअग कोन ईअग कोनाबराबर आहे; पुन: अडग, अईग या दोन त्रिकोणांत एकाचा अड, अग या दोन बाजू दुसऱ्याचे अई, ईग या दोन बाजूंचे बरोबर आहेत आणि यांचे आंतील कोन ही परस्पर बरोबर ह्मणोन (१सि०प्र०) हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत; ह्मणजे ग स्थळींचे दोन कोन बराबर काटकोन आहेत; याजकरितां (११व्या०प्र०) अग रेघ बक रेघेवर लंब आहे हें सिद्ध.

---

## दुसऱ्येरीतीनें.

जेव्हां सांगीतला अ बिंदु रेघेचे शेवटाकडील स्थळाचे समोर आहे. सांगीतल्ये बक रेघेवर कोणतेंही ड मध्यस्थळ जाणून अ बिंदूपार एक कोंस कर असा कीं बक रेघेस ई स्थळीं छेदील; आतां ई स्थळ मध्य करून ईअ त्रिज्येनें एक कोंस कर, असा कीं पूर्व कोंसास फ स्थळीं छेदील; नंतर अगफ रेघ कर, ह्मणजे ही रेघ बक रेघेवर इछिला लंब होईल.



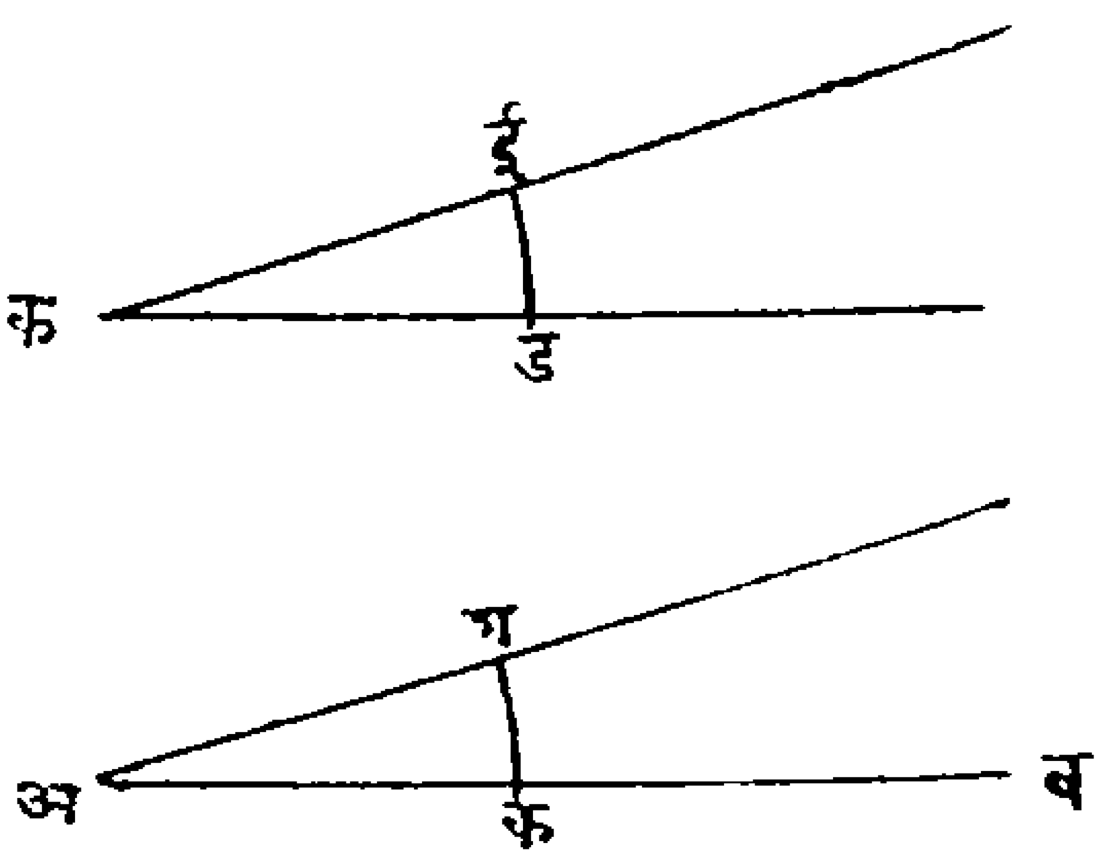

ह्मणोन डअ, डफ या दोन

बरोबर त्रिज्या कर; आणि ईअ, ईफ या दोन बरोबर त्रिज्या कर; आतां डअई, डफई हे दोन त्रिकोण समबाजू आणि (५सि०प्र०) समकोनही आहेत, याजकरितां ड स्थळींचे दोन ही कोन बराबर आहेत; यांतून निघतें कीं डअग, डफग या दोन त्रिकोणांत एकाचा ड अ, डग या दोन बाजू दुसऱ्याचे डफ, डग या दोन बाजूंचे बराबर आणि त्यांचे आंतील कोनही बराबर ह्मणोन (१सि०प्र०) ग स्थळींचे दोन कोन बराबर. याजकरितां हे दोन काटकोन आहेत; ह्मणोन अग रेघ बक रेघेवर लंब आहे हें सिद्ध.

---

## पांचवें कृत्य.

अब रेघेवर अ बिंदुस्थळीं सांगितल्ये क कोनाबराबर कोन करावयाचें.

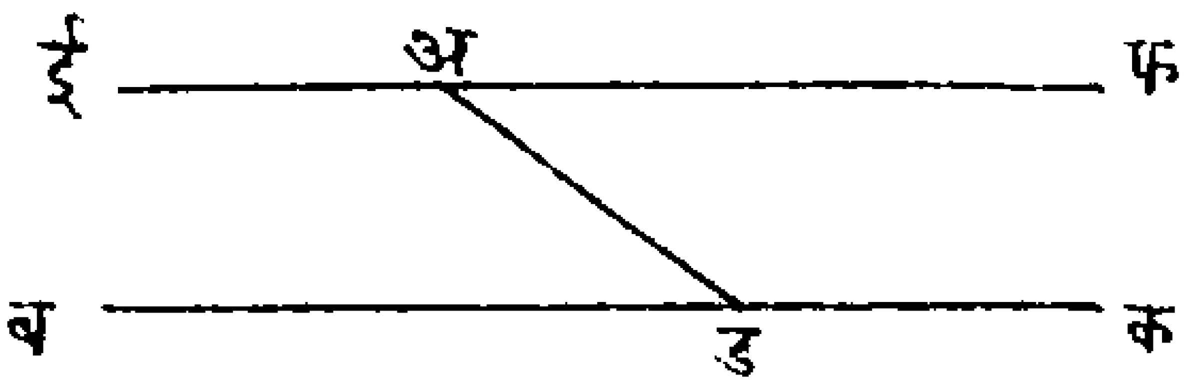



अ आणि क हे दोन बिंदू मध्य करून कोणत्याही त्रिज्येनें डई, फग हे दोन कौंस कर; नंतर डई त्रिज्येनें फ मध्य करून दुसरा एक कौंस कर; असा कीं फग ला ग स्थळीं छेदील; आतां ग बिंदूपार अग रेघ कर; ही रेघ इच्छिला कोन करील.

ह्मणोन कल्पना कर, कीं डई, फग या दोन बरोबर रेघा अथवा त्रिज्या केल्या आहेत; तर कडई, अफग हे दोन त्रिकोण परस्पर समबाजू आणि (५सि०प्र०) समकोनही आहेत. याजकरितां अ कोन क कोनाबराबर आहे हें सिद्ध.

## साहावें कृत्य.

सांगितल्ये बक रेघेशीं अ बिंदूपार एक समांतर रेघ करायाचें.

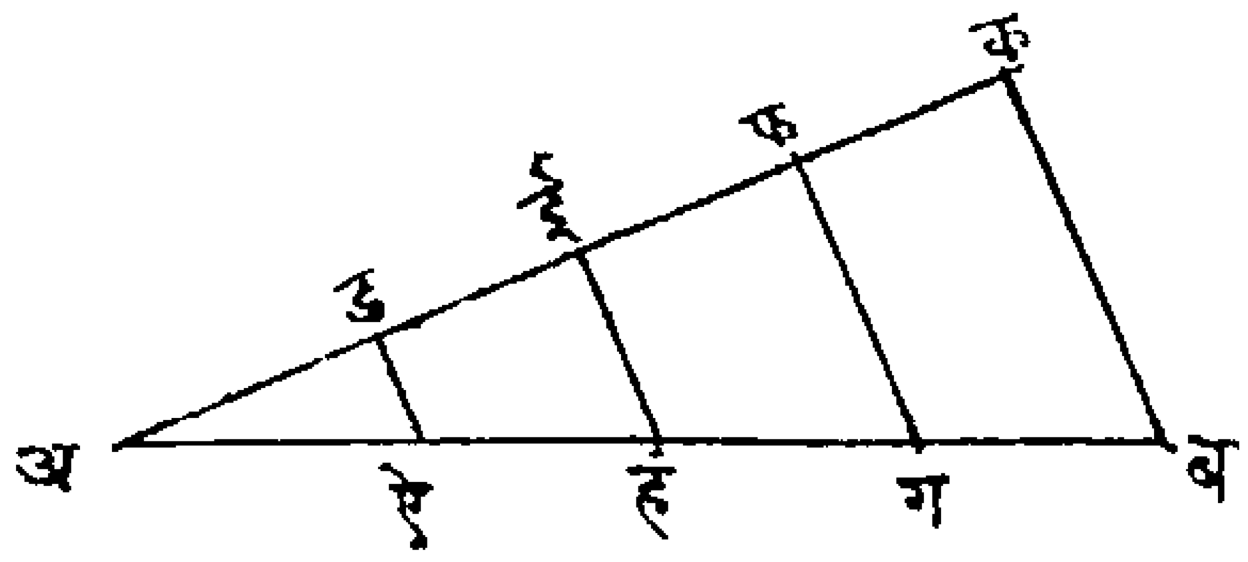



अ बिंदूपासून सांगीतल्ये ब-क रेघेवर कोणत्याही ड स्थळा पर्यंत एक अड रेघ कर; नंतर (५ कृत्याचेरीतीनें) ईअफ रेघ कर. अशी कीं फअड कोन बडअ कोना बराबर होईल; तर ईफ रेघ बक रेघेशीं समांतर होईल.

ह्मणोन बडअ कोन त्याचे व्युत्क्रम फअड कोना बराबर आहे; याजकरितां (१३सि०प्र०) बक, ईफ या रेघा परस्पर समांतर आहेत. हें सिद्ध.

## सातवें कृत्य.

सांगितल्ये अब रेघेचे व्हावे तेवढे भाग बराबर करावयाचें.

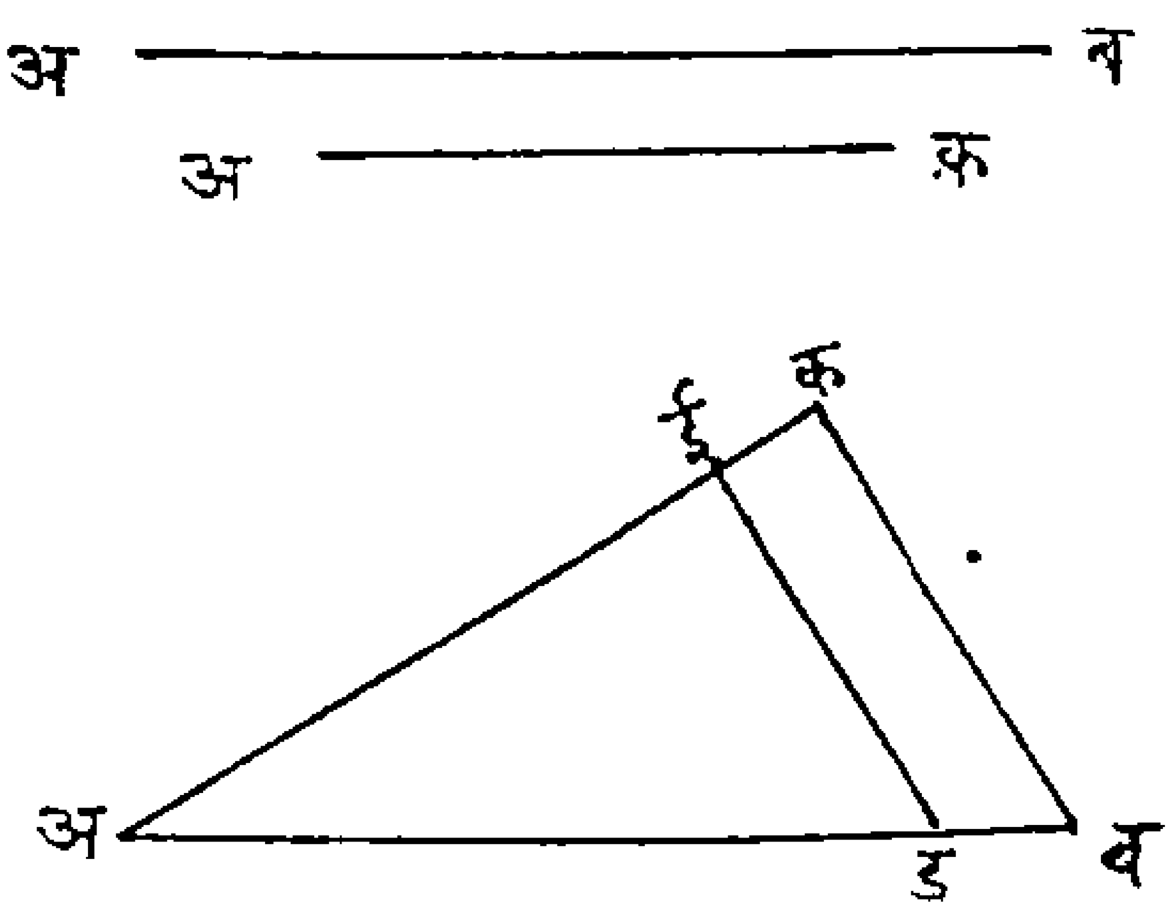



अब रेघेशीं अ बिंदू स्थळीं कोणताही कोन करील अशी एक अक रेघ कर; आतां अब रेघेचे जितके बराबर भाग करायाचे आहेत. तितके यथेछ अंतरानें अड, डई, ईफ, फक असे बराबर भाग कर; आतां बक सांध, नंतर बकशीं फग, ईह, डऐ या समांतर रेघा कर; या सर्व अब रेघेस इछे प्रमाणें भागितील;

कारण (८२सि०प्र०) या समांतर रेघा अब, अक या दोन बाजूंस प्रमाणानें भागितात, हें सिद्ध.

## आठवें कृत्य.

सांगीतल्या अब, अक रेघांचे तिसरें प्रमाण काढायाचें.



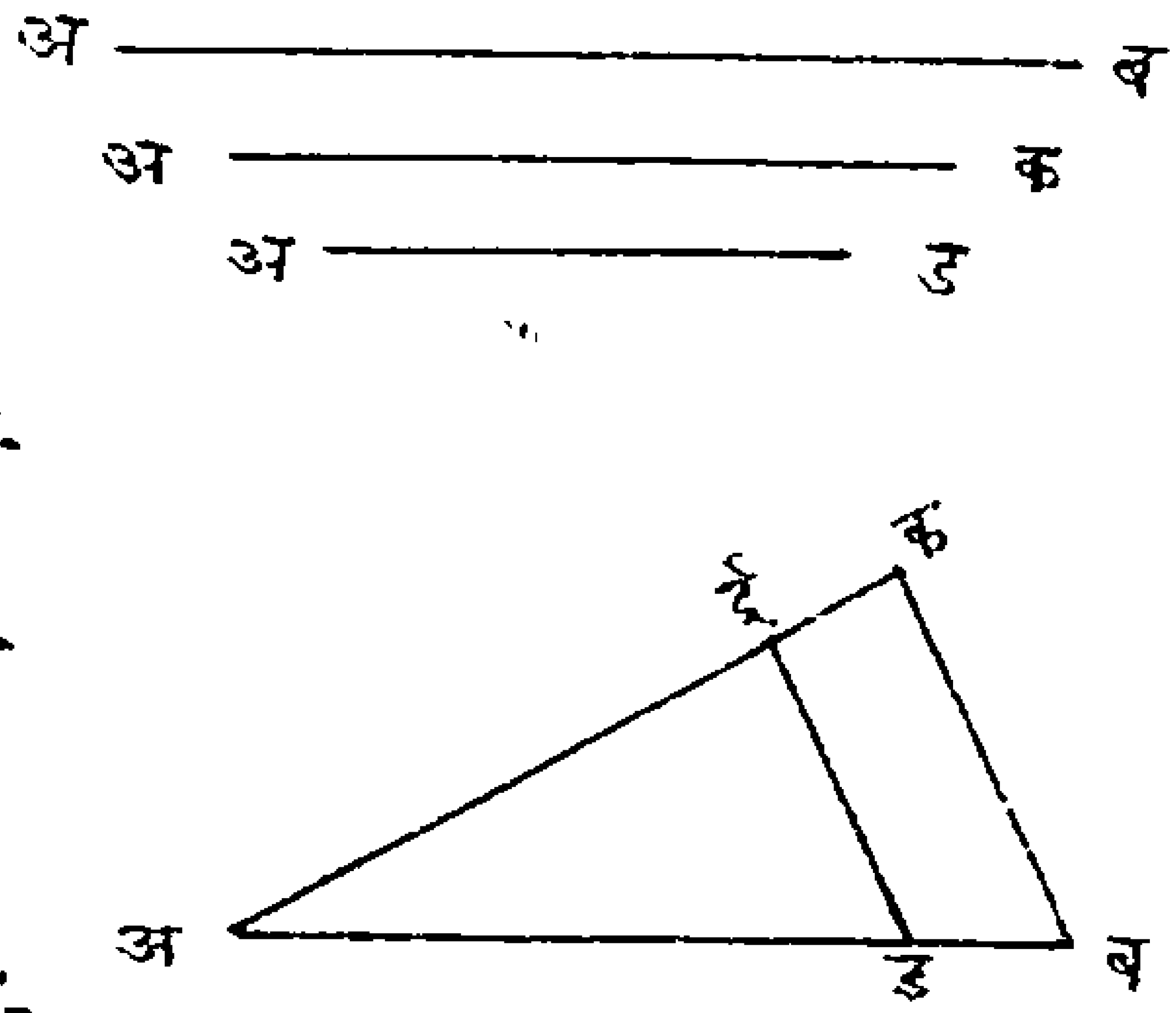

सांगीतल्या अब. अक या दोन रेघा अ स्थळीं कोणताही कोन करितील अशा ठेव; अब वर अक चे बराबर अड भाग कर; आतां बक सांध. आणि या बक शीं डई समांतर रेघ कर; ह्मणजे अई इच्छिलें तिसरें प्रमाण होईल.

ह्मणोन बक, डई या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत, याजकरितां त्यांहीं (८२सि०प्र०) अब, अक या दोन बाजू प्रमाणानें छेदिल्या ह्मणजे अब : अक :: अड अथवा तिचे बराबरीची अक : अई. याजकरितां अब, अक या दोहोंचें तिसरें प्रमाण अई आहे. हें सिद्ध.

## नववें कृत्य.

अब, अक, अड या सांगीतल्या तीन रेघांचें चतुः प्रमाण काढायाचें.

सांगीतल्या तीन रेघांतून अ-
ब, अक या दोन रेघा अ स्थळीं को-
ण ताही कोन करितील अशा ठेव; आ-
णि अब वर तिसरी रेघ अड कर; नं-
तर बक सांधून तिशीं समांतर रेघ ड
ई कर नंतर अई रेघ इच्छिलें चतुः प्रमा-
ण होईल.



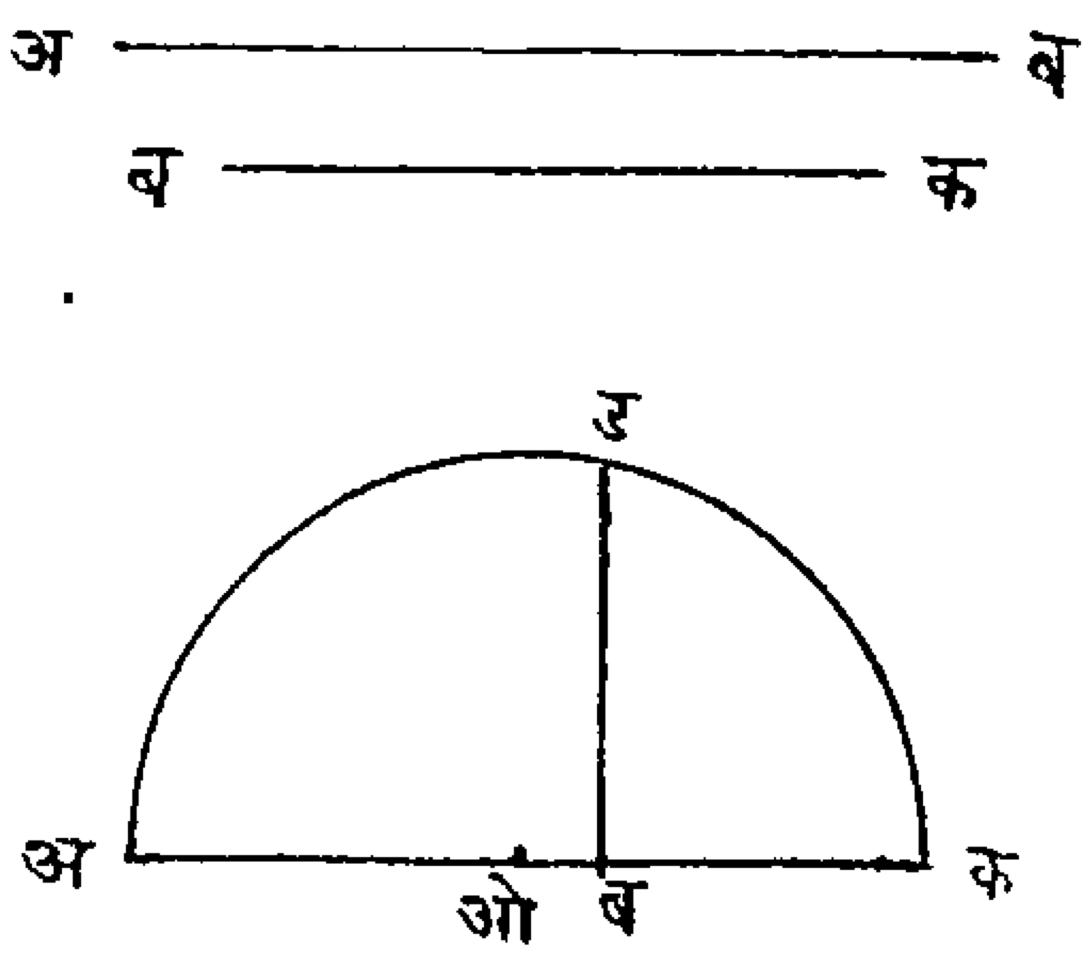

ह्मणोन बक, डई या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत, याजक रितां त्यांहीं (८२सि०प्र०) अब, अक या दोन बाजू प्रमाणानें छेदिल्या ह्मणजे अब: अक:: अड: अई हें सिद्ध.

---

## दहावें कृत्य.

सांगीतल्ये अब, बक या दोन रेघांचें मध्य प्रमाण काढायाचें.

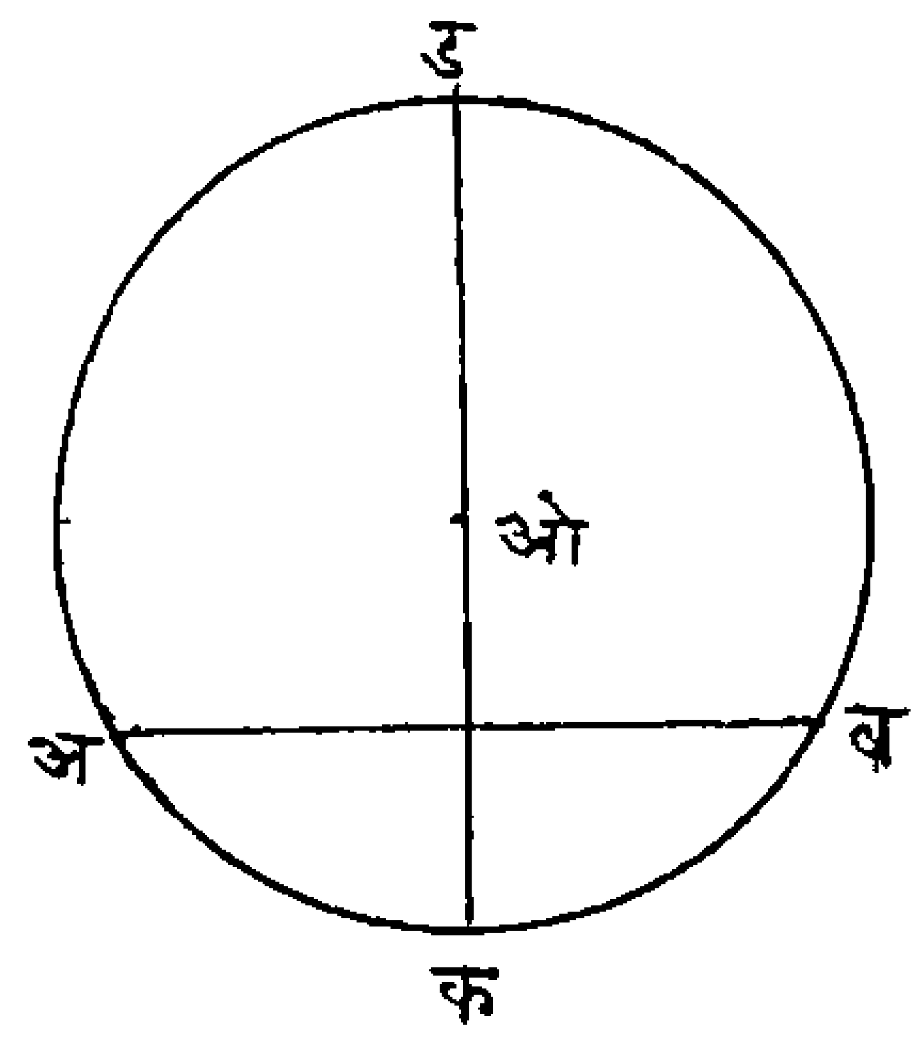
अब, बक या सांगीतल्या दोन रेघांची एकच अबक रेघ कर; आणि ही रेघ व्यास करून त्याजवर अडक अर्ध वर्तुळ कर; नंतर त्या अबक रेघेवर ब स्थळीं लंब कर; असा कीं अर्धवर्तुळास ड स्थळीं मिळेल; आतां (८७सि०कु०प्र०) ही बड रेघ अब, बक यांचें मध्य प्रमाण आहे, हें सिद्ध.




---

## अकरावें कृत्य.

कोणत्याही वर्तुळाचा मध्य काढावयाचें.



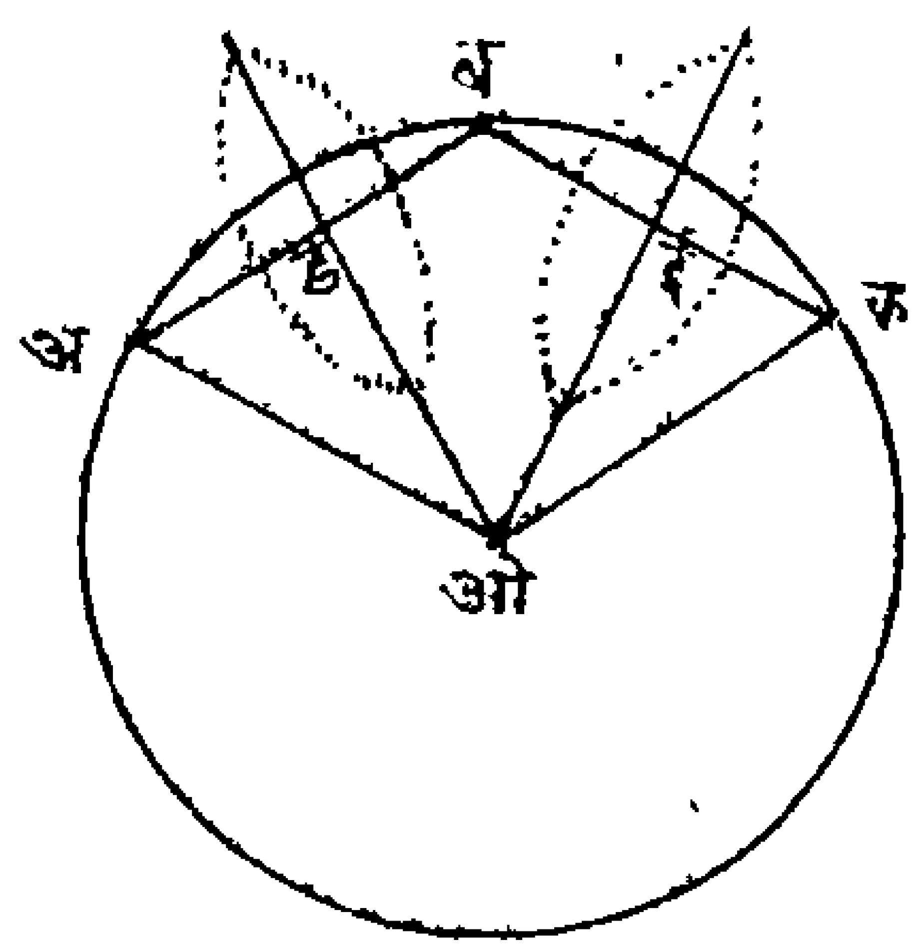

कोणतीही अब ज्या कर आणि ती स डक लंबानें दुभाग, ह्मणजे हा लंब (५१ सि॰ प्र॰) व्यास होईल; याजकरितां कड व्यास दुभागिल्यास दुभाग चिन्ह ओ स्थळ मध्य होईल. हें सिद्ध.

---

## बारावें कृत्य.

सांगितल्या अ.ब.क. या तीन बिंदूंचे पार वर्तुळ परिघ करायाचें.

ब मध्य बिंदूपासून बअ, बक या दोन ज्या कर आणि त्यांस लंबानीं दुभागून ते लंब वाढीव असे कीं ओ स्थळीं परस्पर मिळतील, तें ओ स्थळ वर्तुळ परिघाचा मध्य होईल. आतां या ओ मध्यापासून कोणत्याही बिंदूपर्यंत ह्मणजे जसें ओअ या त्रिज्येनें एक वर्तुळ कर, हें वर्तुळ राहिल्ये ब, क या बिंदूंचे पार जाईल.



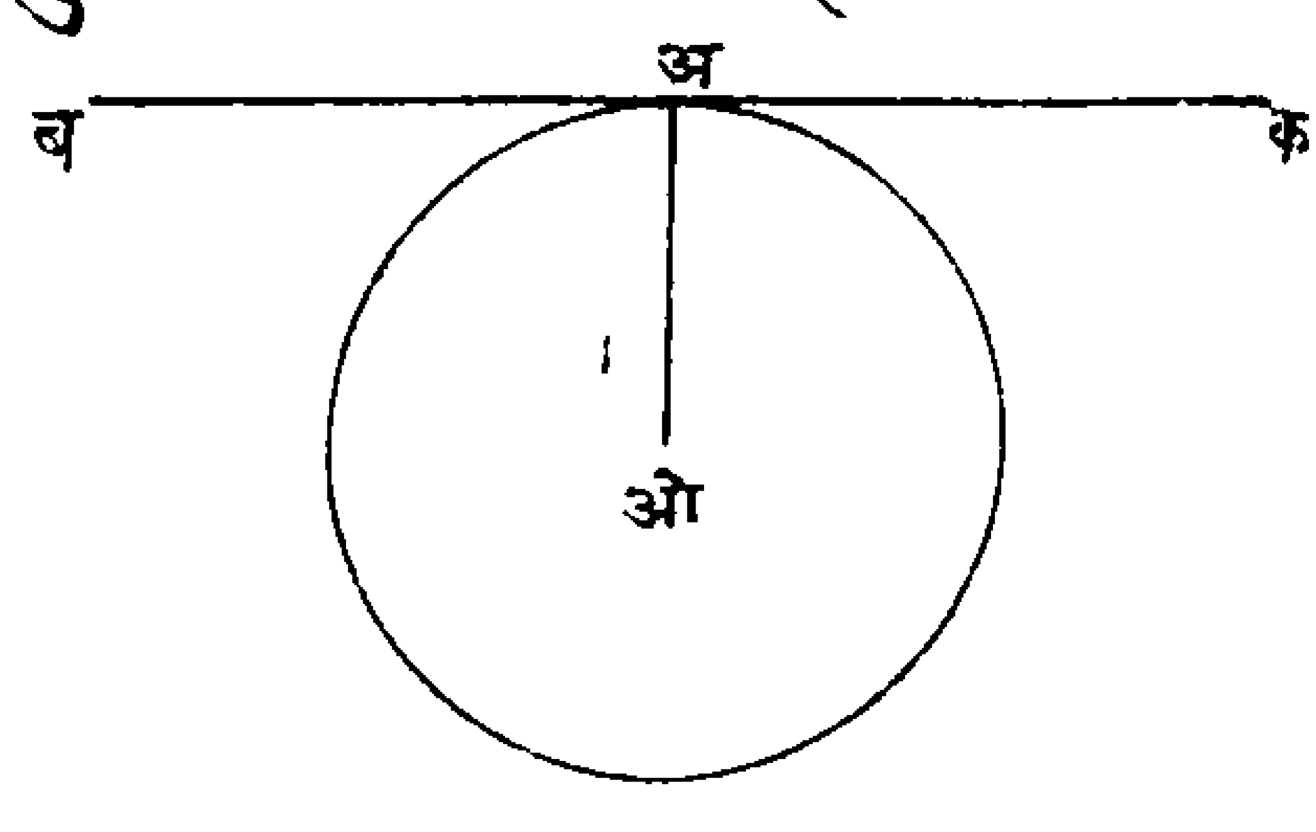

ह्मणोन ओअड, ओबड या दोन त्रिकोणांत (याच कृत्यरीतीनें) अड, डब या दोन बाजू बराबर आहेत; आणि ओड बाजू दोंहोंस साधारण आहे, आणि ड स्थळींचे त्या बाजूंचे आंतील दोन काटकोन परस्पर बराबर आहेत, याजकरितां (९ सि॰ प्र॰) त्यांचा

तिसऱ्याही बाजू ओअ.ओब या परस्पर बराबर आहेत, याच रीतीनें दाखविलें जातें कीं ओक बाजू ओब चे अथवा ओअ चे बराबर आहे; ह्मणजे ओअ, ओब. ओक या सर्व बराबर, याजकरितां या रेघा एकच वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत. हें सिद्ध.

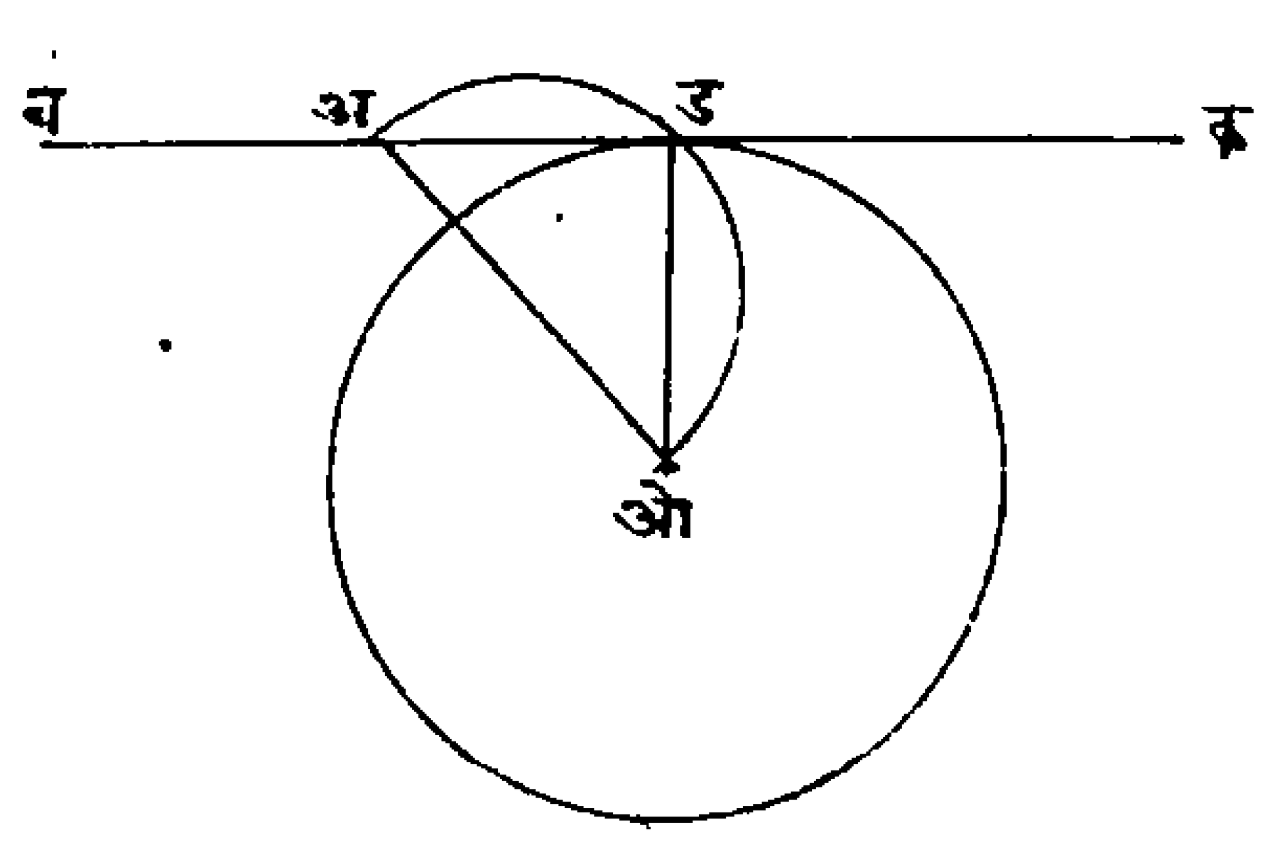
## तेरावें कृत्य.

सांगीतल्या अ बिंदूपार वर्तुळास स्पर्शरेघ करायाचें.

जेव्हां सांगीतला अ बिंदु वर्तुळपरिघावर आहे.




अ बिंदु आणि आ वर्तुळमध्य हे दोन्हीसांध, आणि या अओ त्रिज्येवर बअक रेघ लंब कर; ह्मणजे ही रेघ (४६ सि० प्र०) वर्तुळास अ बिंदूपार स्पर्शरेघ होईल.



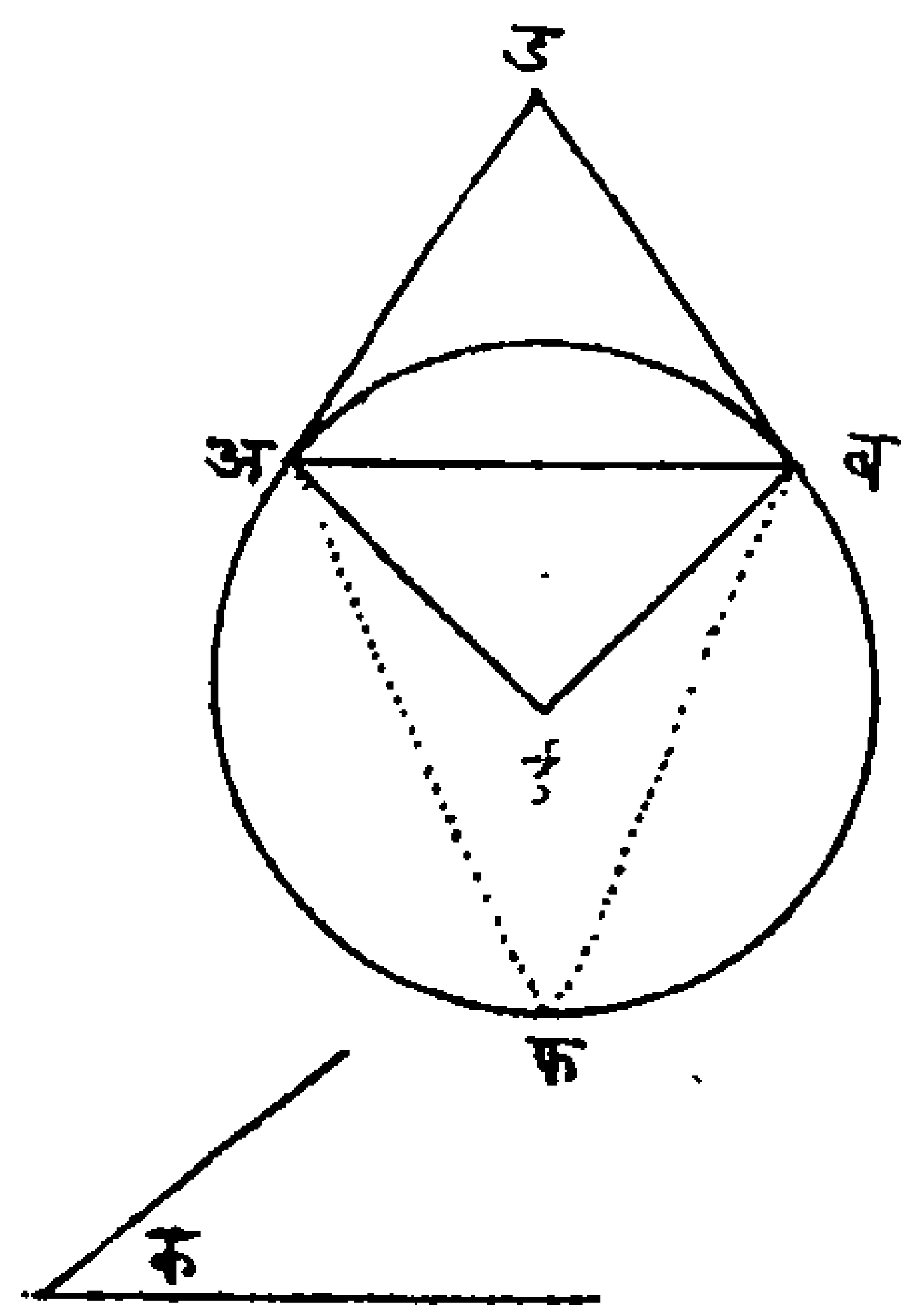

परंतु जेव्हां अ बिंदु वर्तुळाचे बाहेर आहे तेव्हां त्यापासून वर्तुळाचा ओ मध्यपर्यंत अओ रेघ कर; आणि या अओ रेघेस व्यास करून एक अर्धवर्तुळ कर, असें कीं वर्तुळपरिघास ड स्थळीं छेदील; नंतर या ड छेदनबिंदूपार बअडक रेघ कर, ह्मणजे ही रेघ अ बिंदूपार वर्तुळास इच्छिली स्पर्शरेघ होईल.

ह्मणोन डओ सांध, तर अडओ हा कोन अर्धवर्तुळांत का-

टकोन आहे याजकरितां अड रेघ डओ त्रिज्येवर लंब आहे ह्मणजे ही रेघ (५६ सि० प्र०) वर्तुळास स्पर्शरेघ आहे, हें सिद्ध.

## चौदावें कृत्य.

सांगीतल्ये अब रेघेवर वर्तुळखंड करायाचें जा वर्तुळ खंडांत सांगीतल्ये कोनाबराबर कोन होईल.

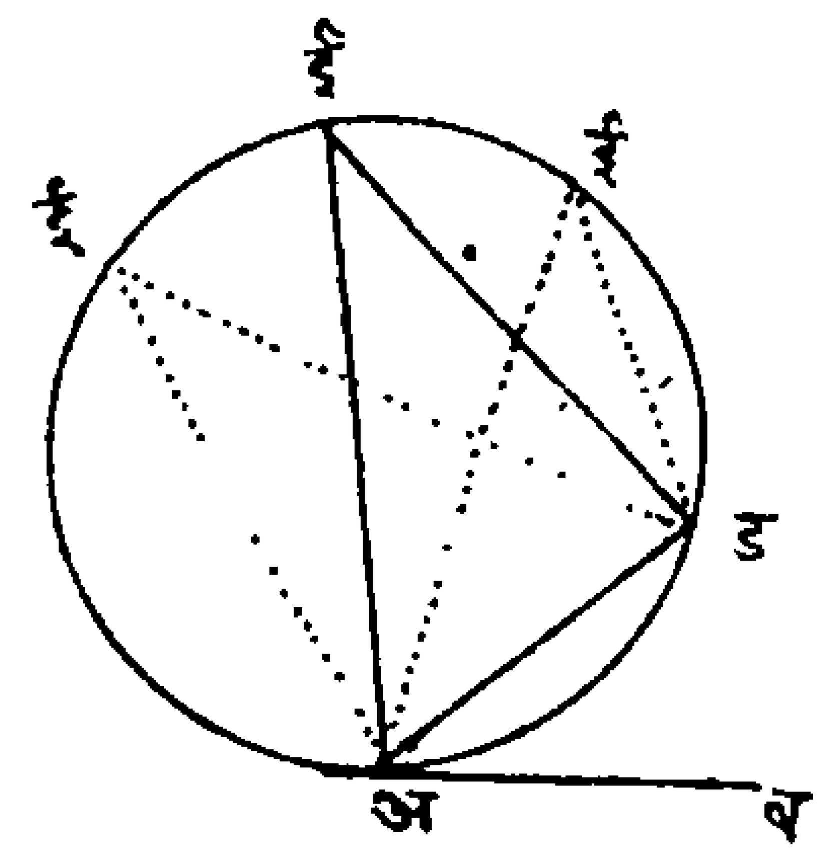


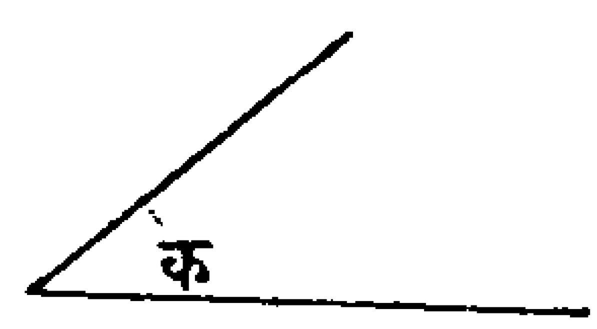

सांगीतल्ये अब रेघेचे दोनशेवटांवर डअब, डबअ हे दोन कोन सांगीतल्ये क कोनाचे बराबर कर; नंतर अड, बड यांजवर अई, बई हे दोन लंब कर आणि ई वर्तुळमध्य करून ईअ अथवा ईब या त्रिज्येनें एक वर्तुळ कर; तर अफब वर्तुळ खंड होईल. जांत कोणताही फ कोन केला तर सांगीतल्ये क कोनाबराबर होईल.

ह्मणोन अड, बड या दोन रेघा (याच कृत्यानें) ईअ, ईब या दोन त्रिज्यांवर लंब आहेत, याजकरितां (५६ सि० प्र०) त्या रेघा वर्तुळास स्पर्शरेघा आहेत; आणि डअब कोन अथवा डबअ कोन जो (या कृत्यानें) सांगीतल्ये क कोनाबराबर आहे, तेव्हां ते कोन (५२ सि० प्र०) व्युत्क्रम खंडांतील कोणत्याही अफब कोनाबराबर आहे, हें सिद्ध.

# पंधरावें कृत्य.

वर्तुळाचें खंड करायाचें, जा खंडांत सांगीतल्ये क कोनाबराबरच कोन होईल.



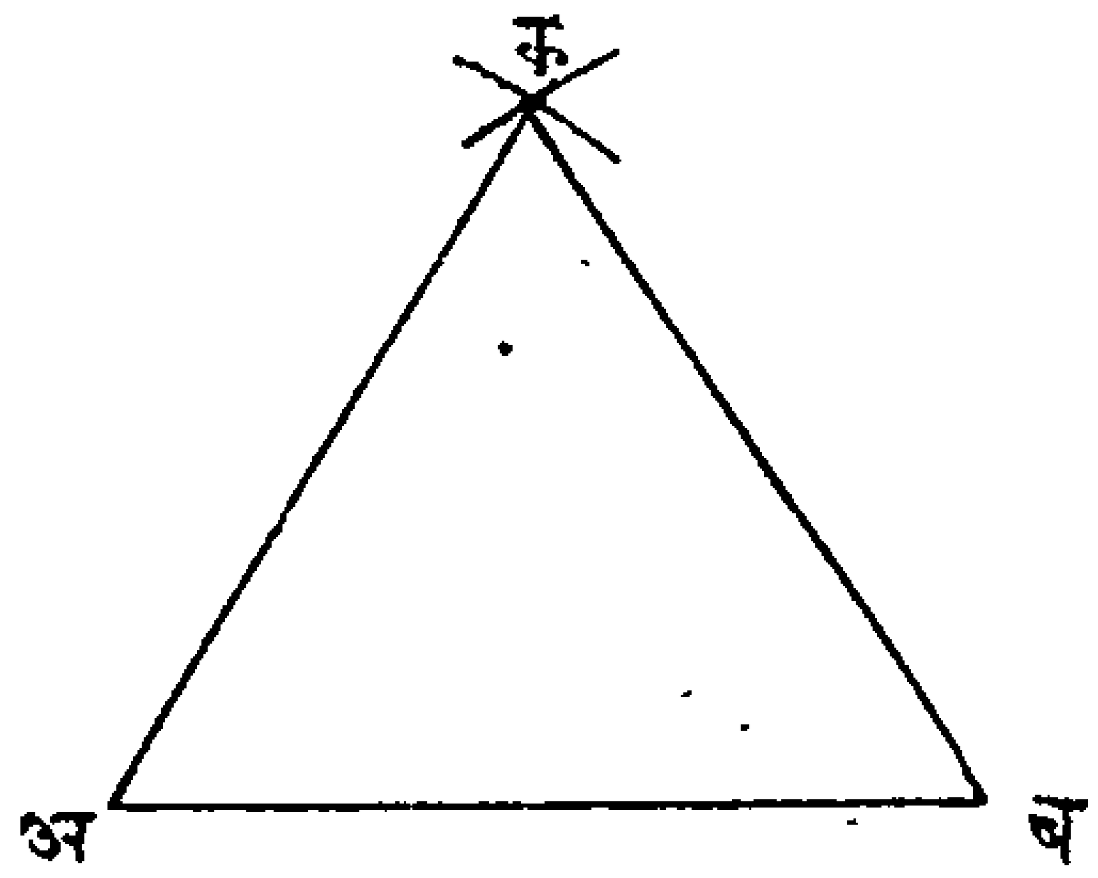




वर्तुळास कोणतीही स्पर्शरेघ जशी अब कर; आणि अ स्थळापासून वर्तुळांत अड ज्या कर, अशी कीं डअब कोन सांगीतल्ये क कोनाबरावर होईल; तर डईअ दुछिलें वर्तुळखंड होईल; जांत परिघावर कोण त्येही स्थळीं केला कोन जसा अईड कोन तो क कोनाबरावरच होईल.

ह्मणोन ज्या आणि स्पर्शरेघ यांपासून झालेला डअब कोन (याच कृत्यरीतीनें) क कोनाबरावर आहे, आणि हाही (५३सि०प्र०) व्युत्क्रम खंडांतील डईअ कोनाबरावर आहे हें सिद्ध.

# सोळावें कृत्य

सांगीतल्ये अब रेघेवर समबाजू त्रिकोण करावयाचें.



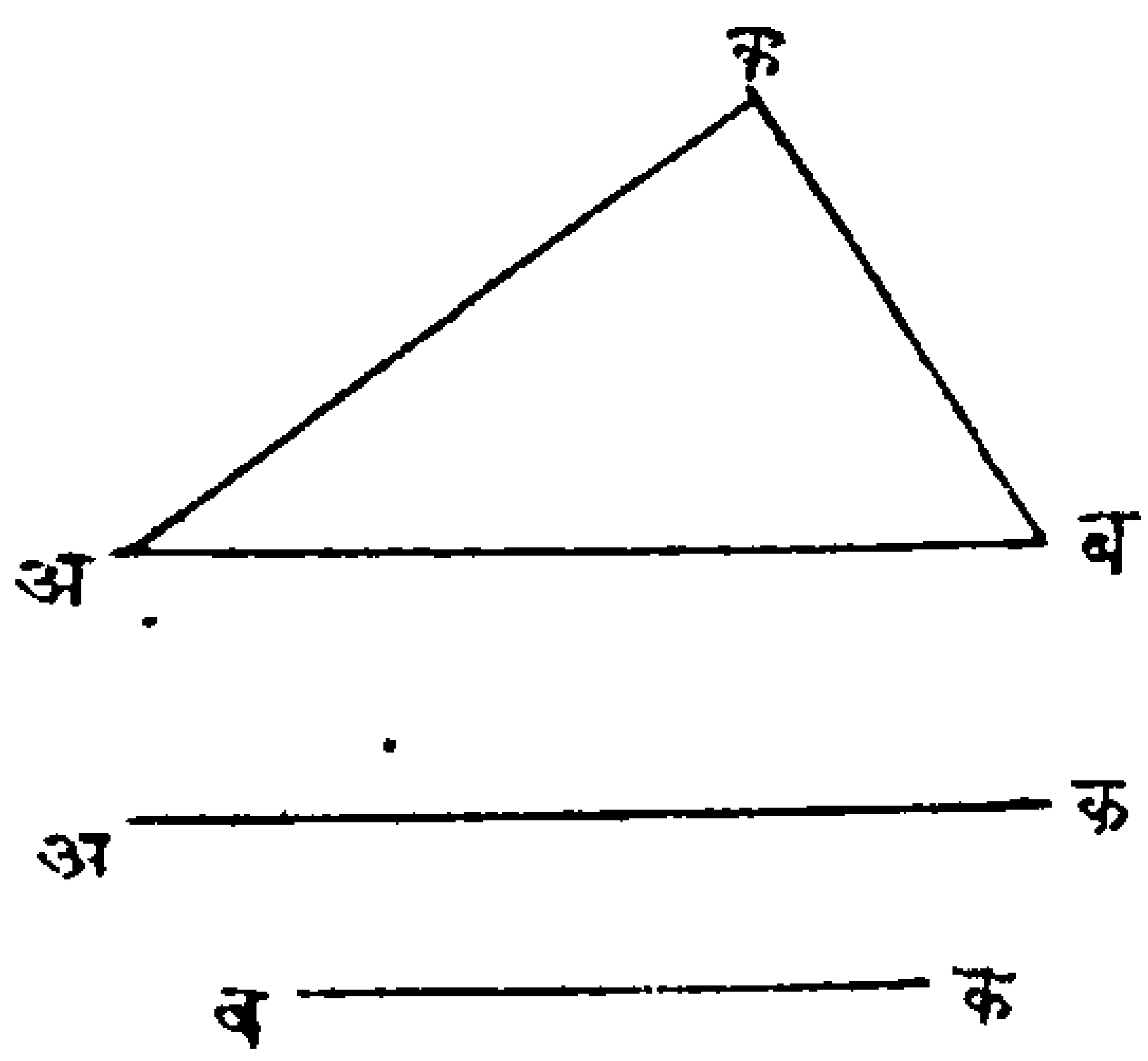

अ आणि ब हे दोन मध्य जाणून अब त्रिज्येनें दोन कौंस कर. असे कीं क स्थळीं परस्पर छेदितील. नंतर अक, कक सांध; ह्मणजे अबक इच्छिला समबाजू त्रिकोण होईल.

ह्मणोन अक. बक या दोन बराबर त्रिज्या प्रत्येकीं अब चे बराबर आहेत, हें सिद्ध.

---

## सत्रावें कृत्य.

अब, अक, बक या सांगीतल्ये तीन रेघांनी एक त्रिकोण करायाचें.

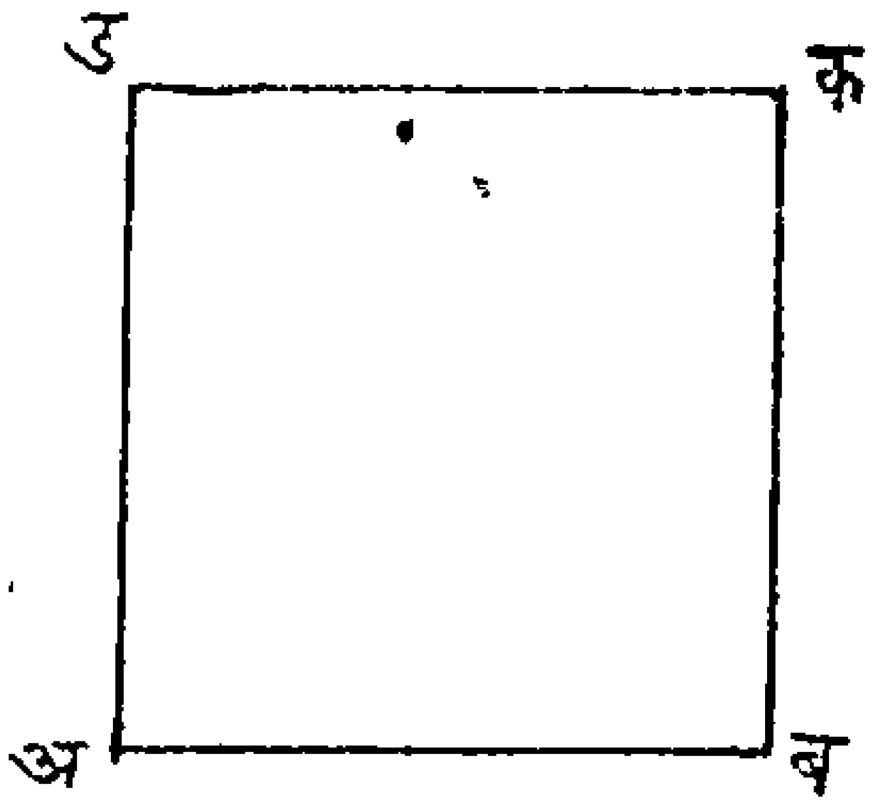



अ मध्य कल्पून अक त्रिज्येनें एक कौंस कर, आणि ब मध्य कल्पून बक त्रिज्येनें दुसरा एक कौंस कर, असा कीं पूर्व कौंसास क स्थळीं छेदील; नंतर अक बक सांध ह्मणजे, इच्छिला त्रिकोण होईल.

ह्मणोन त्रिज्या अथवा त्रिकोणाचा बाजू अक, बक या दोन (याच कृत्यानें) सांगीतल्ये अक, बक रेघांचे बरोबर आहेत, हें सिद्ध.

# अठरावें कृत्य.

सांगीतल्या अब रेघेवर चौरस करायाचें.

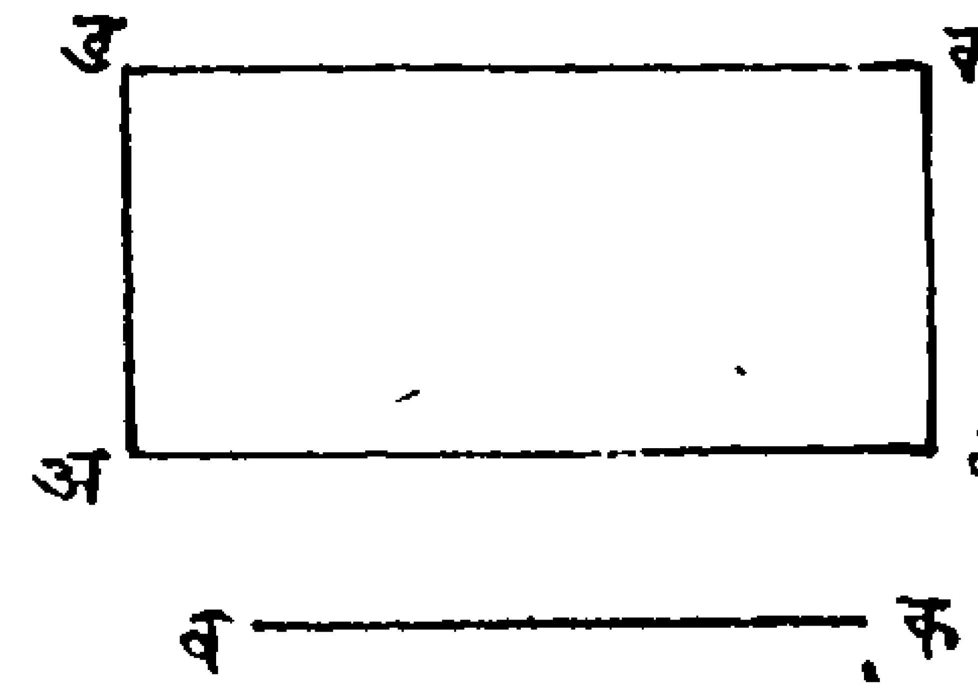



अब रेघेवर अ, ब या दोन स्थळीं प्रत्येक अब चे बराबर अड, बक हे दोन लंब करून डक सांध म्हणजे अबकड हें इच्छिलें चौरस होईल.

म्हणोन अब, अड, बक या तीन बाजू (याच कृत्यानें) बराबर आहेत; आणि (२४ सि० प्र०) डक, अब चे बराबर आणि अब शीं समांतर ही आहे. यापासून सिद्ध होतें कीं सर्व चारही बाजू बराबर आणि समोरा समोरच्या समांतरही आहेत; पुनः समांतर बाजू चौकोनाचा अ कोन अथवा ब कोन काटकोन आहे, याजकरितां (२२ सि० २ कु० प्र०) त्याचे सर्व कोन काटकोन आहेत; यापासून निघतें कीं या आकृतीचा सर्व बाजू बराबर आणि सर्वही कोन काटकोन आहेत; याजकरितां (३४ व्या० प्र०) ही आकृती चौरस आहे हें सिद्ध.

# एकुणिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये अब लांबीचा आणि बक रुंदीचा काटकोन चौकोन अथवा समांतर बाजू चौकोन करायाचें.



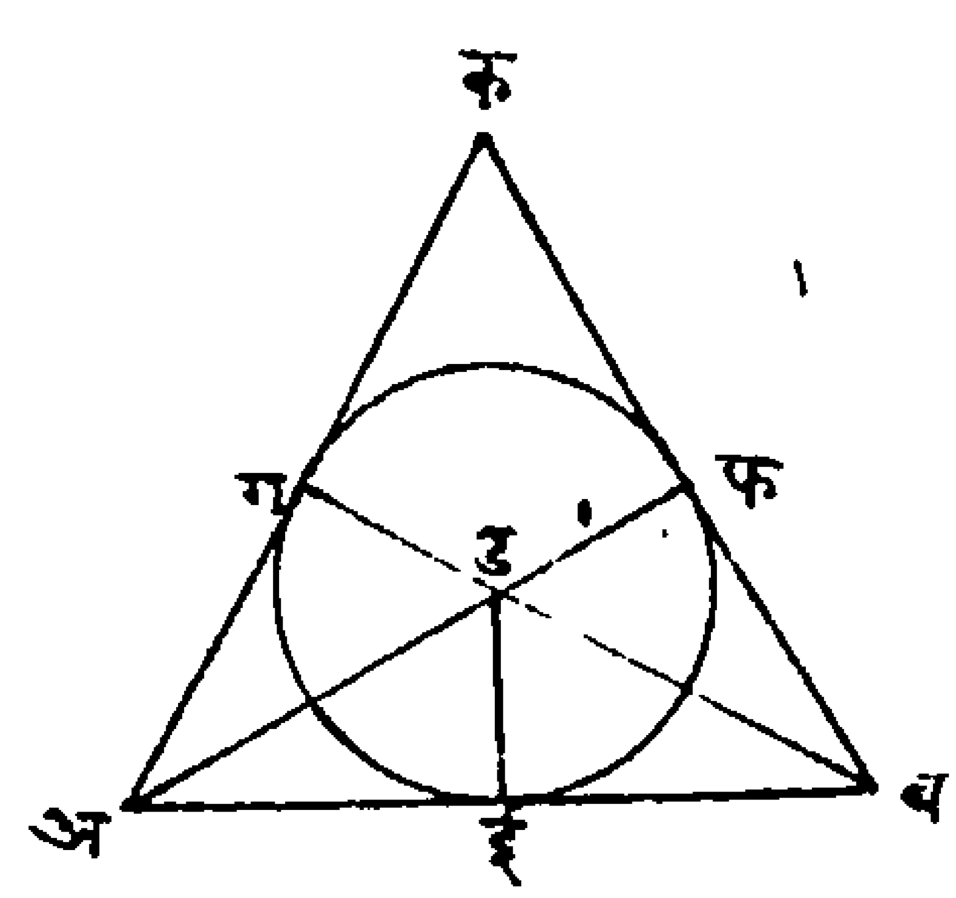

अब वर अड, बक लंब चढी-व, असे कीं प्रत्येक बक चे बराबर होतील, नंतर डक सांध ह्मणजे समांतर बाजू चौकोन झाला.

याचा प्रत्यय पूर्व कृत्या प्रमाणें आहे.

आणि या रीतीनेंच तिर्कस समांतर बाजू चौकोन केला जातो परंतु त्यांत भेद इतकाच आहे कीं, अब वर लंब न करावे तर त्याशीं सांगीतल्ये कोना बराबर कोन करावे.

## विसावें कृत्य.

सांगीतल्ये अबक त्रिकोणांत एक वर्तुळ करायाचें.




सांगीतल्ये त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन ह्मणजे अ आणि ब हे अड, बड रेघांनीं दुभाग, नंतर या दोन रेघा जेथें परस्पर छेदितील; तो छेदन बिंदू ड मध्यस्थळ झालें. त्यापासून त्रिकोणाचे तीन ही बाजूंवर डग, डफ, डई हे तीन लंब कर, ह्मणजे हे लंब वर्तुळाचा त्रिज्या होतील.

ह्मणोन (याच कृत्यानें) डअई कोन, डअग कोना बराबर आहे, आणि ई, ग या स्थळींचे दोन कोन काट कोन आहेत याजकरितां अडई, अडग हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत;

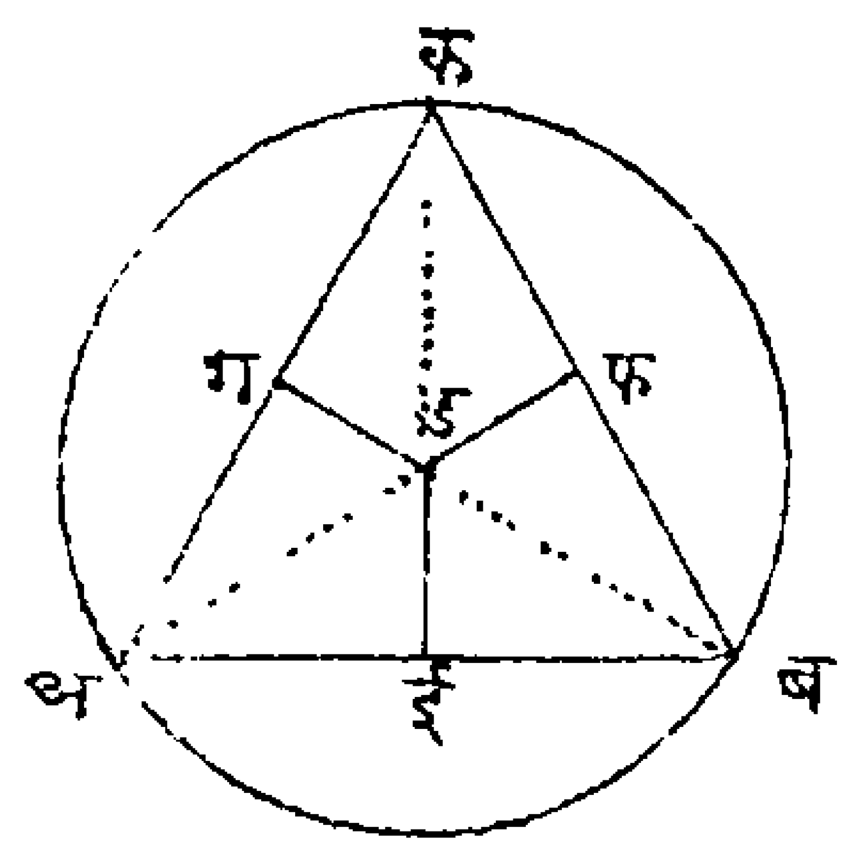
आणि अड बाजू दोहोंस साधारण आहे; याजकरितां (२ सि० प्र०) त्यांचा डई, डग या बाजू परस्पर बराबर आहेत; याचरीतीनें दाखविलें जातें कीं डफ, डई चे अथवा डग चे बराबर.

याजकरितां ड मध्य करून डई अंतरानें वर्तुळ केल्यास त्याचा परिघ ई, फ, ग या तीन बिंदूंचे पार जाईल. आणि तें वर्तुळ या तीन बिंदुस्थळीं त्रिकोणाचे तीन बाजूंस स्पर्श करील. कारण (५६ सि० प्र०) डई. डफ. डग या तीन त्रिज्या तीन बाजूंवर लंब आहेत हें सिद्ध.

## एकविसावें कृत्य.

सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे भोंवतीं संलग्न वर्तुळ करायाचें.

सांगीतल्ये त्रिकोणाचा कोणत्याही दोन बाजू दोन लंबांनीं दुभाग, जसें डग आणि डफ अथवा डई, नंतर त्या दोन लंबांचा छेदनबिंदु ड मध्यस्थळ होईल.



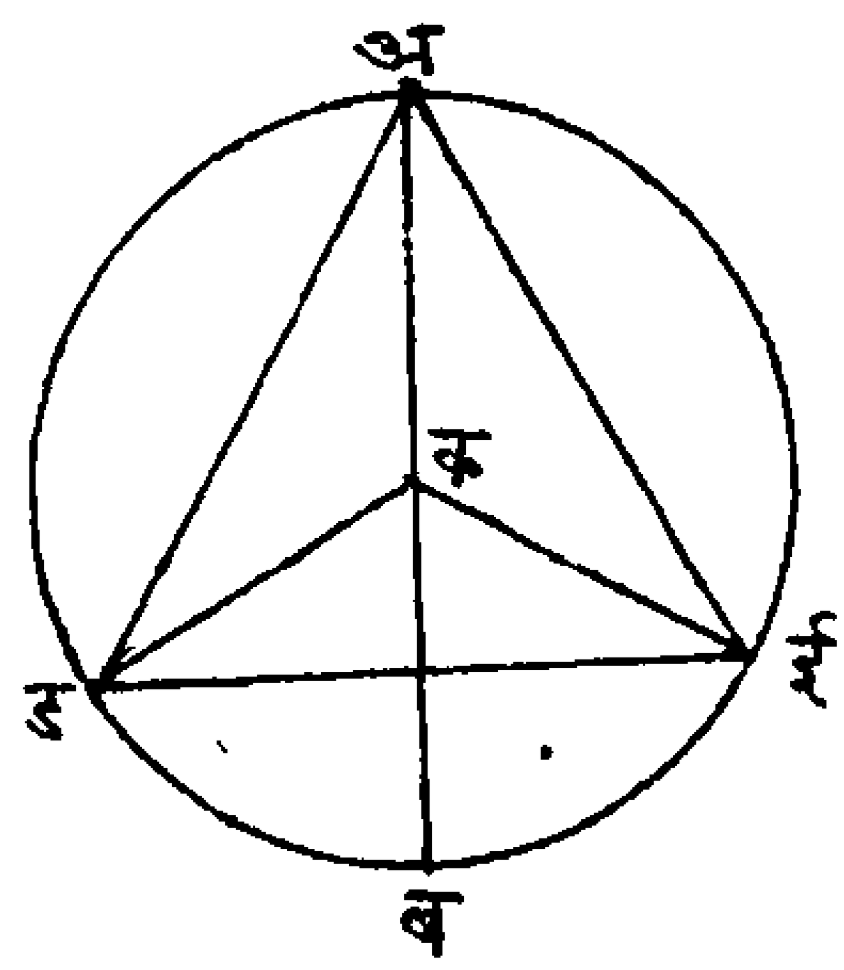

ह्मणोन डअ, डक, डब सांध. तर डअई, डबई या दोन काटकोन त्रिकोणांत एकाचा डई. डअ या दोन बाजू दुसऱ्याचा डई. ईब या दोन बाजूंचे बराबर आहेत, आणि यांचे आंतील दोन ई कोन परस्पर बराबर, याजकरितां हे दोन त्रिकोण (१ सि० प्र०) एकरूप आहेत, ह्मणजे डअ बाजू डब बराबर. याचरीतीनें दाखविलें जातें कीं डक बाजू डअ चे अथवा डब चे बराबर आ

हे. यावरून सिद्ध होतें कीं डअ, डक, डब या सर्व बराबर आहेत, याजकरितां या एक वर्तुळाच्या बराबर त्रिज्या आहेत, ज्याचा परिघ अबक त्रिकोणाचे तीन बिंदु पार जाईल. हें सिद्ध.

## बाविसावें कृत्य.

सांगीतल्ये वर्तुळांत समबाजू त्रिकोण करायाचें.

सांगीतल्ये वर्तुळाचे क मध्यस्थळापार अब व्यास कर, नंतर ब मध्य करून त्या वर्तुळाचे बक त्रिज्येनें एक डकई कोंस कर, असा कीं परिघास ड, ई या दोन स्थळीं छेदील; नंतर अड, अई, डई सांध. म्हणजे त्या वर्तुळांत अडई इच्छिला समबाजू त्रिकोण होईल.

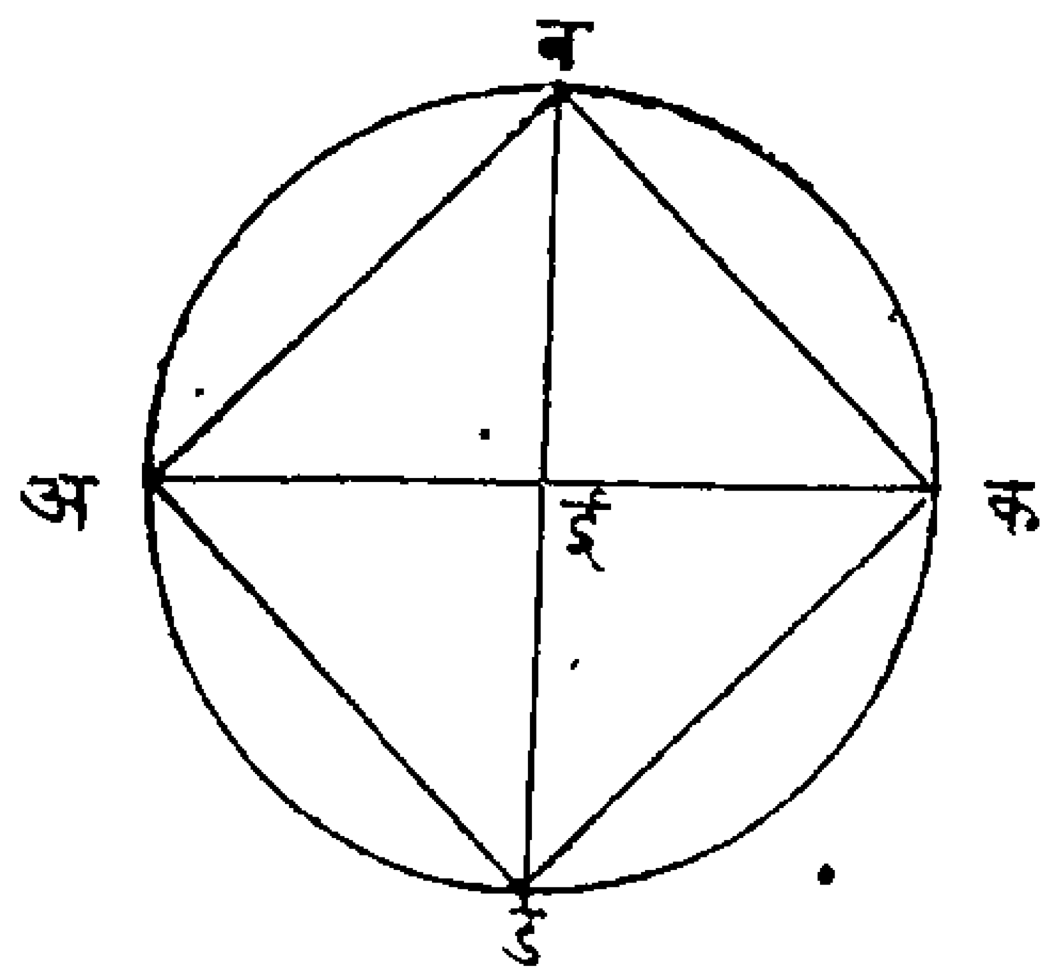



म्हणोन डब, डक, ईक, ईब सांध, आतां डकब समबाजू त्रिकोण आहे, कारण त्याचा प्रत्येक बाजू त्या वर्तुळाचे त्रिज्ये बराबर आहेत, तसाच बकई समबाजू त्रिकोण आहे, परंतु अडई कोन अबई अथवा कबई कोना बराबर आहे, कारण अई कोंसावर आहे; आणि अईड कोन, अबड, अथवा कबड कोना बराबर, कारण अड कोंसावर आहे, यापासून सिद्ध होतें कीं डअई त्रिकोणाचे अडई, अईड हे दोन कोन पूर्व समबाजू त्रिकोणाचे कोना बराबर आहेत; याजकरितां अ स्थळींचा तिसरा कोन ही तसाच आहे; अशारीती-

नें हा त्रिकोण समकोन आणि ह्मणोनच समबाजू ही आहे हें सिद्ध.

## तेविसावें कृत्य.

सांगीतल्ये वर्तुळांत चौरस करायाचें.

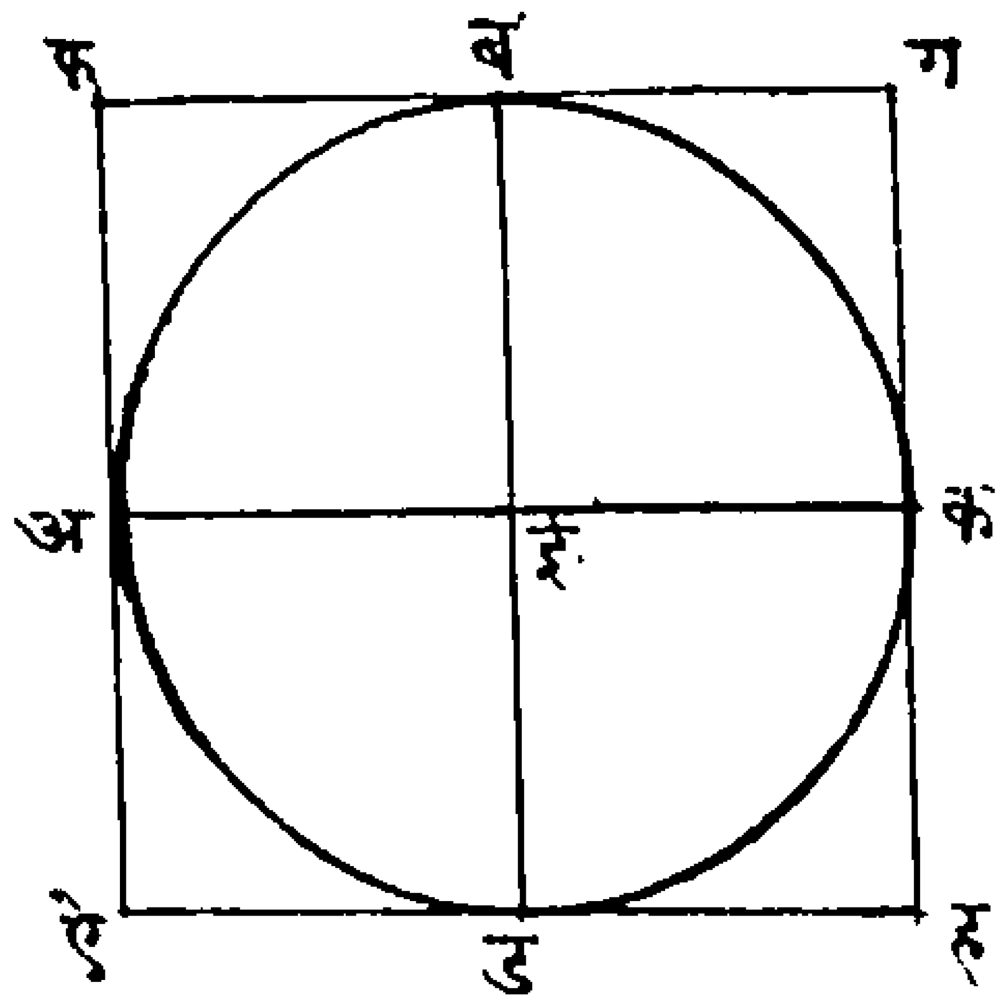



सांगीतल्ये वर्तुळांत अक बड दोन व्यास कर असे की एक मेकावर लंब असोन ई मध्यस्थळीं परस्परांस छेदितील; नंतर अ, ब, क, ड हे व्यासांचे चार शेवट सरळ रेघांनीं सांध ह्मणजे या सरळ रेघांपासून त्या वर्तुळांत इछिलें चौरस होईल.

ह्मणोन अईब, बईक, कईड, डईअ हे चार काटकोन त्रिकोण एकरूप आहेत, कारण त्यांचा ईअ, ईब, ईक, ईड या बाजू परस्पर बराबर, ह्मणजे या वर्तुळाचा त्रिज्या आहेत. आणि ई स्थळींचे चार कोन (याच कृत्यानें) काटकोन केले ते परस्पर बराबर आहेत; ह्मणोन त्यांचा तिसऱ्या बाजूही अब, बक, कड, डअ या सर्व परस्पर बराबर. याजकरितां अबकड आकृति समबाजू आहे; पुनः अ, ब, क, ड हे चार कोन काटकोन आहेत, कारण हे प्रत्येक अर्धवर्तुळांत आहेत, यास्तव ही आकृती चौरस आहे हें सिद्ध.

# चोविसावें कृत्य.

सांगीतल्ये वर्तुळाचे भोंवतीं संलग्न चौरस करायाचें.




सांगीतल्ये वर्तुळांत अक, बड दोन व्यास कर, असेकीं एक मेकावर लंब असोन ई मध्यस्थळीं परस्परांस छेदितील, नंतर त्यांचे चार शेवटांपार फग, ऐह या दोन अक शीं समांतर आणि गह, फऐ या दोन बड शीं समांतर अशा चार रेघा कर, ह्मणजे फगहऐ हें त्या वर्तुळा भोंवतीं संलग्न इछिलें चौरस होईल.

ह्मणोन समांतर बाजू चौकोनाचा समोरासमोरचा बाजू बराबर याजकरितां फग, ऐह या प्रत्येकीं अक व्यासाचे बरोबर आणि फऐ, गह या प्रत्येकीं बड व्यासाचे बराबर आहेत, ह्मणूनच ही आकृती समबाजू आहे.

पुनः समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन बराबर, याजकरितां फ, ग, ह, ऐ हे चारकोन जे त्यांचे समोरासमोरचे ई कोना बराबर आहेत ते सर्व काटकोन आहेत, यापासून सिद्ध होतें कीं फगहऐ या आकृतीचा सर्व बाजू सम, आणि कोन काटकोन आहेत, याजकरितां ही आकृति चौरस आणि वर्तुळास अ, ब, क, ड या चार बिंदूंवर स्पर्शल्ये, कारण याचा सर्व बाजू त्या त्या स्थळीं त्रिज्यांवर लंब आहेत हें सिद्ध.

## पंचविसावें कृत्य.

सांगितल्ये चौरसांत वर्तुळ करायाचें.

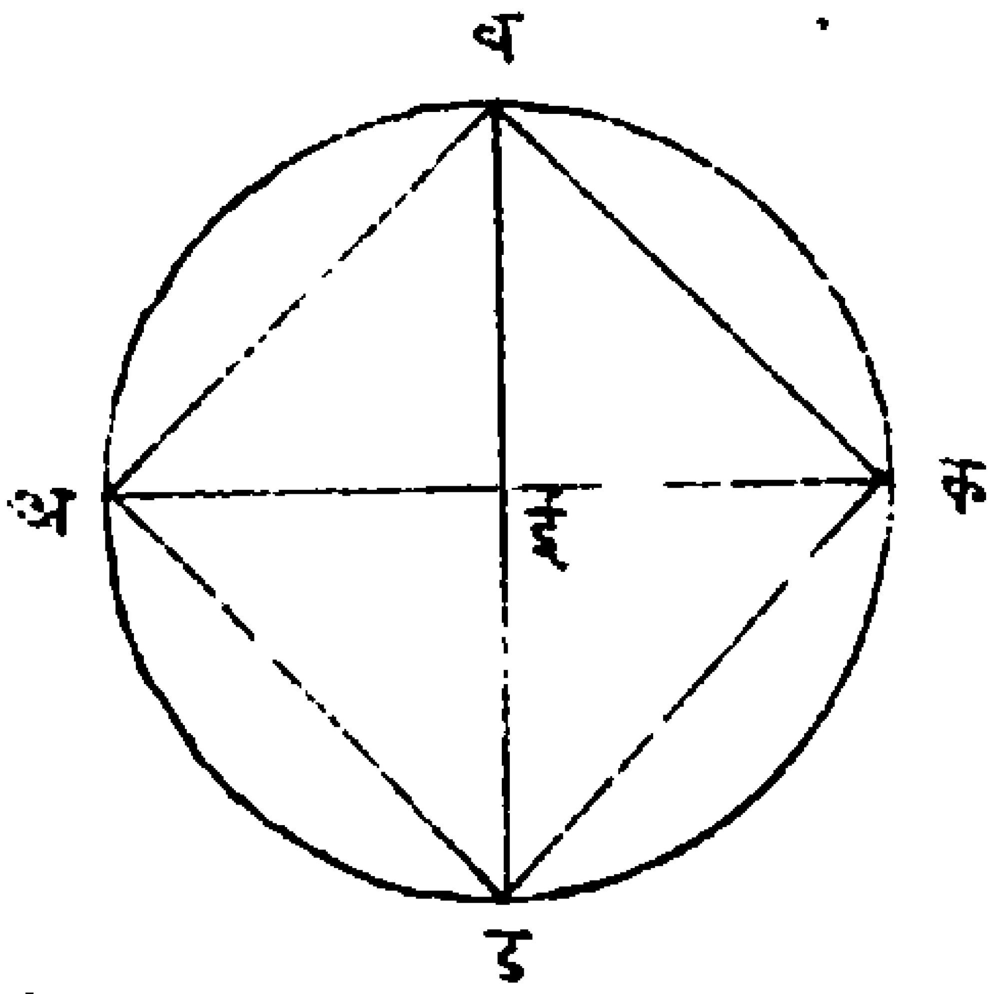
सांगीतल्ये चौरसाचा फग, फऐ या दोन बाजू ब आणि अ या दोन स्थळीं दुभाग, नंतर या बिंदूपार फग शीं अथवा ऐ ह शीं समांतर अक कर; आणि फऐ शीं अथवा गह शीं समांतर बड कर; नंतर या दोन समांतर रेघांचा छेदन बिंदू ई मध्यस्थळ होईल. आणि ईअ, ईब, ईक, ईड या चार रेघा आंतील वर्तुळाचा त्रिज्या होतील.

ह्मणोन ईफ, ईग, ईह, ईऐ या चार समांतर बाजू चौकोनाचा समोरासमोरचा बाजू आणि कोन बराबर आहेत, याजकरितां ईअ, ईब, ईक, ईड या चार रेघा परस्पर बराबर आहेत; कारण या प्रत्येकीं चौरसाचे एकेक बाजूचे अर्धाबरोबर आहेत, यापासून सिद्ध होतें कीं ई मध्य करून ईअ त्रिज्येनें वर्तुळ केल्यास त्याचा परिघ अ, ब, क, ड या सर्व बिंदूचे पार जाईल, आणि हें वर्तुळ चौरसांत होईल; ह्मणजे त्याचे चार बाजूंस चार बिंदूस्थळीं स्पर्श करील, कारण तेथें सर्व कोन काटकोन आहेत, हें सिद्ध.

---

## सव्विसावें कृत्य.

सांगितल्ये चौरसाचे भोंवतीं संलग्न वर्तुळ करायाचें.

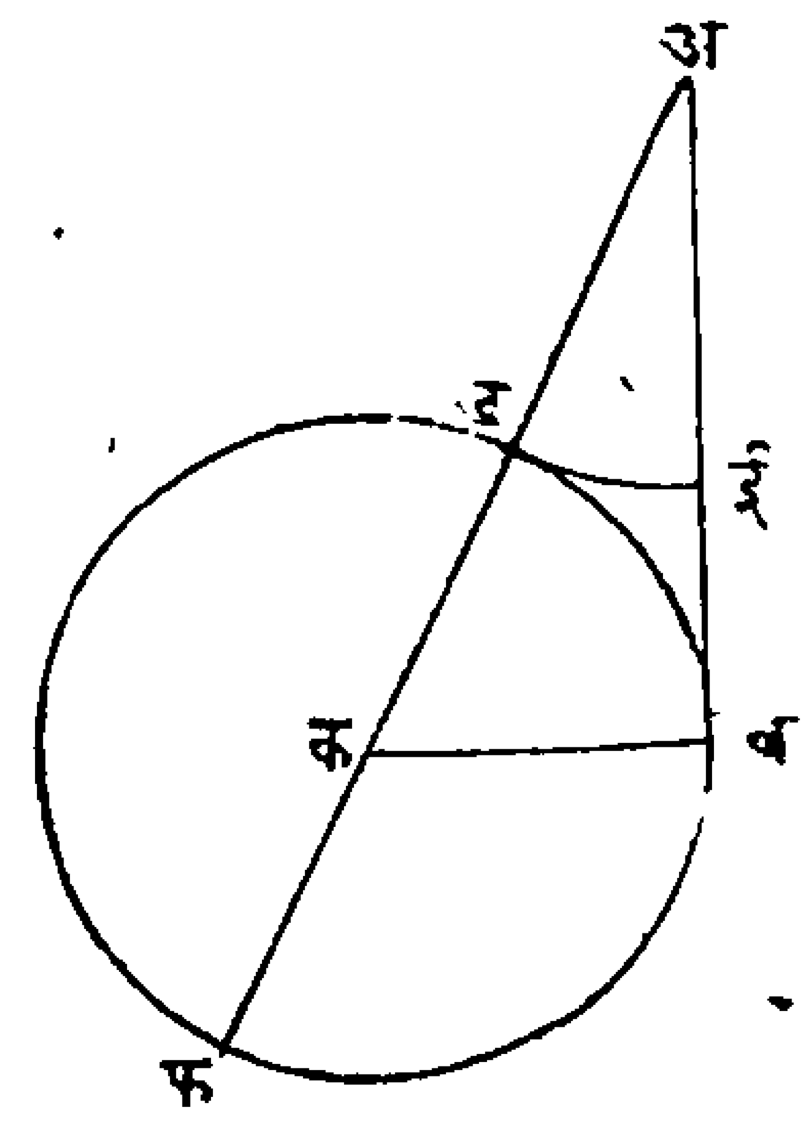



सांगीतल्ये चौरसांत अक, बड दोन कर्णरेघा कर, त्यांचा छेदन बिंदू ई मध्यस्थळ होईल.

ह्मणोन (५०सि०प्र०) चौरसाचा कर्णरेघा परस्पर दुभागितात, याजकरितां ईअ, ईब, ईक, ईड या सर्व एक वर्तुळाचा बराबर त्रिज्या आहेत, जें वर्तुळ अ, ब, क, ड या चारबिंदूस्थळां पार जाईल. हें सिद्ध.

## सत्ताविसावें कृत्य.

सांगीतल्ये रेघेस अंत्य मध्य गुणोत्तरा करितां छेदायाचें.




अब एक सांगीतली रेघ असेल जीस अंत्यमध्य गुणोत्तरा करितां भागावयाची आहे; ह्मणजे अश्यारीतीनें कीं सर्व रेघ तिचे अति मोठ्ये खंडास होईल, जसा तो अति मोटा खंड अति लाहान खंडास आहे.

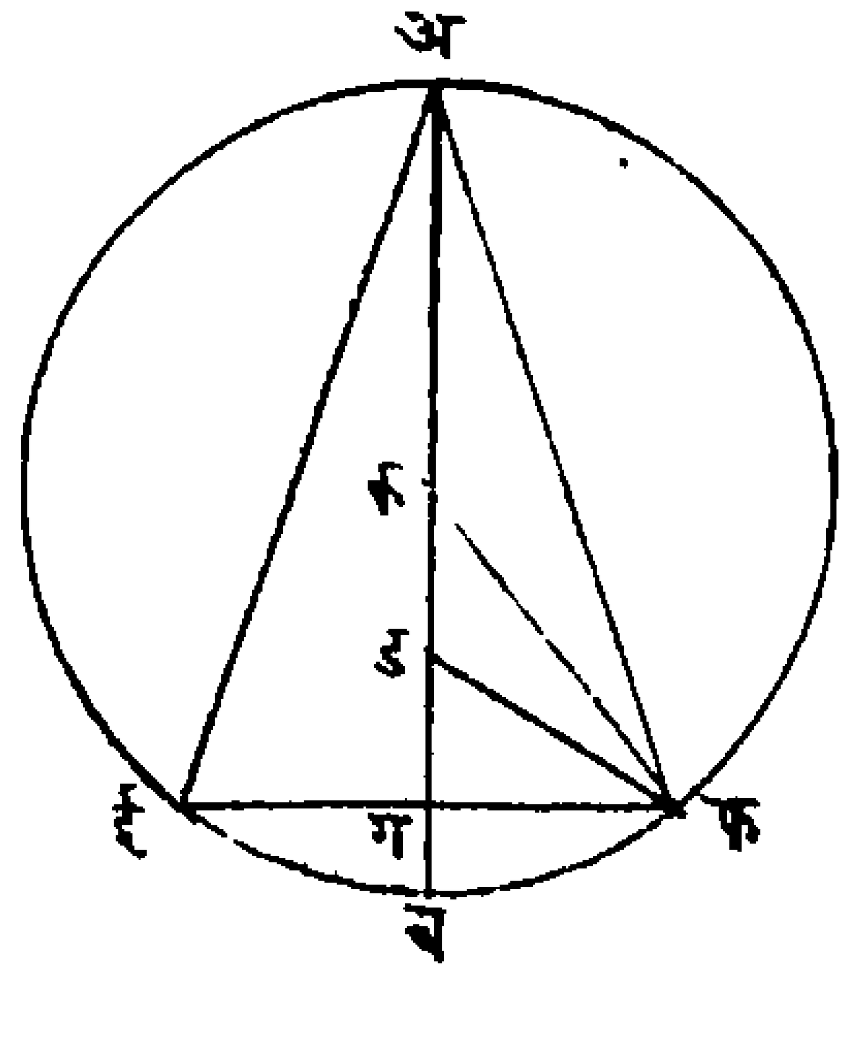
अब वर तिचा अर्धाबराबर बक लंब कर, नंतर अक सांध. आणि क मध्य करून कब त्रिज्येनें बडफ वर्तुळ कर, तें अक रेघेस ड स्थळीं छेदील; आतां अ मध्य करून अड त्रिज्येनें डई कौंस कर, तर अब रेघ ई स्थळीं भागिली जाईल, अंत्य मध्य गुणोत्तर प्रमाणानें ह्मणजे अशी कीं अब : अई : : अई : ईब.

ह्मणोन परिघावर फ बिंदूपर्यंत अक वाढीव आतां ही अड-फ वर्तुळाची छेदन रेघ आहे, आणि अब त्या वर्तुळास स्पर्शरेघ आहे, कारण ब कोन काटकोन आहे, याजकरितां (६१ सि०१कु०प्र०) हा काटकोन चौकोन अफ०अड=अब² ह्मणोन (७७सि०प्र०)यांचीं मध्य आणि शेवटील पदें प्रमाणांत आहेत. ह्मणजे अब: अफ अथवा अड+डफ:: अड:अब परंतु (याच कृत्यानें) अई=अड आहे आणि अब=२बक=डफ याजकरितां अब:अई+अब:: अई:अब, नंतर (६९सि०प्र०) भागाकारानें अब: अई:: अई: ईब, हें सिद्ध.

---

## अठ्ठाविसावें कृत्य.

सांगीतल्ये वर्तुळांत समद्विबाजू त्रिकोण करायाचें. ज्या त्रिकोणाचे पायाकडील दोन कोन प्रत्येक शिरकोनाचे दुपट होतील.




सांगीतल्ये वर्तुळांत कोठेहीं अब व्यास कर आणि (पूर्वकृत्यरीतीनें) कब त्रिज्येस ड स्थळीं अंत्य मध्य गुणोत्तर प्रमाणानें भाग, नंतर कड अति मोठये भागाबरोबर ब बिंदूपासून वर्तुळांत बई, बफ दोन ज्या कर, आणि अई, अफ, ईफ सांध ह्मणजे अईफ इछिला त्रिकोण होईल.

ह्मणोन बई, बफ या दोन ज्या बराबर, याजकरितां त्यांचीं मापें कोंस ही बराबर आहेत, ह्मणोन त्यांचे सप्लुमेंट कोंस आणि सप्लु-

मेंट ज्याही अई, ईफ बराबर, यास्तव अईफ त्रिकोण सम द्विबाजू आणि ई कोन फ कोना बराबर आहे, आणि ग स्थळींचे दोन कोन काटकोन आहेत.

फक.डफ सांध आत्तां (पूर्व कृत्या प्रमाणें)

बक : कड :: कड : बड

अथवा (या कृत्यानें) बक : बफ :: बफ : बड १प्र०

आणि (८७सि०प्र०) बअ : बफ :: बफ : बग २प्र०

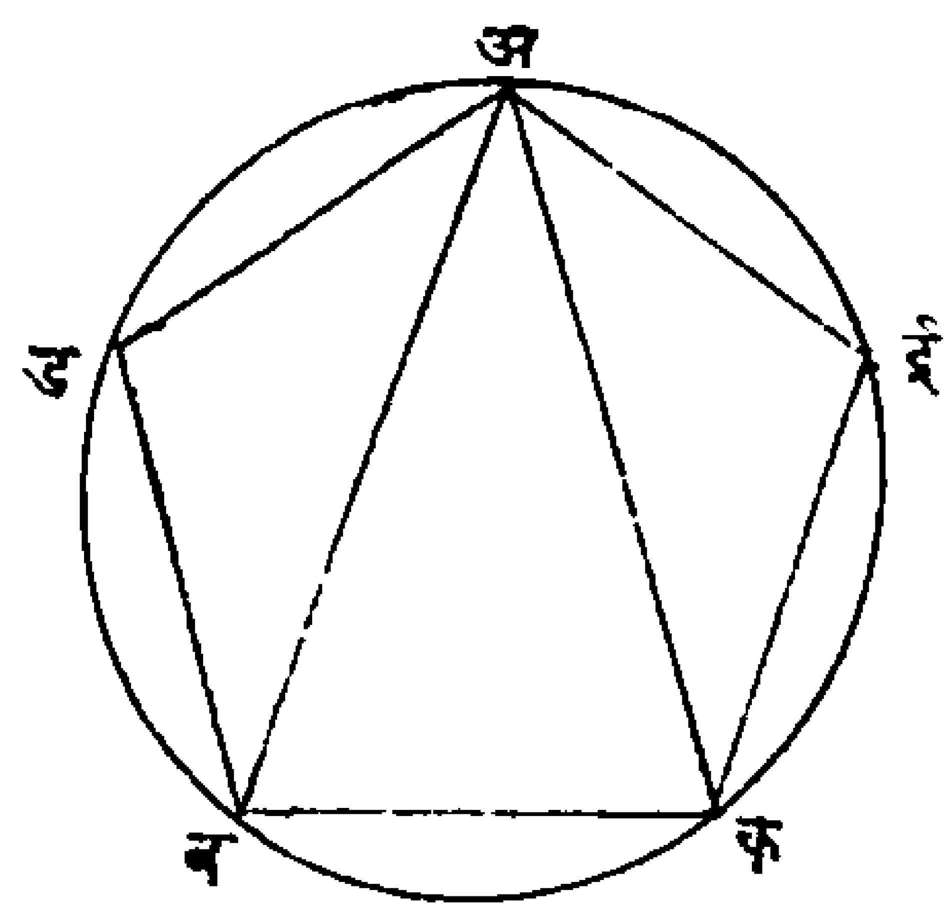
याजकरितां प्रथम प्रमाणांत बफ² = बक० बड अथवा २बक०½ बड दुसऱ्ये प्रमाणांत बफ² = बअ० बग अथवा २बक० बग ह्मणून बग = ½ बड = गड याजकरितां गबफ, गडफ हे दोन त्रिकोण (१सि०प्र०) एकरूप आहेत; आणि प्रत्येक दोन कोन बराबर आहेत, तेव्हां तिसरा ही कोन बराबर अबफ, अगफ या त्रिकोणाशीं समकोन आहेत. याजकरितां त्यांचे दुपट बफड, अफई हे त्रिकोण समद्विबाजू आणि समकोन ही आहेत, तसाच बकफ त्रिकोण ही आहे, जांत बक. कफ या दोन बाजू बराबर आणि त्यांचा ब कोन त्रिकोणाशीं साधारण आहे. परंतु कड = डफ अथवा बफ याजकरितां (५सि०प्र०) क कोन डफक कोना बराबर आहे, ह्मणोन बडफ कोन जो (१६सि०प्र०) या दोन बरोबर कोनांचे बेरिजे बराबर आहे तो त्या दोहोंतून एकाचे दुप्पट आहे अथवा बरोबर ब कोनाचे अथवा कफब कोनाचे दुपट आहे, अशा रीतीनें सिद्ध झालें कीं कबफ समद्विबाजू त्रिकोण आहे, ज्याचे बराबर दोन कोन प्रत्येक तिसऱ्ये क कोनाचे दुपट आहेत, वर सिद्ध झालें कीं अईफ, कबफ हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत, याजकरितां अईफ त्रिकोणाचे पायाकडील दोन

कोन प्रत्येक अ शिरकोनाचे दुपट आहेत हें सिद्ध.

---

## एकुणतिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये वर्तुळांत समबाजू पंच कोन करायाचें.



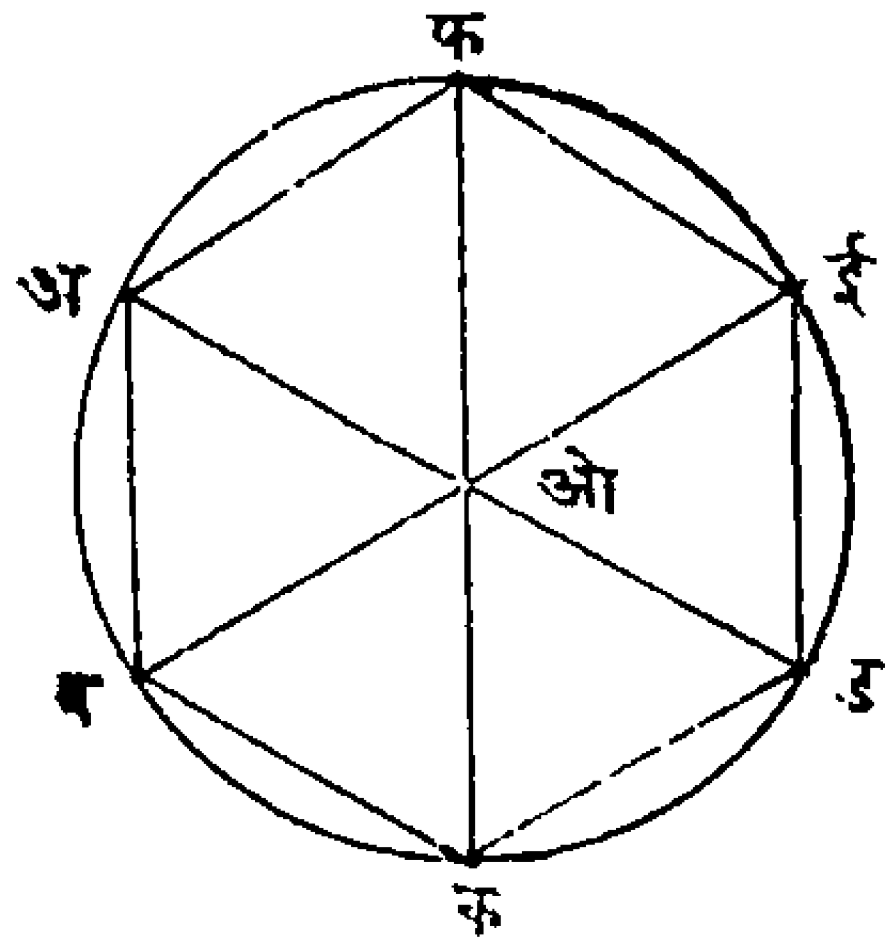

त्या वर्तुळांत अबक समद्विबाजू त्रिकोण कर, असाकीं ज्याचे पायाकडील अबक, अकब हे दोन कोन प्रत्येक बअक शिरकोनाचे दुपट होतील; नंतर अडब, अईक या दोन कौसांस ड. ई स्थळीं दुभाग नंतर अड, डब, अई. ईक याऱ्या कर. ह्मणजे अडबकई हें इछिलें समबाजू पंचकोन होईल.

ह्मणोन बराबर कोन बराबर कौसावर आहेत. आणि त्यांचे दुपट कोन दुपट कौसावर आहेत. आणि अबक.अकब हे दोन कोन बअक कोनाचे दुप्पट आहेत. याजकरितां अडब.अईक हे दोन कौस जांजवर पूर्व दोन कोन आहेत, ते कौस बक कौसाचे दुप्पट आहेत, जांजवर शेवटील कोन आहे. आतां पूर्व दोन कौस ड, ई स्थळीं दुभागिले आहेत. यांतून निघतें कीं अड, डब, बक, कई, ईअ हे सर्व कौस परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां त्यांचा ज्याही परस्पर बराबर आहेत. ह्मणून या पंच कोनाचा पांच बाजू परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

टीप कृत्य करित्ये समयीं ड, ई हीं दोन स्थळें स्वल्पांत मिळतात, जे बड, कई यांची लांबी बक करावी.

# तिसावेंकृत्य.

सांगीतल्ये वर्तुळांत समबाजू षट्कोन करायाचें.



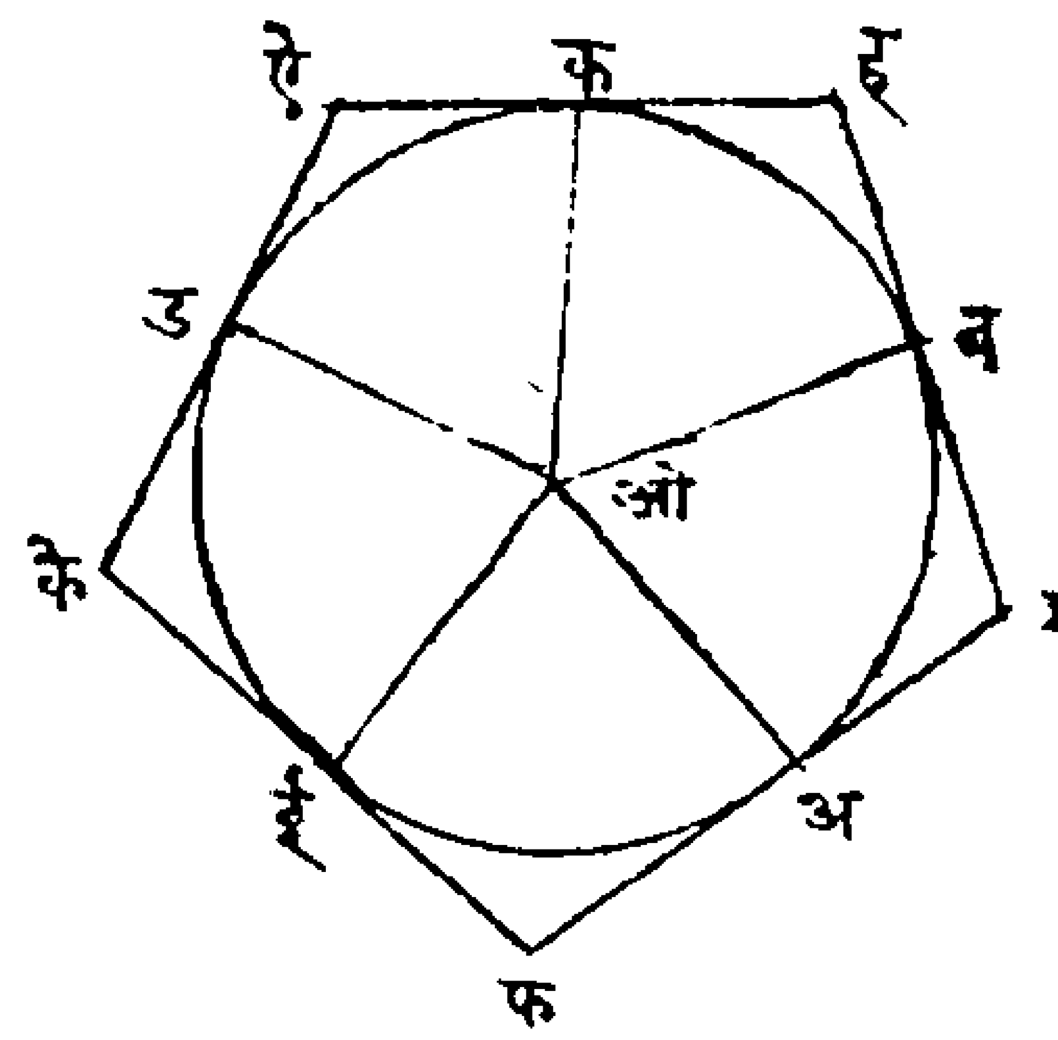

सांगीतल्ये वर्तुळाची **अओ** त्रिज्या जसें **अब**, **बक** इत्यादिक ज्या करून वर्तुळ परिघावर फिरून फिरून ठेव. ह्मणजे वर्तुळांत ही **अबकडईफअ** समबाजू षट्कोन करील.

ह्मणोन त्या वर्तुळांत **अओ**, **बओ**, **कओ**, **डओ**, **ईओ**, **फओ** अशा त्रिज्या कर, ह्मणजे बराबर साहा त्रिकोण होतील; यांतून कोणता ही एक त्रिकोण जसा **अबओ** (याच कृत्यरीतीने) समबाजू आहे. (३सि० २कु०प्र०) त्याचे तीन कोन परस्पर बराबर आहेत. आणि या तीन कोनांतील कोणता ही एक कोन ह्मणजे जसा **अओब** कोन सर्व कोनांचे बेरिजेचा तृतीय भाग आहे. ह्मणोन (१७सि०प्र०) दोन काटकोनांचा तृतीय भाग आहे. अथवा चार काटकोनांचा साहावा भाग आहे; परंतु (६सि० ५कु०प्र०) सगळा परिघ चार काटकोनांचें माप आहे, याजकरितां **अब** कौस जो **अओब** कोनांचें माप आहे, तो सर्व परिघाचा साहावा भाग आहे; ह्मणोन त्या कौसाची ज्या **अब** ही वर्तुळांतील समबाजू षट्कोनाची एक बाजू आहे तशाच दुसऱ्या ही ज्या हें सिद्ध.

कुरलरी समबाजू षट्कोणाची कोणती ही एक बाजू त्याचे भोंवती संलग्न वर्तुळाचे त्रिज्ये बराबर अथवा सर्व परिघाचे साहाव्ये भागाचे ज्याचे बराबर आहे.

# एकतिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये वर्तुळाचे भोंवतीं संलग्न समबाजू पंच कोण अथवा षट्कोण करायाचें.




वर्तुळा भोंवतीं जितक्या बाजूची समबाजू आकृति करायाची ती (पूर्वदोन कृत्य रीतीनें) वर्तुळाचे आंत कर, जशी एथे अबकडई पंचकोण केली. नंतर तिचे सर्वकोन बिंदुस्थळीं वर्तुळास (१२ कृत्य रीतीनें) स्पर्शरेघा कर, या सर्व स्पर्शरेघांपासून वर्तुळा भोंवतीं संलग्न इच्छिलें बहुकोन होईल.

ह्मणोन सर्व ज्या अथवा आंतील बहुकोनाचा बाजू अब, बक इत्यादिक परस्पर बराबर, आणि सर्व त्रिज्या ओअ, ओब इत्यादिक परस्पर बराबर आहेत, याजकरितां सर्व त्रिकोणीचे ओस्थळीं शिरकोन बराबर आहेत, परंतु ओईफ, ओअफ, ओअग, ओबग हे कोन स्पर्शरेघा आणि त्रिज्या यांपासून झाले; यास्तव ते सर्व काटकोन आहेत, याजकरितां ओईफ + ओअफ दोन काटकोनां बराबर आणि ओअग + ओबक दोन काटकोनां बराबर आहे. याजकरितां (१८सि०२कु०प्र०) अओई + अफई ही, दोन काटकोनां बराबर; आणि अओब + अगब दोन काटकोनां बराबर आहेत, यापासून निघतें कीं अओई + अफई = अओब + अगब आणि यांत अओब = अओई कोन; यास्तव राहिले दोन कोन अफई, अगब हे ही परस्पर बराबर आहेत. यारीतीनें

दाखविलें जातें कीं फ, ग, ह, ऐ, के हे सर्व कोन परस्पर बराबर आहेत.

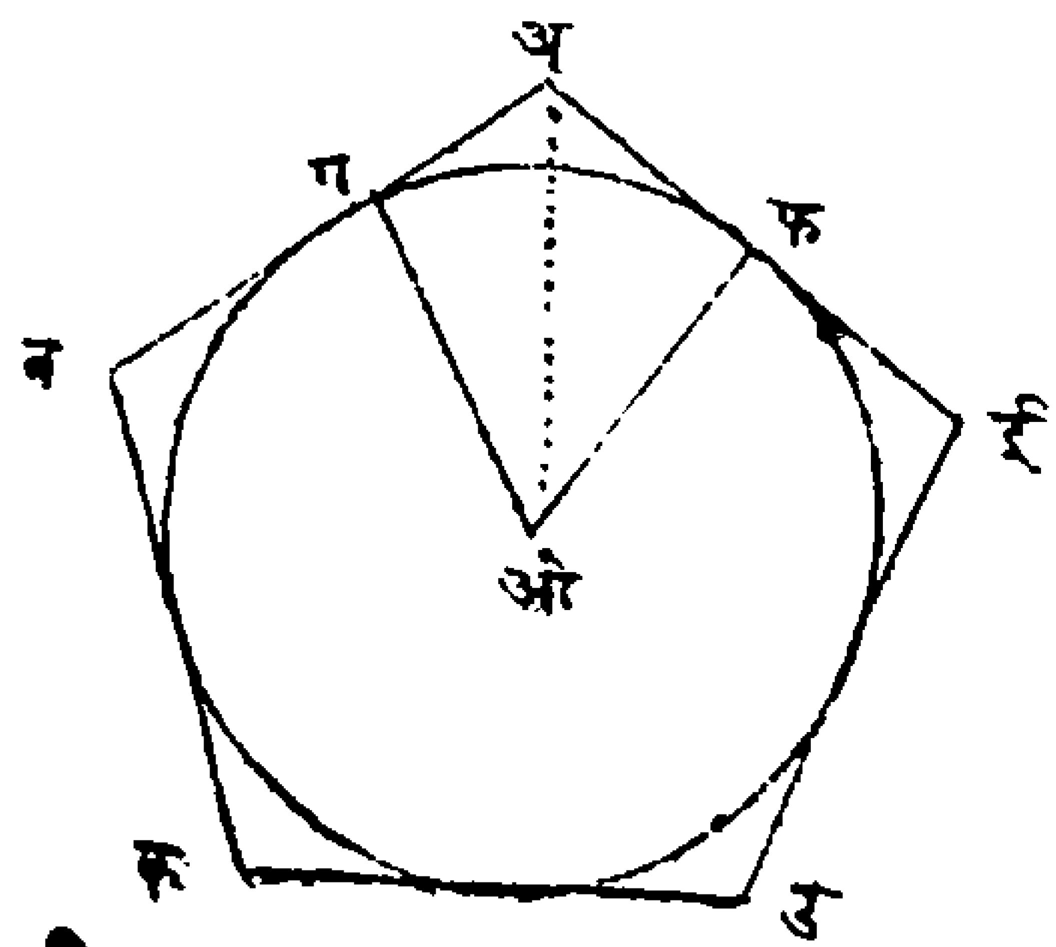
पुनः (६१ सि० २ कु० प्र०) एक बिंदूपासून केल्या दोन स्पर्श रेघा फई, फअ. परस्पर बराबर आहेत; तशाच गअ, गब याही परस्पर बराबर. आणि अफई, अगब या दोन सम द्विबाजू त्रिकोणांत फ, ग हे दोन कोन परस्पर बराबर; आणि त्यांचे समोरचा अई, अब या बाजू परस्पर बराबर आहेत; याजकरितां हे दोन त्रिकोण (२ सि० प्र०) एकरूप आहेत; आणि त्यांचा दुसऱ्याही फई, फअ, गअ, गब या बाजू परस्पर बराबर. आणि यांतून कोणतीचे ही दुपट फग आहे; याच रीतीनें दाखविलें जातें कीं त्या बहुकोनाचा बाकी राहिल्या गह, हऐ, ऐके, केफ या सर्व फगचे बराबर अथवा गब, बह इत्यादिक प्रत्येक स्पर्श रेघांचे दुप्पट आहेत; या पासून निघतें कीं, बाहेरील बहुबाजू आकृति सम बाजू आणि सम कोन ही आहे हें सिद्ध.

कुरलरी. आंतील वर्तुळ बाहेरील आकृतीचे बाजूंस बराबर मध्यस्थळीं स्पर्शतें.

---

## बत्तिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये बहुकोन आकृतीचे आंत संलग्न वर्तुळ करायाचें.



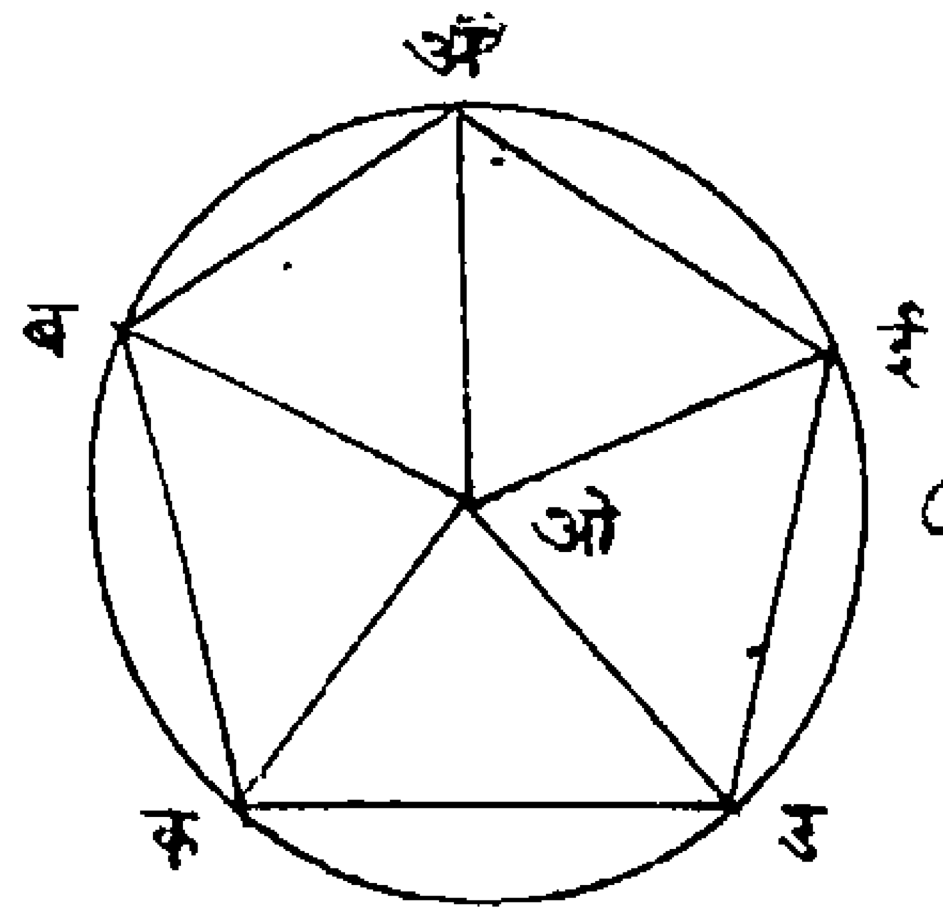

सांगीतल्ये बहुकोनाचा कोण त्याही दोन बाजू गओ, फओ दोन लंबांनीं दुभाग. नंतर त्या दोन लंबांचा छेदन बिंदू आंतील इछिले वर्तुळाचें मध्यस्थळ होईल, आणि गओ, फओ या दोन बराबर त्रिज्या होतील.

ह्मणोन (४७ सि० प्र०) अफ, अग या दोन स्पर्शरेघावरील लंब वर्तुळाचे मध्य पार जातात, आणि (पूर्वकृत्याचे कु० प्र०) आंतील वर्तुळ बहुकोनाचे अई, अब बाजूंस फ, ग मध्यस्थळीं स्पर्शतें. पुनः अओग काटकोन त्रिकोणांत अग, अओ या बाजू अओफ काटकोन त्रिकोणाचे अओ, अफ बाजूंचे बराबर, याजकरितां (४५ सि० कु० प्र०) त्यांच्या तिसऱ्याही बाजू ओग, ओफ बराबर आहेत; यास्तव ओ मध्य आणि ओग त्रिज्या यांणीं वर्तुळ केल्यास त्याचा परिघ फ बिंदूपार जाईल आणि बहुकोनाचे अब, अई बाजूंस ग, फ स्थळीं स्पर्श करील. तसाच बाकी राहिल्ये सर्व बाजूंसही. हें सिद्ध.

## त्रेतिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये बहुकोन आकृतीचे भोंवतीं संलग्न वर्तुळ करायाचें.

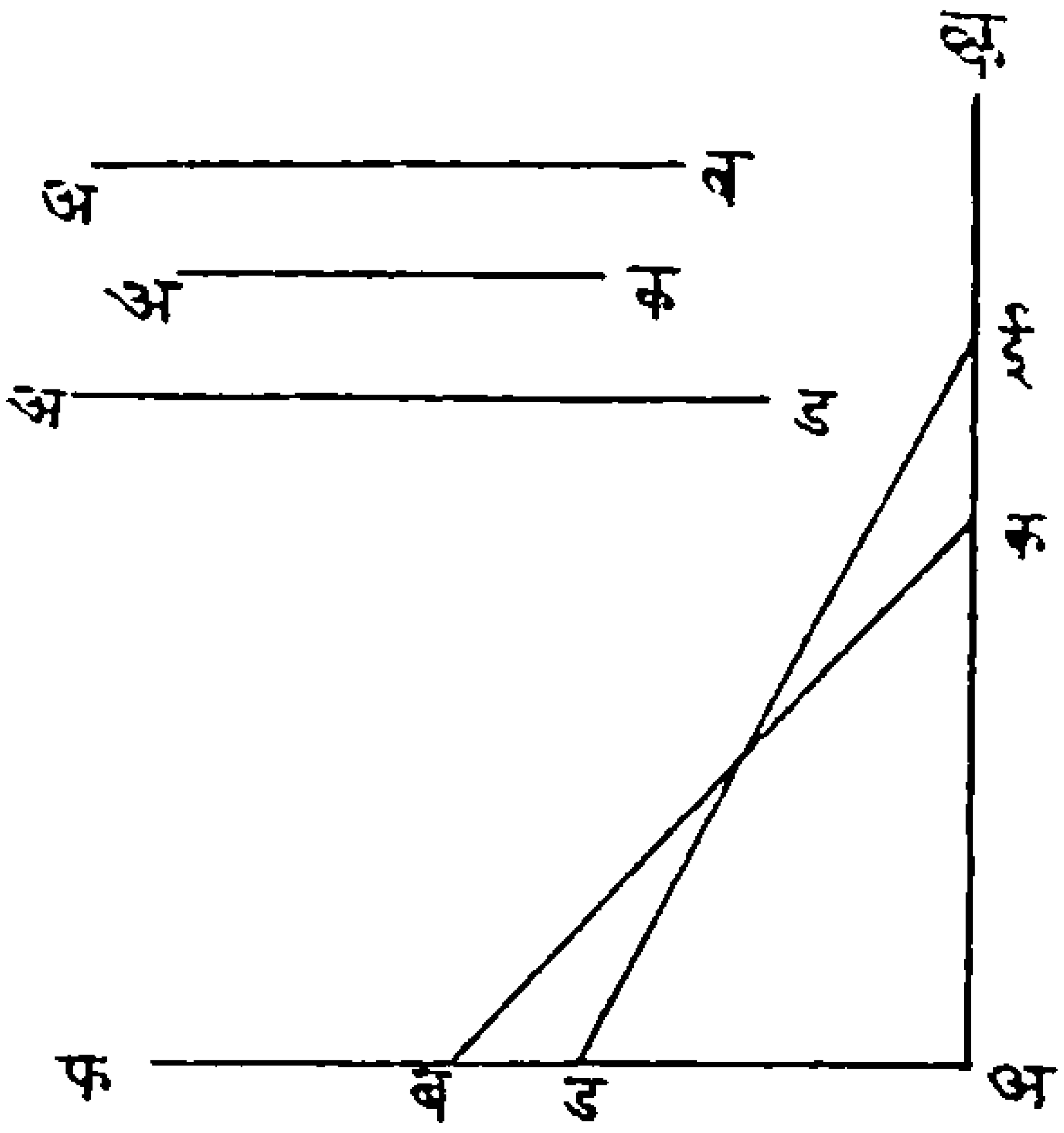
सांगीतल्ये बहुकोन आकृतीचे दोन कोन जसे **डओ, कओ** रेघांनीं दुभाग, त्या रेघांचा **ओ** छेदन बिंदु तो बाहेरील वर्तुळाचा मध्य होईल, आणि **कओ, डओ** त्रिज्या होतील; ह्मणोन **ओब. ओई** इत्यादिक रेघा त्या बहुकोनाचे कोन बिंदूपर्यंत




कर. आतां **ओकड** त्रिकोणांत **क, ड** हे दोन कोन जे बहुकोनाचे **बकड, कडई** कोनांचे अर्धा बराबर आहेत ते परस्पर बराबर; याजकरितां (५सिं०प्र०) त्यांचे समोरच्या **कओ, डओ** बाजू परस्पर बराबर आहेत, ह्मणोन **ओकड** सम द्विबाजू त्रिकोण आहे; परंतु **ओकड, ओकब** या दोन त्रिकोणांत एकाचा **ओक, कड** बाजू आणि त्यांचे आंतील **क** कोन दुसऱ्याचे **ओक, कब** बाजूंचे आणि त्यांचे आंतील **क** कोनाचे बराबर आहेत; याजकरितां (१सिं०प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत; आणि त्यांचा तिसऱ्याही **बओ. ओड** बाजू परस्पर बराबर आहेत. या रीतीनेंच दाखविलें जातें कीं **ओअ. ओब. ओक, ओड, ओई** या सर्व रेघा परस्पर बराबर आहेत, याजकरितां **ओ** मध्य करून **ओअ** त्रिज्येनें वर्तुळ केल्यास त्याचा परिघ बहुकोनाचे **अ, ब, क** इत्यादिक कोन बिंदूंचे पार जाईल, आणि तें त्या बहुकोन आकृतीचे भोंवती संलग्न इच्छिलें वर्तुळ होईल, हें सिद्ध.

# चौतिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये दोन अथवा त्यांहून अधिक चौरसांचे बराबर एक चौरस करायाचें.




सांगीतल्ये चौरसांचा बाजू अब, अक बराबर असतील तर कोणत्या ही अफ, अक दोन रेघा परस्परांवर लंब कर. आणि त्यांजवर सांगीतल्ये चौरसांचा अब, अक बाजू ठेव, नंतर बक सांध; ह्मणजे बक रेघेवर चौरस केल्यास तें (३४ सि० प्र०) अब, अक या रेघांवरील दोन चौरसांचे बराबर होईल.

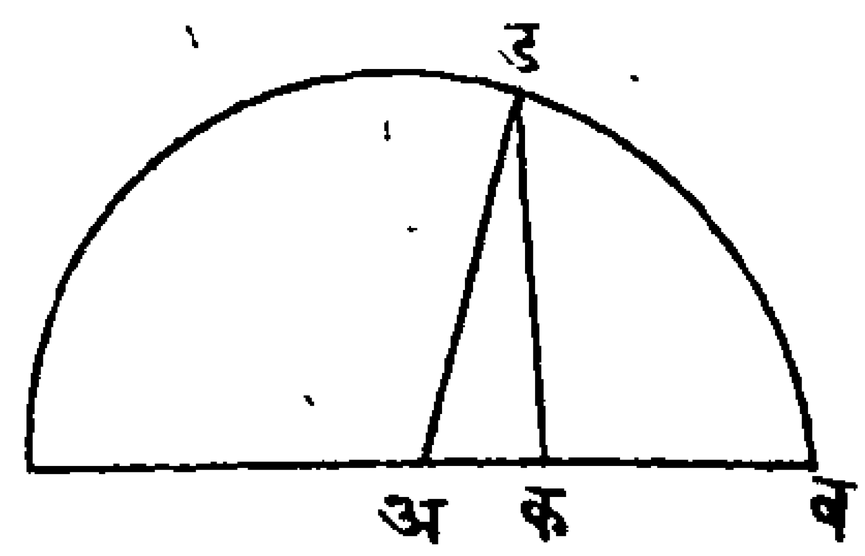
याच रीतीनें तीन अथवा त्यांहून अधिक चौरसांचे बेरिजे बराबर एक चौरस करितां येईल.

ह्मणोन जर अब, अक, अड या तीन रेघा सांगीतल्ये तीन चौरसांचा बाजू असतील तर पूर्व दोन चौरसांचे बेरिजे बराबर चौरसाचे बक बाजू बराबर एक रेघेवर अई कर, आणि राहिल्ये तिसऱ्ये चौरसाची अड बाजू दुसऱ्ये रेघेवर ठेव. आणि डई सांध. तर डई रेघेवर चौरस केल्यास स्पष्ट दिसतें कीं तें (३४ सि० प्र०) अब, अक, अड या रेघांवरील तीन चौरसांचे बेरिजे बराबर होईल. आणि याच प्रमाणें अधिक चौरसांचे ही हें सिद्ध.

# पसतिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये दोन चौरसांचे वजाबाकी बराबर एक चौरस करायाचें.

अब, अक, रेषा एक सरळरेषेंत केल्या त्या सांगीतल्ये दोन चौरसांचा बाजू असतील. तर अ मध्य करून अब त्रिज्येनें एक अर्धवर्तुळ कर, नंतर अब वर कड लंब कर, असा कीं परिघास ड स्थळीं मिळेल.

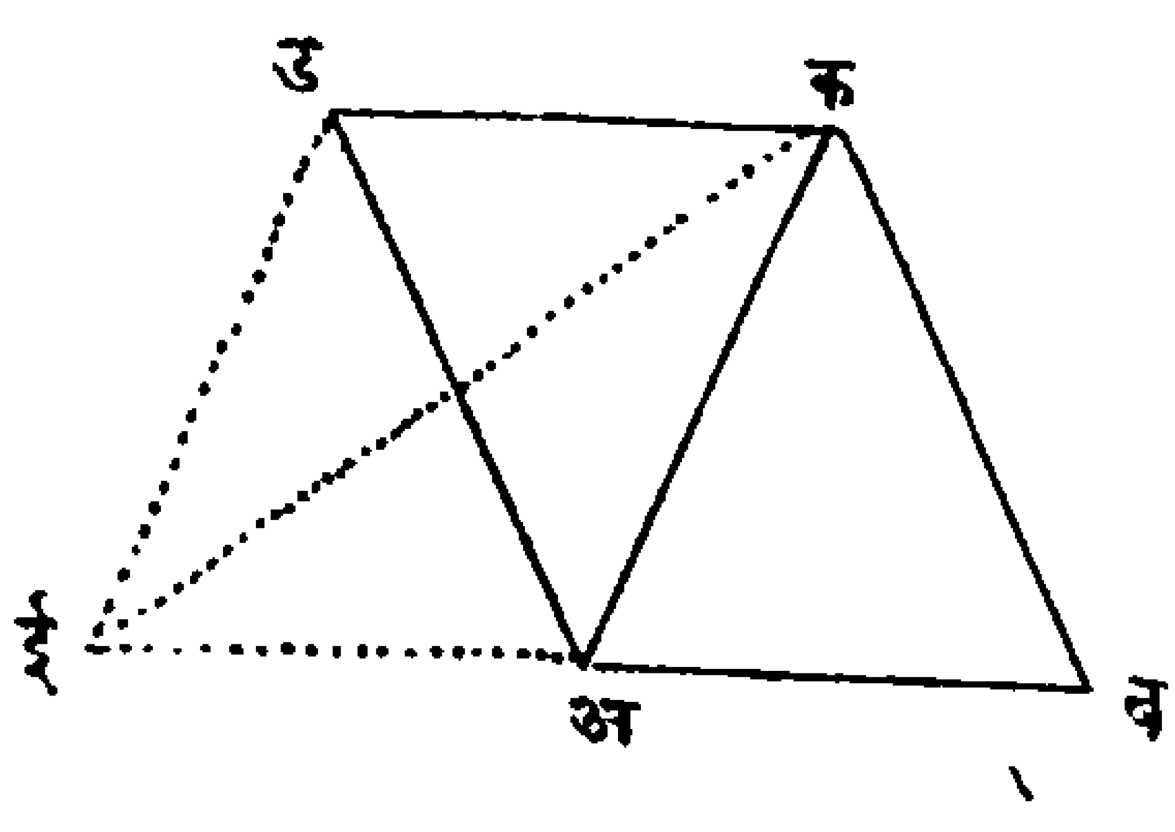



तर कड वर चौरस केल्यास (३४ सि॰ कु॰ प्र॰) त्याचें= अडे-अके अथवा अबे-अके हें दछिलें चौरस होईल हें सिद्ध.

# छत्तिसावें कृत्य.

कोणत्याही सांगीतल्ये अ, ब, क, ड चौकोनाचे बराबर एक त्रिकोण करायाचें.

अबकड सांगीतल्ये चौकोनांत अक कर्णरेघ कर. आणि त्या कर्णरेघेशीं समांतर डई कर, अशीकीं अब रेघ वाढवून तिला ई स्थळीं मिळेल. नंतर कई सांध, ह्मणजे कईब त्रिकोण अबकड चौकोनाचे बराबर होईल.

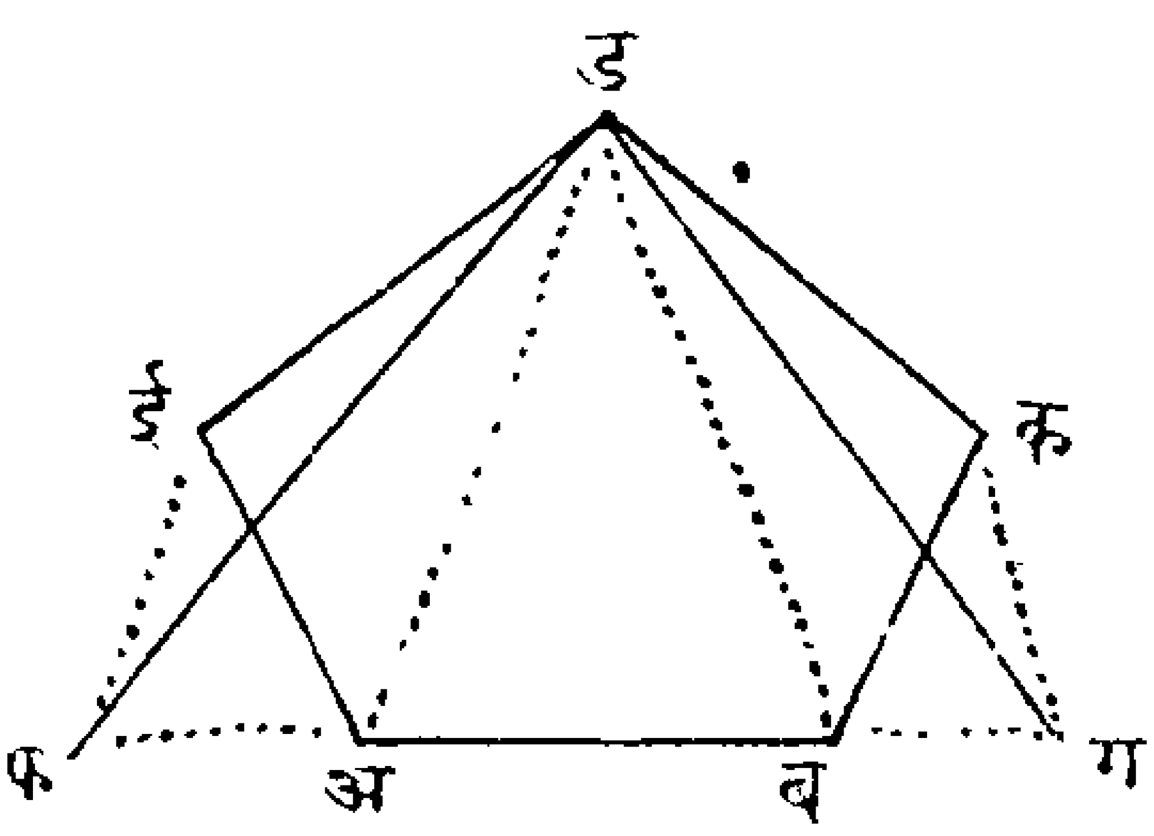


ह्मणोन अकई, अकड हे दोन त्रिकोण एकच अक पायावर अक. डई या समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें आहेत. ते (२५ सि०प्र०) परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां त्यांस प्रत्येकीं अबक त्रिकोण मेळविल्यास (२प्र०प्र०) बकई. अबकड चे बराबर होईल. हें सिद्ध.

## सतातिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये अबकडई पंच कोणावर एक त्रिकोण करायाचें.

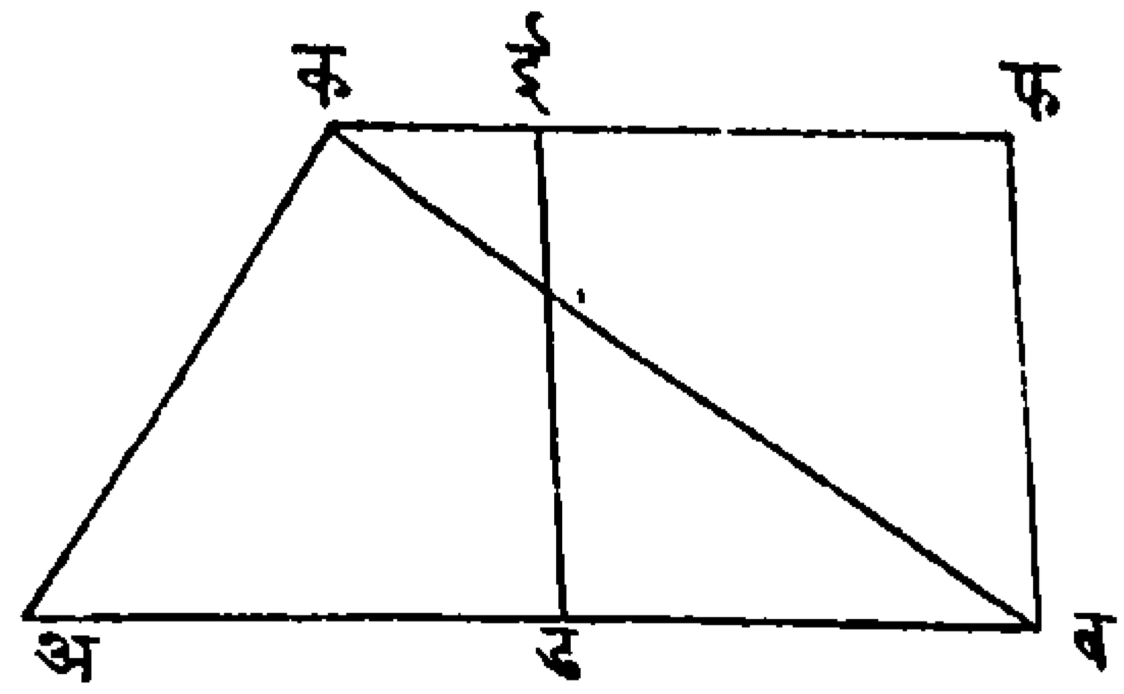
डअ, डब सांध, अड शीं समांतर ईफ कर, आणि डब शीं समांतर कग कर, अशा कीं अब वाढवून तिला फ, ग स्थळीं मिळतील, नंतर डफ, डग सांध, ह्मणजे डफग त्रिकोण अबकडई सांगीतल्ये पंचकोणा बराबर होईल.




ह्मणोन (२५ सि०प्र०) डफअ त्रिकोण=डईअ त्रिकोण आणि डगब त्रिकोण=डकब त्रिकोण आहे. याजकरितां या दोन दोन बरोबऱ्यांस डअब मिळवून (२प्र०प्र०) त्यांची बेरीजही बराबर होईल. ह्मणजे डअब+डअफ+डबग=डअब+डअई+डबक ह्मणजे डफग त्रिकोण अबकडई पंचकोणाचे बराबर आहे. हें सिद्ध.

## अठतिसावें कृत्य.

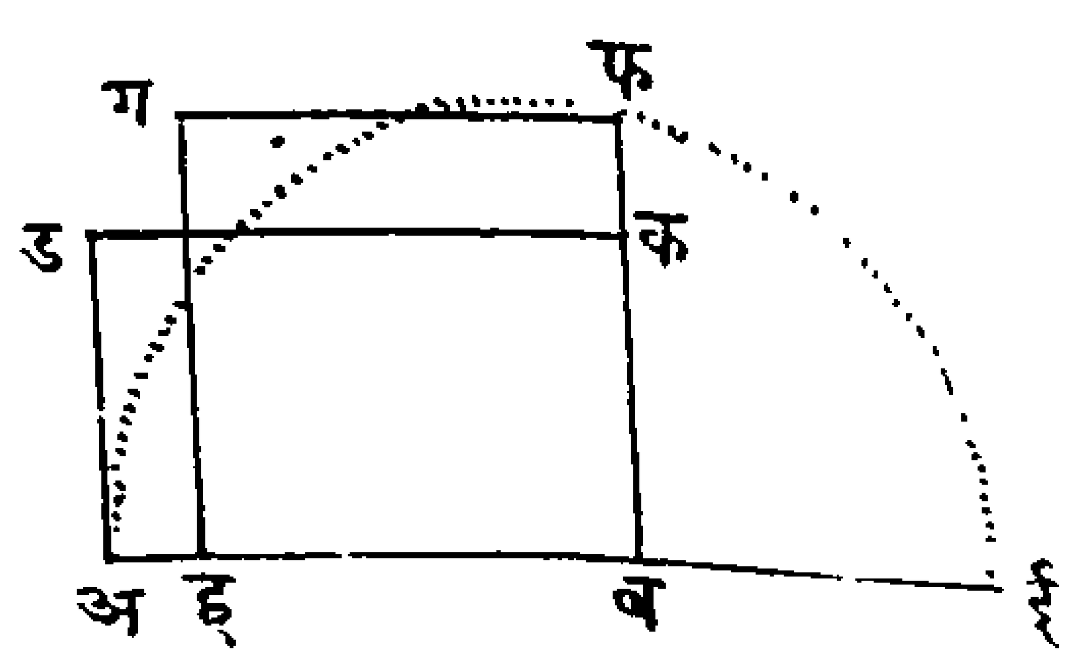
सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर एक काटकोन चौकोन करायाचें.




अब पायास ड स्थळीं दुभाग, नंतर डई, बफ हे दोन अब वर लंब कर, असें कीं अब शीं समांतर कफ करून तिजला ई, फ या दोन स्थळीं मिळतील, तर (२६ सि० २ कु० प्र०) डफ काटकोन चौकोन सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर होईल हें सिद्ध.

## एकुणचाळिसावें कृत्य.

सांगीतल्ये अबकड काटकोन चौकोनाचे बराबर एक चौरस करायाचें.




सांगीतल्ये काटकोन चौकोनाची एक अब बाजू ई पर्यंत वाढीव, अशी कीं बई त्याचे दुसऱ्ये बक बाजू बराबर होईल, नंतर अई व्यास जाणून त्याजवर अर्धवर्तुळ कर, बक वाढीव, अशी कीं, परिघास फ स्थळीं मिळेल, तर (८७ सि० कु० प्र० आणि ७७ सि० प्र०) बफ बाजूवर बफगह चौरस सांगीतल्ये अबकड काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल हें सिद्ध.

समाप्त.